Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Проблема Борсука для целочисленных многогранников, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 10, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:09:16

УДК 519.174+514.172.45

А. М. Райгородский

Проблема Борсука для целочисленных многогранников

Пусть $f(d)$ – минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное ограниченное множество, лежащее в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. В 1933 году К. Борсук высказал гипотезу о том, что $f(d) = d + 1$. В соответствии с недавними результатами Дж. Кана–Г. Калаи, А. Нилли и автора одним из наиболее важных классов объектов, имеющих непосредственное отношение к гипотезе Борсука и близким к ней задачам, является класс целочисленных многогранников.

В настоящей работе с помощью методов, связанных с задачей о покрытии, получены новые верхние оценки для минимального числа частей меньшего диаметра, на которые может быть разбит всякий d -мерный $(0, 1)$ -многогранник и кросс-политоп. Эти оценки в значительной степени улучшают как прежние аналогичные результаты автора, так и все известные оценки на $f(d)$.

Кроме того, в работе изучаются $(0, 1)$ -многогранники и кросс-политопы в малых размерностях.

Библиография: 46 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучается известная проблема Борсука о разбиении множеств в пространстве для одного из наиболее важных частных случаев – для случая целочисленного многогранника. Сперва мы вкратце изложим историю вопроса и заметим, что более подробно с ней можно ознакомиться по книгам [1] и [2], а также по недавнему обзору автора (см. [3]).

В 1933 году К. Борсук (см. [4]) сформулировал следующий вопрос: *верно ли, что всякое ограниченное неотноточечное множество, лежащее в d -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, может быть разбито на $d + 1$ частей меньшего диаметра?* Гипотезу о том, что ответ на этот вопрос должен быть положительным, принято называть гипотезой Борсука. Определяя величину $f(d)$ как минимальное число такое, что всякое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, имеющее ненулевой диаметр, разбивается на $f(d)$ подмножеств меньшего диаметра, мы приходим к эквивалентной формулировке гипотезы: $f(d) = d + 1$. Заметим сразу, что неравенство $f(d) \geq d + 1$ немедленно следует из рассмотрения множества вершин правильного d -мерного симплекса.

В связи с гипотезой Борсука были получены многочисленные частные результаты. Еще в [4] сам Борсук показал, что гипотеза верна при $d = 2$. Г. Эгглстон [5], Ж. Перкал [6], Б. Грюнбаум [7], А. Хешеш [8], П. Кацарова-Каранова [9] и В. В. Макеев [10], [11] в разное время получили доказательства того факта, что $f(d) = d + 1$ и при $d = 3$ (см. более подробный обзор соответствующих результатов в § 7 настоящей работы). Далее, в 1946 году Г. Хадвигер (см. [12]) обосновал

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 00-15-96109 и 02-01-00912).

гипотезу Борсука для случая произвольного d -мерного множества (тела) с гладкой границей, а в 1971 году К. А. Роджерс (см. [13]) предложил способ разбиения на $d + 1$ частей меньшего диаметра любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, которое остается неподвижным под действием группы конгруэнций, оставляющей на месте правильный d -мерный симплекс; аналогичное утверждение относительно центрально-симметричного множества принадлежит А. С. Рислингу (см. [14]).

Следующая группа результатов касается *верхних* оценок для величины $f(d)$ и является наиболее близкой к основной тематике нашей статьи. Эту группу стоит, в свою очередь, разделить на две части: к одной мы будем относить оценки, которые являются в некотором смысле эффективными (т.е. такие оценки, которые могут быть явно вычислены в любой размерности), а к другой – оценки неэффективные. Так, к последней части принадлежат: оценка К. А. Роджерса

$$f(d) \leq (\sqrt{2} + o(1))^d,$$

вытекающая из его работы [15] и доказанная фактически в 1963 году; оценка О. Шрамма

$$f(d) \leq P(d) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^d = P(d)(1.224 \dots + o(1))^d$$

1988 года (см. [16]) и совпадающая с ней, но полученная иным методом оценка Бургейна–Линденштраусса 1991 года (см. [17]); здесь в последних двух неравенствах $P(d)$ – некоторый полином, и эти неравенства с ростом размерности дают наилучшие из имеющихся на данный момент общие верхние оценки для $f(d)$. Оценки же, которые мы условно отнесли к “первой части”, асимптотически намного хуже перечисленных выше и полезны лишь в малых размерностях (см. § 7).

Наконец, гипотеза Борсука была опровергнута во всех достаточно больших размерностях. Последовательность результатов здесь такова: сначала Дж. Кан и Г. Калаи (см. [18]) построили контрпримеры при $d \geq 2015$ и доказали оценку

$$f(d) \geq (1.203 \dots + o(1))^{\sqrt{d}},$$

затем А. Нилли (см. [19]) показал, что гипотеза перестает быть верной уже при $d = 946$, а А. М. Райгородский (см. [20]) понизил эту размерность до величины $d = 561$. Наконец, совсем недавно А. Хинрихс усилил перечисленные результаты, построив контрпримеры при всех $d \in [323, 560]$. В то же время, самая лучшая известная нижняя оценка для $f(d)$ в случае, когда d неограниченно возрастает, принадлежит автору (см. [21]):

$$f(d) \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + o(1) \right)^{\sqrt{2}\sqrt{d}} = (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{d}}.$$

Тем самым, в частности, верхние оценки Шрамма, Бургейна и Линденштраусса (для краткости мы в дальнейшем будем называть их оценками Ш-Б-Л) оказываются не столь разочаровывающими, как то было при сопоставлении их с гипотетическим неравенством $f(d) \leq d + 1$.

Следует заметить теперь, что все контрпримеры, а также все известные нетривиальные нижние оценки для $f(d)$ были получены с помощью рассмотрения некоторых целочисленных многогранников — $(0, 1)$ -многогранников и $(0, 1, -1)$ -многогранников (кросс-политопов) (см. точные определения в § 2)¹. Стало быть, несомненный интерес представляет получение *верхних* оценок для минимального числа частей меньшего диаметра, на которые может быть разбит произвольный многогранник упомянутого вида. Естественно, наиболее содержательными будут те оценки подобного рода, которые позволяют в данном частном случае существенно улучшить оценки Ш-Б-Л. Такие оценки для $(0, 1)$ -многогранников были получены в малых размерностях А. Схрейвером и группой Г. М. Циглера — самим Циглером (см. [23]), а также Х. Пайаном (см. [24]), Й. Петерсеном (см. [25]) и Ф. Шиллером (см. [26]): им удалось показать, что при $d \leq 9$ всякий d -мерный $(0, 1)$ -многогранник разбивается на $d + 1$ частей меньшего диаметра. В асимптотическом же случае ситуация была частично исследована автором — как для $(0, 1)$ -многогранников, так и для кросс-политопов — в работе [27] (см. также [3]), где в весьма существенном классе многогранников им были получены верхние оценки, значительно усиливающие оценки Ш-Б-Л. Следующие пять параграфов настоящей работы посвящены доказательству новых верхних оценок, которые, в свою очередь, применимы на гораздо более широком классе целочисленных многогранников и в значительной степени усиливают прежние оценки автора (в краткой форме и без доказательств некоторые из этих оценок опубликованы в статье [28]). Все необходимые определения и обозначения будут введены в § 2, формулировки всех результатов — прежних и новых — будут даны в § 3, в §§ 4 и 5 будут приведены собственно доказательства, а в § 6 будут указаны всевозможные границы “наилучшей применимости” различных методов и сформулированы соответствующие примеры.

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению результатов, следует отметить, во-первых, что для случая произвольного многогранника (не обязательно целочисленного) нет никакого общего результата уже при $d = 4$; в размерностях 2 и 3 такие результаты получены П. Эрдешем (см. [29]), А. Хепешем и П. Ревесом (см. [30]). Во-вторых, стоит поставить важную задачу о нахождении схожих с циглеровскими оценок для кросс-политопов в малых размерностях. Некоторые вопросы, связанные с этой задачей и задачами, близкими к ней, будут изучены нами в § 7. Наконец, полезно заметить, что общие верхние оценки Шрамма для величины $f(d)$ были получены с помощью методов геометрической задачи освещения (см. [1], [2], [3] и [16]), аналогичные верхние оценки Роджерса и Бургейна—Линденштрауса были основаны на построении плотных упаковок сферических шапочек на сфере, частные оценки Циглера и др. опирались на некоторые свойства оптимальных двоичных кодов, а все наши оценки, по существу, используют методы, разработанные в рамках задачи о покрытии (см. [31]–[33]).

§ 2. Определения и обозначения

Целочисленным многогранником общего вида мы будем называть произвольный многогранник, получаемый в качестве выпуклой оболочки некоторого множества векторов $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r$, принадлежащих целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$: $\Omega = \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r\}$. Если векторы $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r$ являются вершинами куба $[0, 1]^d$

¹По-видимому, первым, кто предположил возможность построения контрпримеров к гипотезе Борсука на основе схожих комбинаторных конфигураций, был П. Эрдеш (см. [22]).

((0, 1)-векторами), то отвечающий им целочисленный многогранник называется (0, 1)-многогранником; если же все эти векторы попадают в множество вершин и центров граней куба $[-1, 1]^d$ (т.е. их координаты могут принимать три значения -1 , 0 и 1 , а сами векторы суть тем самым (0, 1, -1)-векторы), то соответствующий целочисленный многогранник называется, в свою очередь, (0, 1, -1)-многогранником или *кросс-политопом*. В дальнейшем нам потребуются несколько более специальные классы (0, 1)-многогранников и кросс-политопов. Обозначим через $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ стандартное евклидово расстояние между векторами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^d$, а через $\text{diam } \Omega = \sup_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \Omega} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ диаметр множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Определим упомянутые классы многогранников и введем на них нашу основную характеристику – минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито каждое множество из этих классов.

Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{F}_{k,l}^d = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ d -мерных (0, 1)-векторов $\mathbf{v}_i = (v_i^1, \dots, v_i^d)$, удовлетворяющих условиям: $v_i^1 + \dots + v_i^d = l$ и $(\text{diam } \mathcal{F}_{k,l}^d)^2 = k$. Иными словами, семейству $\mathcal{F}_{k,l}^d$ могут принадлежать лишь те (0, 1)-векторы, у которых число единичных координат равно l ; при этом квадрат диаметра семейства должен быть в точности равен k . Заметим, во-первых, что k есть тем самым хэммингов диаметр семейства векторов $\mathcal{F}_{k,l}^d$. Заметим, кроме того, что в силу своего определения величины k и l удовлетворяют естественным ограничениям: k четно, $k > 0$, $l > 0$ (можно также считать, что $k < d$ и $l < d$), $k \leq 2l$ при $l \leq d/2$ и $k \leq 2d - 2l$ при $l > d/2$. Теперь мы положим $\Omega_{k,l}^d = \text{conv}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$, и, стало быть, при каждом фиксированном наборе параметров k, l мы имеем свой класс (0, 1)-многогранников, образованный всеми возможными множествами $\Omega_{k,l}^d$. На этом классе определим величину $f_{k,l}(d)$ как минимальное число такое, что всякий многогранник, принадлежащий классу (всякое семейство векторов $\mathcal{F}_{k,l}^d$), разбивается на $f_{k,l}(d)$ частей меньшего диаметра.

Схожие определения дадим и в случае кросс-политопов, а именно: рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\}$ d -мерных (0, 1, -1)-векторов $\mathbf{w}_i = (w_i^1, \dots, w_i^d)$, удовлетворяющих условиям: $(w_i^1)^2 + \dots + (w_i^d)^2 = l_1 + l_2$, $w_i^1 + \dots + w_i^d = l_1 - l_2$ и $(\text{diam } \mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d)^2 = k$. Иначе говоря, семейство $\mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d$ состоит лишь из таких (0, 1, -1)-векторов, у которых число единичных координат равно l_1 , а число отрицательных компонент совпадает с величиной l_2 ; при этом опять-таки квадрат диаметра такого семейства фиксирован и равен k . Здесь также можно заметить, что из данного определения немедленно вытекают естественные ограничения на возможные значения параметров k, l_1, l_2 , но эти ограничения довольно громоздки, и мы их не приводим. Остается положить $\Omega_{k,l_1,l_2}^d = \text{conv}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\}$ и на соответствующем классе кросс-политопов определить величину $f_{k,l_1,l_2}(d)$ аналогично тому, как это было сделано нами для случая (0, 1)-многогранников.

Следует заметить, что величины $f_{k,l}(d)$ и $f_{k,l_1,l_2}(d)$ могут быть естественным образом проинтерпретированы как хроматические числа конечных графов, у которых множество вершин образовано либо (0, 1)-векторами, либо (0, 1, -1)-векторами, а ребрами соединены те и только те пары вершин, квадрат расстояния между которыми (как векторами из $\mathbb{R}^d$) равен k . В связи с такой интерпретацией полезно рассмотреть следующие общие графы – (хэммингов) граф $\mathcal{H}_{k,l}^d = (\mathcal{V}_{k,l}^d, \mathcal{E}_{k,l}^d)$ и граф $\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d = (\mathcal{V}_{k,l_1,l_2}^d, \mathcal{E}_{k,l_1,l_2}^d)$, – а также их хроматические числа $\chi(\mathcal{H}_{k,l}^d)$ и $\chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d)$. Здесь множество вершин $\mathcal{V}_{k,l}^d = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{C_l^d}\}$ состоит из всех возможных d -мерных (0, 1)-векторов, имеющих ровно l единичных координат, а

множество вершин $\mathcal{V}_{k,l_1,l_2}^d = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{C_d^{l_1+l_2} C_{l_1+l_2}^{l_1}}\}$ состоит из всех возможных d -мерных $(0, 1, -1)$ -векторов, содержащих ровно l_1 положительных и l_2 отрицательных компонент. Вместе с тем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l}^d &= \{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathcal{V}_{k,l}^d \times \mathcal{V}_{k,l}^d : |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = k\}, \\ \mathcal{E}_{k,l_1,l_2}^d &= \{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathcal{V}_{k,l_1,l_2}^d \times \mathcal{V}_{k,l_1,l_2}^d : |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = k\}.\end{aligned}$$

(Отметим, что похожие графы и хроматические числа в частном случае рассматривались в [34].)

Наша основная цель будет состоять в изложении различных оценок автора для величин $f_{k,l}(d)$, $f_{k,l_1,l_2}(d)$, $\chi(\mathcal{H}_{k,l}^d)$ и $\chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d)$. Мы покажем, что в весьма существенном классе случаев (т.е. для значительного множества наборов параметров k, l и k, l_1, l_2) эти оценки позволяют нетривиально усиливать общую оценку Ш-Б-Л. Прежде чем переходить к формулировкам результатов, сделаем следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Давая определения классов $(0, 1)$ -многогранников с фиксированными параметрами k, l , мы отмечали, что, в частности, величина k должна быть четной. На самом деле такое ограничение является несущественным в том смысле, что выполнено простое утверждение: *всякое множество $(0, 1)$ -векторов (а стало быть, и всякий $(0, 1)$ -многогранник), хэммингов диаметр которого есть число нечетное, разбивается на две части меньшего диаметра, т.е. соответствующий граф двудольный.* Для доказательства этого утверждения достаточно к одной части отнести все векторы с нечетным числом единиц, а к другой – все векторы с четным числом единиц.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеют место тривиальные оценки:

$$f_{k,l}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l}^d) \leq 2^{d-k+1}, \quad f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq 3^{d-k/4+1}.$$

Для доказательства первой пары неравенств следует зафиксировать какие-нибудь $d - k + 1$ координатных позиций и отнести векторы к разным частям, если на этих позициях их координаты не совпадают тождественно. Ясно, что число таких частей окажется равным количеству всевозможных $(d - k + 1)$ -мерных $(0, 1)$ -векторов. То же самое можно проделать и в отношении второй пары неравенств, только здесь уже надо фиксировать $d - k/4 + 1$ позиций, поскольку максимальное расстояние между $(0, 1, -1)$ -векторами достигается в случае, когда отрицательные компоненты одного вектора полностью “накладываются” на положительные компоненты другого и наоборот, т.е. когда квадрат этого расстояния равен учетверенному числу ± 1 -координат (ср. замечание 6, п. 3.2).

К сказанному остается добавить только, что вторая пара неравенств представляет интерес исключительно своей простотой; тем не менее при любых k, l_1, l_2 она хуже оценки Ш-Б-Л. Первая пара неравенств также усиливает оценки Ш-Б-Л лишь в крайне малом числе случаев – в некотором смысле на множестве параметров k, l меры нуль: необходимо полагать $k = d - o(d)$. Впрочем, если $k \geq d - \log_2 d + 1$, то $\forall l \ f_{k,l}(d) \leq d$ и на соответствующих классах гипотеза Борсука выполнена.

§3. Формулировки результатов

Для удобства изложения мы разобьем настоящий параграф на две части: в первой из этих частей мы сформулируем различные результаты, касающиеся $(0, 1)$ -многогранников, т.е. предъявим наши верхние оценки для величин $f_{k,l}(d)$ и $\chi(\mathcal{H}_{k,l}^d)$; во второй части мы обсудим аналогичные формулировки для кросс-политопов и отвечающих им числовых характеристик. Определим сперва величину $G(D, L, S)$ как вещественнозначную функцию трех вещественных переменных, получаемую из равенства

$$G(D, L, S) = \max \left\{ \frac{D}{L} \log \frac{SL}{D}, \frac{D}{L} \right\} + \frac{D}{L} + 1. \quad (1)$$

(Здесь переменные D, L, S удовлетворяют естественным ограничениям, при которых правая часть выражения (1) корректно определена; через $\log$ обозначен натуральный логарифм.) В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (1), в зависимости от контекста надлежащим образом задавая значения величин D, L, S .

3.1. Случай $(0, 1)$ -многогранников. В своей работе [27] (см. также [3]) автор сформулировал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Положим $D_1 = C_d^{l-k/2}$, $L_1 = C_l^{l-k/2}$ и $S_1 = C_d^l$. Пусть в то же время $D_2 = C_d^{l-k/2+1}$, $L_2 = C_l^{l-k/2+1}$ и $S_2 = S_1 = C_d^l$. Тогда имеют место оценки:*

$$f_{k,l}(d) \leq d \min\{L_1, G(D_1, L_1, S_1)\}, \quad (2)$$

$$f_{k,l}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l}^d) \leq G(D_2, L_2, S_2). \quad (3)$$

Обе оценки из теоремы 1 допускают значительное усиление, причем оценка (2) — двумя качественно различными способами. Первый из этих способов работает исключительно для величины $f_{k,l}(d)$ (см. §§ 4 и 5), второй же универсален. Итак, с одной стороны, мы покажем, что выполняется неравенство $f_{k,l}(d) \leq dC_{d-l}^{k/2}$, которое вместе с теоремой 1 приводит нас к следующему “симметричному” (пояснение слову “симметричный” будет дано в § 6, где мы укажем общие соотношения между различными оценками) утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Выполнена оценка*

$$f_{k,l}(d) \leq d \min\{C_l^{l-k/2}, C_{d-l}^{k/2}\}. \quad (4)$$

С другой стороны, мы установим серию новых оценок вида $f_{k,l}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l}^d) \leq G(D, L, S)$. С этой целью нам потребуются новые параметры D_3, L_3, S_3 . Введем их следующим образом. Пусть произвольные числа $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таковы, что $x \leq l, y \leq d-l$ и $2(\min\{x, y\} + \min\{l-x, d-l-y\}) < k$. Обозначим через $D_3 = D_3(x, y)$ величину C_d^{x+y} , через $L_3 = L_3(x, y)$ величину $C_l^x C_{d-l}^y$, а через S_3 величину C_d^l .

ТЕОРЕМА 3. *Выполнена оценка*

$$f_{k,l}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l}^d) \leq \min_{x,y} \{G(D_3(x, y), L_3(x, y), S_3)\}. \quad (5)$$

(Здесь минимум берется по всем допустимым значениям параметров x и y .)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценка (3) является частным случаем оценки (5). Для доказательства этого факта достаточно положить $y = 0$, $x = l - k/2 + 1$. В самом деле, для таких параметров будут выполнены все необходимые ограничения: очевидно, $x \leq l$ и $y \leq d - l$; в то же время $2(\min\{x, y\} + \min\{l - x, d - l - y\}) = 2\min\{k/2 - 1, d - l\} = 2(k/2 - 1) < k$. Отметим также, что вторая половина оценки (2) отличается от оценки (3) лишь не более чем полиномиальным сомножителем.

В связи с теоремой 3 и замечанием 3 встает вопрос о возможности точного определения параметров x , y , при которых достигается минимум в оценке (5). Полный ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 4. *Имеется альтернатива:*

- а) если $d \geq (l - t + 1)(t + 1)$, где $t = l - k/2 + 1$, то минимум в неравенстве (5) достигается при $x = t$, $y = 0$, т.е. оценка (3) дает точный результат;
- б) если же $d < (l - t + 1)(t + 1)$, то минимум в неравенстве (5) достигается при $x = t + r$, $y = r$, где натуральное число r однозначно находится из соотношений $t + r \leq l$, $r \leq d - l$ и

$$(l - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r + 1} \right) \leq d \leq (l - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r} \right). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ситуация, имеющая место в п. а) теоремы 4, не представляет интереса с точки зрения сопоставления наших оценок с оценками Ш-Б-Л, так как в этой ситуации $k = o(d)$ и $l = o(d)$, а стало быть, даже тривиальные оценки типа $f_{k,l}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l}^d) \leq C_d^l = e^{o(d)}$ оказываются гораздо сильнее экспоненциальных оценок Ш-Б-Л. Наиболее же содержательными в упомянутом отношении являются случаи, когда $k \asymp d$ и $l \asymp d$ ($k = c_k d$, $l = c_l d$, $c_k, c_l \in (0, 1)$), т.е. когда работает п. б) теоремы 4 и оценка (5) значительно лучше оценки (3) и второй половины оценки (2). Соответственно сравнивать следует оценки (4), (5) и Ш-Б-Л, и именно этим мы займемся в первой части § 6.

Доказательства теорем 2, 3 и 4 будут проведены в первой части § 5.

3.2. Случай кросс-политопов. Здесь, как и в случае $(0, 1)$ -многогранников, имеются две качественно различные группы результатов: первая состоит из оценок, работающих как для величины $f_{k,l_1,l_2}(d)$, так и для величины $\chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d)$; вторая же содержит лишь неравенства, применимые исключительно к характеристике $f_{k,l_1,l_2}(d)$.

Начнем с изложения первой группы оценок. Пусть неотрицательные целые числа $m \leq l_1$ и $n \leq l_2$ таковы, что величина

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \text{diam}^2 \{ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{d-m-n}) \in \{0, 1, -1\}^{d-m-n} : w_1^2 + \dots + w_{d-m-n}^2 \\ &= (l_1 - m) + (l_2 - n); w_1 + \dots + w_{d-m-n} = (l_1 - m) - (l_2 - n) \} \end{aligned}$$

удовлетворяет неравенству $\tilde{k} < k$ (здесь $\tilde{k}$ есть квадрат диаметра семейства всех $(d - m - n)$ -мерных $(0, 1, -1)$ -векторов, содержащих ровно $l_1 - m$ положительных и $l_2 - n$ отрицательных компонент, см. замечание 6). Положим $D_4 = D_4(m, n) = C_d^{m+n} C_{m+n}^m$, $L_4 = L_4(m, n) = C_{l_1}^m C_{l_2}^n$ и $S_4 = C_d^{l_1+l_2} C_{l_1+l_2}^{l_1}$. Тогда имеет место теорема, сформулированная в [27], а также в обзоре [3]:

ТЕОРЕМА 5. *Выполнена оценка*

$$f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq \min_{m,n} G(D_4(m,n), L_4(m,n), S_4). \quad (7)$$

(Здесь минимум берется по всем допустимым значениям параметров m и n .)

Эта теорема допускает значительное усиление, которому также соответствуют некоторые параметры типа D , L , S . Введем их. Пусть $m_1, m_2, m_3, m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_1^2, m_2^2, m_3^2$ суть произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= d, & m_1^1 + m_1^2 &\leq m_1, \\ m_1^1 + m_2^1 + m_3^1 &= l_1, & m_2^1 + m_2^2 &\leq m_2, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= l_2, & m_3^1 + m_3^2 &\leq m_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= \text{diam}^2 \{ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{m_1}) \in \{0, 1, -1\}^{m_1} : \\ &\quad w_1^2 + \dots + w_{m_1}^2 = m_1^1 + m_1^2; w_1 + \dots + w_{m_1} = m_1^1 - m_1^2 \}, \\ \tilde{k}_2 &= \text{diam}^2 \{ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{m_2}) \in \{0, 1, -1\}^{m_2} : \\ &\quad w_1^2 + \dots + w_{m_2}^2 = m_2^1 + m_2^2; w_1 + \dots + w_{m_2} = m_2^1 - m_2^2 \}, \\ \tilde{k}_3 &= \text{diam}^2 \{ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{m_3}) \in \{0, 1, -1\}^{m_3} : \\ &\quad w_1^2 + \dots + w_{m_3}^2 = m_3^1 + m_3^2; w_1 + \dots + w_{m_3} = m_3^1 - m_3^2 \} \end{aligned}$$

и для этих величин выполняется неравенство $\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 < k$. (Здесь опять-таки $\tilde{k}_i$ есть квадрат диаметра семейства всех m_i -мерных $(0, 1, -1)$ -векторов, имеющих в точности m_i^1 положительных и m_i^2 отрицательных координат, см. замечание 6.)

Обозначим через D_5 величину $D_5 = D_5(m_1, m_2) = C_d^{m_1+m_2} C_{m_1+m_2}^{m_1}$, через S_5 величину $S_5 = C_d^{l_1+l_2} C_{l_1+l_2}^{l_1}$, а через L_5 величину

$$\begin{aligned} L_5 &= L_5(m_1, m_2, m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2) = C_{l_1}^{m_1^1+m_1^2} C_{m_1^1+m_2^1}^{m_1^1} C_{l_2}^{m_2^1+m_2^2} C_{m_1^2+m_2^2}^{m_1^2} \\ &\quad \times C_{d-l_1-l_2}^{m_1-m_1^1-m_2^1+m_2-m_2^1-m_2^2} C_{m_1-m_1^1-m_1^2+m_2-m_2^1-m_2^2}^{m_1-m_1^1-m_1^2}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Выполнена оценка*

$$f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq \min G(D_5(m_1, m_2), L_5(m_1, m_2, m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2), S_5). \quad (9)$$

(Здесь минимум берется по всем допустимым значениям параметров $m_1, m_2, m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Связь между теоремами 5 и 6 такая же, как и связь между теоремами 1 и 3. В самом деле, полагая $m_1^1 = m_1$, $m_1^2 = 0$, $m_2^1 = 0$, $m_2^2 = m_2$, получаем $D_4(m, n) = D_5(m_1, m_2)$, $L_4(m, n) = L_5(m_1, m_2, m_1^1, m_1^2, m_2^1, m_2^2) = L_5(m_1, m_2)$, $S_4 = S_5$, и, стало быть, оценка (7) представляет собой частный случай оценки (9). Однако, как и прежде, ситуация, в которой $k = o(d)$, $l_1 l_2 = o(d^2)$, малоинтересна, поскольку в ее рамках тривиальная оценка вида $f_{k, l_1, l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k, l_1, l_2}^d) \leq C_d^{l_1 + l_2} C_{l_1 + l_2}^{l_1} = e^{o(d)}$ вновь существенно лучше общей экспоненциальной оценки Ш-Б-Л. В противной же (т.е. как раз в наиболее содержательной) ситуации, когда $k = c_k d$, $l_1 = c_{l_1} d$, $l_2 = c_{l_2} d$, $c_k, c_{l_1}, c_{l_2} \in (0, 1)$, неравенство (9) значительно сильнее неравенства (7) (см. соответствующие примеры во второй части §6). В то же время, дать здесь формулировку, аналогичную утверждению теоремы 4, т.е. явно указать, при каких значениях параметров достигается минимум в оценке (9), — задача сложная и пока открытая.

Дополнительно стоит отметить, что с целью относительного упрощения вычислений полезно бывает рассматривать еще один частный случай оценки (9), приравнивая к нулю величины m_1^2 и m_2^2 , но не фиксируя при этом значения m_1^1 и m_2^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для величин $\tilde{k}, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ могут быть выписаны точные формулы. Вообще, квадрат диаметра семейства всех d -мерных $(0, 1, -1)$ -векторов с l_1 единицами и l_2 минус единицами в координатных позициях вычисляется следующим образом: если $l_1 \leq l_2$ и $l_2 - l_1 \leq d - l_1 - l_2$, то он равен величине $8l_1 + (l_2 - l_1)$; если $l_1 \leq l_2$ и $l_2 - l_1 > d - l_1 - l_2$, то он равен величине $8l_1 + (d - l_1 - l_2)$; если же $l_1 > l_2$, то дальнейшая альтернатива аналогична описанной, а соответствующие значения квадрата диаметра получаются из выписанных заменой l_1 на l_2 и наоборот.

Теперь мы перейдем к изложению второй группы результатов, т.е. сформулируем оценки, верные только для величины $f_{k, l_1, l_2}(d)$. Для этого нам потребуется следующее определение. Пусть $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2)\}$ — множество всех (упорядоченных) пар неотрицательных целых чисел $x_1 \leq l_1$ и $x_2 \leq l_2$, для которых, в свою очередь, найдется пара $(0, 1, -1)$ -векторов $\mathbf{w}_1 = (w_1^1, \dots, w_1^{d-x_1-x_2})$, $\mathbf{w}_2 = (w_2^1, \dots, w_2^{d-x_1-x_2}) \in \mathbb{R}^{d-x_1-x_2}$, удовлетворяющая условиям:

- (i) $(w_i^1)^2 + \dots + (w_i^{d-x_1-x_2})^2 = (l_1 - x_1) + (l_2 - x_2)$, $w_i^1 + \dots + w_i^{d-x_1-x_2} = (l_1 - x_1) - (l_2 - x_2)$ ($i = 1, 2$), т.е. в каждом из векторов $\mathbf{w}_i$ ровно $l_1 - x_1$ положительных и $l_2 - x_2$ отрицательных компонент;
- (ii) выполнены соотношения

$$\{\nu : w_1^\nu = 1\} \cap \{\nu : w_2^\nu = 1\} = \emptyset, \{\nu : w_1^\nu = -1\} \cap \{\nu : w_2^\nu = -1\} = \emptyset;$$

- (iii) имеет место неравенство $|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|^2 \leq k$.

Обозначим через q_i величину $q_i = \min_{(x_1, x_2) \in \mathcal{X}} x_i$.

Теоремы 7 и 8, формулировки которых мы дадим ниже, соотносятся так же, как и теоремы 5 и 6; теорема 7 была впервые получена в работе [27], теорема 8 новая. Введем соответствующие параметры. Положим $\bar{d} = d - q_1 - q_2$, $\bar{l}_1 = l_1 - q_1$ и $\bar{l}_2 = l_2 - q_2$. Рассмотрим, с одной стороны, произвольные величины $\bar{m}, \bar{n}$, определяемые полностью аналогично тому, как это было сделано для величин m, n , фигурирующих в теореме 5; только здесь вместо d, l_1, l_2 мы работаем с $\bar{d}, \bar{l}_1, \bar{l}_2$. Рассмотрим в то же время произвольные величины $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_1^1, \bar{m}_2^1, \bar{m}_3^1, \bar{m}_1^2, \bar{m}_2^2, \bar{m}_3^2$, ограниченные опять-таки теми же соотношениями, что и параметры $m_1, m_2, m_3, m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_1^2, m_2^2, m_3^2$, введенные нами для формулировки теоремы 6;

при этом мы вновь заменяем (в (8) и т.д.) d, l_1, l_2 на $\bar{d}, \bar{l}_1, \bar{l}_2$. Наконец, определим величины $\bar{D}_4, \bar{L}_4, \bar{S}_4$ и $\bar{D}_5, \bar{L}_5, \bar{S}_5$ теми же формулами, посредством которых мы задавали величины D_4, L_4, S_4 и D_5, L_5, S_5 , заменяя соответствующие параметры без черты параметрами с чертой (величина k всюду остается неизменной).

ТЕОРЕМА 7. *Выполнена оценка*

$$f_{k, l_1, l_2}(d) \leq C_{l_1}^{q_1} C_{l_2}^{q_2} \min_{\bar{m}, \bar{n}} G(\bar{D}_4(\bar{m}, \bar{n}), \bar{L}_4(\bar{m}, \bar{n}), \bar{S}_4). \quad (10)$$

(Здесь минимум берется по всем допустимым значениям параметров $\bar{m}, \bar{n}$.)

ТЕОРЕМА 8. *Выполнена оценка*

$$f_{k, l_1, l_2}(d) \leq C_{l_1}^{q_1} C_{l_2}^{q_2} \min G(\bar{D}_5(\bar{m}_1, \bar{m}_2), \bar{L}_5(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_1^1, \bar{m}_2^1, \bar{m}_1^2, \bar{m}_2^2), \bar{S}_5). \quad (11)$$

(Здесь минимум берется по всем допустимым значениям параметров $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_1^1, \bar{m}_2^1, \bar{m}_1^2, \bar{m}_2^2$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Вообще говоря, может получиться так (т.е. k, l_1, l_2 окажутся таковы), что $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$. В этом случае, очевидно, теорема 7 совпадает с теоремой 5, а теорема 8 — с теоремой 6. Тем самым, наиболее интересными будут ситуации, когда $q_1 + q_2 > 0$ или когда, более того, $q_1 q_2 > 0$. Примеры мы приведем во второй части §6.

Доказательства новых теорем 6 и 8 будут даны во второй половине §5.

§4. Вспомогательные определения: задача о покрытии

Предваряя доказательства теорем 2, 3, 4, 6 и 8, мы дадим в настоящем параграфе некоторые определения и сформулируем некоторые вспомогательные результаты, которые в этих доказательствах будут, по существу, использованы. Все эти определения и результаты связаны с так называемой задачей о покрытии или, точнее, с задачей о нахождении минимальной системы общих представителей для совокупности конечных множеств.

Итак, мы рассматриваем произвольное конечное множество $\mathfrak{R}_D = \{1, \dots, D\}$, состоящее из D элементов. В этом множестве мы выбираем, в свою очередь, произвольную совокупность подмножеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_S\} \subset 2^{\mathfrak{R}_D}$, предполагая в то же время, что нам известна (универсальная) нижняя оценка на мощность каждого из подмножеств $M_i \in \mathcal{M} : \text{card } M_i \geq L$. Для такой совокупности множеств мы определяем *систему общих представителей* (с.о.п.) как еще одно подмножество $R \subset \mathfrak{R}_D$, которое содержит хотя бы по одному элементу (“представителю”) из каждого $M_i \in \mathcal{M}$, т.е. $R \cap M_i \neq \emptyset \ \forall i$. Ясно, что $\text{card } R \leq \min\{D, S\}$, поскольку, во-первых, все $\mathfrak{R}_D$ заведомо является с.о.п. для любой совокупности $\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_D}$, а во-вторых, $\text{card } \mathcal{M} = S$. Понятно также, что с.о.п. R определяется по $\mathcal{M}$, вообще говоря, неоднозначно. В простейшей формулировке задача о покрытии состоит в том, чтобы отыскать *минимальную* с.о.п. для $\mathcal{M}$. Мощность этой с.о.п. (тоже, конечно, не обязательно единственной) мы будем обозначать через $\tau(\mathcal{M})$. Наконец, через $Z(D, L, S)$ мы обозначим величину $\max_{\mathcal{M}} \tau(\mathcal{M})$, где максимум берется по всем совокупностям множеств $\mathcal{M}$ с параметрами D, L, S .

Основной результат о системах общих представителей состоит в том, что асимптотически величина $Z(D, L, S)$ ведет себя так же, как и определенная в предыдущем параграфе функция $G(D, L, S)$. Точнее, может быть сформулирована следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. *При любых значениях параметров D, L, S выполнена оценка $Z(D, L, S) \leq G(D, L, S)$. Если же параметры удовлетворяют некоторым достаточно общим соотношениям, то*

$$Z(D, L, S) = \frac{D}{L} \log \frac{SL}{D} + O\left(\frac{D}{L} \left(\log \log \frac{SL}{D} + \log \log L\right)\right). \quad (12)$$

В дальнейшем нам потребуются лишь неравенство $Z(D, L, S) \leq G(D, L, S)$, поэтому конкретизировать в настоящей работе выражение о “достаточно общих соотношениях” мы не будем (хотя уже вид остаточного члена в (12) подсказывает соотношение $\log L = o(SL/D)$, при котором первый член асимптотики остается доминирующим). Сама теорема была доказана в разное время несколькими авторами (см., например, [3], [31]–[33], [35] и [36]). Нетривиальные усиления и вариации этой теоремы были также предложены автором в [37].

§ 5. Доказательства результатов

В настоящем параграфе с помощью различных методов задачи о покрытии (и теоремы 9 в частности) мы докажем новые теоремы 2, 3, 4, 6 и 8. Опять-таки для удобства мы в отдельном пункте рассмотрим $(0, 1)$ -многогранники (теоремы 2, 3 и 4) и в отдельном – кросс-политопы (теоремы 6 и 8). Отметим сразу же, что мы будем в дальнейшем разбивать как $(0, 1)$ -многогранники, так и кросс-политопы по вершинам, т.е. фактически нам придется работать с семействами $\mathcal{F}_{k,l}^d$ и $\mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d$ $(0, 1)$ - и $(0, 1, -1)$ -векторов (см. §2). При этом ясно, что такие семейства векторов естественным образом можно проинтерпретировать как совокупности подмножеств и (упорядоченных) пар подмножеств множества $\mathbb{R}_d$: семейству $\mathcal{F}_{k,l}^d = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\} \subset \mathbb{R}^d$ отвечает совокупность $\mathcal{M}_{k,l}^d = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathbb{R}_d}$, $\text{card } M_i = l$; семейству $\mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t\} \subset \mathbb{R}^d$ отвечает совокупность $\mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d = \{(M_1^1, M_1^2), \dots, (M_t^1, M_t^2)\} \subset 2^{2^{\mathbb{R}_d}}$, причем первый элемент каждой пары (M_i^1, M_i^2) однозначно соответствует множеству положительных координат в векторе $\mathbf{w}_i$, а второй элемент – множеству отрицательных компонент, так что $\text{card } M_i^1 = l_1$, $\text{card } M_i^2 = l_2$.

5.1. Случай $(0, 1)$ -многогранников. Здесь и далее мы предполагаем, что параметры k, l фиксированы и удовлетворяют всем необходимым ограничениям. Сперва мы докажем теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Представим доказательство в виде последовательности шагов.

Шаг 1. Пусть x и y суть произвольные (фиксированные) параметры, определенные при формулировке теоремы, а $D_3 = D_3(x, y)$, $L_3 = L_3(x, y)$ и S_3 суть величины, введенные там же. Рассмотрим совокупность

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, y) = \{K_1, \dots, K_{D_3(x,y)}\} \subset 2^{\mathbb{R}_d}$$

всех возможных $(x + y)$ -элементных подмножеств множества $\mathbb{R}_d$ и установим между ней и множеством $\mathbb{R}_{D_3} = \{1, \dots, D_3\}$ естественное взаимно однозначное соответствие “множество $\longleftrightarrow$ его номер”. Рассмотрим также нашу совокупность множеств $\mathcal{M}_{k,l}^d = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathbb{R}_d}$, $\text{card } M_i = l$, и каждому $M_i \in \mathcal{M}_{k,l}^d$ однозначно сопоставим множество $\Lambda_i = \{\nu \in \mathbb{R}_{D_3} : \text{card}(K_\nu \cap M_i) = x\} \subset \mathbb{R}_{D_3}$. Понятно,

что так определенные множества Λ_i образуют совокупность $\mathcal{L} = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_s\} \subset 2^{\mathbb{R}^{D_3}}$, причем $\text{card } \Lambda_i = L_3$, а $s = \text{card } \mathcal{L} \leq S_3$.

Шаг 2. Пусть теперь $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau(\mathcal{L})}\}$ есть некоторая минимальная с.о.п. для совокупности множеств $\mathcal{L}$. В силу теоремы 9 выполнена оценка $\tau = \tau(\mathcal{L}) \leq G(D_3, L_3, s) \leq G(D_3, L_3, S_3)$. Построим покрытие $\mathcal{M}_{k,l}^d = \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^\tau$, полагая $\mathcal{M}^j = \{M \in \mathcal{M}_{k,l}^d : \text{card}(M \cap K_{\lambda_j}) = x\}$, $j = 1, \dots, \tau$. Это действительно покрытие, поскольку $\mathcal{L}$ есть образ $\mathcal{M}_{k,l}^d$ и в то же время $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\tau\}$ есть с.о.п. для $\mathcal{L}$.

Шаг 3. Коль скоро мы представили совокупность множеств $\mathcal{M}_{k,l}^d$ в виде $\mathcal{M}_{k,l}^d = \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^\tau$, то, стало быть, и семейство векторов $\mathcal{F}_{k,l}^d$ представляется как $\mathcal{F}_{k,l}^d = \mathcal{F}^1 \cup \dots \cup \mathcal{F}^\tau$, причем в последней записи знаки объединения могут быть заменены на знаки дизъюнктного объединения (имея покрытие, мы легко можем превратить его в разбиение, и наоборот). Таким образом, мы в самом деле имеем разбиение нашего семейства векторов на нужное число частей: $\tau \leq G(D_3, L_3, S_3)$. Для завершения доказательства оценки (5) остается только убедиться в том, что квадраты диаметров этих частей строго меньше k (при любых допустимых x, y), и взять минимум по x, y . Нетрудно видеть, однако, что $\forall j$ $(\text{diam } \mathcal{F}^j)^2 \leq 2(\min\{x, y\} + \min\{l - x, d - l - y\}) < k$ (по условию теоремы). Теорема 3 доказана.

Заметим, что, в принципе, мы доказали лишь ту часть теоремы 3, которая непосредственно касается величины $f_{k,l}(d)$. Тем не менее ясно, что все проведенные рассуждения верны и в отношении $\chi(\mathcal{H}_{k,l}^d)$, причем для этого хроматического числа с самого начала $s = S_3$.

Перейдем к доказательству оценки (4) (теоремы 2). Вернее, мы докажем лишь вторую, новую ее часть: $f_{k,l}(d) \leq dC_{d-l}^{k/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Это доказательство мы также разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Как и в случае теоремы 3, введем сперва в рассмотрение некоторую совокупность множеств. Обозначим ее также через $\mathcal{K}$, но теперь будем полагать

$$\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{C_d^{l+k/2}}\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}.$$

Иными словами, здесь в роли $\mathcal{K}$ выступает совокупность всех возможных $(l+k/2)$ -элементных подмножеств множества $\mathbb{R}^d$. Естественным образом установим взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{K}$ и множеством $\mathbb{R}_{C_d^{l+k/2}}$. Вместе с тем, опять-таки рассмотрим нашу совокупность множеств $\mathcal{M}_{k,l}^d = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$, $\text{card } M_i = l$, и от каждого множества $M_i \in \mathcal{M}_{k,l}^d$ (однозначно) перейдем к множеству

$$\Lambda_i = \{\nu \in \mathbb{R}_{C_d^{l+k/2}} : M_i \subset K_\nu\} \subset \mathbb{R}_{C_d^{l+k/2}}.$$

Множества Λ_i , $i = 1, \dots, s$, образуют совокупность $\mathcal{L}$.

Шаг 2. Обозначим через $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau(\mathcal{L})}\}$ одну из минимальных с.о.п. для $\mathcal{L}$. Конечно, для получения верхней оценки на величину $\tau = \tau(\mathcal{L})$ мы вновь могли бы воспользоваться теоремой 9. Однако теперь мы поступим иначе, а именно мы заметим, что уже всякое множество $\Lambda_i \in \mathcal{L}$ есть с.о.п. для $\mathcal{L}$ (а следовательно, $\tau \leq \text{card } \Lambda_i = C_d^{k/2}$). В самом деле, из равенства $(\text{diam } \mathcal{F}_{k,l}^d)^2 = k$ немедленно

вытекает соотношение $\text{card}(M_i \cap M_j) \geq l - k/2$ или $\text{card}(M_i \cup M_j) \leq l + k/2$, выполняющееся для любых $M_i, M_j \in \mathcal{M}_{k,l}^d$. Но это соотношение означает, что $\Lambda_i \cap \Lambda_j \neq \emptyset \ \forall i, j = 1, \dots, s$, т.е., скажем, Λ_i и можно взять в качестве с.о.п. для $\mathcal{L}$.

Построим покрытие $\mathcal{M}_{k,l}^d = \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^\tau$, полагая $\mathcal{M}^j = \{M \in \mathcal{M}_{k,l}^d : M \subset K_{\lambda_j}\}$, $j = 1, \dots, \tau$. Это действительно покрытие, поскольку $\mathcal{L}$ есть образ $\mathcal{M}_{k,l}^d$ и одновременно $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\tau\}$ есть с.о.п. для $\mathcal{L}$.

Шаг 3. Произведем дальнейшее измельчение построенного на предыдущем шаге покрытия. С этой целью каждое $\mathcal{M}^j$ разложим в следующее (очевидное) объединение своих частей: $\mathcal{M}^j = \mathcal{M}^{j,1} \cup \dots \cup \mathcal{M}^{j,l+k/2}$, где $\mathcal{M}^{j,\nu} = \{M \in \mathcal{M}^j : M \subset (K_{\lambda_j} \setminus \{k_{\lambda_j}^\nu\})\}$ (здесь $K_{\lambda_j} = \{k_{\lambda_j}^1, \dots, k_{\lambda_j}^{l+k/2}\}$). Окончательно получаем: $\mathcal{M}_{k,l}^d = \bigcup_{j=1}^\tau \bigcup_{\nu=1}^{l+k/2} \mathcal{M}^{j,\nu}$. Всего элементов покрытия $\leq (l + k/2)C_{d-l}^{k/2} \leq dC_{d-l}^{k/2}$.

Шаг 4. Рассуждения на этом шаге практически полностью повторяют рассуждения, сделанные на шаге 3 доказательства теоремы 3. Тот же факт, что $(\text{diam } \mathcal{F}^{j,\nu})^2 < k$, легко следует из свойства: $\text{card}(M \cap M') \geq l - k/2 + 1$ для любых $M, M' \in \mathcal{M}^{j,\nu}$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Метод, использованный при доказательстве теоремы 2, принципиально не применим к величине $\chi(\mathcal{H}_{k,l}^d)$, поскольку на шаге 2 мы делаем оценку мощности с.о.п. не за счет теоремы 9, а исходя из равенства $(\text{diam } \mathcal{F}_{k,l}^d)^2 = k$, аналога которого, конечно, нет в случае графа $\mathcal{H}_{k,l}^d$. Идея этого метода в известном смысле связана с задачами типа Эрдеша–Ко–Радо (см. [38]). Более глубокие факты относительно тех же задач нам потребуются при доказательстве теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Шаг 1. Чтобы провести необходимое нам доказательство, следует, естественно, обратиться к доказательству теоремы 3 и заметить (по сути, еще раз; ср. замечание 8), что основным в нем является шаг 2: именно на этом шаге мы определяем, как в зависимости от значений параметров x, y будет выглядеть интересующая нас оценка: $f_{k,l}(d) \leq \tau(\mathcal{L}) \leq G(D_3, L_3, S_3)$. Следует заметить далее, что эту оценку мы получаем с помощью теоремы 9 (точнее, верхней оценки в теореме 9) и что, в свою очередь, сама теорема 9 доказывается (в нужную нам сторону) посредством жадного алгоритма (подробности см., например, в [32] или [36]). Проведя несложные выкладки, можно убедиться в том, что этот жадный алгоритм работает тем лучше (т.е. тем меньше будет, по x, y , величина $G(D_3, L_3, S_3)$), чем лучше он работает на своем первом шаге. Качество же работы алгоритма на первом шаге, как опять-таки нетрудно проверить, полностью обусловлено решением следующей задачи: *для каждого набора чисел k, l и d выяснить, как устроена максимальная (по мощности) совокупность множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_p\} \subset 2^{\mathbb{R}_d}$, обладающая тем свойством, что $\text{card } M_i = l$ и $\text{card}(M_i \cap M_j) \geq l - k/2 + 1$, $i, j = 1, \dots, p$.*

Шаг 2. В схожей формулировке упомянутая задача принадлежит П. Эрдешу, Ч. Ко и Р. Радо, которым удалось показать (см. [38]), что в случае, когда $l \leq d/2$ и $\text{card}(M_i \cap M_j) \geq 1$, т.е. множества в совокупности $\mathcal{M}$ попарно пересекаются, имеет место неравенство $p = \text{card } \mathcal{M} \leq C_{d-1}^{l-1}$, а в качестве максимального примера можно взять совокупность, состоящую из всех l -элементных подмножеств $\mathbb{R}_d = \{1, \dots, d\}$ вида $\{1, \nu_2, \dots, \nu_l\}$. В общей ситуации задача была решена в работах [39]–[42] (см. также [43]). Сочетая шаг 1 с результатами работ [41] и [42], получаем доказательство п. а) теоремы 4; сочетая шаг 1 с результатами работ [39] и [40], получаем доказательство п. б). Теорема 4 доказана.

5.2. Случай кросс-политопов. Как и в случае с $(0, 1)$ -многогранниками, мы, естественно, считаем фиксированными значения параметров k, l_1, l_2 . Докажем сначала теорему 6: ход рассуждений будет в существенной степени параллелен тому, что мы излагали при доказательстве теоремы 3; однако мы сохраним здесь все необходимые подробности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Шаг 1. Пусть (фиксированные) параметры $m_1, m_2, m_3, m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_1^2, m_2^2, m_3^2$ удовлетворяют всем условиям, описанным нами при формулировке теорем 5 и 6. Пусть, кроме того, $D_5 = D_5(m_1, m_2)$, $L_5 = L_5(m_1, m_2, m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2)$ и S_5 суть величины, определенные там же, а

$$\mathfrak{K} = \{(K_1^1, K_1^2, K_1^3), \dots, (K_{D_5}^1, K_{D_5}^2, K_{D_5}^3)\} \subset 2^{2^{\mathfrak{R}_d}}$$

представляет собой класс всех возможных (упорядоченных) разбиений $(K_\nu^1, K_\nu^2, K_\nu^3)$ множества $\mathfrak{R}_d$, для которых выполняются свойства: $\mathfrak{R}_d = K_\nu^1 \sqcup K_\nu^2 \sqcup K_\nu^3$, $\text{card } K_\nu^\mu = m_\mu$, $\mu = 1, 2, 3$ (ср. (8)). Иными словами, разбиения, лежащие в $\mathfrak{K}$, суть тройки попарно непересекающихся множеств известной мощности (в том числе, возможно, и нулевой!), причем различными считаются даже разбиения $(K_\nu^1, K_\nu^2, K_\nu^3)$ и $(K_{\nu'}^1, K_{\nu'}^2, K_{\nu'}^3)$, у которых, скажем (при $m_1 = m_2$), $K_\nu^1 = K_{\nu'}^2$ и $K_\nu^2 = K_{\nu'}^1$, так что порядковый номер μ каждого множества K_ν^μ в том или ином (ν -м) разбиении можно расценивать как его “цвет”, а количество всех таких разбиений ($\text{card } \mathfrak{K}$) в самом деле совпадает с D_5 .

Далее действуем стандартно: от класса разбиений $\mathfrak{K}$ переходим к множеству $\mathfrak{R}_{D_5}$ и, рассматривая, как обычно, нашу совокупность пар

$$\mathcal{M}_{k, l_1, l_2}^d = \{(M_1^1, M_1^2), \dots, (M_t^1, M_t^2)\} \subset 2^{2^{\mathfrak{R}_d}},$$

$\text{card } M_i^1 = l_1$, $\text{card } M_i^2 = l_2$, ставим ей в соответствие совокупность множеств $\mathcal{L} = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_t\} \subset 2^{\mathfrak{R}_{D_5}}$, полагая $(M_i^1, M_i^2) \longleftrightarrow \Lambda_i$ и

$$\Lambda_i = \{\nu \in \mathfrak{R}_{D_5} : \text{card}(M_i^\eta \cap K_\nu^\mu) = m_\mu^\eta, \mu = 1, 2, 3; \eta = 1, 2\}.$$

(Тот факт, что множества Λ_i заданы корректно, вытекает из соотношений (8).) Легкий счет показывает, что $\text{card } \Lambda_i = L_5$, а $t = \text{card } \mathcal{L} \leq S_5$.

Шаг 2. На этом шаге мы, как всегда, строим покрытие вида $\mathcal{M}_{k, l_1, l_2}^d = \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^\tau$, причем и на сей раз в роли τ выступает мощность $\tau = \tau(\mathcal{L})$ любой минимальной с.о.п. $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\tau\}$ для совокупности множеств $\mathcal{L}$: $\tau \leq G(D_5, L_5, t) \leq G(D_5, L_5, S_5)$ по теореме 9. Тут, однако,

$$\mathcal{M}^j = \{(M^1, M^2) \in \mathcal{M}_{k, l_1, l_2}^d : \text{card}(M^\eta \cap K_{\lambda_j}^\mu) = m_\mu^\eta, \mu = 1, 2, 3; \eta = 1, 2\},$$

$$j = 1, \dots, \tau.$$

Шаг 3. Итак, мы фактически нашли требуемое разбиение: $\mathcal{F}_{k, l_1, l_2}^d = \mathcal{F}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{F}^\tau$ (ср. третий шаг доказательства теоремы 3 в п. 5.1). Более того, после минимизации по параметрам $m_1, m_2, m_3, m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_1^2, m_2^2, m_3^2$ оценка на τ , сделанная на шаге 2, превратится в искомую оценку (9). Неравенство же $(\text{diam } \mathcal{F}^j)^2 < k$ обеспечивается выбором параметров и неравенством $\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 < k$ (см. формулировку теоремы). Теорема доказана.

Добавим, что, очевидно, все рассуждения остаются справедливыми и для $\chi(\mathcal{H}_{k, l_1, l_2}^d)$.

Перейдем теперь к теореме 8 и будем считать, разумеется, что параметры, отвечающие ей, удовлетворяют всем надлежащим свойствам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Если доказательство теоремы 6 было в определенной степени параллельно доказательству теоремы 3, то предлагаемый ниже подход, в свою очередь, находится в непосредственной связи с идеей, позволившей нам обосновать новую оценку в теореме 2. В самом деле, как и в теореме 3 (ср. шаг 1 доказательства теоремы 4), в теореме 2 наиболее значимым является шаг 2, на котором для получения оценки на τ мы пользуемся не теоремой 9, а тем обстоятельством, что $(\text{diam } \mathcal{F}_{k,l}^d)^2 = k$ и, стало быть, $\text{card}(M_i \cap M_j) \geq l - k/2$ для любых $M_i, M_j \in \mathcal{M}_{k,l}^d$ (ср. замечание 8). Дальнейшие рассуждения будут опираться, таким образом, на аналогичное обстоятельство, описанное фактически при формулировке теорем 7 и 8 в терминах множества $\mathcal{X}$ и величин q_1, q_2 : действительно, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каковы бы ни были две различные пары (M_i^1, M_i^2) , (M_j^1, M_j^2) из нашей совокупности $\mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d = \{(M_1^1, M_1^2), \dots, (M_t^1, M_t^2)\} \subset 2^{2^{\mathfrak{R}_d}}$, $\text{card } M_\nu^1 = l_1$, $\text{card } M_\nu^2 = l_2$, будут выполнены неравенства:*

$$\text{card}(M_i^1 \cap M_j^1) \geq q_1, \quad \text{card}(M_i^2 \cap M_j^2) \geq q_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Фиксируем произвольные пары (M_i^1, M_i^2) и $(M_j^1, M_j^2) \in \mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d$. Обозначим через x_ν величину $\text{card}(M_i^\nu \cap M_j^\nu)$, $\nu = 1, 2$. Рассмотрим $\mathfrak{R}_{d-x_1-x_2} = \mathfrak{R}_d \setminus \bigcup_{\nu=1,2} (M_i^\nu \cap M_j^\nu)$ и $M_\mu^{\nu,*} = M_\mu^\nu \setminus (M_i^\nu \cap M_j^\nu) \subset \mathfrak{R}_{d-x_1-x_2}$, $\text{card } M_\mu^{\nu,*} = l_\nu - x_\nu$, $\mu = i, j$. Переходя стандартным образом от $\mathfrak{R}_{d-x_1-x_2}$ и пар $(M_i^{1,*}, M_i^{2,*})$, $(M_j^{1,*}, M_j^{2,*})$ к $\mathbb{R}^{d-x_1-x_2}$ и векторам $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{d-x_1-x_2}$, с легкостью убеждаемся в том, что для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ выполнены все условия (i)–(iii) из определения множества $\mathcal{X}$. Тем самым $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ и $x_\nu \geq q_\nu$. Утверждение доказано.

Распишем остаток доказательства теоремы стандартно – по шагам.

Шаг 1. Положим $U = C_d^{q_1+q_2} C_{q_1+q_2}^{q_1}$ и

$$\mathfrak{K} = \{(K_1^1, K_1^2), \dots, (K_U^1, K_U^2)\} \subset 2^{2^{\mathfrak{R}_d}},$$

где (K_ν^1, K_ν^2) – (упорядоченная) пара множеств $K_\nu^1, K_\nu^2 \subset \mathfrak{R}_d$ таких, что $\text{card } K_\nu^\mu = q_\mu$ ($\mu = 1, 2$) и $K_\nu^1 \cap K_\nu^2 = \emptyset$. При этом одно из множеств в паре может, вообще говоря (когда $q_1 q_2 = 0$), оказаться пустым, а упорядоченность мы понимаем так же, как и в случае класса разбиений $\mathfrak{K}$ из доказательства теоремы 6. Положим, далее, $\mathfrak{K} \longleftrightarrow \mathfrak{R}_U$ и $\mathfrak{L} = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_t\} \subset 2^{\mathfrak{R}_U}$, $\Lambda_i \longleftrightarrow (M_i^1, M_i^2) \in \mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d$:

$$\Lambda_i = \{\nu \in \mathfrak{R}_U : K_\nu^1 \subset M_i^1, K_\nu^2 \subset M_i^2\}.$$

Шаг 2. Если $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\tau\}$, $\tau = \tau(\mathfrak{L})$, – произвольная минимальная с.о.п. для совокупности множеств $\mathfrak{L}$, то в силу утверждения (ср. шаг 2 доказательства теоремы 2) $\tau \leq \text{card } \Lambda_i = C_{l_1}^{q_1} C_{l_2}^{q_2}$. Имеем покрытие: $\mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d = \mathcal{M}^1 \cup \dots \cup \mathcal{M}^\tau$, $\mathcal{M}^j = \{(M^1, M^2) \in \mathcal{M}_{k,l_1,l_2}^d : K_{\lambda_j}^1 \subset M^1, K_{\lambda_j}^2 \subset M^2\}$, $j = 1, \dots, \tau$.

Шаг 3. Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{M}^j$ покрытия, построенного на шаге 2. Понятно, что расстояние между векторами $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^d$, отвечающими любым двум парам $(M_1^1, M_1^2), (M_2^1, M_2^2) \in \mathcal{M}^j$, совпадает с расстоянием между векторами $\overline{\mathbf{w}}_1, \overline{\mathbf{w}}_2 \in \mathbb{R}^{d-q_1-q_2}$, соответствующими парам $(M_1^{1,*}, M_1^{2,*}), (M_2^{1,*}, M_2^{2,*}) \subset 2^{\mathfrak{R}_{d-q_1-q_2}}$, где $\mathfrak{R}_{d-q_1-q_2} = \mathfrak{R}_d \setminus (K_{\lambda_j}^1 \cup K_{\lambda_j}^2)$, $M_\mu^{\nu,*} = M_\mu^\nu \setminus K_{\lambda_j}^\nu$ (ср. дока-

зательство утверждения). Значит, нашу задачу о разбиении семейства векторов $\mathcal{F}_{k,l_1,l_2}^d \subset \mathbb{R}^d$ на части меньшего диаметра мы свели к задаче о разбиении τ различных семейств векторов вида $\mathcal{F}_{k,\bar{l}_1,\bar{l}_2}^{\bar{d}} \subset \mathbb{R}^{\bar{d}}$, где $\bar{l}_\nu = l_\nu - q_\nu$, $\bar{d} = d - q_1 - q_2$ (см. формулировку теоремы 8). Завершение доказательства очевидно (нужно повторить с новыми параметрами – “параметрами с чертой” – все шаги доказательства теоремы 6), и теорема 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Возможны вероятностные подходы к доказательству теорем 3 и 6. Однако улучшений они не дают, и с целью большего единства изложения мы их в настоящей работе не приводим.

§ 6. Соотношения между полученными оценками и оценками Ш-Б-Л

Следуя установленному нами в §§ 3 и 5 естественному разделению на пункты, мы вновь разобьем изложение на две части: в случае $(0,1)$ -многогранников нам удастся провести практически полное исследование всех оценок (для $f_{k,l}(d)$) и связей между ними; в случае же кросс-политопов мы в силу достаточной громоздкости соответствующих результатов ограничимся лишь несколькими примерами (впрочем, было бы преждевременно давать полное исследование соотношений в этой ситуации: сперва нужно отыскать аналог теоремы 4 для кросс-политопов).

6.1. Случай $(0,1)$ -многогранников. В соответствии со сказанным в замечании 4 будем сравнивать оценки (4) (теорема 2), (5) (теорема 3 и п. b) теоремы 4) и Ш-Б-Л; при этом будем считать, что сверх обычных ограничений (см. § 2) выполнены условия: $k = c_k d$, $l = c_l d$, $c_k, c_l \in (0,1)$, $c_k \neq 2c_l$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{c_k(2c_l - c_k)}{4(1 - c_k)}, & c_t &= \frac{2c_l - c_k}{2}, \\ c_{t+r} &= \frac{(2c_l - c_k)(2 - c_k)}{4(1 - c_k)}, & c_{t+2r} &= \frac{2c_l - c_k}{2(1 - c_k)}. \end{aligned}$$

Непосредственное применение формулы Стирлинга дает предложение, позволяющее фактически записать сравниваемые величины в более простой с точки зрения дальнейшего счета форме:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В перечисленных выше предположениях сравнивать следует величины

$$\begin{aligned} C_{(4)} &= \min \left\{ \frac{c_l^{c_l}}{c_t^{c_t} (c_l - c_t)^{c_l - c_t}}, \frac{(1 - c_l)^{1 - c_l}}{(c_k/2)^{c_k/2} (1 - c_l - c_k/2)^{1 - c_l - c_k/2}} \right\}, \\ C_{(5)} &= \frac{c_{t+r}^{c_{t+r}} (c_l - c_{t+r})^{c_l - c_{t+r}} c_r^{c_r} (1 - c_l - c_r)^{1 - c_l - c_r}}{c_{t+2r}^{c_{t+2r}} (1 - c_{t+2r})^{1 - c_{t+2r}} c_l^{c_l} (1 - c_l)^{1 - c_l}} \end{aligned}$$

и величину $C_{\text{Ш-Б-Л}} = \sqrt{3/2} = 1.224\dots$. Соответствующие оценки ((4), (5) и Ш-Б-Л) примут вид $f_{k,l}(d) \leq (C + o(1))^d$, где C – одна из упомянутых констант.

Из предложения немедленно вытекают следующие общие свойства оценок (4) и (5) для рассматриваемого случая.

СВОЙСТВА. 1. Оценки (4) и (5) симметричны по величине c_l относительно $1/2$, т.е. если $c_l \leq 1/2$, а c_k – любое допустимое, то значения этих оценок при таких c_l и c_k совпадут с их же значениями при $c'_l = 1 - c_l$ и $c'_k = c_k$. (В частности, именно в этом смысле неравенство (4) имеет более симметричную форму, чем неравенство (2), см. п. 3.1.)

2. Если $c_l \leq 1/2$, то минимум в оценке (4) достигается (при любом c_k) на первой из сравниваемых величин; иначе – на второй.

3. Если фиксировано $c_l \leq 1/2$, то график оценки (4) имеет форму “палатки”: при $c_k \rightarrow 0$ или $c_k \rightarrow 2c_l$ (т.е. при приближении c_k к границам своей области определения) значение оценки стремится к единице ($C_{(4)} \rightarrow 1$); максимума оценка достигает при $c_k = c_l$. Аналогичное утверждение выполнено в силу свойства 1 и для $c_l \geq 1/2$. Только теперь $c_k \in (0, 2 - 2c_l)$, а максимум находится в $c_k = 1 - c_l$.

4. Если c_l фиксировано и c_k пробегает слева направо свою область определения, то оценка (5) монотонно убывает к единице.

Из свойств 3 и 4 следует, что для каждого c_l найдется свое c_k^* такое, что при всех $c_k < c_k^*$ оценка (4) дает лучший результат, чем оценка (5). Можно проверить, что на самом деле при всех $c_k > c_k^*$ между неравенствами (4) и (5) имеет место обратное соотношение. Например, если $c_l = 1/3$, то при $c_k < 0.285$ оценка (4) лучше оценки (5), а при $c_k > 0.286$ – наоборот: (5) сильнее, чем (4). Таким образом, связь между (4) и (5) ясна. Гораздо интереснее понять теперь, когда и насколько величина $\min\{C_{(4)}, C_{(5)}\}$ меньше, чем величина $C_{\text{Ш-Б-Л}}$. Тут можно сказать следующее.

- По крайней мере, если $c_l \in (0, 0.28) \cup (0.72, 1)$, то $\min\{C_{(4)}, C_{(5)}\} < C_{\text{Ш-Б-Л}}$ для любого c_k . Более того, если, скажем, $c_l \in (0, 0.25) \cup (0.75, 1)$, то $f_{k,l}(d) \leq (1.188 \dots + o(1))^d$, а если $c_l = 0.2$, $c_k \geq 0.3$, то оценка (5) лучше оценки (4) и $f_{k,l}(d) \leq (1.081 \dots + o(1))^d$, т.е. выполнен результат, существенно улучшающий оценку Ш-Б-Л.

- Если $c_l \in (0.28, 0.72)$, то неравенство $\min\{C_{(4)}, C_{(5)}\} < C_{\text{Ш-Б-Л}}$ выполнено уже не при всех значениях c_k . Например, если $c_l = 1/3$, то это неравенство имеет место лишь при $c_k \in (0, 0.197) \cup (0.312, 2/3)$; однако, как видно, “зазор” крайне мал. Самый же большой зазор возникает при $c_l = 1/2$: здесь необходимо, чтобы $c_k \in (0, 0.14) \cup (0.38, 1)$. Тем не менее даже в этой ситуации зазор ничтожен, а при $c_k \in (0, 0.05) \cup (0.5, 1)$ и вовсе $\min\{C_{(4)}, C_{(5)}\} < 1.14$, что в весьма значительной степени лучше Ш-Б-Л.

- Можно привести еще множество примеров, иллюстрирующих соотношение всех трех оценок. Пусть, скажем, $c_l = c_k = 0.3$. Тогда $C_{(4)} = 1.232 \dots > C_{\text{Ш-Б-Л}}$, но $C_{(5)} = 1.208 \dots < C_{\text{Ш-Б-Л}}$.

- Наконец, следует рассмотреть важный случай, когда $c_l = c_k = 0.5$. Этот случай отвечает конструкции Кана–Калаи, дававшей контрпример к гипотезе Борсука при $d \geq 2015$ и позволявшей получить оценку $f(d) \geq (1.203 \dots + o(1))^{\sqrt{d}}$ (см. [18]). Оказывается, что и здесь наши оценки намного сильнее общих: из работы [27] следовало лишь неравенство $f_{k,l}(d) \leq (1.24 \dots + o(1))^d$; однако из (5) вытекает, что $f_{k,l}(d) \leq (1.139 \dots + o(1))^d$ ((4) здесь малосодержательно, так как $C_{(4)} = \sqrt{2} = 1.414 \dots$).

6.2. Случай кросс-политопов. Как и в предыдущем пункте, будем считать с самого начала, что помимо естественных ограничений, упомянутых в §2, для величин k, l_1, l_2 выполняются соотношения $k = c_k d, l_1 = c_{l_1} d, l_2 = c_{l_2} d$, где, по

крайней мере, $c_k, c_{l_1}, c_{l_2} \in (0, 1)$, а в “естественных” ограничениях все нестрогие неравенства заменены на строгие (ср. замечание 5). В дальнейшем мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих связь между результатами теорем 5, 6, 7 и 8 (оценками (7), (9), (10) и (11)), а также сформулируем одно общее замечание. Начнем с последнего.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Нетрудно убедиться в том, что для любых допустимых значений l_1, l_2 найдется критическая величина $k^* = k^*(l_1, l_2)$ такая, что если $k > k^*$, то $q_1 = q_2 = 0$, и, значит, теоремы 7 и 8 совпадают соответственно с теоремами 5 и 6 (ср. замечание 7); если же выполнено обратное неравенство, то, во всяком случае, $q_1 + q_2 > 0$, и можно ожидать, что теоремы 7 и 8 окажутся сильнее своих “предшественников” (оценка (10) сильнее оценки (7), а оценка (11) сильнее оценки (9)). В действительности такое k^* легко вычислить явно, но мы на этих вычислениях останавливаться не будем. (Более того, можно показать, что при любых фиксированных l_1, l_2 значения оценок (7) и (9) монотонно убывают к единице с приближением c_k к правому краю своей области определения; значения же оценок (10) и (11) стремятся к единице при $c_k \rightarrow 0$.)

Перейдем теперь к примерам.

ПРИМЕРЫ. 1) Пусть $k = d = 4d', l_1 = l_2 = d/4$. В этом случае множеству $\mathcal{X}$ принадлежит пара $(0, 0)$, т.е. $q_1 = q_2 = 0$, и теоремы 7 и 8 неприменимы. Вместе с тем, новая теорема 6 в весьма существенной степени лучше теоремы 5. В самом деле, из теоремы 5 вытекает лишь оценка $f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq (1.474 \dots + o(1))^d$, что значительно слабее общего результата Ш-Б-Л. Однако даже если применить неравенство (9) в специальной форме, описанной в конце замечания 5 и более удобной для расчетов, то уже окажется, что, по крайней мере, $f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq (1.269 \dots + o(1))^d$, и это лишь слегка хуже Ш-Б-Л (достаточно положить $m_1, m_2 \sim 5d/16, m_1^1, m_2^2 \sim 3d/16, m_1^2 = m_2^1 = 0, m_3^1, m_3^2 \sim d/16$). Если же вовсе не ограничивать область изменения параметров в теореме 6, то оценка (9) влечет неравенство $f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq (1.137 \dots + o(1))^d$, которое, в свою очередь, гораздо точнее неравенства Ш-Б-Л (здесь параметры таковы: $m_1 = m_2 = 0.2, m_3 = 0.6, m_1^1 = 0.01, m_1^2 = 0.11, m_2^1 = 0.015, m_2^2 = 0.08, m_3^1 = 0.225, m_3^2 = 0.06$; конечно, они еще не оптимальны, но близки к оптимальным).

2) Пусть $k = l_1 = l_2 = d/4 = 2d'$. Тогда ясно, что $q_1 = q_2 = d/8$, и, стало быть, этот пример вкупе с предыдущим фактически является иллюстрацией к замечанию 10: при $l_1 = l_2 = d/4$ и $k = d$ (т.е. $k > k^*$) $q_1 + q_2 = 0$; при тех же l_1, l_2 и $k = d/4$ (т.е. $k < k^*$) $q_1 q_2 \asymp d^2 > 0$. Легко проверить, что теперь теорема 5 слабее теоремы 7, теорема 6 слабее теоремы 8 (ср. замечание 10).

3) Пусть, наконец, $k = l_1 = l_2 = 0.04d$. Тогда $q_1 = q_2 = 0.02d$, теорема 5 дает оценку $f_{k,l_1,l_2}(d) \leq \chi(\mathcal{H}_{k,l_1,l_2}^d) \leq (1.312 \dots + o(1))^d$ (все еще хуже Ш-Б-Л), теорема 7 влечет неравенство $f_{k,l_1,l_2}(d) \leq (1.206 \dots + o(1))^d$ (лучше Ш-Б-Л). Теоремы 6 и 8, безусловно, намного точнее.

§ 7. Дополнение: “малые” размерности

В настоящем параграфе мы изложим некоторые результаты, касающиеся как общей проблемы Борсука в случае “малых” размерностей, так и проблемы Борсука для целочисленных многогранников в аналогичной ситуации (здесь понятие “малая размерность” носит, конечно, условный характер: в широком

смысле мы подразумеваем наличие некоторого d_0 и рассматриваем задачу лишь при всех $d \leq d_0$; значение же d_0 зависит исключительно от контекста).

Введем следующие величины:

$$\begin{aligned}\alpha_d &= \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^d} \inf_{\Omega_1, \dots, \Omega_{d+1}} \max_{i=1, \dots, d+1} \text{diam } \Omega_i \in (0, 1], \\ \alpha_d(0, 1) &= \sup_{\Omega \subset \{0, t\}^{d'}} \inf_{\Omega_1, \dots, \Omega_{d+1}} \max_{i=1, \dots, d+1} \text{diam } \Omega_i \in (0, 1], \\ \alpha_d(0, 1, -1) &= \sup_{\Omega \subset \{0, t, -t\}^{d'}} \inf_{\Omega_1, \dots, \Omega_{d+1}} \max_{i=1, \dots, d+1} \text{diam } \Omega_i \in (0, 1].\end{aligned}$$

(Здесь всюду точная верхняя грань берется по множествам Ω , диаметр которых равен единице; в первом случае множества любые, во втором — это d -мерные сечения (по вершинам) d' -мерных $(0, 1)$ -многогранников и их “ t -кратных копий”, т.е. $(0, t)$ -многогранников с $t \neq 0$, в третьем — d -мерные сечения (по вершинам) d' -мерных кросс-политопов и $(0, t, -t)$ -многогранников. Точная нижняя грань берется по всем разбиениям уже фиксированного множества Ω на $d + 1$ частей; наконец, при взятии последнего максимума выбирается та из этих частей, у которой диаметр наибольший.)

В соответствии с данными определениями гипотеза Борсука, очевидно, равносильна предположению, что $\alpha_d < 1$. В то же время, мы знаем, что в силу недавнего результата А. Хинрихса (см. §1) $\alpha_{323} = 1$ и вообще $\alpha_d = 1$ при $d \geq 323$. Кроме того, нам известно (см. опять-таки §1), что $\alpha_2 < 1$ и $\alpha_3 < 1$ (безусловно, строгое неравенство имеет место и при $d = 1$). Про α_d , $d \leq 3$, можно сказать гораздо больше: $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = \sqrt{3}/2 = 0.866\dots$ (см. [4]),

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} = 0.888\dots \leq \alpha_3 \leq 0.98.$$

Неравенство $\alpha_3 \geq 0.888\dots$ вытекает из рассмотрения единичного шара в $\mathbb{R}^3$. Более того, при всех $d \leq 322$ самая лучшая известная нижняя оценка на α_d следует из стандартного разбиения d -мерного шара на $d + 1$ частей меньшего диаметра (см. [1], [2] и [44]). Оценка $\alpha_3 \leq 0.98$ принадлежит В. В. Макееву (см. [10], [11]), и, вообще говоря, она может быть слегка улучшена (см. [44], [45]). Заметим, что еще раньше верхние оценки на величину α_3 получали П. Кацарова-Каранова ($\alpha_3 \leq 0.999983\dots$, см. [9]), А. Хешеш ($\alpha_3 \leq 0.9977\dots$, см. [8]) и Б. Грюнбаум ($\alpha_3 \leq 0.9887\dots$, см. [7]), причем последнее неравенство легко заменить на $\alpha_3 \leq 0.9842\dots$ (см. [44]). Заметим также, что с перечисленными результатами можно подробнее ознакомиться по обзору [3]. Впрочем, еще один (частный) результат сформулирован (в более общем контексте) в [44]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $r = r(\Omega)$ — радиус минимального шара, покрывающего множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ диаметра 1, и $r \in [0.5, 0.53] \cup [0.6, \sqrt{3}/8]$, то Ω разбивается на четыре части диаметра ≤ 0.95 .

Что касается ситуации, когда $4 \leq d \leq 322$, то нижние оценки для α_d , как мы уже упоминали, обусловлены разбиением единичного шара; о верхних же оценках нет никакого общего результата: имеются лишь гипотезы (см. [3] и [44]) и частные наблюдения (см. [44]), так что даже при $d = 4$ известно только неравенство $f(d) \leq 9$. Последнее неравенство является примером оценки из “первой группы”

(см. §1). В общем виде оно записывается как $f(d) \leq 2^{d-1} + 1$ и принадлежит М. Лассакку (см. [46], а также [3], где выписаны некоторые более слабые неравенства подобного рода). Конечно, асимптотически оно значительно хуже Ш-Б-Л, но при $d \leq d_0$ оно дает самые точные известные оценки (ср. §1).

Перейдем теперь к целочисленным многогранникам и обсудим соответственно величины $\alpha_d(0, 1)$ и $\alpha_d(0, 1, -1)$. Про первую величину мы знаем, что она равна единице при $d \geq 560$ (см. §1 и [20])² и что $\alpha_d(0, 1) < 1$ при $d' = d \leq 9$ (см. [23] и др.). Про вторую величину известно существенно меньше. В частности, интерес представляет получение *нижних* оценок для $\alpha_d(0, 1, -1)$ — естественно, при $d \leq d_0$ (ясно, что в противном случае $\alpha_d(0, 1, -1) = 1$, причем гипотетически $d_0 \leq 135$, см. [3]). В настоящем параграфе мы докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $d \geq 35$ имеет место оценка

$$\alpha_d(0, 1, -1) \geq \sqrt{\frac{8}{9}} = 0.9428 \dots$$

Прежде чем доказывать это предложение, заметим, что схожие нетривиальные оценки могут быть установлены и при $d \leq 35$. Заметим также, что величина $\sqrt{8/9}$ уже достаточно близка к единице и эта близость вкупе со всеми прочими родственными наблюдениями свидетельствует о том, что, по-видимому, кросс-политопы позволяют строить контрпримеры в весьма небольших размерностях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $n = 8$ и $t = \sqrt{1/(3\sqrt{2})}$. Рассмотрим семейство $(0, t, -t)$ -векторов

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, t, -t\}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 3t^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

и предположим дополнительно, что в каждом векторе $\mathbf{x} \in \Sigma$ первая ненулевая координата равна t . Ясно тогда, что $\text{card } \Sigma = 4C_8^3 = 224$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Каково бы ни было подсемейство векторов $Q = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\} \subset \Sigma$, удовлетворяющее условию $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \notin \{0, \pm t^2\}$, для величины $s = \text{card } Q$ верна оценка $s \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Сопоставим сперва каждому вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ множество $M_{\mathbf{x}} = \{j_1, j_2, j_3\} \subset \mathbb{R}_n$, полагая $\nu \in M_{\mathbf{x}}$ тогда и только тогда, когда $x_{\nu} = \pm t$. Далее, понятно, что если при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Sigma$ либо $M_{\mathbf{x}} = M_{\mathbf{y}}$, либо $\text{card}(M_{\mathbf{x}} \cap M_{\mathbf{y}}) = 1$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{\pm t^2\}$, а если $M_{\mathbf{x}} \cap M_{\mathbf{y}} = \emptyset$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Стало быть, $\text{card } Q \leq \text{card } \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — максимальная совокупность трехэлементных подмножеств в $\mathbb{R}_n$, любые два из которых пересекаются в точности по двум элементам. Легким перебором получаем $\text{card } \mathcal{M} \leq 6$ (в качестве $\mathcal{M}$ можно брать $\mathcal{M} = \{M \subset \mathbb{R}_n : \text{card } M = 3, \{1, 2\} \subset M\}$). Лемма доказана.

От семейства векторов Σ перейдем к семейству векторов Σ^* , каждому вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ ставя во взаимно однозначное соответствие вектор $\mathbf{x} * \mathbf{x} = (x_i \times x_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. Исходя из соотношений $x_i x_j = x_j x_i, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 3t^2$ и равенства $(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$ нетрудно проверить, что размерность аффинного подпространства, в котором лежит Σ^* , равна 35 (т.е. здесь $d' = n^2 = 64$,

²Контрпримеры Хинрихса здесь не работают, поскольку они основаны не на $(0, 1)$ -многогранниках, а на целочисленном многограннике, получаемом с помощью решетки Лича.

но $d = 35$); при этом $\text{diam } \Sigma^* = 1$ и, значит, Σ^* есть по сути одно из множеств Ω , по которым берется супремум в определении величины $\alpha_d(0, 1, -1)$. Зафиксируем произвольное разбиение множества Σ^* на $d + 1 = 36$ частей: $\Sigma^* = \Omega_1^* \sqcup \dots \sqcup \Omega_{d+1}^*$. По принципу Дирихле найдется такой элемент Ω_ν^* этого разбиения, что

$$\text{card } \Omega_\nu^* \geq \frac{\text{card } \Sigma^*}{d + 1} = \frac{\text{card } \Sigma}{d + 1} = \frac{224}{36} > 6.$$

Следовательно, мощность прообраза множества Ω_ν^* тоже больше шести и в силу леммы в этом прообразе есть два вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, \pm t^2\}$. Тогда, опять-таки пользуясь равенством $(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$, получаем оценку $|\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}| \geq \sqrt{8/9}$, означающую, что $\text{diam } \Omega_\nu^* \geq \sqrt{8/9}$ и тем самым $\alpha_d(0, 1, -1) \geq \sqrt{8/9} = 0.9428\dots$. Предложение 2 доказано.

Список литературы

1. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
2. Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S. Excursions into combinatorial geometry. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
3. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 107–146.
4. Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
5. Eggleston H. G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter // J. London Math. Soc. (2). 1955. V. 30. P. 11–24.
6. Perkal J. Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloq. Math. 1947. V. 1. P. 45.
7. Grünbaum B. A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. V. 53. P. 776–778.
8. Heppes A. Térbeli pontthalmazok felosztása kisebb átmérőjű részhalmazok összegére // Magyar Tud. Akad. Math. Fiz. Tud. Oszt. Közl. 1957. V. 7. P. 413–416.
9. Katzarowa-Karanowa P. Über ein euklidisch-geometrisches Problem von B. Grünbaum // Arch. Math. (Basel). 1967. V. 18. P. 663–672.
10. Макеев В. В. Об аффинных образах ромбодекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела // Записки научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 191–195.
11. Макеев В. В. Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники // Записки научн. сем. ПОМИ. 1996. Т. 231. С. 286–298.
12. Hadwiger H. Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comment. Math. Helv. 1945/46. V. 18. P. 73–75; Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comment. Math. Helv. 1946/47. V. 19. P. 72–73.
13. Rogers C. A. Symmetrical sets of constant width and their partitions // Mathematika. 1971. V. 18. P. 105–111.
14. Рислинг А. С. Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоянной кривизны // Укр. геом. сб. 1971. Т. 11. С. 78–83.
15. Rogers C. A. Covering a sphere with spheres // Mathematika. 1963. V. 10. P. 157–164.
16. Schramm O. Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. V. 35. P. 180–189.
17. Bourgain J., Lindenstrauss J. On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Geometric aspects of functional analysis / ed. J. Lindenstrauss and V. Milman. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 138–144. (Lecture Notes in Math. V. 1469.)
18. Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. №1. P. 60–62.
19. Nilli A. On Borsuk's problem // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210.
20. Райгородский А. М. О размерности в проблеме Борсука // УМН. 1997. Т. 52. №6. С. 181–182.

21. Райгородский А. М. Об одной оценке в проблеме Борсука // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 185–186.
22. Erdős P. My Scottish book “problems” // The Scottish book. Mathematics from the Scottish Café / ed. R. D. Mauldin. Boston: Birkhäuser, 1981. P. 35–43.
23. Ziegler G. M. Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1-Borsuk problem in low dimensions // Preprint. TU Berlin, June 2000.
24. Payan C. On the chromatic number of cube-like graphs // Discrete Math. 1992. V. 103. P. 271–277.
25. Petersen J. Färbung von Borsuk-Graphen in niedriger Dimension // Diplomarbeit. TU Berlin, 1998.
26. Schiller F. Zur Berechnung und Abschätzung von Färbungszahlen und der ϑ -Funktion von Graphen // Diplomarbeit. TU Berlin, 1999.
27. Райгородский А. М. Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов // Докл. РАН. 2000. Т. 371. С. 600–603.
28. Райгородский А. М. Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 5. С. 593–597.
29. Erdős P. On sets of distances of n points // Amer. Math. Monthly. 1946. V. 53. P. 248–250.
30. Heppes A., Révész P. Zum Borsukschen Zerteilungsproblem // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1956. V. 7. P. 159–162.
31. Райгородский А. М. Системы общих представителей // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. № 3. С. 851–860.
32. Кузюрин Н. Н. Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. 1980. № 37. С. 19–56.
33. Turán P. Egy grafelméleti szelsoertek feladatrol // Mat. Fiz. Lapok. 1941. V. 48. P. 436–452.
34. Linial N., Meshulam R., Tarsi M. Matroidal bijections between graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 1988. V. 45. № 1. P. 31–44.
35. Katona G., Nemetz T., Simonovits M. On a graph-problem of Turan // Mat. Lapok. 1964. V. 15. P. 228–238. (Hungarian).
36. Füredi Z. Turán's type problems // Surveys in combinatorics. Proc. of the 13th British Combin. Conference / ed. A. D. Keedwell. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 166. 1991. P. 253–300.
37. Райгородский А. М. Дефект допустимых шаров и октаэдров в решетке и системы общих представителей // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 6. С. 117–141.
38. Erdős P., Ko Ch., Rado R. Intersection theorems for systems of finite sets // Q. J. Math. 1961. V. 12. P. 313–320.
39. Ahlswede R., Khachatrian L. H. The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets // J. Combin. Theory Ser. A. 1996. V. 76. P. 121–138.
40. Ahlswede R., Khachatrian L. H. The complete intersection theorem for systems of finite sets // European J. Combin. 1997. V. 18. P. 125–136.
41. Frankl P. The Erdős–Ko–Rado theorem is true for $n = ckt$ // Combinatorics. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1978. V. 18. P. 365–375.
42. Wilson R. M. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem // Combinatorica. 1984. V. 4. P. 247–257.
43. Deza M., Frankl P. Erdős–Ko–Rado theorem – 22 years later // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1983. V. 4. P. 419–431.
44. Raigorodskii A. M. The Borsuk partition problem // London Math. Soc. Lecture Note Series (to appear).
45. Райгородский А. М., Калнишкан Ю. А. О проблеме Борсука // IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”. Тезисы докладов. Тула, 10–15 сентября 2001 г. С. 98–99.
46. Lassak M. An estimate concerning Borsuk's partition problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1982. V. 30. P. 449–451.