С. Л. Соболев, Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными, *Матем. сб.*, 1931, том 38, 107–147

Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными

С. Л. Соболев (Ленинград)

Глава первая

§ 1. В настоящем исследовании мы займемся выводом некоторого достаточного условия для того, чтобы данная система уравнений с частными производными по двум независимым переменным имела аналитическое решение, подчиненное весьма общего вида начальным заданиям.

По самой сути задачи необходимое условие в данном случае будет зависеть не только от вида системы и способа выбора начальных заданий, но также и от того, какие функции в этих заданиях взяты. При требовании не налагать ограничений на эти функции наши условия являются наиболее широкими из известных до сих пор.

Н. М. Гюнтером был разобран случай одного уравнения второго порядка, и выяснено условие, при котором это уравнение имеет решение, в котором $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ при $y=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ при $x=0$ [1]. Мы займемся распространением его метода на некоторые более общего вида системы.

Ограничимся пока уравнениями 1-го порядка с числом неизвестных, равным числу уравнений, и попробуем выяснить условия, при которых система имеет такое решение, где одни из неизвестных функций обращаются в нуль при $x=0$, а другие при $y=0$. Впоследствии мы расширим наше исследование, перейдя к заданиям более общего вида.

Разобьем наши неизвестные функции на два класса: $v_1, v_2, \ldots, v_m$; $w_1, w_2, \ldots, l_l$ и положим, что неизвестные v_i обращаются в нуль при $x=0$, а неизвестные w_j обращаются в нуль при $y=0$. Случаи, когда одна из этих групп отсутствует, представляет собой известный случай Ковалевской, и тогда решение, как известно, существует. Однако в дальнейшем мы можем не исключать его из нашего рассмотрения.

Общий вид нашей системы в предположении, что число уравнений в точности равно числу неизвестных функций, будет:

$$f_k\left(x,\ y,\ \frac{\partial v_i}{\partial x},\ \frac{\partial v_i}{\partial y},\ \frac{\partial w_i}{\partial x},\ \frac{\partial w_j}{\partial y}\cdot v_i,\ w_j\right)=0,\quad k=1,\ 2,\ldots,(m+l).$$

---

[1] Об аналитических решениях уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,y}=f\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ «Мат. сборник», т. 32, вып. I, стр. 26.

В разложении искомого нами решения в тэйлоровский ряд v_i не будет содержать членов, не зависящих от x, а w_j — членов, не зависящих от y. Для определенности такого решения нужно предположить, что система уравнений

$$f_k\left(0,\ 0,\ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_0,\ 0,\ 0\ \left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)_0,\ 0,\ 0\right)=0,\quad k=1,\ 2,\ldots,(m+l)$$

допускает определенное решение относительно $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)_0$.

Условимся считать, что определитель:

$$\left\{\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{m+l})}{D\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v_m}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}, \frac{\partial w_2}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w_l}{\partial y}\right)}\right\}_0 \text{ не равен нулю.}$$

Выделяя главные члены в каждом уравнении, даем системе вид:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1^{(j)}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\beta_1^{(j)}\frac{\partial v_1}{\partial y}+\alpha_2^{(j)}\frac{\partial v_2}{\partial x}+\beta_2^{(j)}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\ldots+\beta_m^{(j)}\frac{\partial v_m}{\partial y}+\varepsilon_1^{(j)}\frac{\partial w_1}{\partial x}+\\&+\delta_1^{(j)}\frac{\partial w_1}{\partial y}+\ldots+\delta_l^{(j)}\frac{\partial w_l}{\partial y}+F_j=0,\ j=1,\ 2,\ldots,(m+l)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где начальные значения производных от F_j по всем производным от неизвестных функций равны нулю.

Продиференцировав теперь $n-1$ раз систему (1), мы получим уравнение для вычисления начальных значений производных порядка n по производным порядка $n-1$. Если бы такое вычисление оказалось возможным при всяком n, то мы могли бы, благодаря пассивности системы, составить ряды, формально ей удовлетворяющие. Для этого необходимо неравенство нулю при всяком n некоторого определителя, зависящего от n и играющего во всем дальнейшем первенствующую роль. Приступим к его вычислению.

Обращая внимание на то, что начальные значения производных от w, взятых по одному x, и производных от v по одному y — нули, мы после указанного диференцирования и подстановки начальных значений получим систему уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{m}\left(\alpha_s^{(j)}\frac{\partial^n v_s}{\partial x^{n-t}\,\partial y^t}+\beta_s^{(j)}\frac{\partial^n \vartheta_s}{\partial x^{n-t-1}\,\partial y^{t+1}}\right)+\\&+\sum_{r=1}^{l}\left(\varepsilon_r^{(j)}\frac{\partial^n w_j}{\partial x^{n-t}\,\partial y^t}+\delta_r^{(j)}\frac{\partial^n w_j}{\partial x^{n-t-1}\,\partial y^{t+1}}\right)+K_{jt}+=0\qquad \begin{aligned}&{\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,\,(m+l)}\\&{\scriptstyle t=0,\,1,\ldots,\,n-1}\end{aligned}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

где значки $(\ )_0$ для сокращения опущены, и функции K зависят лишь от начальных значений производных порядка $(n-1)$.

Определитель этой системы имеет вид: (см. стр. 109).

Как уже было сказано выше, неравенство его нулю есть необходимое условие возможности найти начальные значения производных порядка n. Оно является вместе с тем и достаточным условием для возможности составления определенных рядов Тэйлора для неизвестных функций. Если оно выполнено, то остается лишь исследование сходимости этих рядов, к которому мы и перейдем впоследствии.

$$
P'(u)=\left|\begin{array}{llllllll}
\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)}0\cdots000 & \alpha_2^{(1)}\beta_2^{(1)}0\cdots000 & \cdots & \alpha_m^{(1)}\beta_m^{(1)}0\cdots000 & \delta_1^{(1)}00\cdots000 & \delta_1^{(2)}00\cdots000 & \cdots & \delta_l^{(1)}00\cdots000 \\
0\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)}\cdots000 & 0\alpha_2^{(1)}\beta_2^{(1)}\cdots000 & \cdots & 0\alpha_m^{(1)}\beta_m^{(1)}\cdots000 & \varepsilon_1^{(1)}\delta_1^{(1)}0\cdots000 & \varepsilon_2^{(1)}\delta_2^{(1)}0\cdots000 & \cdots & \varepsilon_l^{(1)}\delta_l^{(1)}0\cdots000 \\
00\alpha_1^{(1)}\cdots000 & 00\alpha_2^{(1)}\cdots000 & \cdots & 00\alpha_m^{(1)}\cdots000 & 0\varepsilon_1^{(1)}\delta_1^{(1)}\cdots000 & 0\varepsilon_2^{(1)}\delta_2^{(1)}\cdots000 & \cdots & 0\varepsilon_l^{(1)}\delta_l^{(1)}\cdots000 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
000\cdots\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)}0 & 000\cdots\alpha_2^{(1)}\beta_2^{(1)}0 & \cdots & 000\cdots\alpha_m^{(1)}\beta_m^{(1)}0 & 000\cdots\delta_1^{(1)}00 & 000\cdots\delta_2^{(1)}00 & \cdots & 000\cdots\delta_l^{(1)}00 \\
000\cdots0\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)} & 000\cdots0\alpha_2^{(1)}\beta_2^{(1)} & \cdots & 000\cdots0\alpha_m^{(1)}\beta_m^{(1)} & 000\cdots\varepsilon_1^{(1)}\delta_1^{(1)}0 & 000\cdots\varepsilon_2^{(1)}\delta_2^{(1)}0 & \cdots & 000\cdots\varepsilon_l^{(1)}\delta_l^{(1)}0 \\
000\cdots00\alpha_1^{(1)} & 000\cdots00\alpha_2^{(1)} & \cdots & 000\cdots00\alpha_m^{(1)} & 000\cdots0\varepsilon_1^{(1)}\delta_1^{(1)} & 000\cdots0\varepsilon_2^{(1)}\delta_2^{(1)} & \cdots & 000\cdots0\varepsilon_l^{(1)}\delta_l^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_1^{(2)}\beta_1^{(2)}0\cdots000 & \alpha_2^{(2)}\beta_2^{(2)}0\cdots000 & \cdots & \alpha_m^{(2)}\beta_m^{(2)}0\cdots000 & \delta_1^{(2)}00\cdots000 & \delta_2^{(2)}00\cdots000 & \cdots & \delta_l^{(2)}00\cdots000 \\
0\alpha_1^{(2)}\beta_1^{(2)}\cdots000 & 0\alpha_2^{(2)}\beta_2^{(2)}\cdots000 & \cdots & 0\alpha_m^{(2)}\beta_m^{(2)}\cdots000 & \varepsilon_1^{(2)}\delta_1^{(2)}0\cdots000 & \varepsilon_2^{(2)}\delta_2^{(2)}0\cdots000 & \cdots & \varepsilon_l^{(2)}\delta_l^{(2)}0\cdots000 \\
00\alpha_1^{(2)}\cdots000 & 00\alpha_2^{(2)}\cdots000 & \cdots & 00\alpha_m^{(2)}\cdots000 & 0\varepsilon_1^{(2)}\delta_1^{(2)}\cdots000 & 0\varepsilon_2^{(2)}\delta_2^{(2)}\cdots000 & \cdots & 0\varepsilon_l^{(2)}\delta_l^{(2)}\cdots000 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
000\cdots\alpha_1^{(2)}\beta_1^{(2)}0 & 000\cdots\alpha_2^{(2)}\beta_2^{(2)}0 & \cdots & 000\cdots\alpha_m^{(2)}\beta_m^{(2)}0 & 000\cdots\delta_1^{(2)}00 & 000\cdots\delta_2^{(2)}00 & \cdots & 000\cdots\delta_l^{(2)}00 \\
000\cdots0\alpha_1^{(2)}\beta_1^{(2)} & 000\cdots0\alpha_2^{(2)}\beta_2^{(2)} & \cdots & 000\cdots0\alpha_m^{(2)}\beta_m^{(2)} & 000\cdots\varepsilon_1^{(2)}\delta_1^{(2)}0 & 000\cdots\varepsilon_2^{(2)}\delta_2^{(2)}0 & \cdots & 000\cdots\varepsilon_l^{(2)}\delta_l^{(2)}0 \\
000\cdots00\alpha_1^{(2)} & 000\cdots00\alpha_2^{(2)} & \cdots & 000\cdots00\alpha_m^{(2)} & 000\cdots0\varepsilon_1^{(2)}\delta_1^{(2)} & 000\cdots0\varepsilon_2^{(2)}\delta_2^{(2)} & \cdots & 000\cdots0\varepsilon_l^{(2)}\delta_l^{(2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_1^{(m+l)}\beta_1^{(m+l)}0\cdots000 & \alpha_2^{(m+l)}\beta_2^{(m+l)}0\cdots000 & \cdots & \alpha_m^{(m+l)}\beta_m^{(m+l)}0\cdots000 & \delta_1^{(m+l)}00\cdots000 & \delta_2^{(m+l)}00\cdots000 & \cdots & \delta_l^{(m+l)}00\cdots000 \\
0\alpha_1^{(m+l)}\beta_1^{(m+l)}\cdots000 & 0\alpha_2^{(m+l)}\beta_2^{(m+l)}\cdots000 & \cdots & 0\alpha_m^{(m+l)}\beta_m^{(m+l)}\cdots000 & \varepsilon_1^{(m+l)}\delta_1^{(m+l)}0\cdots000 & \varepsilon_2^{(m+l)}\delta_2^{(m+l)}0\cdots000 & \cdots & \varepsilon_l^{(m+l)}\delta_l^{(m+l)}0\cdots000 \\
00\alpha_1^{(m+l)}\cdots000 & 00\alpha_2^{(m+l)}\cdots000 & \cdots & 00\alpha_m^{(m+l)}\cdots000 & 0\varepsilon_1^{(m+l)}\delta_1^{(m+l)}\cdots000 & 0\varepsilon_2^{(m+l)}\delta_2^{(m+l)}\cdots000 & \cdots & 0\varepsilon_l^{(m+l)}\delta_l^{(m+l)}\cdots000 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
000\cdots\alpha_1^{(m+l)}\beta_1^{(m+l)}0 & 000\cdots\alpha_2^{(m+l)}\beta_2^{(m+l)}0 & \cdots & 000\cdots\alpha_m^{(m+l)}\beta_m^{(m+l)}0 & 000\cdots\delta_m^{(m+l)}00 & 000\cdots\delta_2^{(m+l)}00 & \cdots & 000\cdots\delta_l^{(m+l)}00 \\
000\cdots0\,\alpha_1^{(m+l)}\beta_1^{(m+l)} & 000\cdots0\alpha_2^{(m+l)}\beta_2^{(m+l)} & \cdots & 000\cdots0\alpha_m^{(m+l)}\beta_m^{(m+l)} & 000\cdots\varepsilon_1^{(m+l)}\delta_1^{(m+l)}0 & 000\cdots\varepsilon_2^{(m+l)}\delta_2^{(m+l)}0 & \cdots & 000\cdots\varepsilon_l^{(m+l)}\delta_l^{(m+l)}0 \\
000\cdots00\alpha_1^{(m+l)} & 000\cdots00\alpha_2^{(m+l)} & \cdots & 000\cdots00\alpha_m^{(m+l)} & 000\cdots0\varepsilon_1^{(m+l)}\delta_1^{(m+l)} & 000\cdots0\varepsilon_2^{(m+l)}\delta_2^{(m+l)} & \cdots & 000\cdots0\varepsilon_l^{(m+l)}\delta_l^{(m+l)}
\end{array}\right|
$$

§ 2. Условимся в некотором символическом обозначении. Будем обозначать знаком $A_l^{(k)}(n)$ таблицу содержащую n строк и $(n+1)$ столбцов:

$$A_l^{(k)}(n)=\left\|\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_l^{(k)} & \beta_l^{(k)}
\end{array}\right\|. \tag{3}$$

Знаком $B_l^{(k)}(n)$ обозначим такую же таблицу:

$$B_l^{(k)}(n)=\left\|\begin{array}{ccccccccc}
\varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon_l^{(k)} & \delta_l^{(k)}
\end{array}\right\|. \tag{4}$$

Знаком $\underline{A_l^{(k)}(n)}$ и $\underline{B_l^{(k)}(n)}$ назовем таблицы, получающиеся из $A_l^{(k)}(n)$ и $B_l^{(k)}(n)$ вычеркиванием 1-го столбца. Знаком $\overline{A_l^{(k)}(n)}$ и $\overline{B_l^{(k)}(n)}$ — таблицы, получающиеся из них же вычеркиванием последнего столбца. Кроме символов $\underline{\quad\ }$ и $\overline{\quad\ }$ рассмотрим еще два $\underset{\sim\sim\sim}{}$ и $\overset{\sim\sim\sim}{}$. Знаком $A(n)$ или $B(n)$ с волнистой чертой снизу мы будем обозначать таблицу, получающуюся после вычеркивания из соответствующей таблицы A или B первой строки, а такой же чертой сверху — последней строки. Эти знаки мы будем применять в качестве символов известных операций, совершаемых иногда одновременно и многократно. В этом смысле символы наши являются коммутативными. Отметим, что две черты, из которых одна простая, а другая волнистая, стоящие обе снизу или сверху от символа таблицы, могут быть взаимно сокращены, причем аргумент n, от которого зависит таблица, уменьшается на единицу: например $\overset{\sim\sim\sim}{\overline{\underline{A_1^{(1)}(n)}}}=\underline{A_1^{(1)}(n-1)}$.

Условимся понимать под символом

$$\left|\begin{array}{ccccc}
\overline{A_1^{(1)}(n)}, & \underline{\overline{A_2^{(1)}(n)}}, & \ldots, & \underline{B_{l-1}^{(1)}(n)}, & B_l^{(1)}(n)\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\overline{A_4^{(m+l)}(n)}, & \underline{\overline{A_2^{(m+l)}(n)}}, & \ldots, & \underline{B_{l-1}^{(m+l)}(n)}, & B_l^{(m+l)}(n)
\end{array}\right|$$

определитель, который получается, если все таблицы A и B заменить их выражениями (3) и (4), а затем уничтожить перегородки, считая каждый элемент таблицы (3) и (4) стоящим на соответственном месте вновь образованного определителя. Таблицы A и B, входящие в его состав, будем называть его квадрантами, а целый столбец или строку, составленные из них, — полосой вертикальной или горизонтальной.

Определитель $P'(n)$ запишется тогда:

$$P'(n)=\begin{vmatrix} \overline{A_1^{(1)}(n)}, & \overline{A_2^{(1)}(n)}, & \cdots, & \overline{A_m^{(1)}(n)}, & \underline{B_1^{(1)}(n)}, & \underline{B_2^{(1)}(n)}, & \cdots, & \underline{B_l^{(1)}(n)} \\ \overline{A_1^{(2)}(n)}, & \overline{A_2^{(2)}(n)}, & \cdots, & \overline{A_m^{(2)}(n)}, & \underline{B_1^{(2)}(n)}, & \underline{B_2^{(2)}(n)}, & \cdots, & \underline{B_l^{(2)}(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{A_1^{(m+l)}(n)}, & \overline{A_2^{(m+l)}(n)}, & \cdots, & \overline{A_m^{(m+l)}(n)}, & \underline{B_2^{(m+l)}(n)}, & \underline{B_2^{(m+l)}(n)}, & \cdots, & \underline{B_l^{(m+l)}(n)} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Это обозначение сократит нам выкладки впоследствии.

§ 3. Положим $P(n)=(-1)^{n\frac{(2m+l+1)l}{2}}P'(n)$ и займемся оценкой определителя $P(n)$. Докажем прежде всего теорему.

Теорема 1. *Определитель* P(n) *вместе с некоторыми* $2[\binom{m+l}{m}-1]$ *другими определителями удовлетворяет двум системам уравнений в конечных разностях, линейных с постоянными коэфициентами. Порядок каждой из этих систем равен* $\binom{m+l}{m}$. *Корни характеристических уравнений обеих систем совпадают и могут лишь переменить знак, если мы можем задавать некоторые другие* m *неизвестных функций на оси* y *и другие на оси* x. *Оба характеристические уравнения, совпадая между собой, остаются инвариантными для данной системы диференциальных уравнений при всевозможных ее линейных преобразованиях с определителем равным единице*[1].

Прежде чем, доказывать эту теорему введем некоторые обозначения. Рассмотрим таблицу:

$$M=\left\|\begin{matrix} \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} & \cdots\alpha_m^{(1)}\,\varepsilon_1^{(1)}\,\varepsilon_2^{(1)} & \cdots\varepsilon_l^{(1)}, & \beta_1^{(1)}\beta_2^{(1)} & \cdots\beta_m^{(1)}\,\delta_1^{(1)}\,\delta_2^{(1)} & \cdots\delta_l^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)} & \cdots\alpha_m^{(2)}\,\varepsilon_1^{(2)}\,\varepsilon_2^{(2)} & \cdots\varepsilon_l^{(2)}, & \beta_1^{(2)}\beta_2^{(2)} & \cdots\beta_m^{(2)}\,\delta_1^{(2)}\,\delta_2^{(2)} & \cdots\delta_l^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{(m+l)}\alpha_2^{(m+l)}\alpha_3^{(m+l)}\ldots & \alpha_m^{(m+l)}\,\varepsilon_1^{(m+l)}\,\varepsilon_2^{(m+l)}\ldots & \varepsilon_l^{(m+l)} & \beta_1^{(m+l)}\beta_2^{(m+l)}\ldots & \beta_m^{(m+l)}\,\delta_1^{(m+l)}\,\delta_2^{(m+l)}\ldots & \delta_l^{(m+l)} \end{matrix}\right\|$$

Обозначим знаком $\Delta\left(m,\ l;\ \begin{matrix} i_1 i_2\ldots i_s;\ h_1\ h_2\ldots,\ h_r \\ j_1 j_2\ldots j_s;\ f_1,\ f_2,\ldots\ f_r \end{matrix}\right)$ произведения $(-1)^{(h_1+h_2+\ldots+h_r)-(f_1+f_2+\ldots+f_r)-mr+\frac{(2m+l+1)}{2}}$ на определитель, составленный из тех столбцов M, в состав которых входят α_r имеющие все нижние значки кроме $h_1, h_2,\ldots,h_r$, и δ со всеми нижними значками кроме $j_1, j_2,\ldots,j_s$. Кроме того входят те столбцы, где номер ε равен $f_1, f_2,\ldots f_r$, и те, где номер β равен $i_1, i_2,\ldots,i_s$. Определитель того же вида, но без множителя ± 1, обозначим Δ' $(m,\ l;\ldots;\ldots)$ с соответствующими значками. Знаком $\Delta'(m,\ l)$ будем обозначать произведение $(-1)^{\frac{(2m+l+1)l}{2}}$ на определитель, составленный из тех столбцов M которые содержат α и δ, тот же определитель без множителя ± 1 назовем $\Delta'(m,\ l)$.

---

[1] См. Н. Гюнтер, стр. 31, где выведено уравнение (6) в конечных разностях для случая $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=F$.

Обозначим:

$$S'\left(n;\,{}^{i_1,\,i_1\ldots i_s}_{j_1,\,j_2\ldots\ldots j_s};\right)=\begin{vmatrix}\overline{A^{(1)}_1(n)},\ \overline{A^{(1)}_2(n)},\ldots\overline{A^{(1)}_{i_1-1}(n)},\ A^{(1)}_{i_1}(n),\ \overline{A^{(1)}_{i_1+1}(n)},\ldots\overline{A^{(1)}_m(n)},\\ ,\underline{B^{(1)}_1(n)},\ \underline{B^{(1)}_2(n)}\ldots\underline{B^{(1)}_{j_1-1}(n)},\ \overline{\underline{B^{(1)}_{j_1}(n)}}\ldots\underline{B^{(1)}_l(n)}\\ \overline{A^{(2)}_1(n)},\ \overline{A^{(2)}_2(n)}\ldots\overline{A^{(2)}_{i_1-1}(n)},\ A^{(2)}_{i_1}(n),\ \overline{A_{i_1+1}(n)},\ \ldots\overline{A^{(2)}_m(n)},\\ ,\underline{B^{(2)}_1(n)},\ \underline{B^{(2)}_2(n)}\ldots\underline{B^{(2)}_{j_1-1}(n)},\ \overline{\underline{B^{(2)}_{j_1}(n)}}\ldots\underline{B^{(2)}_l(n)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overline{A^{(m+l)}_1(n)},\ \overline{A^{(m+l)}_2(n)},\ldots\overline{A^{(m+l)}_{i_1-1}(n)},\ A^{(m+l)}_{i_1}(n),\ \overline{A^{(m+l)}_{i_1+1}(n)},\ldots\overline{A^{(m+l)}_m(n)},\\ ,\underline{B^{(m+l)}_1(n)},\ \underline{B^{(m+l)}_2(n)},\ldots\underline{B^{(m+l)}_{j_1-1}(n)},\ \underline{B^{(m+l)}_{j_1}(n)},\ldots\underline{B^{(m+l)}_l(n)}\end{vmatrix}$$

и аналогично $S'(n;\,;{}^{h_1,\,h_2,\ldots h_r}_{f_1,\,f_2\ldots f_r})$, — определитель, составленный из всех квадрантов таким образом, что все A входят с верхней чертой, а $A(n)$ со значком h внизу и с нижней чертой. Квадранты B входят с нижней чертой за исключением тех, которые имеют нижний значок f_i; эти последние входят вообще без черты. Кроме того $S'(n;\,{}^{i_1,\,i_2\ldots i_s.h_1;\,h_2,\ldots h_r}_{j_1,\,j_2\ldots j_s.\,f_1;\,f_2\ldots f_r})$ пусть будет такой же определитель, в котором квадранты A со значком, отличным от i_k, входят с верхней чертой, а A со значком i_k — без верхней черты, A с нижним значком h_k входят с нижней чертой. Квадранты B входят с нижней чертой кроме тех, которые имеют нижний значок f_k; те из них, у которых нижний значок равен j_k, имеют кроме того еще верхнюю черту.

Положим теперь:

$$S\left(n;\,{}^{i_1,\,i_2,\ldots i_s;\,h_1,\,h_2,\ldots h_r}_{j_1,\,j_2,\ldots j_s,\,f_1,\,f_2,\ldots f_r}\right)=$$

$$=(-1)^{n}\,{}^{\left[(i_1+i_2+i_s)+(h_1+\ldots h_r)+\frac{(m+l+1)l}{2}-ms-mr-(j_1+\ldots+j_s)-(f_1+\ldots+f_r)\right]+(j_1+\ldots+j_s)+(f_1+\ldots+f_r)+r}$$

$$.\,S\left(n;\,{}^{i_1,\,i_2,\ldots i_s.h_1,\,h_2,\ldots h_r}_{j_1,\,j_2\ldots j_s.\,f_1,\,f_2\ldots f_r}\right).\qquad(6)$$

Системы уравнений, о которых говорит теорема, связывают

$$P(n)\ \text{с}\ S(n;\,{}^{i_1,\,i_2,\ldots i_s}_{j_1,\,j_2\ldots j_s};)\ \text{и}\ P(n)\ \text{с}\ S(n;\,;{}^{h,\,h_2,\ldots h_r}_{f_1,\,f_2\ldots f_r}).$$

Доказательство теоремы легко провести, применяя теорему Лапласа к минорам последних или соответственно первых строк всех горизонтальных полос этих определителей.

Для получения первой из этих систем рассмотрим последние строки каждой полосы.

В этих строках стоят очевидно элементы некоторых столбцов таблицы M, а именно все δ кроме тех, у которых нижний значок совпадает с одним из чисел $j_1, j_2, \ldots, j_s$, все α и ε и наконец из β только те, значок которых равен одному из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_s$. Очевидно, что миноры этих столбцов представляют собою некоторые $\Delta\ (m;\ l;\ {}^{l_1,\,l_2\ldots l_s.h_1,\,h_2\ldots h_r}_{j_1,\,j_2\ldots j_s;\,f_1,\,f_2\ldots f_r})$, где числа h и f могут быть совершенно произвольными.

Докажем формулы:

$$P'(n) = (\pm 1)\, \Delta'(m;\, l)\, P'(n) + \sum_{h,\,f,\,r} (\pm 1)\, \Delta'(m;\, l;\ ;\ {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r})\, S'(n-1;\, {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r};)$$

и

$$S'(n;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s};) = (\pm 1)\, \Delta\left(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s}\right) S(n-1;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s};) +$$

$$+ \sum_{h,\,f,\,r} (\pm 1)\, \triangle'(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s,\, h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{i_1,\, j_2 \ldots j_s;\, f_1,\, f_2 \ldots f_r})\, S'(n;\, {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r};).$$

Чтобы показать соответствие второй системы значков у Δ с первой системой, во втором множителе отметим, что сохранение некоторого α_g со значком, отличным от $h_1, h_2 \ldots h_r$, при образовании первого множителя, именно, равносильно вычеркиванию в соответствующем $\overline{\widetilde{A_g(n)}}$ последнего столбца (после вычеркивания всех столбцов β все квадранты $A(n)$ переходят в $\overline{\widetilde{A(n)}}$,) и следовательно обращает его в $\overline{A(n-1)}$.

Аналогично сохранение ε_f равносильно вычеркиванию из соответствующего B того же последнего столбца и следовательно прибавляет ему знак $\overline{}$. Отсюда и вытекает справедливость наших формул.

Переходим теперь к вычислению значения ± 1. Для этого представим себе мысленно каждый из $\Delta(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s},\ {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r})$ разложенным в свою очередь по теореме Лапласа по минорам первых m строк.

Если бы мы могли получить знак, с которым входит в нашу формулу произведение $S'(n-1;\, {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r};)$ на некоторый положительный член этого разложения, то задача была бы решена, так как этот знак, как легко проверить совпадет с искомым. Но это определение может быть проведено фактически, если мы разобьем отыскание знака на два приема. Сначала возьмем из $S'(n;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s};)$ определитель, сопряженный с одним из множителей упомянутого положительного члена в разложении $\Delta'(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s},\ {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r})$, и определим знак, ему соответствующий, а затем повторим операцию, вычеркнув строки и столбцы соответствующие другому множителю.

В качестве положительного члена в разложении $\Delta'(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s};\ {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r})$ возьмем произведение минора первых m строк и m столбцов на сопряженный. Легко заметить, что столбцы этого сопряженного минора представляют собою как раз крайние правые столбы в каждом квадранте определителя S, не имеющем черты сверху. Знак, с которым будет входить произведение

$$\Delta'(m;\, l;\, {}^{i_1,\, i_2 \ldots i_s}_{j_1,\, j_2 \ldots j_s},\ {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f_r})\ S'(n-1;\, {}^{h_1,\, h_2 \ldots h_r}_{f_1,\, f_2 \ldots f};)$$

в нашу формулу, равен произведению знака, с которым нужно взять произведение этого сопряженного минора на определитель:

$$\tau(n)=\begin{vmatrix}
\overline{A_1^{(1)}(n)}, & \overline{A_2^{(1)}(n)}, & \dots\overline{A_m^{(1)}(n)}, \\
\overline{B_1^{(1)}(n)}, & \overline{B_2^{(1)}(n)}, & \dots\overline{B_l^{(1)}(n)} \\
\overline{A_1^{(2)}(n)}, & \overline{A_2^{(2)}(n)}, & \dots\overline{A_m^{(2)}(n)}, \\
\overline{B_1^{(2)}(n)}, & \overline{B_2^{(2)}(n)}, & \dots\overline{B_l^{(2)}(n)} \\
\dots & \dots & \dots \\
\overline{A_1^{(m)}(n)}, & \overline{A_2^{(m)}(n)}, & \dots\overline{A_m^{(m)}(n)}, \\
\overline{B_1^{(m)}(n)}, & \overline{B_2^{(m)}(n)}, & \dots\overline{B_l^{(m)}(n)} \\
A_1^{(m+1)}\overline{(n-1)}, & A_2^{(m+1)}\overline{(n-1)}, & \dots A_m^{(m+1)}\overline{(n-1)}, \\
\underline{B_1^{(m+1)}(n-1)}, & \underline{B_2^{(m+1)}(n-1)}, & \dots\underline{B_l^{(m+1)}(n-1)} \\
A_1^{(m+2)}(n-1), & A_2^{(m+2)}(n-1), & \dots A_m^{(m+2)}(n-1), \\
\underline{B_1^{(m+2)}(n-1)}, & \underline{B_2^{(m+2)}(n-1)}, & \dots\underline{B_l^{(m+2)}(n-1)} \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
A_1^{(m+l)}(n-1), & A_2^{(m+l)}(n-1), & \dots A_m^{(m+l)}(n-1), \\
\underline{B_1^{(m+l)}(n-1)}, & \underline{B_2^{(m+l)}(n-1)}, & \dots\underline{B_l^{(m+l)}(n-1)}
\end{vmatrix}$$

в определителе $S'(n;\,{}^{i_1,\,i_2\dots i_s}_{j_1,\,j_2\dots j_s};)$ на знак, с которым войдет произведение нашего минора на $S'(n-1;\,{}^{h_1,\,h_2\dots h_r}_{f_1,\,f_2\dots f_r})$ в определителе $\tau(n)$, развернутом по строкам $n,\ 2n,\dots,mn$.

Заметив это, перепишем наши формулы:

$$P'(n)=(-1)^Y\Delta'(m;l)\,P'(n-1)+\sum_{h,f,r}(-1)^{X+Y}\Delta'(m;l;\,;{}^{h_1,\,h_2\dots h_r}_{f_1,\,f_1\dots f_r})\,S'(n-1;\,{}^{h_1,\,h_2\dots h_r}_{f_1,\,f_2\dots f_r};)$$

$$S'(n;\,{}^{i_1,\,i_2\dots i_s}_{j_1,\,j_2\dots j_s};)=(-1)^Y\Delta'(m;\,l;\,{}^{i_1,\,i_2\dots i_s}_{j_1,\,j_2\dots j_s};)\,P'(n-1)+$$

$$+\sum_{h,f,r}(-1)^{X+Y}\Delta'(m;\,l;\,{}^{i,\,i_2\dots i_s}_{j_1,\,j_2\dots j_s};\,{}^{h_1,\,h_2\dots i_r}_{f,\,f_2\dots h_r})\,S'(n-1;\,{}^{h_1,\,h_2\dots h_r}_{f_1,\,f_2\dots f_r};),$$

где, как легко видеть, Y зависит лишь от n, i_1, i_2, i_s; j_1, $j_2,\dots j_s$, а X зависит лишь от n; h_1, $h_2,\dots h_r$; f_1, $f_2,\dots f_r$.

Если подсчитывать знаки X и Y, вспомнив, что знак, с которым входит произведение какого-либо минора на сопряженный, равен (-1) в степени числа, равного сумме номеров всех столбцов и всех строк какого-либо из них, то мы получим следующие равенства:

$$Y=n\,\frac{(2m+l+1)l}{2}+ni_1+1+ni_2+2+\dots+ni_s+s+[mn+s+n]+$$
$$+[mn+s+2n]+\dots+[mn+s+(j_1-1)\,n]+[mn+s+(j_1+1)\,n-1]+$$
$$+[mn+s+(j_1+2)\,n-1]+\dots+[mn+s+(j_s-1)\,n-s+1]+$$
$$+[mn+s+(j_s+1)\,n-s]+\dots+[mn+s+ln-s]=$$
$$=n\,[(i_1+i_2+\dots+i_s)-ms-(j_1+j_2+\dots+j_s)]+(j_1+j_2+\dots+j_s)$$

и

$$X = n + 2n + 3n + \dots + mn + n + 2n + \dots + (h_1 - 1)n +$$
$$+ (h_1 + 1)n + \dots + (h_2 - 1)n + (h_2 + 1)n + \dots + mn + [mn + f_1(n-1)] +$$
$$+ [mn + f_2(n-1)] + \dots + [mn + f_r(n-1)] =$$
$$= n\{mr + (f_1 + f_2 + \dots + f_r) - (h_1 + h_2 + \dots + h_r)\} - (f_1 + f_2 + \dots + f_2).,$$

Вспомнив формулы, связывающие $\varDelta'$ с $\varDelta$ и S' с S, получим вспоминая, что P есть S без значков), следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} P(n) &= \varDelta(m; l)\, P(n-1) + \sum_{h,f,r} \varDelta(m; l; ;{}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r})\, S(n-1; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r};) \\ S(n; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s};) &= \varDelta(m; l; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s};)\, P(n-1) + \\ &+ \sum_{h,f,r} \varDelta(m; l; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s}; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r}\, S(n-1; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r}), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Совершенно аналогично, прилагая теорему Лапласа к тем строкам определителя $S'(n; ; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s})$, номера которых при делении на n дают в остатке единицу, получим сначала формулу:

$$S'(n; ; {}^{i_1, i_2, \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s}) = (-1)^Z \varDelta'(m; l; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s})\, P'(n-1) +$$
$$+ \sum_{h,f,r} (-1)^{Z+U} \varDelta'(m; l; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r}, {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s})\, S'(n-1; ; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r}),$$

где:

$$Z = n\left\{m + \frac{m(m-1)}{2}\right\} + 1 + (n+1) + (2n+1) + \dots [(i_1 - 2)n + 1] +$$
$$+ i_1 n + (i_1 + 1)n + \dots + [i_s n - (s-1)] + \dots + [(m-1)n - (s-1)] +$$
$$+ [mn - s + (j_1 - 1)n + 1] + [mn - s + (j_2 - 1)n + 2] + \dots +$$
$$+ [mn - s + (j_s - 1)n + s] =$$
$$= -\{(n-1)[(i_1 + \dots i_2 + \dots i_s) - (j_1 + j_2 + \dots + j_s) - ms] - (j_1 + j_2 + \dots + j_s) + s\}$$

и

$$U = [(h_1 - 1)(n-1) + 1] + [(h_2 - 1)(n-1) + 1] + \dots + [(h_r - 1)(n-1) + 1] +$$
$$+ [(n-1)m + 1] + [(n-1)m + n + 1] + \dots + [(n-1)m + (f_1 - 2)n + 1] +$$
$$+ [(n-1)m + f_{n_1} + n\, 1\, [(n-1)m + (f_1 + 1)n + 1] + \dots + [(n-1)m + (f_r - 2)$$
$$n + 1 + [(n-1)m + n + 1] + \dots + [(n-1)m + (l-1)n + 1 + n\frac{(2m + l + 1)}{2} l =$$
$$= (n-1)[(h_1 + h_2 + \dots + h_r) - (f_1 + f_2, + \dots + f_r) - mr] - (f_1 + f_2 \dots + f_r) + r,$$

откуда, переходя опять к $\varDelta$, P и S от $\varDelta'$, P' и S', получим:

$$\left.\begin{aligned} P(n) &= \varDelta(m; l)\, P(n-1) + \sum_{h,f,r} \varDelta(m; l; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r};)\, S(n-1; ; {}^{h_1, h_2, \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r};) \\ S(n; ; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s}) &= \varDelta(m; l; ; {}^{i_1, i_2 \dots i_s}_{j_1, j_2 \dots j_s})\, P(n-1) + \\ &+ \sum_{h,f,r} \varDelta(m; l; ; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r}, {}^{i_1, i_2, \dots i_s}_{j_2, j_2 \dots j_s})\, S(n-1; ; {}^{h_1, h_2 \dots h_r}_{f_1, f_2 \dots f_r} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Равенства (7) и (8) и являются теми системами уравнений, существование которых требовалось установить.

Остается доказать независимость характеристических уравнений обеих систем (которые очевидно совпадают) от того, какие m неизвестных функций задаются на оси y и какие l на оси x, и показать инвариантность систем по отношению к любым преобразованиям системы (1) с определителем, равным единице.

Для доказательства первого утверждения заметим, что в характеристическом уравнении роли α и ε совершенно симметричны, равно как и роли β и δ. Это можно заметить из того, что показатель при (-1), входящий в $\Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{i_1, i_2, \ldots i_s}{j_1, j_2, \ldots j_s}; \genfrac{}{}{0pt}{}{h_1, h_2, \ldots h_r}{f_1, f_2, \ldots f_r})$, равен в точности сумме номеров тех α и ε, которые не входят в данный определитель, если все α и ε занумеровать подряд. Всякое преобразование системы в смысле замены α на ε, если мы условимся приписывать тот же порядок неизвестным функциям, будет очевидно менять лишь строки и столбцы определителя, являющегося характеристическим уравнением. (Сохранение порядка неизвестных функций на первый взгляд может изменить знаки у коэфициентов разложения, так как кажется, что числа столбцов квадрантов не будут совпадать, но легко добиться прежнего соотношения, переставляя например лишние первые столбцы на пустые места для вывода первых формул и последние столбцы — для вывода вторых. Подробнее мы разовьем этот прием при оценке миноров определителя).

Инвариантность характеристического уравнения вытекает из того, что при линейных преобразованиях с определителем, равным единице, и сходной системы уравнений таблица M испытывает то же преобразование с теми же коэфициентами своих строк, а при этом величина всех определителей $\Delta(m; l; \ldots)$ сохраняется.

Теорема таким образом доказана полностью.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим характеристическим уравнением, которое мы запишем для краткости:

$$D(m;\ l;\ z) = \left| \begin{array}{lcl} \Delta(m; l) - z & & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1};), \\ \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2};) & \cdots & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots};) \\ \Delta(m; l; ; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}), & & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}) - z, \\ \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}) & \cdots & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{2, 2, 3\ldots}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}) \\ \Delta(m; l; ; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}), & & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}), \\ \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}) - z & \cdots & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Delta(m; l; ; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}), & & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}), \\ \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}) & \cdots & \Delta(m; l; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}; \genfrac{}{}{0pt}{}{1, 2, 3\ldots}{1, 2, 3\ldots}) - z \end{array} \right| \tag{9}$$

§ 4. В дальнейшем нам придется оценивать миноры определителя P, которые мы сводим к изучению других определителей более общего типа, чем сами P и S. Изучение их мы проведем тем же приемом, который был применен нами для P и S, сводя его к изучению некоторых систем уравнений в конечных разностях.

Приступая к этому изучению миноров, мы вводим в рассмотрение $(m+l)\binom{m+l}{m+1}+(m+l)\binom{m+l}{m-1}$ новых определителей, доказав для них попутно интересующее нас утверждение.

Рассмотрим определитель из квадрантов A и B, составленный таким образом, что одна из строк, входящих в него, содерит знак $\sim\sim\sim$ и кроме того $(m+1)$-й столбец снабжен знаком $\overline{\qquad}$, а l знаком $\underline{\qquad}$. Этот определитель мы обозначим через $Q'''(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s\; j_{s+1}};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$. Значки $i_1, i_2, \dots i_s$ при этом соответствуют нижнему значку тех полос квадрантов A, которые не снабжены $\overline{\qquad}$; значки $j_1, j_2, \dots j_{s+1}$ соответствуют нижнему значку той полосы квадрантов B, которые имеют символ $\overline{\qquad}$; $h_1, h_2\dots h_r$ номера тех A, которые снабжены $\underline{\qquad}$ и $f_1 f_2, \dots f_r$ номера тех B, которые знака $\underline{\qquad}$ не имеют. Номер t указывает номер строки со значком $\sim\sim\sim$. Вводим в рассмотрение еще определитель $R'''(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2\dots h_r, h_{r+1}}_{f_1, f_2\dots f_r})$, в котором строка с номером t имеет знак $\sim\sim\sim$, m столбцов имеют знак $\overline{\qquad}$ и $l+1$ столбцов имеют знак $\underline{\qquad}$.

Обозначение это понятно без дальнейших пояснений, как аналогичное выбранному для $Q'''(n,t;)$.

Переходя к исследованию свойств Q''' и R''', мы сначала изменим знак у них путем различных перестановок столбцов и введения новых строк и столбцов с целью придать им форму, непосредственно удобную для вычислений.

Из определителей Q''' и R''' мы получим определители Q'' и R'' простой перестановкой столбцов, причем значки сохраняются те же самые. Именно: определитель $Q''(n,t;{}^{i_1, i_2, \dots, i_s}_{j_1, j_2, \dots, j_s, j_{s+1}};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$ получается, если мы те столбцы соответствующего определителя Q''', которые являются первыми в квадрантах B, не снабженных чертой снизу, припишем в качестве первых в квадранты A, снабженные этой чертой. Аналогично определители R'' получаются из R''' перестановкой последних столбцов в квадрантах A, не снабженных чертой сверху, в качестве последних, в те квадранты B, которые этой чертой снабжены. Перестановку эту для определенности можно совершить например, сохраняя взаимное расположение переставляемых столбцов. Припишем теперь к Q'' и R'' еще один столбец и одну строку, содержащие в своем пересечении единицу, все остальные элементы которых равны нулю. Впишем их так, чтобы строка стала вместо вычеркнутой в тех квадрантах, которые имеют знак $\sim\sim\sim$ или $\sim\sim\sim$, а столбец в определителе Q'' в качестве первого в квадрантах B с нижним значком $_1$, а в определителе R'' в качестве последнего в квадрантах A с номером m.

Теперь причислим условно $(m+1)$-ю вертикальную полосу определителей Q к первым m полосам, изменив соответственно нумерацию. Для этого в $Q''(n,t;{}^{i_1, i_2, \dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s, j_{s+1}};{}^{h_1 h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$ будем писать номера j на единицу меньше, а первый номер отбрасывать вовсе. Если j_1 не равно единице, то припишем условно $i_{s+1}=m+1$. Такие определители будут обозначены $Q'(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$. Относя таким образом в определителе R'' условно полосу m к последним l и меняя систему значков, мы получим определители $R'(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2, \dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$.

Наконец вводим определители $Q(n, t;{}^{i_1, i_2, \dots i_s}_{j_1, j_2, \dots j_s};{}^{h_1, h_2, \dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$, которые связаны с $Q'(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})$ формулой:

$$Q(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r})=$$

$$=(-1)^{n}\left\{(i_1+\dots+i_s)+(h_1+\dots+h_r)+\frac{(2m+l+1)l}{2}-(j_1+\dots+j_s)-(f_1+\dots+f_r)-(m+1)s-)m+1)r\right\}+$$

$$+(j_1+\dots+j_s)+(f_1+\dots+f_r)+r \cdot Q'(n,t;{}^{i_1, i_2\dots i_s}_{j_1, j_2\dots j_s};{}^{h_1, h_2\dots h_r}_{f_1, f_2\dots f_r}), \quad (10)$$

и совершенно аналогично:

$$R\left(n, t; {i_1, i_2, \dots i_s \atop j_1, j_2 \dots j_s}; {h_1, h_2, \dots h_r \atop f_1, f_2, \dots f_r}\right) =$$

$$= (-1)^{n} \left\{ (i_1+\dots+i_s)+(h_1+\dots+h_r)+\frac{(2m+l+1)\,l}{2} - (j_1+j_s)-(f_1+\dots+f_r)-(m-1)s-(m-1)r \right\} (j_1+\dots+j_s)+$$

$$+(f_1+\dots+f_r)+r \cdot\cdot\; R'\left(n, t; {i_1, i, \dots i_s \atop j_1, j_2, \dots j_s}; {h_1, h_2, \dots h_r \atop f_1, f_2 \dots f_r}\right). \quad (11)$$

Очевидно, что Q и R отличаются только знаком от Q''' и R'''.

Переходим теперь ко второй из серии наших теорем.

Теорема 2. *Определители* Q *или* R, *имеющие для* Q *одинаковые нижние значки, а для* R — *одинаковые верхние, удовлетворяют двум системам уравнений в конечных разностях совпадающим, для* Q — *с системой, которой удовлетворяют* P(n) *и* $S(n; {i_1, i_2 \dots f_s \atop j_1, j_2 \dots j_s})$, *в случае если мы* (m + 1) *неизвестную функцию будем задавать на оси* y и l + 1 — *на оси* x, *а для определителей* R — *с той системой, которой удовлетворяют* P(n) *и* $S(n; ; {i_1, i_2 \dots i_s \atop j_1, j_2, \dots j_s})$, *в случае если мы* (m—1) *неизвестную функцию будем задавать на оси* y, *а* l + 1 *на оси* x.

Доказательство этой теоремы, являющееся буквальным повторением доказательства теоремы 1, мы проводить не будем. Ограничимся напоминанием тех же свойств характеристического уравнения, которые были упомянуты в теореме 1, а именно инвариантности по отношению к линейным преобразованиям системы с определителем (1) и независимости от выбора тех неизвестных, которые задаются на оси x.

Сформулируем теперь еще одну теорему, вытекающую из теоремы 1 и 2, если принять во внимание известные свойства систем уравнений в конечных разностях. Вводя $D(m+1; l-1; z) = 0$ и $D(m-1; l-1; z) = 0$, где эти обозначения совершенно очевидны, получим.

Теорема 3. *Определители* P'(n) *и* S'(n) *с любыми системами значков равны сумме* n-*ых степеней корней уравнения* D(m; l; z) = 0, *умноженных на некоторые коэфициенты, являющиеся для случая простых корней произведением чисел, не зависящих от* n, *на* (—1) *в степени некоторой линейной функции от* n, *а для случая кратных—аналогичной степени* (—1), *умноженной на полином, степень которого равна кратности корня. Определители* Q'''(n, t) *с любыми системами значков равны сумме* n-*ых степеней корней уравнения* D(m + 1; l — 1; z) = 0, *умноженных на коэфициенты, связанные с* n *таким же образом. Наконец определители* R'''(n, t) *равны сумме* n-*ых степеней корней уравнения* D(m — 1; l + 1; z) = 0, *умноженных на такие же коэфициенты.*

Доказательство опускаем, как очевидное.

§ 5. Назовем расстоянием какого-либо элемента в определителе $P'(n)$ от диагонали своего квадранта число равных нулю элементов того же столбца, в котором находится данный элемент, находящихся между данным и ближайшим из не обращающихся в нуль элементов, увеличенное на 2. Самый элемент не обращающийся в нуль, будем считать отстоящим на 1. Расстоянием до края квадранта мы назовем число равных нулю элементов того же столбца, в котором находится данный элемент, лежащих в том же квадранте и расположенных выше данного, в том случае если все они равны нулю; при этом мы будем говорить, что элемент лежит выше диагонали; в противном же случае — число равных нулю элементов той строки, в которой находится данный элемент, лежащих в том же квадранте, расположенных влево от данного элемента, если элемент взят из полосы квадрантов A, и то же число, увеличенное на единицу, если элемент из квадранта B. Выскажем теперь теорему.

Теорема 4. *Минор некоторого элемента определителя* $P'(n)$, *отстоящего от диагонали своего квадранта на* q *и от стороны на* p *клеток, выражается в виде конечной суммы произведений четырех множителей. Первый из них равен* (-1) *в степени некоторой функции от* n, p *и* q, *линейной относительно каждого из них, с целыми коэфициентами; второй равен некоторому* $S'(q; {}^{i_1,\, i_2, \dots i_s}_{j_1,\, j_2, \dots j_s})$; *третий равен или некоторому* $Q'''(q;\ t;;)$ *или некоторому* $R'''(q,\ t;;)$ *со значком, равным номеру той горизонтальной полосы квадрантов, в которой взят данный элемент, в зависимости от того, расположен ли данный элемент выше диагонали квадранта или ниже ее; и наконец четвертый равен некоторому* $S'(n-p-q;; {}^{h_1,\, h_2 \dots, h_r}_{f_1,\, f_2 \dots, f_r})$ [1]. *Все определители нулевого порядка мы условно будем считать равными единице.*

Лемма 1. *Если в некотором определителе из состава его элементов, выписанных в виде таблицы, можно выделить некоторую таблицу низшего порядка, состоящую из одних нулей, сумма числа строк и числа столбцов которой равна порядку определителя, — то этот определитель может быть разложен на произведение двух других определителей. Если эта сумма превосходит порядок определителя, то определитель равен нулю.*

Лемма эта доказывается применением теоремы Лапласа к определителю. Пусть порядок его n, а числа строк и столбцов в таблице, о которой шла речь в лемме, r и s. Если $r+s=n$ то $s=n-r$. Тогда, применяя теорему и раскладывая определитель по тем столбцам, среди которых находится нулевая таблица, мы видим, что из миноров этих столбцов не обращается в нуль только один, а именно тот, который не содержит ни одной строки этой таблицы. Следовательно определитель равен произведению этого минора на сопряженный. Если $n < r+s$, то очевидно, что все миноры этих столбцов — нули, и высказанное ясно. Лемма доказана.

Рассмотрим разложение по теореме Лапласа какого-либо определителя и поставим себе задачей найти, исходя из него, соответствующее разложение минора некоторого элемента этого определителя.

Лемма 2. *Искомое разложение получится из разложения самого определителя, если мы выбросим все члены, в которые этот элемент не входит, а не выброшенные заменим, поставив вместо множителя, содержащего наш элемент, минор этого множителя, сопряженный с вычеркиваемым элементом.*

Эта лемма совершенно очевидна без доказательства.

Лемма 3. *Разложение* $P(n)$ *по теореме Лапласа по* $p+1,\ p+2, \dots (p+q)$ *строкам каждого квадранта имеет вид*:

$$P'(n) = \sum_{i,\, j,\, s,\, h,\, f,\, r} (1-)^{\nu} S'(n-p-q;; {}^{i_1,\, i_2, \dots i_s}_{j_1,\, j_2 \dots j_s}) S'(q; {}^{i_1,\, i_2, \dots i_s;\; h_1,\, h_2, \dots h_r}_{j_1,\, j_2, \dots j_s;\; f_1,\, f_2 \dots f_r}) S'(p; {}^{i_1,\, i_2, \dots i_s;}_{j_1,\, j_2, \dots j_s;}), \quad (12)$$

где ν *представляет собою некоторое целое число, зависящее от различных аргументов, которое мы ближе не фиксируем.*

Для доказательства отметим, что для того чтобы минор, сопряженный с некоторым минором этих строк, был отличен от нуля, прежде всего необходимо,

---

[1] См. Н. Гюнтер, стр. 34, формулы (27).

чтобы в составлении нашего минора приняли участие столбцы с номерами $p+2, p+3, \ldots, p+q$ из квадрантов A и столбцы с номерами $p+1, p+2, \ldots, p+q-1$ из квадрантов B.

Для того, чтобы сам минор этих строк не обратился в нуль, в него могут входить только столбцы с номерами $p+1$ и $p+q+1$ из квадрантов A и столбцы с номерами p и $p+q$ из квадрантов B. Следовательно произвольных столбцов в каждый из образуемых миноров может войти пока $2(m+l)$. Подсчитаем более жестко, какие комбинации этих столбцов могут войти. Как очевидно, всего может быть выбрано $(m+l)$ из всех произвольных $2(m+l)$ столбцов. Однако число комбинаций, как мы увидим, меньше чем $\binom{2m+2l}{m+l}$.

Заметим, что если мы вычеркнем из определителя $P'(n)$ строки и столбцы, обязательно входящие во все миноры, по которым мы раскладываем —, то из правых верхних углов всех квадрантов оставшейся таблицы можно выделить меньшую таблицу с суммой числа строк и числа столбцов, равной $(n-q)(m+l)+l$, состоящую из одних нулей.

Из нижних левых углов этих квадрантов выделяется такая же таблица с суммой числа строк и столбцов $(n-q)(m+l)+m$. Так как сопряженные миноры будут выбираться из этой таблицы, то, приняв во внимание лемму 1, мы приходим к заключению, что необходимо, чтобы по крайней мере l из тех $(m+l)$ столбцов, которые должны еще участвовать в составлении данного минора, лежали справа от той полоски столбцов, которая обязательно войдет в состав минора и которая находится внутри каждой вертикальной полосы $P'(n)$. Действительно в противном случае сопряженный минор на основании леммы должен обратиться в нуль. Аналогично по крайней мере m столбцов должны лежать слева от этих полосок. Как мы видим, распределение правых и левых столбцов по числу единственное. По номерам полос определителя $P(n)$ оно является однако совершенно произвольным, так как ни один из получаемых с указанными оговорками миноров, вообще говоря, не нуль.

При этом, как это вытекает из леммы, каждый сопряженный минор должен разлагаться на произведение двух других порядков соответственно p и $n-(q+q)$. Легко заметить, что наш минор будет вида $S'(q; \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \ldots i_s \\ j_1, j_2 \ldots j_s \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} h_1, h_2, \ldots h_r \\ h_1, h_2 \ldots h_r \end{smallmatrix})$, а те определители, на которые разложится сопряженный с ним, будут $S'(p; \begin{smallmatrix} h_1, h_2 \ldots h_r \\ f_1, f_2 \ldots f_r \end{smallmatrix};)$ и $S'(n-p-q;; \begin{smallmatrix} i_1, i_2, \ldots i_s \\ j_1, j_2, \ldots j_s \end{smallmatrix})$. В результате формула наша доказана, и лемма 3 также

Переходим теперь к доказательству самой теоремы.

Приводим в соответствие минору элемента, отстоящему от диагонали на q, а от стороны на p, разложение (12). Заметим при этом, что с точки зрения расположения самого элемента могут представиться два случая. Один из них, когда наш элемент лежит выше диагонали своего квадранта; этот случай мы назовем случаем (a), другой же, когда он лежит ниже диагонали — случаем (b). Теперь применим лемму 3 к формуле (12). Тогда в случае (a) мы видим, что вычеркнутыми из определителя $P'(n)$ являются та строка, которая стоит верхней в какой-либо полосе определителей $S'(q;)$, и столбец, который является последним в какой-либо вертикальной полосе некоторых из этих определителей. Таким образом разложение, о котором говорит лемма 2, будет содержать только «остаток» тех членов из разложения (12), в которых номер полосы элемента или совпадает с некоторым i_k, если элемент из квадранта A, или не совпадает ни с одним j_k, если элемент из квадранта B. Кроме того в остающихся слагаемых суммы (12) нужно очевидно каждое из $S'(q; {i_1, i_2, \ldots i_s \atop j_1, j_2 \ldots j_s}; {h_1, h_2, \ldots h_r \atop f_1, f_2, \ldots f_r})$ заменить соответствующим $Q'''(q, t; \ldots)$, имеющим либо на один значок больше, либо на один значок меньше, причем t указывает номер горизонтальной полосы элемента. Кроме этих слагаемых могли бы еще войти другие, получающиеся как результат того, что некоторые определители, не вошедшие в (12) благодаря обращению своему в нуль, могли стать неравными нулю после вычеркивания строки и столбца, соответствующих данному элементу. В данном случае легко проверить, что все такие миноры или сами нули, или на нули умножаются.

Теорема для случая (a) доказана. Аналогичным образом в случае (b) можно получить те же результаты, выбрасывая некоторые слагаемые из суммы (12) и заменяя один из множителей в каждом из оставшихся слагаемых через $R'''(q, t)$ с соответственными значками.

§ 6. Совершим замену переменных независимых, полагая $x_1 = \varphi^l x$ и $y_1 = \varphi^{-m} y$, где φ — произвольное число. В результате такой замены все коэфициенты при производных по x от неизвестных функций умножаются на φ^l, а коэфициенты при производных по y — на φ^{-m}. Так как в каждом из определителей $\Delta(m; l; \ldots)$ с любыми значками m столбцов составлены из производных по x, а l — из производных по y, то ни один такой определитель от этой подстановки не изменится. В результате умножения коэфициенты характеристического уравнения $D(m; l; z) = 0$, зависящие только от этих Δ, а следовательно и корни его, очевидно останутся прежними.

Корни же уравнений $D(m+1; l-1; z) = 0$ и $D(m-1; l+1; z) = 0$ будут умножены соответственно на $\varphi^{(m+l)}$ и $\varphi^{-(m+l)}$. Это вытекает из того, что на эти числа умножаются определители $\Delta(m+1; l-1; z)$ и $\Delta(m-1; l+1;;)$, а из выражения характеристического уравнения в виде определителя вытекает, что корни его должны возрастать или убывать во столько же раз, во сколько изменены эти Δ.

Отсюда вытекает некоторое замечание, которым мы будем пользоваться впоследствии.

Если мы возьмем два каких-либо корня уравнений $D(m+1; l-1; z) = 0$ и $D(m-1; l+1; z) = 0$ и некоторый корень $D(m; l; z) = 0$, то с помощью такой подстановки, если только произведение модулей корней первых двух уравнений не равно квадрату модуля корня последнего, можно добиться того, чтобы или оба они были одновременно не меньше его по модулю, или чтобы последний превышал их.

Назовем систему уравнений (1) системой с вырождающимся определителем для данных начальных условий, в случае если в представлении $P'(n)$ и всех $S'(n; \ldots)$ с двумя системами аргументов суммой n-ых степеней корней $D(m; l, z) = 0$ обращается в нуль коэфициент при каком-либо корне. Этот корень назовем дегенерирующим корнем. Система будет полувырождающейся, если обращается в нуль коэфициент лишь в выражении $P(n)$. Соответственно вводим понятие полудегенерирующего корня.

Заслуживает внимания, что как дегенерация, так и полудегенерация отдельных корней существенно зависит от начальных условий, в противоположность характеристическому уравнению. Если мы другие m неизвестных функций зададим на оси y, то дегенерировать будут, вообще говоря, другие корни.

Заметим между прочим, что подстановка, о которой шла речь в начале данного параграфа, не меняет ни свойств вырождения системы, ни характера дегенерации отдельных корней. Это вытекает из того, что если провести фактическое вычисление всех функций, которыми будут выражаться коэфициенты разложений, то они будут однородными функциями как от коэфициентов при производных по x, так и от коэфициентов при производных по y и следовательно от такой подстановки могут лишь умножаться на некоторую степень φ.

Переходим теперь к центральному пункту всего предварительного исследования, из которого уже без труда вытечет все остальное.

Теорема 5. *Если среди недегенерирующих корней уравнения* $\mathrm{D}(\mathrm{m}; \mathrm{l}; \mathrm{z}) = 0$ *существует наибольший по модулю, и если он превосходит все полудегенерирующие корни и все те корни* $\mathrm{D}(\mathrm{m}+1; \mathrm{l}-1; \mathrm{z}) = 0$ *и* $\mathrm{D}(\mathrm{m}-1; \mathrm{l}+1; \mathrm{z}) = 0$, *коэфициенты при степенях которых в представлении всех определителей* Q *и* R *не обращаются в нуль, то сумма модулей отношений миноров какого угодно столбца определителя системы уравнений* (2) *к самому определителю не превосходит некоторого числа. (Конечно если этот определитель не обращается в нуль ни при каком* n.)

Эта теорема является непосредственным обобщением соответствующей теоремы проф. Н. М. Гюнтера.

Для доказательства сначала установим несколько очень простых неравенств. Пусть z_1 — тот корень $D(m; l; z) = 0$, о котором шла речь, а z_2 и z_3 — соответственно наибольшие корни $D(m+1; l-1; z) = 0$ и $D(m-1; l+1; z) = 0$ из упомянутых выше.

Тогда совершенно очевидно из теоремы 3:

$$|P'(n)| > A_1 |z_1|^n, \tag{13}$$

где A — некоторое постоянное.

Из той же теоремы 3 аналогичным образом:

$$\left|S'\left(n; \begin{matrix} i_1, i_2, \dots i_s \\ j_1, j_2, \dots j_s \end{matrix};\right)\right| < C|z_1|^n, \quad \left|S'\left(n;; \begin{matrix} h_1, h_2, \dots h_r \\ f_1, f_2, \dots f_r \end{matrix}\right)\right| < C|z_1|^n, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left|Q'''\left(n; t; \begin{matrix} i_1, i_2, \dots i_s \\ j_1, j_2, \dots j_{s+1} \end{matrix}; \begin{matrix} h_1, h_2, \dots h_r \\ f_1, f_2, \dots f_r \end{matrix}\right)\right| < B|z_2|^n \\ &\left|R'''\left(n; t; \begin{matrix} i_1, i_2, \dots i_s \\ j_1, j_2, \dots j_s \end{matrix}; \begin{matrix} h_1, h_2, \dots h_r, h_{r+1} \\ f_1, f_2, \dots f_r \end{matrix}\right)\right| < B|z_3|^n \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Обозначим символами $M(n, p, q; k, l)$ и $N(n, p, q; k, l)$ миноры типов (a) и (b) § 5, соответствующие элементу с номером квадранта k и l, отстоящему от диагонали на q, а от стороны на p. Тогда:

$$|M(n, p, q; k, l)| < \tbinom{m+l}{m}^2 BC^2 |z_1|^{n-q} |z_2|^q \tag{16}$$

и

$$|N(n, p, q; k, l)| < \tbinom{m+l}{m}^2 BC^2 |z_1|^{n-q} |z_3|^q, \tag{17}$$

или

$$|M(n, p, q; k, l)| < G|z_1|^{n-q}|z_2|^q, \quad |N(n, p, q; k, l)| < G|z_1|^{n-q}|z_3|^q. \tag{18}$$

Если мы теперь обозначим ту сумму, о которой шла речь в теореме, через Σ, мы получим:

$$\Sigma < (m+l)\frac{G}{A}\left\{\left|\frac{z_2}{z_1}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right|^2 + \dots\right\} + (m+l)\frac{G}{A}\left\{\left|\frac{z_3}{z_1}\right| + \left|\frac{z_3}{z_1}\right|^2 + \dots\right\}, \tag{19}$$

или

$$\Sigma < L. \tag{20}$$

Тем самым наша теорема доказана. Заметим, что в силу предварительного замечания или оба старших недегенерирующих корня $D(m+1;\ l-1;\ z)=0$ и $D(m-1;\ l+1;\ z)=0$ меньше z_1, или же оба больше или равны ему.

§ 7. Положим, что коэфициенты системы (1) представляют собою некоторые независимые комплексные переменные, и будем рассматривать решение этой системы, удовлетворяющее нашим начальным условиям, как функцию этих переменных. Мы установим, что вблизи некоторых значений такое решение существует и будет аналитической функцией этих переменных.

Лемма IV. *При соблюдении условий теоремы* 5 § 6 *система* (1) *имеет решение, удовлетворяющее нашим начальным условиям, причем все коэфициенты в разложении этого решения в ряд Тэйлора по* x *и* y *представляют собою аналитические функции от коэфициентов уравнения.*

Возвращаясь к системе (1), переносим функции F в правые части уравнений и строим для них превосходящую функцию обычного типа:

$$\Omega=\frac{M}{\left(1-\frac{x+y}{R}\right)\left(1-\frac{v_1}{R}\right)\left(1-\frac{v_2}{R}\right)-\left(1-\frac{w_l}{R}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial v_1}{\partial x}}{R}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial v_1}{\partial y}}{R}\right)\cdots\left(1-\frac{\frac{\partial w_l}{\partial y}}{R}\right)}-$$
$$-M-\frac{M}{R}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial w_l}{\partial y}\right).$$

Следуя в точности методу Н. М. Гюнтера, доказываем, что система

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_j}{\partial x}=L\Omega, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots\ m\\ &\frac{\partial w_r}{\partial y}=L\Omega, \qquad r=1,\ 2,\ \ldots\ l\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

будет превосходящей для системы (1)[1]. В силу симметрии начальных заданий и симметрии уравнений мы легко заключаем, что у этой системы можно искать решение, удовлетворяющее условиям: $\frac{\partial v_i}{\partial x}=\frac{\partial w_j}{\partial y}$, после чего система приводится к одному уравнению, если счесть $v_i=\frac{\partial r}{\partial y}$; $w_j=\frac{\partial r}{\partial x}$. Получим,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=\Omega. \tag{22}$$

Это же уравнение имеет нужное нам решение, как доказано еще Рикье. Следовательно лемма доказана, так как аналитичность коэфициентов вытекает из способа вычисления их в качестве решений некоторых линейных уравнений в конечном числе.

Рассмотрим теперь окрестность некоторой системы значений коэфициентов уравнений, при которой ни один $F'(n)$ не обращается в нуль, старший по модулю корень $D(m;\ l;\ z)=0$ не дегенерирует и превосходит по модулю все корни $D(m+1;\ l-1;\ z)=0$ и $D(m-1;\ l+1;\ z)=0$.

Очевидно, что в силу непрерывности корней характеристических уравнений и коэфициентов разложения условия относительно дегенерации и величины корней

---

[1] См. Н. Гюнтер, стр. 39.

сохраняют свое значение и для окрестности наших значений, причем можно утверждать, что неравенство $|\varepsilon_1|-|\varepsilon_2|>\varepsilon$, $|\varepsilon_1|-|\varepsilon_3|>\varepsilon$, $|\varepsilon_1|-|\varepsilon_k|>\varepsilon$ и $a_1>|\varepsilon|$ [буквой a обозначим коэфициент в разложении $P(n)$, а ε_k — другие корни $D(m;\ l;\ z)=0$] имеет место одновременно для всех точек, близких к исходным.

Кроме того можно выбрать эту окрестность настолько малой, чтобы $P(n)$ не обращалось бы в нуль ни при каком n ни для какой из ее точек. Действительно опасными для нас являются лишь некоторые конечные значения n, ибо при выполнении наших неравенств для больших n имеет место неравенство (13), из которого и вытекает наше заключение. Для конечных же n этому условию всегда можно удовлетворить.

Теорема 6. *В окрестности выбранных значений наше решение будет при достаточно малых* x и y *регулярной функцией коэфициентов.*

Доказательство на основании того, что было высказано раньше, не представляет никаких затруднений. В силу равномерного удовлетворения неравенств теоремы 5 ряд из аналитических функций коэфициентов уравнения, каковыми являются коэфициенты тэйлоровского ряда, при достаточно малых x и y сходится равномерно. В таком случае теорема 4 представляет собой простое следствие теоремы Вейерштрасса. Тем самым общая теория наша закончена.

Заметим один частный случай, когда лемма предыдущего параграфа наверное имеет место. Пусть мы ищем решение, удовлетворяющее условиям Ковалевской. Определитель системы в этом случае вырождаться не может, так как уравнение $D(m;\ l;\ z)=0$ — линейное. Кроме того уравнения $D(m-1;\ l+1;\ z)=0$ в этом случае не существует. Следовательно подстановкой § 6 мы можем добиться того, чтобы единственный корень уравнения $D(Q;\ l;\ z)$ был больше всех корней уравнения $D(1;\ l-1;\ z)=0$. Тогда очевидно условия теоремы 5 и леммы 4 выполняются автоматически, и система требуемое решение имеет.

§ 8. К случаю, исследованному нами, сводится всякий другой случай, в котором значения неизвестных и их производных задаются при $x=0$ и при $y=0$, каков бы ни был порядок системы, и каково бы ни было число уравнений. Как известно, такая система может быть сведена к системе уравнений 1-го порядка путем выбора новых неизвестных функций. Если внести вместо этих неизвестных разность между ними самими и их начальными значениями и затем исключить производные от некоторых неизвестных функций из нескольких уравнений, то результат диференцирования даст систему линейных уравнений с определителем, равным $P'(n)$, миноры которого будут таковы же, как и миноры $P'(n)$, или равняться самому $P'(n)$. Теорема 5 будет иметь место при тех же условиях, и решение будет существовать, если только считать соблюденными известные условия пассивности Рикье. Так как выяснение этих последних не входит в нашу задачу, то на них мы останавливаться не будем.

Глава вторая.

§ 1. Во второй главе мы займемся изучением случая системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Мы выясним область коэфициентов уравнений, в которой система имеет решение, являющееся аналитической функцией этих коэфициентов, в котором одна из этих функций, которую мы обозначили w, является нулем на оси x, а другая v—на оси y.

Нашей задачей будет показать, что исключенные нами в теореме 6 первой главы значения будут представлять собою купюры и существенно особые точки этой функции. Для этого изучим ближе свойства определителя $P(n)$ этой системы.

Чтобы сократить число параметров, преобразуем систему, исключив некоторые производные из соответственных уравнений.

После очевидных выкладок придадим ей вид:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial y}+\gamma\frac{\partial w}{\partial x}+F_1\left(x,\ y;\ v;\ w;\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y}\right)=0\\ &\varkappa\frac{\partial v}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}+\delta\frac{\partial w}{\partial y}+F_2\left(x,\ y,\ v,\ w;\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где начальные значения частных производных от F_1 и F_2 по всем производным от неизвестных функций равны нулю.

Таблица M § 2 первой главы в этом случае принимает вид:

$$M=\left\|\begin{matrix}\alpha & \gamma & \beta & 0\\ 0 & \varepsilon & \varkappa & \delta\end{matrix}\right\|.$$

Характеристические уравнения для случая, рассматриваемого нами, будут:

$$D(0;\ 2;\ z)=(-1)^3\begin{vmatrix}\beta & 0\\ \varkappa & \delta\end{vmatrix}-z=-\beta\delta-z=0,$$

$$D(2;\ 0;\ z)=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \varepsilon\end{vmatrix}-z=\alpha\varepsilon-z=0,$$

$$D(1;\ 1;\ z)=\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{vmatrix}-z, & -\begin{vmatrix}\gamma & 0\\ \varepsilon & \delta\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \varkappa\end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix}\gamma & \beta\\ \varepsilon & \varkappa\end{vmatrix}-z\end{vmatrix}=z^2-(\alpha\delta+\beta\varepsilon-\gamma\varkappa)+\alpha\delta\beta\varepsilon=0.$$

Полагая теперь $\alpha\delta=\lambda$, $\beta\varepsilon=\mu$ и $\gamma\varkappa=\nu$, мы можем переписать эти уравнения в виде:

$$D(1;\ 1;\ z)=z^2-(\lambda+\mu-\nu)z+\lambda\mu=0,$$

$$D(0;\ 2;\ z)=\frac{-\lambda\mu}{\alpha\varepsilon}-z=0,$$

$$D(2;\ 0;\ z)=\alpha\varepsilon-z=0.$$

Так как произведение корней $D(1;\ 1;\ z)=0$ равно в точности произведению корней $D(0;\ 2;\ z)=0$ и $D(2;\ 0;\ z)=0$, то, если мы имеем дело с невырождающимся определителем и если существует корень $D(1;\ 1;\ z)=0$, превосходящий другой по модулю, т. е. если корни по модулю не равны, — остальные условия выполняются автоматически, и система имеет требуемое нами решение. Если определитель полувырождающийся, то система имеет решение, если дегенерирует меньший корень.

Выясним теперь, каково условие невырождаемости определителя и условие несовпадения модулей корней уравнения $D(1;\ 1;\ z)=0$.

Прежде всего очевидно, что случай $(\lambda+\mu-\nu)=0$ придется отбросить, ибо тогда модули корней равны между собою.

Корни характеристического уравнения очевидно будут:

$$\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\pm\sqrt{\frac{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}{4}}.$$

Вычисляя коэфициенты с помощью известных правил, принимая $P(0)=1$ и $P(1)=\lambda$, имеем:

$$P(n)=\left(\frac{\lambda-\mu+\nu+\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}{2\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}\right)\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}{2}\right)^n-$$

$$-\left(\frac{\lambda-\mu+\nu-\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}{2\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}\right)\left(\frac{\lambda+\mu-\nu-\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}{2}\right)^n-$$

или, перемножая первую степень на коэфициент с целью выделить множитель λ имеем:

$$P_n=\lambda\left\{\frac{[(\lambda-\mu-\nu)+\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}]\,[(\lambda+\mu-\nu)+\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}]^{n-1}}{2^n\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}-\right.$$

$$\left.-\frac{[(\lambda-\mu-\nu)-\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}]\,[(\lambda+\mu-\nu)+\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}]^{n-1}}{2^n\sqrt{(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu}}\right\}. \qquad (2)$$

Очевидно, что условие полудегенерации будет: $(\lambda-\mu-\lambda)^2=(\lambda+\mu-\nu)^2-4\lambda\mu$, или $\mu\nu=0$. Так как случай $\mu=0$ приводит просто к равенству нулю одного из корней, то система будет полудегенерирующей, если $\nu=0$. Этот случай мы исследуем особо. Если $\nu\neq 0$, то определитель не вырождается. Для уменьшения числа независимых параметров умножим одно из уравнений системы на $\frac{1}{\lambda+\mu-\nu}$. Очевидно для новой системы $\lambda+\mu-\nu=1$ и корни $D(1;\ 1;\ z)=0$ будут

$$\frac{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{2}. \qquad (3)$$

Модули их могут быть равны только тогда, если $1-4\lambda\mu$ отрицательное число или нуль, т. е. если $4\lambda\mu\geqslant 1$. Это очевидно и есть случай, аналогичный случаю Н. М. Гюнтера, в котором утверждать существование решения нельзя.

Если определитель полувырождается, то или $\gamma=0$, или $\varkappa=0$. Тогда мы будем иметь вырождение одной из систем для $S(n;\ i)$ или для $S(n;\ i)$, одна из которых сведется к $P(n)=\lambda P(n-1)$. Отсюда следует, что из двух корней $D(1;\ 1;\ z)=0$, а именно λ и μ, обращается в нуль коэфициент при μ и, значит, решение будет существовать тогда, если $|\lambda|>|\mu|$, или, считая $\lambda+\mu=1$, $R(\mu)>\frac{1}{2}$, что представляет собой равносильное условие.

§ 2. Рассмотрим известный пример Мегау[1] с точки зрения развитой здесь теории:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=u+H\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=z+H\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

в котором ищется решение, где при $x=0$ $\quad z=y$ и при $y=0$ $\quad z=x$.

---

[1] Meray (avec la collaboration de M. Riquier), Sur la convergence des développements des integrales ordinaires des équations aux derivées partielles, «Annales de l'Ecole normale», s. III, t. 7, p. 23 (1890).

Вспоминая сказанное в § 9 предыдущей главы, приводим эту систему к нашему каноническому виду:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - H\frac{\partial v}{\partial y} = w + x + H,$$
$$-H\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = v + y + H.$$

Очевидно: $\lambda = 1$, $\mu = H^2$, $\nu = 0$. Система имеет полудегенерирующий определитель. Наша теория говорит, что если $|H| < 1|$, то решение существует. Как показал Мегау, если H больше единицы, решения может не быть. Следовательно наше условие является в данном случае сравнительно широким, при условии не налагать ограничений на правые части уравнений. Любопытно, что Мегау попал как раз на исключительный случай в том смысле, что если добавить в левые части уравнений два произвольно малых члена $\varepsilon_1\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\varepsilon_2\frac{\partial v}{\partial y}$, то система уже не будет вырождаться, и существенное решение будет зависеть уже от совершенно других условий.

Заметим, что для других начальных условий, если v задать на оси x, вырождаться будет λ, и тогда решение будет существовать как раз при обратном предположении, т. е. если $R(\mu) > \frac{1}{2}$.

§ 3. Для того чтобы не таскать впоследствии за собой множитель, положим $\frac{P_{(n+1)}}{\lambda} = Q(n)$. Теперь из формулы (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} Q(n) = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1}-(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1}}{\sqrt{1-4\lambda\mu}} - \\ -\frac{\mu}{2^n}\frac{(1+\sqrt{1-4\lambda\ })^n-(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^n}{\sqrt{1-4\lambda\mu}} \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Заслуживает интереса частный случай $\lambda = 1$ (или, что то же, $\mu = \nu$). Тогда

$$Q(n) = \frac{1}{2^{n+2}}\frac{(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+2}-(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+2}}{\sqrt{1-4\lambda\mu}}.$$

Сразу очевидно, что этот случай совпадает со случаем Н. М. Гюнтера, чего впрочем и следовало ожидать, так как в системе уравнений, в которую переходит уравнение Н. М. Гюнтера, при замене $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = w$ будет соблюдено именно это условие $\mu = \nu$.

Коэфициенты ряда Тэйлора, в который мы предполагаем разложенным наше решение, будут очевидно содержать $Q(n)$ в знаменателе. Вообще говоря, если мы не знаем ничего о структуре правых частей уравнений системы (1), корни $Q(n)$ как функции от μ и $4\lambda\mu$ будут служить полюсами решения, рассматриваемого как функция этих аргументов порознь. Если мы покажем, что значения, отброшенные нами в § 1 настоящей главы, являются точками сгущения этих полюсов, то наше утверждение, высказанное нами в том же параграфе, будет доказано.

Займемся отысканием точек сгущения корней $Q(n)$ при неограниченном возрастании n.

Способов отыскивать корни может быть два. Один из них — это фиксировать в качестве постоянного и менять, а другой — обратный. Первый способ в данном случае значительно легче, но к сожалению не обнаруживает всех точек сгущения Мы проведем оба эти способа.

§ 4. Займемся первым способом, т. е. исследуем корни $Q(n, \mu)$, считая $\lambda\mu$ постоянным. Из условия $Q(n) = 0$ без труда получим:

$$2\mu = \frac{(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1} - (1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1}}{(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n} - (1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n}},$$

де под $\sqrt{1-4\lambda\mu}$ мы будем, как обычно, понимать то его значение, у которого вещественная часть больше или равна нулю (в последнем случае мнимая часть > 0).

Тогда:

$$|1+\sqrt{1-4\lambda\mu}| > |1-\sqrt{1-4\lambda\mu}|,$$

и

$$2\mu = (1+\sqrt{1-4\lambda\mu})\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n}}.$$

Если $R(\sqrt{1-4\lambda\mu}) > 0$, то очевидно, что точкой сгущения будет:

$$\mu = \frac{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}{2},$$

где

$$R(\mu) > \frac{1}{2}.$$

Отсюда уже без труда:

$$2\mu - 1 = \sqrt{1-4\lambda\mu}, \quad 4\mu^2 - 4\mu + 1 = 1 - 4\lambda\mu,$$

или

$$\mu = 1 - \lambda.$$

Рассмотрим второй случай, т. е. если $4\lambda\mu - 1 = \varkappa$, где $\varkappa$ — некоторое положительное число.

Тогда:

$$2\mu = (1+\sqrt{1-4\mu\lambda})\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n}}.$$

И числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, лежат на окружности с радиусом 1 и центром в точке *1*. Кроме того из геометрических соображений вытекает, что разность аргументов числителя и знаменателя равна аргументу $(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})$, взятому с обратным знаком.

Действительно пусть M будет точка

$$1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n}$$

и N — точка

$$1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n+1}.$$

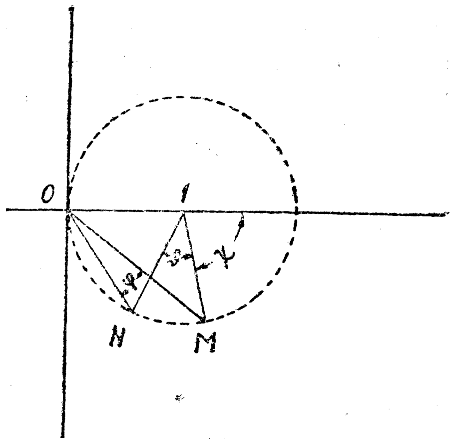

Рис. 1.

Угол между вещественной осью и линией $1M$ назовем ψ, угол между линиями $1M$ и $1N$ буквой ϑ, и наконец φ — угол между линиями OM и ON.

Очевидно из выражений M и N, что

$$\vartheta=\arg\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}=-2\arg(1+ +\sqrt{1-4\lambda\mu}),\quad \psi=n\vartheta.$$

По свойству вписанных углов $\varphi=\frac{\vartheta}{2}$, и значит:

$$\arg\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n+1}\right]-\arg\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n}\right]= =-\arg(1+\sqrt{1-4\lambda\mu}).$$

Отсюда вытекает, что корень $Q(n,\mu)$, где $\lambda\mu$ постоянное всегда вещественное число при любом n. Разберем порознь два случая: 1) φ есть рациональная часть π, 2) φ есть иррациональная часть π. В первом случае очевидно мы имеем дело с периодически повторяющимися в конечном числе корнями, так как тогда $\frac{1-\sqrt{1+4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}$ представляет собою точно некоторый корень из единицы. Во втором случае угол ψ может принимать значения, как угодно близкие к любому наперед заданному числу. Из треугольников $O1M$ и $O1N$ находим:

$$\left|1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n}\right|=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}\right),$$

и

$$\left|1-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda\mu}}{1+\sqrt{1-4\lambda\mu}}\right)^{n+1}\right|=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}-\frac{\psi}{2}\right).$$

Тогда, если обозначить $|1+\sqrt{1-4\lambda\mu}|=\varphi$, получим:

$$2\mu=\vartheta e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}-\frac{\psi}{2}\right)}=\varrho\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}}=$$

$$=\frac{\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}-\sin\frac{\vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

и так как $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ может принимать какие угодно значения, то 2μ изменяется, имея ψ точками сгущения все точки вещественной оси.

Резюмируя сказанное в этом параграфе, получим:

При $4\lambda\mu - 1 = \varkappa$, где $\varkappa$ — положительное число, точками сгущения корней определителя $Q(n, \mu)$, если φ несоизмеримо с π, служит вещественная ось μ, причем все эти корни сами вещественны; при $4\lambda\mu - 1$, отличных от вещественного положительного числа, точкой сгущения будет служить $\mu = 1 - \lambda$, где $R(\mu) > \frac{1}{2}$.

Как уже было указано, этот метод, несмотря на крайнюю простоту, не дает удовлетворительных результатов, ибо обнаруживает не все точки сгущения. Впоследствии мы убедимся в этом, отыскав эти точки другим способом.

§ 5. Отвлечемся несколько в сторону и, прежде чем вычислять точки сгущения корней $Q(n, 4\lambda\mu)$, докажем одну теорему, чрезвычайно полезную в дальнейшем.

Теорема. *Уравнение*

$$ae^{(n+1)x} + be^{-(n+1)x} + ce^{(n-1)x} + de^{-(n-1)x} = 0 \qquad \textbf{(A)}$$

для целых n *больших единицы имеет не больше трех вещественных корней, если его коэфициенты вещественны и не все обращаются в нуль.*

Эта теорема в таком виде доказывается без всякого труда с помощью правила знаков Декарта. Полагая $e^x = y$, уравнение (A) может быть преобразовано к виду:

$$ay^{n+1} + \frac{b}{y^{n+1}} + cy^{n-1} + \frac{d}{y^{n-1}} = 0$$

или

$$ay^{2(n+1)} + cy^{2n} + dy^2 + b = 0.$$

Число положительных корней этого уравнения не превышает числа перемен знаков коэфициентов и следовательно не превосходит трех. Так как нас интересуют только положительные значения, то теорема тем самым доказана. Приведенным доказательством я обязан Н. Е. Кочину.

§ 6. Производя отыскания корней $Q(n, 4\lambda\mu)$ при постоянном μ, поступаем, в точности следуя методу Н. М. Гюнтера[1]. Положим:

$$4\lambda\mu = \frac{1}{\cos^2\omega}. \qquad (5)$$

Тогда

$$\sqrt{1-4\lambda\mu} = i\operatorname{tg}\omega, \qquad 1-\sqrt{1-4\lambda\mu} = \frac{\cos\omega - i\sin\omega}{\cos\omega},$$

$$1+\sqrt{1-4\lambda\mu} = \frac{\cos\omega + i\sin\omega}{\cos\omega}$$

и

$$Q(n) = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{(\cos\omega + i\sin\omega)^{n+1} - (\cos\omega - \sin\omega)^{n+1}}{i\cos^{n+1}\omega\operatorname{tg}\omega} -$$

$$-\frac{\mu}{2}\,\frac{(\cos\omega + i\sin\omega)^{n} - (\cos\omega - i\sin\omega)^{n}}{i\cos^{n}\omega\operatorname{tg}\omega} = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+1)\omega}{\cos^n\omega\sin\omega} -$$

$$-\frac{\mu}{2^{n-1}}\,\frac{\sin n\omega}{\cos^{n-1}\omega\sin\omega} = \frac{1}{2^n}\,\frac{(1-\mu)\sin(n+1)\omega - \mu\,[2\sin n\omega\cos\omega - \sin(n+1)\omega]}{\cos^n\omega\sin\omega}$$

$$Q(n) = \frac{1}{2^n}\,\frac{(1-\mu)\sin(n+1)\omega - \mu\sin(n-1)\omega}{\cos^n\omega\sin\omega}. \qquad (6)$$

---

[1] Ср. Н. Гюнтер, стр. 32—33.

Теперь нахождение корней $Q(n, 4\lambda\mu)$ свелось к нахождению корней уравнения:

$$f(\omega) = (1-\mu)\sin(n+1)\,\omega - \mu\sin(n-1)\,\omega = 0, \qquad (7)$$

лежащих в полосе периодов ω и отличных от $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$. Можно было бы непосредственно разобрать случай, где μ — какое угодно комплексное число, но так как там корни, вообще говоря, комплексны и вычисление их не представляет интереса, и кроме того так как проблема вещественности корней $Q(n, 4\lambda\mu)$ также кажется нам заслуживающей внимания, — то мы разберем особо вещественное μ.

Этот случай мы разобьем на 5 других: 1) $\mu < \frac{1}{2}$, 2) $\mu = \frac{1}{2}$, 3) $\frac{1}{2} < \mu < 1$, 4) $\mu = 1$, 5) $\mu > 1$.

В первом из этих случаев, благодаря тому, что $|1-\mu| > |\mu|$, знак $f(\omega)$ можно в некоторых точках определить. Очевидно, что при $\omega = \frac{\varkappa\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2n+2}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, 2n+1)$ знак ее зависит от четности $\varkappa$, и следовательно в промежутке между двумя последовательными такими точками она меняет знак и следовательно имеет по крайней мере один корень. Если прибавить к этому очевидный корень $\omega = 0$, то всего в этом случае найдется $2n+2$ корня. Если n четное, то в число их входят 0 и π, а если нечетное, то кроме того еще $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

При этих значениях знаменатель очевидно обращается в нуль, и следовательно нужных нам корней будет $2n$, если n — четное, и $2n-2$, если n — нечетное. Принимая во внимание, что некоторому корню $\omega = \alpha$ соответствует еще 3 других: $\omega = \pi - \alpha$, $\omega = \pi + \alpha$ и $\omega = 2\pi - \alpha$, которые дают одну и ту же величину для $4\lambda\mu$, мы видим, что корней у $Q(n, 4\lambda\mu)$ будет в 4 раза меньше, т. е. $\frac{n}{2}$ для четного n и $\frac{n-1}{2}$ для нечетного. Если раскрыть выражение $Q(n)$ из формулы (4) § 4, то станет ясно, что число найденных нами корней в точности совпадает со степенью $Q(n)$ и следовательно нами найдены все корни.

Благодаря равномерному их распределению при возрастающем n они заполняют положительный отрезок оси $4\lambda\mu - 1$ повсюду плотно. Этот случай не представляет ничего нового по сравнению со случаем Н. М. Гюнтера.

При $\mu = \frac{1}{2}$ мы получим $1 - \mu = \frac{1}{2}$, и $f(\omega)$ примет вид:

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\,\{\sin(n+1)\,\omega - \sin(n-1)\,\omega\} = \cos n\,\omega \sin\omega.$$

В этом случае очевидно $f(\omega)$ имеет также $2n+2$ вещественных корня, из которых, как и в прошлом случае, придется откинуть 0 и π для четного n и $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$ для нечетного. Таким образом все корни опять-таки расположены на вещественной оси $4\lambda\mu - 1$ и повсюду плотно заполняют ее положительную часть.

Если $\frac{1}{2} < \mu < 1$, то, как нетрудно видеть, число вещественных корней $f(\omega)$ зависит от n. Разберем порознь 3 частных случая: a) $n < \frac{1}{2\mu - 1}$, b) $n = \frac{1}{2\mu - 1}$ и c) $n > \frac{1}{2\mu - 1}$. В первом из этих случаев все корни будут вещественными. Действительно тогда имеем: $2n\mu < n + 1$ и $\mu(n-1) < (1-\mu)(n+1)$, и, значит, производная $f'(0) = (1-\mu)(n+1) - \mu(n-1) > 0$ и $f'(2\pi) = (1-\mu)(n+1) - \mu(n-1) > 0$ и при $\omega = \varepsilon$, где ε достаточно мало и $\varepsilon > 0$, $f(\varepsilon) > 0$, равно как и $f(2\pi - \varepsilon) < 0$. С другой стороны, при $\omega = \frac{\varkappa\pi}{n-1} + \frac{\pi}{2n-2}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, $f(\omega)$ принимает знак второго слагаемого и следовательно имеет «—» если n четное, и «+», если оно нечетное. Значит между двумя такими последовательными значениями $f(\omega)$ имеет по крайней мере один корень. Кроме того очевидно, что еще по корню заключено в промежутках $\varepsilon < \omega < \frac{\pi}{2n-2}$ и $\frac{4n-5}{2n-2}\pi < \omega < 2\pi - \varepsilon$. Этот случай ничем от предыдущих не отличается. Случай (b), когда $n = \frac{1}{2\mu - 1}$, легко дает $\mu(n-1) = (1-\mu)(n+1)$. В этом случае $f(\omega)$ имеет два тройных корня $\omega = 0$ и $\omega = \pi$, так как две последовательные производные обращаются в нуль. Так как знаменатель $Q(n, 4\lambda\mu)$ имеет 0 и π корнями первой кратности и так как все наши рассуждения относительно корней в промежутках $\left(\frac{\varkappa\pi}{n-1} + \frac{\pi}{2n-2}, \frac{(\varkappa+1)\pi}{n-1} + \frac{\pi}{2n-2}\right)$ сохраняют значение, — то, отбросив $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ для нечетного n и уменьшив кратность 0 и 2π на единицу, получим всего $2n$ корней для четного n и $2n-2$ для нечетного. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся, что корни найдены все.

Случай (с) дает уже кое-что принципиально новое. Произведя подсчет вещественных корней $f(\omega)$ с помощью знаков в точках: $\frac{\varkappa\pi}{n-1} + \frac{\pi}{2n-2}$, получим, как легко видеть, $2n-4$ корня для четного n и $2n-6$ для нечетного $\left(\text{отбросив } 0, \frac{\pi}{2}, \pi \text{ и } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Затем, разделяя вещественную и мнимую части в уравнении (7), считая $\omega = \tau + i\sigma$, получим систему:

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu)\sin(n+1)\tau\,\mathrm{ch}(n+1)\sigma - \mu\sin(n-1)\tau\,\mathrm{ch}(n-1)\sigma = 0,\\ (1-\mu)\cos(n+1)\tau\,\mathrm{sh}(n+1)\sigma - \mu\cos(n-1)\tau\,\mathrm{sh}(n-1)\sigma = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь уравнение с неизвестным σ:

$$(1-\mu)\,\mathrm{sh}(n+1)\sigma - \mu\,\mathrm{sh}(n-1)\sigma = 0, \qquad (9)$$

и докажем, что оно имеет при наших предположениях отличный от нуля положительный корень. Действительно из $n > \frac{1}{2\mu - 1}$ следует: $\mu(n-1) > (1-\mu)(n+1)$, и значит производная от левой части (9) отрицательна при $\sigma = 0$, и при малых σ левая часть эта имеет знак «—». При больших же σ — знак ее совпадает со знаком 1-го слагаемого и следовательно «+». Так как левая часть меняет знак, то наше утверждение доказано. Обозначим этот положительный корень через α_n. Корень этот будет простым и единственным положительным. Действительно уравнение (9) принадлежит к типу (A), разобранному в § 5, и не может иметь больше трех вещественных корней. Но мы знаем, что кроме α_n корнями (9) будут служить $-\alpha_n$ и 0, откуда и вытекает наше утверждение. Простотой корня α_n нам придется еще воспользоваться.

Установив это, мы утверждаем, что система (8) имеет четыре системы решений: $\tau = 0$, $\sigma = \alpha_n$, $\tau = 2\pi$, $\sigma = -\alpha_n$, $\tau = \pi$, $\sigma = \alpha_n$ и $\tau = \pi$, $\sigma = -\alpha_n$, и следовательно уравнение (7) имеет четыре комплексных корня $\omega = i\alpha_n$, $\omega = 2\pi - i\alpha_n$, $\omega = \pi + i\alpha_n$ и $\omega = \pi - i\alpha_n$. Все четыре корня соответствуют очевидно одному и тому же значению $4\lambda\mu$, а именно $4\lambda\mu = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_n}$. Значит для каждого такого n мы будем иметь корень, расположенный на вещественной оси $4\lambda\mu$ — 1 между -1 и нулем. Более детальное исследование свойств этого корня мы проведем в следующем параграфе.

Пусть теперь $\mu = 1$. Обратимся для этого случая непосредственно к формуле (4):

$$Q n) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{[(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1} - 2(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^n] - [(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n+1} - 2(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^n]}{\sqrt{1-4\lambda\mu}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(-1+\sqrt{1-4\lambda\mu})(1+\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n-1} - (-1-\sqrt{1-4\lambda\mu})(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n-1}}{\sqrt{1-4\lambda\mu}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{[(1-4\lambda\mu-1)(1+\sqrt{1+4\lambda\mu})^{n-1} - (1-4\lambda\mu-1)(1-\sqrt{1-4\lambda\mu})^{n-1}]}{\sqrt{1-4\lambda\mu}} =$$

$$= \frac{-4\lambda\mu}{2^{n+1}} \frac{\sin n\omega}{\cos^{n-1}\omega \sin\omega}.$$

Таким образом, один из корней, а именно $4\lambda\mu = 0$, сохраняется при всех n, а остальные очевидно лежат на положительной части вещественной оси $4\lambda\mu$ — 1 повсюду плотно.

Наконец в 5-м случае, т. е. при $\mu > 1$, придется опять разбить исследование на три отдельных части: a) $n < 2\mu - 1$, b) $n = 2\mu - 1$ и c) $n > 2\mu - 1$. При этом четное и нечетное мы будем исследовать отдельно. Разберем сначала все три случая, считая n нечетным. В первом из них, т. е. при $n < 2\mu - 1$, все корни $Q(n, 4\lambda\mu)$ будут вещественны. Действительно имеем: $n\mu - \mu < n\mu + \mu - n - 1$, или $\mu(n-1) < (\mu - 1)(n+1)$, но тогда при $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ и $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ $\operatorname{Sign} f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{Sign} f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ и значит при $\omega = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$ и $\omega = \dfrac{3\pi}{2} + \varepsilon$ $\operatorname{Sign} f(\omega) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, а при $\omega = \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ и $\omega = \dfrac{3\pi}{2} - \varepsilon$ $\operatorname{Sign} f(\omega) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$.

Вспомнив теперь, каковы знаки $f(\omega)$ в точках $\omega = \dfrac{\varkappa\pi}{n-1} + \dfrac{\pi}{2n-2}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, легко убедиться в справедливости нашего утверждения. Разберем теперь случай (b), Из $n = 2\mu - 1$ легко получаем $\mu = \dfrac{n+1}{2}$. Подставив это выражение в формулу (4) и вспоминая, что в первом слагаемом старший член $(n+1)(1-4\lambda\mu)^{\frac{n-1}{2}}$, а во втором $-2\mu(1-4\lambda\mu)^{\frac{n-1}{2}}$, мы видим, что он для этого случая сокращается, и следовательно степень нашего уравнения относительно $4\lambda\mu$ будет $\frac{n-3}{2}$. Рассматривая опять $f(\omega)$ в точках $\omega=\frac{\varkappa\pi}{n-1}+\frac{\pi}{2n-2}$ $(\varkappa=0,\ 1,\ldots,2n-1)$, найдем, что $f(\omega)$ имеет $(2n-6)$ вещественных корней, отличных от 0, $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$. Следовательно все корни $Q(n,\ 4\lambda\mu)$ вещественны и лежат повсюду плотно на положительной части вещественной оси $4\lambda\mu-1$.

Случай (с) для нечетного n находится аналогично случаю (с) для третьего из пяти основных случаев. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu)\sin(n+1)\tau\operatorname{ch}(n+1)\sigma-\mu\sin(n-1)\tau\operatorname{ch}(n-1)\sigma=0\\(1-\mu)\cos(n+1)\tau\operatorname{sh}(n+1)\sigma-\mu\cos(n-1)\tau\operatorname{sh}(n-1)\sigma=0.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Опять мы утверждаем, что корнями будут служить: $\tau=\frac{\pi}{2}$ и $\tau=\frac{3\pi}{2}$ и $\sigma=\pm\beta_n$, где β_n — положительный корень уравнения:

$$(1-\mu)\operatorname{sh}(n+1)\sigma+\mu\operatorname{sh}(n-1)\sigma=0.\qquad(10)$$

В существовании такого корня, а затем в единственности и в простоте его, убеждаемся подобно предыдущему.

Для всех четырех систем имеем: $\omega=\frac{\pi}{2}+i\beta_n$, $\omega=\frac{\pi}{2}-i\beta_n$, $\omega=\frac{3\pi}{2}+i\beta_n$, $\omega=\frac{3\pi}{2}-i\beta_n$ и $\frac{1}{\cos^2\omega}=\frac{-1}{\operatorname{sh}^2\beta_n}$. Значит большие нечетные дают корни на отрицательной части $4\lambda\mu-1$, расположенные между Q и $-\infty$. Остальные корни очевидно повсюду плотны на положительной части оси.

Случай четного n для $\mu>1$ мы исследуем вне зависимости от величины n.

Решение системы (8) в этом случае будет $\tau=\frac{\pi}{2}$ и $\tau=\frac{3\pi}{2}$ а $\sigma=\pm\gamma_n$ где γ_n — положительный корень уравнения.

$$(1-\mu)\operatorname{ch}(n+1)\sigma+\mu\operatorname{ch}(n-1)\sigma=0.\qquad(11)$$

Существование такого корня очевидно, так как при $\sigma=0$ левая часть уравнения положительна, а при больших значениях σ она становится отрицательной благодаря преобладанию первого слагаемого. Единственность и простоту, нужные нам в дальнейшем, можно установить с помощью теоремы § 5.

Так как $(-\gamma_n)$ будет служить корнем той же кратности, что и γ_n, то эта кратность не может быть выше первой, так как двух двойных корней уравнение (11) иметь не может, как это вытекает из теоремы. Рассмотрев опять точки $\omega=\frac{\varkappa\pi}{n-1}+\frac{\pi}{2n-2}$, придем к результату, что на вещественной оси $4\lambda\mu-1$ корни повсюду плотны на положительной части и существует один корень $4\lambda\mu=\frac{-1}{ch^2\gamma_n}$ на отрицательной части.

§ 7. В прошлом параграфе мы получили три группы корней, расположенных на отрицательной части $4\lambda\mu - 1$:

1) $\frac{1}{2} < \mu < 1$, $n > \frac{1}{2\mu - 1}$, $4\lambda\mu = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha_n}$, где α_n — больший нуля корень уравнения (9).

2) $\mu > 1$, $n > 2\mu - 1$ нечетное, $4\lambda\mu = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2\beta_n}$, где β_n — больший нуля корень уравнения (10).

3) $\mu > 1$, n четное, $4\lambda\mu = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2\gamma_n}$, где γ_n — больший нуля корень уравнения (11).

Относительно всех трех случаев мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Если* n *возрастает неограниченно, то эти корни стремятся к пределу.*

Доказательство для каждого случая мы проведем отдельно.

1) Докажем, что все α_n ограничены числом $\frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}$.

Действительно: $(1-\mu)\,e^{(n+1)\alpha_n} - \mu e^{(n-1)\alpha_n} = (1-\mu)\,e^{-(n+1)\alpha_n} - \mu e^{-(n-1)\alpha_n}$, или $e^{(2n+2)\alpha_n}\left[(1-\mu) - \mu e^{-2\alpha_n}\right] = (1-\mu) - \mu e^{2\alpha_n}$, и так как правая часть последнего равенства отрицательна, то и левая должна быть отрицательной, и следовательно: $(1-\mu) - \mu e^{-2\alpha_n} < 0$, откуда и вытекает $\alpha_n < \frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}$.

Теперь докажем, что корни α_n возрастают вместе с n. Для этого установим, что если подставить в левую часть уравнения (9) $n+1$ вместо n, то при $\sigma = \alpha_n$ эта левая часть отрицательна. Запишем это условие в виде:

$$e^{(2n+4)\alpha_n}\left[(1-\mu) - \mu e^{-2\alpha_n}\right] < (1-\mu) - \mu e^{2\alpha_n}.$$

Так как левая часть неравенства отрицательна и $e^{(2n+4)\alpha_n} > e^{(2n+2)\alpha_n}$, то, приняв во внимание, что

$$e^{(2n+2)\alpha_n}\left[(1-\mu) - \mu e^{-2\alpha_n}\right] = (1-\mu) - \mu e^{2\alpha_n},$$

легко убеждаемся в его справедливости.

Наконец покажем, что, каково бы ни было $A < \frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}$, можно найти такое n, что левая часть уравнения (9) отрицательна при $\sigma = A$ и следовательно при таком n: $\alpha_n > A$.

Действительно условие

$$(1-\mu)\,\mathrm{sh}\,(n+1)\,A - \mu\,\mathrm{sh}\,(n-1)\,A < 0$$

равносильно

$$e^{(2n+2)A}\left[1-\mu) - \mu e^{-2A}\right] < (1-\mu) - \mu e^{2A},$$

и так как с обеих сторон мы имеем отрицательные величины, то при большом n неравенству этому можно удовлетворить. Стало быть точкой сгущения α_n, и притом единственной, будет $\frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}$. Приняв во внимание, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\alpha_n} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}} = \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}} + \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}}{2}\right]^2},$$

получим:

$$\lim_{n\to\infty} (4\lambda\mu)_0 = 4\mu(1-\mu),$$

что и требовалось доказать.

2) Доказательство мы опять составим из трех частей. Прежде всего ограниченность β_n, которая устанавливается, как и прежде, с той разницей, что роль $\frac{\mu}{1-\mu}$ играет здесь $\frac{\mu}{\mu-1}$. Также можно установить в два приема, что

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{1-\mu}.$$

Наконец, так как

$$\operatorname{sh}\frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\mu-1}} - \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}}{2},$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty} (4\lambda\mu)_0 = 4\mu(1-\mu).$$

3) Совершенно аналогично проведем доказательство для 3-го случая.

Покажем ограниченность γ_n снизу числом $\frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{\mu-1}$.

Действительно:

$$e^{(2n+2)\gamma_n}[(1-\mu)+\mu e^{-2\gamma_n}] = -[(1-\mu)+\mu e^{2\gamma_n}],$$

откуда и вытекает наше неравенство:

$$\gamma_n > \frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{\mu-1}.$$

Затем покажем, что γ_n убывают при возрастании n. Это опять является следствием отрицательности левой части уравнения (11), если заменить в нем n на $n+1$. Действительно:

$$e^{(2n+4)\gamma_n}[(1-\mu)+\mu e^{-2\gamma_n}] < -[(1-\mu)+\mu e^{2\gamma_n}],$$

так как

$$e^{(2n+4)\gamma_n} > e^{(2n+2)\gamma_n} \text{ и } e^{(2n+2)\gamma_n}[(1-\mu)+\mu e^{-2\gamma_n}] = -[(1-\mu)+\mu e^{2\gamma_n}].$$

Далее опять, каково бы ни было $B > \frac{1}{2}\lg\frac{\mu}{\mu-1}$, можно найти такое n, что левая часть (11) отрицательна.

Действительно условию:

$$e^{(2n+2)B}[(1-\mu)+\mu e^{-2B}] < -[(1-\mu)+\mu e^{2B}]$$

очевидно можно удовлетворить при больших n. Значит опять:

$$\lim_{n\to\infty} (4\lambda\mu)_0 = 4\mu(1-\mu),$$

и теорема доказана полностью.

Результаты §§ 5, 6 и 7 дают пока общее заключение.

Точками сгущения корней $Q(n, 4\lambda\mu, \mu)$ при $R(\mu) > \frac{1}{2}$ являются $\lambda+\mu=1$ как при μ постоянном, так и при $\lambda\mu$ постоянном.

Кроме того точкой сгущения является любая точка положительного $4\lambda\mu - 1$ с вещественным μ [причем эта точка служит таковой как при $4\lambda\mu$ постоянном (с некоторым условием об иррациональности), так и при μ постоянном].

§ 8. Займемся исследованием корней $f(\omega) = 0$ при μ каком угодно комплексном. Пусть $\mu = \alpha + \beta i$. Тогда, полагая $\omega = \tau + i\sigma$ и разделяя вещественную и мнимую части уравнения (7), получим систему:

$$\left.\begin{aligned} &(1-\alpha)\operatorname{ch}(n+1)\sigma\sin(n+1)\tau + \beta\operatorname{sh}(n+1)\sigma\cos(n+1)\tau - \\ &\quad - \alpha\operatorname{ch}(n-1)\sigma\sin(n-1)\tau + \beta\operatorname{sh}(n-1)\sigma\cos(n-1)\tau = 0 \\ &(1-\alpha)\operatorname{sh}(n+1)\sigma\cos(n+1)\tau - \beta\operatorname{ch}(n+1)\sigma\sin(n-1)\tau - \\ &\quad - \alpha\operatorname{sh}(n-1)\sigma\cos(n-1)\tau - \beta\operatorname{ch}(n-1)\sigma\sin(n-1)\tau = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

в которой левые части представляют собою вещественную и мнимую части $f(\omega)$. Покажем, как мы уже указывали раньше, что точками сгущения для корней (12) при возрастании n будет та же самая положительная вещественная ось $4\lambda\mu - 1$ (т. е. вещественная ось ω) и кроме того при $R(\mu) > \frac{1}{2}$ $\mu = 1 - \lambda$.

Для этого мы проведем на плоскости ω контур в виде прямоугольника с вырезанными кружочками, чтобы избежать очевидных корней 0 и π, и сосчитаем изменение $\arg f(\omega)$ при обходе по этому контуру.

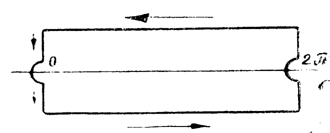

Рис. 2.

Пусть сначала $R(\mu) \leqslant \frac{1}{2}$. Заметим, что благодаря периодичности при обходе по сторонам, параллельным мнимой оси, приращения arg равны по величине и обратны по знаку и в результате сокращаются. Далее при достаточно большом n мы можем представить $R[f(\omega)]$ и $I[f(\omega)]$ в виде:

$$\begin{aligned} R[f(\omega)] = [&(1-\alpha)e^{\sigma}\sin(n+1)\tau + \beta e^{\sigma}\cos(n+1)\tau - \\ &- \alpha e^{-\sigma}\sin(n-1)\tau + \beta e^{-\sigma}\cos(n-1)\tau]\, e^{n\sigma} + \psi_1(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I[f(\omega)] = [&(1-\alpha)e^{\sigma}\cos(n+1)\tau - \beta e^{\sigma}\sin(n+1)\tau - \\ &- \alpha e^{-\sigma}\cos(n-1)\tau - \beta e^{-\sigma}\sin(n-1)\tau]\, e^{n\sigma} + \psi_2(\tau, \sigma), \end{aligned}$$

где при фиксированном σ:

$$\psi_1(\tau, \sigma) < \varepsilon, \quad \psi_2(\tau, \sigma) < \varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} < \varepsilon \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} < \varepsilon.$$

Представим теперь их еще в новой форме, введя:

$$\cos\varphi = \frac{1-\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}}, \quad \cos\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\sin\psi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

и кроме того:

$$A = \sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}\, e^{\sigma} \text{ и } B = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{-\sigma}.$$

Так как

$$R(\mu) = \alpha < \frac{1}{2},$$

то очевидно

$$1-\alpha>\alpha,$$

тем более:

$$A>B.$$

Уравнения (12) перепишутся:

$$\left.\begin{array}{r} R[f(\omega)]=e^{n\sigma}\{A\sin[(n+1)\tau+\varphi]- \\ -B\sin[(n-1)\tau-\psi]\}+\psi_1(\tau,\ \sigma)=0 \\ I[f(\omega)]=e^{n\sigma}\{A\cos[(n+1)\tau+\varphi]- \\ -B\cos[(n-1)\tau-\psi]\}+\psi_2(\tau,\ \sigma)=0. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Теперь, для того чтобы подсчитать число окружностей, на которые изменится $\arg f(\omega)$, нужно подсчитать число перемежающихся корней у наших выражений $R[f(\omega)]$ и $I[f(\omega)]$. Мы покажем, что все их корни перемежаются. Прежде всего очевидно, что оба они имеют в промежутке $0<\tau<2\pi$ ровно $2n+2$ корня. Для этого достаточно убедиться в том, что в точках $\tau=-\varphi+\frac{\varkappa\pi}{n+1}+$ $+\frac{\pi}{2n+2}$ $R[f(\omega)]$ имеет разные знаки при достаточно большом n, ибо фигурная скобка имеет знак первого слагаемого и по абсолютной величине больше, чем $A-B$, а $\psi_1(\tau, \sigma)$ мало. В точках же $\tau=-\varphi+\frac{\varkappa\pi}{n+1}$, $I[f(\omega)]$ по той же причине имеет противоположные знаки при различных $\varkappa$. Для того, чтобы проверить перемежаемость, положим $R[f(\omega)]=X(\tau)e^{n\sigma}$, $I[f(\omega)]=Y(\tau)e^{n\sigma}$ и составим определитель $\begin{vmatrix} X', & Y' \\ X, & Y \end{vmatrix}$.

Известно, что если этот определитель будет голоморфной функцией, не имеющей нулей на некотором промежутке, то X и Y удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению 2-го порядка типа $u''+pu'+q=0$ с голоморфными в этом промежутке p и q, и следовательно корни их по теореме Штурма будут перемежаться. Перемежаемость корней X и Y повлечет за собой таковую же для $R[f(\omega)]$ и $I[f(\omega)]$. Известно также, что если этот определитель положителен, то при переходе X с $-$ на $+$ Y имеет положительную величину, а при переходе с $+$ на $-$ Y отрицателен.

Имея это в виду, переходим к фактическому его вычислению.

Получаем:

$$X'=(n+1)\{A\cos[(n+1)\tau+\varphi]-B\cos[(n-1)\tau-\varphi]+\eta\},$$

где функция η стремится к нулю при возрастании n.

Далее:

$$Y'=-(n+1)\{A\sin[(n+1)\tau+\varphi]-B\sin[(n-1)\tau-\varphi]+\eta'\}$$

и наконец

$$\begin{vmatrix} X', & Y' \\ X, & Y \end{vmatrix}=(n+1)[A^2+B^2-2AB\cos(2\tau+\varphi+\psi)+\xi], \qquad (14)$$

где опять-таки стремится к нулю с возрастанием n. Следовательно наш определитель отличается на множитель, сколь угодно близкий к единице, от $n+1)[A^2+$

$+ B^2 - 2AB\cos(2\tau + \varphi + \psi)]$ и очевидно больше, чем $(n+1)\,[(A-B)^2 - \varepsilon]$. Положительность его указывает на то, что при τ, изменяющемся от 0 до 2π, $\arg f(\omega)$ меняется на $-2(n+1)\pi$, а так как наш обход совершается в обратном направлении, то $\arg f(\omega)$ увеличивается на $2(n+1)\pi$.

Исследование обхода по нижней стороне прямоугольника производится совершенно аналогично, с той разницей, что здесь уже главным членом будет не $e^{n\sigma}$, а $e^{-n\sigma}$. Проведем это фактически. Уравнения (12) представляются в виде:

$$\left.\begin{aligned} R\,[f(\omega)] &= [(1-\alpha)\,e^{\sigma}\sin(n+1)\,\tau - \beta e^{\sigma}\cos(n+1)\,\tau - \\ &\quad - \alpha e^{-\sigma}\sin(n-1)\,\tau - \beta e^{-\sigma}\cos(n-1)\,\tau]\,e^{-n\sigma} + \psi_3 \\ I\,[f(\omega)] &= [-(1-\alpha)\,e^{\sigma}\cos(n+1)\,\tau - \beta e^{\sigma}\sin(n+1)\,\tau + \\ &\quad + \alpha e^{-\sigma}\cos(n-1)\,\tau - \beta e^{-\sigma}\sin(n-1)\,\tau]\,e^{-n\sigma} + \psi_4 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

и далее:

$$X^{*\prime} = (n+1)\,\{A\cos[(n+1)\,\tau - \varphi] - B\cos[(n-1)\,\tau + \psi] + \eta''\},$$
$$Y^{*\prime} = (n+1)\,\{A\sin[(n+1)\,\tau - \varphi] - B\sin[(n-1)\,\tau + \psi] + \eta'''\},$$

и наконец:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} X^{*\prime}, & Y^{*\prime} \\ X^{*}, & Y^{*} \end{vmatrix} &= (n+1)\,[-A^2 - B^2 + 2AB\cos(2\tau - \varphi - \psi) + \\ &\quad + \xi'] < -[(A - B^2) - \varepsilon]\,(n+1)]. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Отрицательность определителя, в связи с изменением направления обхода, сразу дает нам еще $2(n+1)\pi$ на которые изменится $\arg f(\omega)$. (Число корней получаем совершенно аналогично предыдущему.)

Таким образом полный обход по нашему контуру дает нам приращение аргумента на $4(n+1)\pi$, и так как $f(\omega)$ — функция целая, то она должна при больших n иметь внутри рассмотренного прямоугольника $2n+2$ корня. Отбрасывая 2 корня при четном n и 4 корня при нечетном, мы видим, что нами найдены все корни $Q(n, 4\lambda\mu)$. Покажем еще, что точками сгущения служат все точки вещественной оси. Для этого вырежем где-нибудь маленький прямоугольник из старого двумя ординатами так, чтобы на этих ординатах при любом n корней не было (добиться этого можно благодаря исчислимости корней).

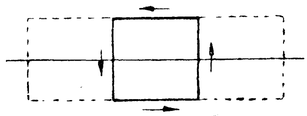

Рис. 3.

Очевидно, что обход по сторонам, параллельным оси τ, дает приращение аргумента, растущее с n неограниченно, и следовательно затруднения представляет лишь обход по ординатам. Но обращаясь к выражениям (12), мы видим, что их левые части, как функции от переменного σ, имеют вид левых частей уравнений типа (A), рассмотренных в § 5, и следовательно обращаются в нуль не более трех раз. Значит приращение $\arg f(\omega)$ на обеих ординатах не превосходит 6π (если бы все корни фактически были вещественными и перемежались в должном порядке). Отсюда следует, что любой такой прямоугольник содержит внутри себя сколь угодно много корней $Q(n, 4\lambda\mu)$ при достаточно большом n. Так как такой прямоугольник, и притом произвольно малый, можно описать вокруг любой точки вещественной оси ω, то очевидно, что все точки этой оси, а следовательно и все точки положительной части вещественной оси $(4\lambda\mu - 1)$, будут служить предельными для корней $Q(n, 4\lambda\mu)$. Этот случай совершенно аналогичен тому случаю, когда μ вещественно. Он дает однако нечто принципиально новое по сравнению с результатами § 4, так как точки, где $4\lambda\mu - 1$ вещественно и положительно, а μ — комплексное число, являются точками сгущения корней $Q(n,\ 4\lambda\mu)$ и не являются таковыми для корней $Q(n,\ \mu)$. Приступая к случаю, когда $R(\mu) > \frac{1}{2}$, мы проделываем сначала то же, что и в случае $R(\mu) \leqslant \frac{1}{2}$. Отделяя вещественную и мнимую части $f(\omega)$ и выделяя главные члены, получим, вводя как и раньше аргументы φ и ψ вместе с числами A и B, уравнение (13). Разница между разобранным уже случаем и новым будет в том, что при наших условиях, если $\sigma < \frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2}}$, то $B > A$, если $\sigma = \frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2}}$, то $B = A$, и если $\sigma > \frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2}}$, то $A > B$. С помощью рассуждений, совершенно аналогичных предыдущим, производя подсчет числа корней внутри прямоугольника, верхней границей которого будет $\sigma_1 < \frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2}}$, а

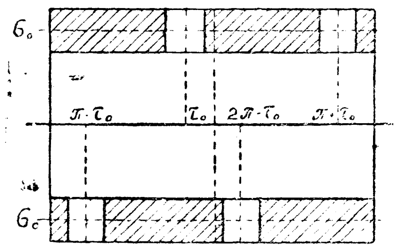

Рис. 4.

нижней — σ_1 мы установим, подсчитав корни X^{**} и Y^{**} и выяснив закон их перемежаемости, что корней внутри его будет $2n-2$. С помощью тех же рассуждений мы убедимся, что эти корни сгущаются ко всем точкам вещественной оси. Откидывая 2 из них для четного n и 4 для нечетного, мы обнаружим $\frac{n}{2} - 1$ корень $Q(n,\ 4\lambda\mu)$ для четного и $\frac{n-1}{2} - 1$ — корень для нечетного n. Остается таким образом найти еще один корень.

Для этого мы обойдем в плоскости ω еще по двум контурам также прямоугольной формы. Обозначив число $\frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2}}$ через σ_0, мы выберем прямоугольники, как показано на чертеже. В первом из них верхняя граница выше σ_0, а нижняя ниже его. Во втором верхняя граница выше — σ_0, а нижняя ниже этого числа. Абсциссы боковых сторон возьмем 0 и 2π. Нетрудно проверить, что при достаточно большом n внутри каждого такого прямоугольника будет заключаться ровно 2 корня $f(\bar{\omega})$. Действительно: обход по вертикальным сторонам не даст никакого приращения аргументу $f(\omega)$, так как $f(\omega)$ — функция периодическая. Обход по верхней стороне верхнего прямоугольника даст приращение аргумента $2(n+1)\pi$, как и в том случае, когда $R(\mu) \leqslant \frac{1}{2}$. Обход же по нижней стороне, как не трудно убедиться, даст $-2(n-1)\pi$ благодаря положительности определителя $\begin{vmatrix} X', & Y' \\ X', & Y \end{vmatrix}$. Для нижнего прямоугольника обход по верхней стороне даст $-2(n-1)\pi$ (хотя направление прямое, но определитель отрицателен). По нижней стороне обход даст $2(n+1)\pi$. Отсюда сразу ясна справедливость нашего утверждения. Теперь, чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, положим $\beta > \omega$.

Благодаря произвольной малости высоты наших прямоугольников мы видим, что мнимая часть тех корней $f(\omega)$, которые не идут к вещественной оси, стремится к σ_0.

Введем еще числа τ_0, $\pi+\tau_0$, $\pi-\tau_0$ и $2\pi-\tau_0$ с помощью формулы $2\tau_0+\varphi+\psi=2\pi$, или $\tau_0=\pi-\frac{\varphi+\psi}{2}$. Докажем, что если в наших прямоугольниках вырезать из каждого два других, включающих в себя в верхнем τ_0 и $\pi+\tau_0$, а в нижнем $\pi-\tau_0$ и $2\pi-\tau_0$, то при достаточно большом n внутри оставшихся частей, которые на чертеже заштрихованы, не будет находиться ни одного корня $f(\omega)$. Действительно, обращаясь к выражению для определителя $\begin{vmatrix} X', & Y' \\ X, & Y \end{vmatrix}$, мы видим, что при достаточно большом n внутри этих областей он повсюду больше некоторого фиксированного положительного числа для верхнего прямоугольника и меньше некоторого числа для нижнего прямоугольника. Это вытекает из того, что, исключив для τ в верхнем прямоугольнике те значения, при которых $\cos(2\tau+\varphi+\psi)$ обращается в единицу, мы можем утверждать, что этот cos меньше, чем некоторое положительное число q. Но при этом, если n достаточно велико, определитель не меньше, чем $(n+1)\{[A^2+B^2-2qAB]-\varepsilon\}$, а фигурная скобка больше, чем $(1-q)AB-\varepsilon$, т. е. больше, чем

$$(1-q)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}-\varepsilon.$$

Совершенно аналогичными рассуждениями убедимся в том, что в нижнем прямоугольнике определитель повсюду меньше, чем

$$(q-1)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}+\varepsilon.$$

В обоих случаях ε для всей области сколь угодно мало при достаточно большом n. Но при таком n корни вещественной и мнимой частей перемежаются на всех отрезках прямых, параллельных вещественной оси, лежащих внутри заштрихованных прямоугольников, и следовательно совпасть не могут. Следовательно оба корня с мнимой частью, стремящейся к $+\sigma_0$, лежат внутри сколь угодно малых прямоугольников, окружающих $\tau_0+i\sigma_0$ и $\tau_0+\pi+i\sigma_0$. Очевидно, что корни эти должны отличаться на π благодаря структуре функций $f(\omega)$, и следовательно в каждом таком прямоугольнике заключается по одному корню. Для корней с мнимой частью, стремящейся к $-i\sigma_0$, можно установить то же, причем точками сгущения будут служить $\pi-\tau_0-i\sigma_0$ и $2\pi-\tau_0-i\sigma_0$. Ясно, что других точек сгущения корней нет. Займемся теперь рассмотрением, какому значению $4\lambda\mu$ соответствуют эти 4 корня. (Ясно, что такое значение одно.) Посмотрим, чему отвечает например $\tau_0+i\sigma_0$. Очевидно, что все другие будут отвечать тому же. Займемся предварительно исследованием τ_0.

Имеем:

$$\tau_0=\pi-\frac{\varphi+\psi}{2} \quad \text{и} \quad 2\tau_0=2\pi-(\varphi+\psi).$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\tau_0 &= \cos(\varphi+\psi)=\frac{(1-\alpha)\alpha-\beta^2}{\sqrt{[(1-\alpha)^2+\beta^2](\alpha^2+\beta^2)}} \\ \text{и}\qquad & \\ \sin 2\tau_0 &= -\sin(\varphi+\psi)=\frac{-(1-\alpha)\beta+\alpha\beta}{\sqrt{[(1-\alpha)^2+\beta^2](\alpha^2+\beta^2)}}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Очевидно, что угол τ_0 больше, чем $\frac{\pi}{2}$, и меньше, чем π, этим нам придется воспользоваться.

Далее:

$$\operatorname{tg} 2\tau_0 = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}. \tag{18}$$

Из этого уже легко получить τ_0.

Так как

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + xi}{1 - xi},$$

то

$$2\tau_0 = \frac{1}{2i} \lg \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta i}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta i}, \quad \tau_0 = \frac{1}{4i} \lg \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta i}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta i}.$$

Полагая $\tau_0 + i\sigma_0 = \omega_0$, получим для ω_0 выражение:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{4i} \lg \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta i}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta i} - \frac{1}{4i} \lg \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1-\alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= \frac{1}{4i} \lg \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta i)\,[(1-\alpha)^2 + \beta^2]}{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta i)(\alpha^2 + \beta^2)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Наконец, возвращаясь от α и β к μ, полагая $\beta i = \mu - \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{4i} \lg \frac{(\alpha^2 - \mu^2 + 2\mu\alpha - \alpha^2 - \alpha + \mu - \alpha)\,[1 - \mu^2 + 2(\mu - 1)\alpha]}{(\alpha^2 - \mu^2 + 2\mu\alpha - \alpha^2 - \alpha - \mu + \alpha)(\alpha^2 - \mu^2 + 2\mu\alpha - \alpha^2)} = \\ &= \frac{1}{4i} \lg \frac{[2\alpha(\mu - 1) - \mu(\mu - 1)]\,(\mu - 1)(2\alpha - \mu - 1)}{\mu^2 (2\alpha - \mu - 1)(2\alpha - \mu)} \\ \omega_0 &= \frac{1}{4i} \lg \frac{(1-\mu)^2}{\mu^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Вспомним теперь, что в этом выражении при нашей оговорке относительно β вещественная часть должна быть заключена между $\frac{\pi}{2}$ и π. Для ω_0 очевидно возможны два различных выражения:

$$\omega_0 = \frac{1}{2i} \lg \frac{1-\mu}{\mu} \text{ и } \omega_0 = \frac{1}{2i} \lg \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

В силу нашего замечания только первое из этих выражений может дать нам значение, лежащее во второй или в четвертой четверти. Действительно:

$$0 < \arg \mu < \frac{\pi}{2}$$

и

$$0 > \arg(1 - \mu) > -\pi.$$

Кроме того, так как

$$\alpha > \frac{1}{2} \arg \mu > \arg(1 - \mu)$$

и

$$\arg \mu - \arg(1 - \mu) < \pi,$$

то

$$0 > \arg \frac{1-\mu}{\mu} > -\pi$$

и

$$0 < \arg \frac{\mu - 1}{\mu} < \pi,$$

откуда и вытекает наше утверждение. Случай, когда $\beta < 0$ совершенно аналогичен рассмотренному. Проводя все рассуждения точно так же и вводя τ_0' по формуле $2\tau_0 + \varphi + \psi = 0$, или $\tau_0' = -\frac{\varphi + \psi}{2}$, мы приходим к аналогичному результату с той разницей, что $0 < \tau_0' < \frac{\pi}{2}$. Так как при этом μ и $1 - \mu$ поменяются ролями, то в результате мы получим для ω_0 ту же формулу:

$$\omega_0' = \lg \frac{1 - \mu}{\mu}.$$

Окончательно:

$$\omega_0 = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 - \mu}{\mu} = \frac{1}{i} \lg \sqrt{\frac{1 - \mu}{\mu}} + \frac{\varkappa i \pi}{2} \quad (\varkappa = 0,\ 1). \tag{21}$$

Вычисляя теперь $\frac{1}{\cos^2 \omega_0} = (4\lambda\mu)_0$, получим:

$$\cos \omega_0 = \frac{e^{i\frac{1}{2i}\lg\frac{1-\mu}{\mu}} + e^{-i\frac{1}{2i}\lg\frac{1-\mu}{\mu}}}{2} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}}}{2}.$$

$$\cos^2 \omega_0 = \frac{\frac{1-\mu}{\mu} + \frac{\mu}{1-\mu} + 2}{4} = \frac{\frac{1 - 2\mu + \mu^2 + \mu^2 + 2\mu - 2\mu^2}{\mu(1-\mu)}}{4} = \frac{1}{4\mu(1-\mu)},$$

откуда

$$(4\lambda\mu)_0 = 4\mu(1 - \mu),$$

или

$$\lambda = 1 - \mu. \tag{22}$$

Таким образом утверждение верно и для комплексного μ.

§ 9. В § 3 настоящей главы мы указывали, что корни $Q(n)$ вообще говоря будут полосами функции, представляющей собою искомое нами решение системы. Ссылаясь на это замечание и вводя для большей законченности вместо $4\lambda\mu$ другой переменный параметр $\xi = \sqrt{1 - 4\lambda\mu}$, мы можем о ончательно резюмировать все сказанное.

Система уравнений вида (1) имеет решение, являющееся аналитической функцией x и y, разложимой в ряд Тэйлора вблизи $x = \omega$ и $y = \omega$, такой, что v обращается в нуль при $x = 0$ и w при $y = 0$, и одновременно аналитической функцией коэфициентов уравнений, заданной во всей верхней полуплоскости ξ и мероморфной в ней, причем, вообще говоря, вещественная ось ξ и точка $\lambda = 1 - \mu$ при $R(\mu) > \frac{1}{2}$ являются существенными особенностями, ибо к ним сгущаются ее полюса. Таким образом, вообще говоря, в этом частном случае результатов второй главы улучшить нельзя.

Ленинград 1929 г.

Sur les solutions analytiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec deux variables indépendantes

Par **S. Soboleff** (Leningrad)

(Résumé)

M. Gunther dans le t. XXXII de ce journal a étudié l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{1}. \tag{1}$$

Il a démontré que si la valeur initiale de $4\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - 1$ est un nombre complexe quelconque qui n'est pas situé sur la partie positive de l'axe réel, l'équation (1) admet une solution se réduisant aux fonctions arbitrairement choisies pour $x = 0$ et pour $y = 0$. La méthode employée par lui consiste dans l'évaluation immédiate des coefficients du développement de u en série de Taylor. Il a établi aussi que la partie positive de l'axe réel de $4\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - 1$ est un ensemble de points limites des racines des déterminants, qui entrent lors le calcul des coefficients de la solution — si nous regardons ces déterminants comme fonctions de cet argument.

En introduisant des inconnues nouvelles on peut réduire le système général des équations aux dérivées partielles avec deux variables indépendantes à un système du premier ordre. Ce dernier système peut être traité d'une manière analogue.

Les déterminants qui entrent lors le calcul des valeurs initiales des dérivées d'ordre n, ainsi que tous leurs mineurs, peuvent être évalués asymptotiquement. Pour cela il faut employer quelques formules de recurrence qui lient ces déterminants avec quelques autres, qui sont choisies d'une manière spéciale. Si on traite ces formules comme les équations aux différences finies, on peut trouver ces déterminants et ses mineurs, en supposant que les racines de l'équation caractéristique de ce système sont connues.

Nous nous proposons d'étudier le système:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^{(j)}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \beta_1^{(j)}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \alpha_2^{(j)}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots + \beta_m^{(j)}\frac{\partial v_m}{\partial y} + \varepsilon_1^{(j)}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \\ &+ \delta_1^{(j)}\frac{\partial w_1}{\partial y} + \ldots + \delta_l^{(j)}\frac{\partial w_l}{\partial y} + F_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, (m+l) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où les valeurs initiales des dérivées des fonctions F_j par rapport à toutes les dérivées des fonctions inconnues sont nulles. Cherchons la solution dans laquelle les fonctions v prennent les valeurs ordonnées sur l'axe OY, c'est à dire pour $x = 0$, et les fonctions w — sur l'axe OX.

---

[1] N. Gunther, Sur les solutions analytiques de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, «Rec. math.», XXXII, 1929.

Donnons le nom des quadrants aux matrices

$$A_l^{(k)}(n)=\left\|\begin{matrix}\alpha_l^{(k)}\beta_l^{(k)}0\ldots 000\\ 0\,\alpha_l^{(k)}\beta_l^{(k)}\ldots 000\\ \ldots\ldots\ldots\\ 000\ldots\alpha_l^{(k)}\beta_l^{(k)}0\\ 000\ldots 0\,\alpha_l^{(k)}\beta_l^{(k)}\end{matrix}\right\| \text{ et } B_l^{(k)}(n)=\left\|\begin{matrix}\varepsilon_l^{(k)}\delta_l^{(k)}0\ldots 000\\ 0\,\varepsilon_l^{(k)}\delta_l^{(k)}\ldots 000\\ \ldots\ldots\ldots\\ 000\ldots\varepsilon_l^{(k)}\delta_l^{(k)}0\\ 000\ldots 0\,\varepsilon_l^{(k)}\delta_l^{(k)}\end{matrix}\right\|$$

qui contiennent chacune n lignes et $(n+1)$ colonnes et convenons de désigner avec les symboles $\underline{A}$, $\overline{A}$, $\underline{\underline{A}}$ et $\tilde{A}$ rep. $\underline{B}$, $\overline{B}$, $\underset{\sim}{B}$, $\bar{\bar{B}}$ le résultat d'éffaçage dans A ou B de la première ou de la dernière ligne ou colonne.

Si nous convenons de comprendre le symbole:

$$\left|\begin{matrix}\underline{A_1^{(1)}(n)}, & \underline{\overline{A_2^{(1)}(n)}}, \ldots, & B_l^{(1)}(n)\\ \ldots\ldots\ldots & & \\ \underline{A_1^{(m+l)}(n)}, & \underline{\overline{A_2^{(m+l)}(n)}}, \ldots, & \widetilde{B_l^{(m+l)}(n)}\end{matrix}\right|$$

Comme le détérminant forme ainsi que tous les symboles A et B sont remplacés par les matrices correspondantes, et qu'après cela toutes les séparations sont biffées — le déterminant $P(n)$ cherché sera représenté par le symbole

$$P(n)=\left|\begin{matrix}\overline{A_1^{(1)}(n)}, \overline{A_2^{(1)}(n)},\ldots,\overline{A_m^{(1)}(n)}, \underline{B_1^{(1)}(n)}, \underline{B_2^{(1)}(n)},\ldots,\underline{B_l^{(1)}(n)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{A_1^{(m+l)}(n)}, \overline{A_2^{(m+l)}(n)},\ldots,\overline{A_m^{(m+l)}(n)}, \underline{B_1^{(m+l)}(n)}, \underline{B_2^{(m+l)}(n)},\ldots,\underline{B_l^{(m+l)}(n)}\end{matrix}\right|.$$

Si l'on introduit encore $2\left[\binom{m+l}{m}-1\right]$ autres déterminants qu'on reçoit par les permutations des $\overline{}$ ou $\underline{}$ quelconques dans le déterminant $P(n)$ suivies des multiplications convenables par ± 1, on peut montrer que P_n et ces déterminants satisfont aux deux systèmes suivants des équations:

$$\begin{cases} P(n)=\Delta(m,l)\,P(n-1)+\sum\limits_{h,f,r}\Delta(m,l;;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r})\,S(n-1;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r};)\\ S(n-1;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s};)=\Delta(m,l;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s};)\,P(n-1)+\\ \quad+\sum\limits_{h,f,r,}\Delta(m,l;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s};{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r})\,S(n-1;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r};)\end{cases}$$

$$\begin{cases} P(n)=\Delta(m,l)\,P(n-1)+\sum\limits_{h,f,r}\Delta(m,l;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r};)\,S(n-1;;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r})\\ S(n-1;;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s})=\Delta(m,l;;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s})\,P(n-1)+\\ \quad+\sum\limits_{h,f,r}\Delta(m,l;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r};{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s})\,S(n-1;;{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r}).\end{cases}$$

Les coefficients

$$\Delta(m,l;{}^{i_1,i_2\ldots i_s}_{j_1,j_2\ldots j_s};{}^{h_1,h_2\ldots h_r}_{f_1,f_2\ldots f_r})$$

sont les produits de ± 1 par les déterminants formé par celles des colonnes de la matrice:

$$M = \left\| \begin{matrix} \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_m^{(1)}\varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_2^{(1)}\ldots\varepsilon_l^{(1)},\ \beta_1^{(1)}\ldots\beta_m^{(1)},\ \delta_1^{(1)}\ldots\delta_l^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(m+l)}\alpha_2^{(m+l)}\ldots\alpha_m^{(m+l)},\ \varepsilon_1^{(m+l)}\varepsilon_2^{(m+l)}\ldots\varepsilon_l^{(m+l)},\ \beta_1^{(m+l)}\ldots\beta_m^{(m+l)},\ \delta_1^{(m+l)}\ldots\delta_l^{(m+l)} \end{matrix} \right\|$$

dans lesquelles α ont tous les indices excepté $h_1, h_2, \ldots h_r$, δ — tous les indices excepté $j_1, j_2, \ldots j_s$, ε ont les indices $f_1, f_2, \ldots f_r$, et β — les indices $i_1, i_2, \ldots i_s$. Soit l'équation caractéristique de ces deux systèmes $D(m, l; z) = 0$. Analogiquement on peut introduire les équations $D(k, r; z) = 0$ où $k + r = m + l$.

Si on calcule le mineur d'un élément quelconque du déterminant $P(n)$, on conclut que ce mineur est égal à une somme finie de produits de trois multiplicateurs. Deux de ces multiplicateurs satisfont aux systèmes d'équations aux différences finies avec l'équation caractéristique $D(m, l; z) = 0$ et le troisième — avec l'équation caractéristique $D(m+1, l-1; z) = 0$ ou $D(m-1, l+1; z) = 0$, selon que notre élément soit situé au dessus ou au dessous de la diagonale de son quadrant. Le degré de ce multiplicateur *se confond* avec la distance de l'élément de la diagonale; tandis que la somme des degrés de deux autres complète ce nombre à n. Au moyen de la représentation asymptotique des solutions d'équations aux différences finies on peut évaluer la somme des modules des rapports à $P(n)$ des mineurs des éléments de chaque colonne de $P(n)$. Cela conduit à une condition suffisante pour l'existence de la solution cherchée.

Théorème. Si 1°. *Pour nos conditions initiales tous les* P(n) *sont distincts de* 0.

2°. *Parmi les racines de l'équation* D (m, l; z) = 0 *il y a une qui est la plus grande de module.*

3°. *Le carré du module de cette racine est plus grand que le produit des modules des plus grandes racines des équations* $\Gamma(n+1, l-1; z) = 0$ *et* $D(m-1, l+1; z) = 0$.

4°. *Le coefficient de la* n*-ième puissance de cette racine dans la représentation de* P(n) *est différent de zéro, — alors le système* (1) *a la solution cherchée.*

Dans le voisinage des valeurs choisies des coefficients cette solution sera leur fonction analytique.

Particulièrement l'application de cette théorie à un système aux deux inconnues conduit aux résultats suivants: Le système:

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial w}{\partial x} + F_1 = 0,$$

$$x\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \delta\frac{\partial w}{\partial y} + F_2 = 0,$$

où $\alpha\delta = \lambda$, $\beta\varepsilon = \mu$, $\gamma x = \nu$ et $\lambda + \mu - \nu = 1$, a la solution cherchée si les coefficients ne remplissent pas l'une des deux conditions: ou 1° $4\lambda\mu - 1 = k$ où k, est un nombre positif réel quelconque, ou 2° $\nu = 0$, $R(\mu) > \frac{1}{2}$. La première de ces conditions correspond au cas dans lequel la seconde condition du théorème n'est pas remplie et la seconde au cas, où la quatrième condition cesse de l'être. Le premier cas se confond avec celui de M. Gunther, tandis que le second se trouve dans le travail de Meray [1].

Les valeurs exclues des paramètres λ, μ forment l'ensemble limite des λ et μ pour lesquelles on a $P(n)=0$, comme dans le cas de M. Gunther.

Leningrad 1929.

Отв. редакторы: **С. А. Чаплыгин**
М. Высотский

---

[1] Meray (avec la collaboration de Riquier), Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires des équations aux dérivées partielles, «Ann. de l'École normale», s. III, t. 7 (1890).

Уполн. Главлита № Б—7425. Заказ № 2711. $9^{1}/_{4}$ п. л. НТ—6. Огиз № 30. Тираж 2 500

3-я типография Огиза «Красный пролетарий», Москва, Краснопролетарская, дом 16.