Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Якшин, Коммутативные A_∞ -алгебры и функтор $\mathcal{D}$, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 10, 161–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:14:19

УДК 513.83

С. А. Якшин

Коммутативные A_∞ -алгебры и функтор $\mathcal{D}$

В статье рассматривается вопрос о вычислении множества классов эквивалентности коммутативных A_∞ -алгебр и связь этого вопроса с вычислением функтора $\mathcal{D}$, введенного Н. А. Берикашвили. В частности, показывается, что на свободной коммутативной алгебре нет нетривиальных коммутативных A_∞ -структур.

Библиография: 9 названий.

Понятие A_∞ -алгебры было введено Стасеффом [1] в 1963 г., однако интерес к этому понятию особенно возрос в последние годы в связи с его использованием в алгебре, геометрии, топологии, физике и т. д. В работе [2] была построена теория препятствий для вычисления A_∞ -структур и вычислено множество эквивалентных классов A_∞ -структур, продолжающих данную структуру алгебры. В частности, было показано, что на свободной коммутативной алгебре имеются нетривиальные A_∞ -алгебры, продолжающие данную.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о вычислении множества классов эквивалентности коммутативных A_∞ -алгебр и связь этого вопроса с вычислением функтора $\mathcal{D}$, введенного Н. А. Берикашвили [3]. В частности, будет показано, что на свободной коммутативной алгебре нет нетривиальных коммутативных A_∞ -структур.

Напомним, что цепной комплекс A называется A_∞ -алгеброй [1], если заданы операции

$$\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A, \quad n \geq 0,$$

повышающие размерность на n и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{\varepsilon} \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем k , где k – место, на котором может стоять π_{n-i} , и $\varepsilon = nk + ik + n + k$.

С целью упрощения переформулируем определение A_∞ -алгебры. А именно для цепного комплекса X рассмотрим надстройку SX . Непосредственные вычисления показывают, что задание на X структуры A_∞ -алгебры равносильно заданию операций

$$\pi(n): (SX)^{\otimes n} \rightarrow SX, \quad n \geq 2,$$

понижающих размерность на единицу и таких, что

$$d(\pi(n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \pi(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) = 0,$$

или в более короткой форме $d(\pi) + \pi \cup \pi = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. A_∞ -алгебра A называется *коммутативной A_∞ -алгеброй*, если отображения

$$\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A, \quad n \geq 0,$$

повышающие размерность на n , составляющие структуру A_∞ -алгебры, дополнительно удовлетворяют соотношениям коммутативности, т.е. для любых $n \geq 0$ и $1 \leq i \leq n+1$ выполняется равенство

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} \pi_n \sigma(i, n+2-i) = 0,$$

где сумма берется по всем $(i, n+2-i)$ -перестановкам σ , ε — знак перестановки.

Переходя к надстройке, мы должны рассмотреть $\wedge$ -коалгебру [4]. А именно для градуированного модуля Y рассмотрим фактормодуль тензорного произведения $Y \otimes Y$ по отношению $x \otimes y + T(x \otimes y) \sim 0$, где $T: Y \otimes Y \rightarrow Y \otimes Y$ — отображение перестановки сомножителей

$$T(x \otimes y) = (-1)^{|x| \cdot |y|} x \otimes y,$$

$|x|, |y|$ — размерности элементов x и y соответственно.

Аналогично, обозначим через $Y^{\wedge n}$ фактормодуль $Y^{\otimes n}$ по этим соотношениям.

Цепной комплекс Y будем называть *$\wedge$ -коалгеброй*, если задано отображение $\nabla: Y \rightarrow Y \wedge Y$, удовлетворяющее условию

$$(\nabla \wedge 1 - 1 \wedge \nabla) \nabla = 0: Y \rightarrow Y \wedge Y \wedge Y.$$

Для надстройки SX определим $\wedge$ -коалгебру

$$T_{\wedge} SX = \sum_{n \geq 1} T_{\wedge}^n SX,$$

положив $T_{\wedge}^1 SX = SX$, $T_{\wedge}^2 SX = SX \wedge SX$ и $\nabla^2: T_{\wedge}^2 SX \rightarrow T_{\wedge}^1 SX \wedge T_{\wedge}^1 SX$ — тождественное отображение.

Предположим, что мы определили модули $T_{\wedge}^1 SX, \dots, T_{\wedge}^{n-1} SX$. Рассмотрим отображение

$$\nabla \wedge 1 - 1 \wedge \nabla: \sum_{i=1}^{n-1} T_{\wedge}^i SX \wedge T_{\wedge}^{n-i} SX \rightarrow \sum_{i,j} T_{\wedge}^i SX \wedge T_{\wedge}^j SX \wedge T_{\wedge}^{n-i-j} SX$$

и определим $T_{\wedge}^n SX$ как ядро этого отображения, а коумножение как естественное вложение. Тогда задание на X структуры коммутативной A_∞ -алгебры равносильно заданию отображения $\pi: T_{\wedge} SX \rightarrow SX$, понижающего размерность на единицу и удовлетворяющего условию

$$d(\pi) + \pi \cup \pi = 0.$$

Частным случаем коммутативной A_∞ -алгебры является обычная коммутативная дифференциальная алгебра с тривиальными высшими операциями $\pi_n, n \geq 1$.

Еще один важный пример дают гомологии коммутативной дифференциальной алгебры.

Пусть A – дифференциальная алгебра над полем. Тогда на ее гомологиях $A_* = H_*(A)$, рассматриваемых как цепной комплекс с нулевым дифференциалом, помимо умножения $\pi_*: A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$, индуцированного умножением π в A , имеется структура A_∞ -алгебры [5], состоящая из операций

$$\pi_n: A_*^{\otimes n+2} \rightarrow A_*,$$

удовлетворяющих условиям $\pi_0 = \pi_*$ и

$$\sum_i (-1)^{\varepsilon} \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) = 0,$$

где сумма берется также по всем k , где k – место, на котором может стоять π_{n-i} .

Эти операции можно задать следующим образом. Зафиксируем отображения $\xi: A_* \rightarrow A$, $\eta: A \rightarrow A_*$ и гомотопию $h: A \rightarrow A$, удовлетворяющие соотношениям [6]

$$\eta \circ \xi = \text{Id}, \quad d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}, \quad \eta \circ h = 0, \quad h \circ \eta = 0, \quad h \circ h = 0.$$

Тогда операции π_n задаются формулой

$$\pi_n = \eta\pi(h\pi \otimes 1 - 1 \otimes h\pi) \cdots (h\pi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 - \cdots + (-1)^n 1 \otimes \cdots \otimes h\pi)(\xi \otimes \cdots \otimes \xi).$$

Непосредственная проверка показывает, что выполняются требуемые соотношения.

Из приведенных формул следует, что в случае, если A – коммутативная дифференциальная алгебра, операции π_n будут удовлетворять следующим соотношениям эквивалентности:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} \pi_n \sigma(i, n+2-i) = 0,$$

где сумма берется по всем $(i, n+2-i)$ -перестановкам чисел $1, \dots, n+2$. А это и означает, что на гомологиях A_* коммутативной дифференциальной алгебры A имеется структура коммутативной A_∞ -алгебры [4].

Пусть A', A'' – коммутативные A_∞ -алгебры. *Отображением коммутативных A_∞ -алгебр $f: A' \rightarrow A''$ называется семейство отображений*

$$f(n): A'^{\otimes n+1} \rightarrow A'',$$

сохраняющих размерность и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} d(f(n)) &= \sum_{i=1}^{n-1} f(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi'(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) \\ &\quad - \sum_{n_1+\cdots+n_i=n} \pi''(i)(f(n_1) \otimes \cdots \otimes f(n_i)), \end{aligned}$$

или короче $d(f) = f \cup \pi' - \pi'' \cup f$, и соотношению коммутативности

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} f(n) \sigma(i, n-i) = 0.$$

Отображения f, g называются *гомотопными* и обозначаются $f \simeq g$, если существует семейство $h = \{h(n)\}$ отображений

$$h(n): A'^{\otimes n} \rightarrow A'',$$

повышающих размерность на единицу, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} d(h) &= g - f - \pi'' \cup h - h \cup \pi', \\ \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} h(n) \sigma(i, n-i) &= 0. \end{aligned}$$

Семейство h называют *гомотопией* между f и g .

Коммутативные A_{∞} -алгебры A' и A'' называются *гомотопически эквивалентными* и обозначаются $A' \simeq A''$, если существуют отображения $f: A' \rightarrow A''$, $g: A'' \rightarrow A'$, для которых

$$g \circ f \simeq \text{Id}_{A'}, \quad f \circ g \simeq \text{Id}_{A''}.$$

Две коммутативные A_{∞} -алгебры π' и π'' на цепном комплексе A называются эквивалентными и обозначаются $\pi' \sim \pi''$, если существует семейство $c = \{c(n)\}$ отображений

$$c(n): A^{\otimes n} \rightarrow A,$$

сохраняющих размерность и удовлетворяющих соотношениям $c(1) = \text{Id}$ и

$$d(c) = c \cup \pi' - \pi'' \cup c, \quad \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} c(n) \sigma(n-i, i) = 0.$$

Для цепного комплекса X обозначим через $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X)$ множество классов эквивалентности коммутативных A_{∞} -структур на X .

Рассмотрим категорию $\mathcal{X}$, объектами которой являются цепные комплексы X и морфизмами $X \rightarrow Y$ – тройки (f, g, h) , где $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ – цепные отображения, $h: X \rightarrow X$ – цепная гомотопия, $d(h) = g \circ f - \text{Id}$. Композицией морфизмов $(f', g', h'): X \rightarrow X'$, $(f'', g'', h''): X' \rightarrow X''$ является морфизм

$$(f'' \circ f', g' \circ g'', h' + g' \circ h'' \circ f'): X \rightarrow X''.$$

Два морфизма $(f', g', h'), (f'', g'', h''): X \rightarrow Y$ будем называть *гомотопными* и обозначать $(f', g', h') \simeq (f'', g'', h'')$, если существует тройка (u, v, w) , для которой:

$$\begin{aligned} u: X &\rightarrow Y \text{ – гомотопия между } f' \text{ и } f'', \text{ т.е. } d(u) = f' - f'', \\ v: Y &\rightarrow X \text{ – гомотопия между } g' \text{ и } g'', \text{ т.е. } d(v) = g' - g'', \\ w: X &\rightarrow X \text{ – отображение, повышающее размерность на два и удовлетво-} \\ &\text{ряющее соотношению} \end{aligned}$$

$$d(w) = h' - h'' - v \circ f' - g'' \circ u.$$

Объекты X' и X'' этой категории будем называть *гомотопически эквивалентными* и обозначать $X' \simeq X''$, если существуют морфизмы

$$(f', g', h'): X' \rightarrow X'', \quad (f'', g'', h''): X'' \rightarrow X'$$

такие, что композиции $(f', g', h') \circ (f'', g'', h'')$, $(f'', g'', h'') \circ (f', g', h')$ гомотопны тождественным отображениям.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствие $X \mapsto \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(X)$ определяет функтор $\mathcal{D}_\infty^{\text{com}}: \mathcal{X} \rightarrow \text{Ens}_*$ из категории $\mathcal{X}$ в категорию множеств с отмеченными точками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим морфизму $(f, g, h): X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{X}$ отображение

$$\mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(f, g, h): \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(Y).$$

Пусть $\pi = \{\pi(n)\}$, $\pi(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$, — коммутативная A_∞ -структура на цепном комплексе X . Определим семейство $\varphi = \{\varphi(n)\}$ операций $\varphi(n): Y^{\otimes n} \rightarrow Y$, полагая

$$\varphi(n) = f\pi g^{\otimes n} + (f\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + (f\pi \cup h\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + \dots$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются соотношения

$$d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0, \quad \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon} \varphi(n) \sigma(i, n+2-i) = 0,$$

т.е. φ является коммутативной A_∞ -структурой на цепном комплексе Y .

Покажем, что при этом соответствии эквивалентные коммутативные A_∞ -структуры переходят в эквивалентные. Пусть $\pi \sim \pi'$, $c = \{c(n)\}$ — соответствующее семейство отображений $c(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$, удовлетворяющее соотношениям

$$d(c) = c \cup \pi - \pi' \cup c, \quad \sum_{\sigma} c(n) \sigma(i, n-i) = 0.$$

Определим семейство $b = \{b(n)\}$ отображений $b(n): Y^{\otimes n} \rightarrow Y$, положив

$$\begin{aligned} b(n) &= fc(n)g^{\otimes n} + (fc \cup h\pi - f\pi \cup hc)(n)g^{\otimes n} \\ &+ (f\pi' \cup h\pi' \cup hc - f\pi' \cup hc \cup h\pi + fc \cup h\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + \dots \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются следующие соотношения:

$$d(b) = b \cup \varphi - \varphi' \cup b, \quad \sum_{\sigma} b(n) \sigma(i, n-i).$$

Аналогично показывается, что гомотопные морфизмы

$$(f', g', h'), (f'', g'', h''): X \rightarrow Y$$

индуцируют одно и то же отображение

$$\mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(f', g', h') = \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(f'', g'', h''): \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_\infty^{\text{com}}(Y).$$

Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для цепно эквивалентных комплексов X' и X'' имеет место биекция

$$\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X') \leftrightarrow \mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X'').$$

В частности, если основное кольцо является полем, то для цепного комплекса X имеет место биекция

$$\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X) \leftrightarrow \mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(H_*(X)).$$

Для вычисления множества классов эквивалентности коммутативных A_{∞} -структур рассмотрим понятие функтора $\mathcal{D}$, введенное Н. А. Берикашвили [3] для описания дифференциалов спектральной последовательности расслоения и переформулированное в дальнейшем В. А. Смирновым [7] на языке скрепляющих коцепей Брауна [8].

Пусть K – коалгебра с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ и A – алгебра с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$. Тогда *скрепляющей коцепью* $\varphi: K \rightarrow A$ называется гомоморфизм, понижающий размерность на единицу и удовлетворяющий соотношению $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0$, где $\varphi \cup \varphi = \pi(\varphi \otimes \varphi)\nabla$ (см. [8]).

Обозначим через $M(K, A)$ множество всех скрепляющих коцепей $\varphi: K \rightarrow A$. Для произвольного отображения $c: K \rightarrow A$, сохраняющего градуировку и такого, что $c_0 = 0$, определим преобразование

$$F_c: M(K, A) \rightarrow M(K, A),$$

положив $F_c(\varphi) = \varphi'$, где $\varphi': K \rightarrow A$ удовлетворяет равенствам

$$\varphi'_n = \varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \varphi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'_i \cup c_{n-i} - dc_n + c_{n-1}d,$$

т.е. φ' удовлетворяет равенству

$$\varphi' = \varphi + c \cup \varphi - \varphi' \cup c - d(c).$$

Непосредственные вычисления показывают, что так определенное отображение $\varphi' = F_c(\varphi)$ является скрепляющей коцепью.

Введем в множество скрепляющих коцепей $M(K, A)$ отношение эквивалентности $\sim$, положив $\varphi \sim \varphi'$, если существует такое $c: K \rightarrow A$, для которого выполняется равенство $F_c(\varphi) = \varphi'$. Рефлексивность этого соотношения очевидна. Транзитивность следует из формулы

$$F_{c'+c+c' \cup c} = F_{c'} \circ F_c.$$

Покажем симметричность. Пусть $F_c(\varphi) = \varphi'$. Рассмотрим c' , определенное индуктивным образом:

$$c'_n = -c_n - \sum_{i=1}^{n-1} c'_i \cup c_{n-i}.$$

Тогда имеет место равенство $c' + c + c' \cup c = 0$ и, следовательно,

$$F_{c'}(\varphi') = F_{c'} \circ F_c(\varphi) = F_{c'+c+c' \cup c}(\varphi) = \varphi.$$

Легко видеть, что скрещенные тензорные произведения, соответствующие эквивалентным скрещивающим коцепям, изоморфны.

Фактормножество множества $M(K, A)$ по введенному отношению эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}(K, A)$. Соответствие $(K, A) \rightarrow \mathcal{D}(K, A)$ определяет функтор $\mathcal{D}$ в категорию множеств с отмеченными точками, контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу.

Функтор $\mathcal{D}$ может быть определен не только для скрещивающих коцепей, но и в некоторых других ситуациях. Например, для теории возмущений дифференциалов [6]. А именно пусть X — цепной комплекс, $d: X \rightarrow X$ — его дифференциал. Рассмотрим возмущение этого дифференциала в виде $\tilde{d} = d + \varphi$, где $\varphi: X \rightarrow X$ — некоторый гомоморфизм, понижающий размерность на единицу. Равенство $\tilde{d} \circ \tilde{d} = 0$ эквивалентно равенству

$$d(\varphi) + \varphi \circ \varphi = 0.$$

Поэтому φ можно считать скрещивающей коцепью, задающей возмущение дифференциала.

Два возмущения $\tilde{d}', \tilde{d}''$ дифференциала d назовем *эквивалентными* и обозначим $\tilde{d}' \sim \tilde{d}''$, если эквивалентны соответствующие скрещенные коцепи φ', φ'' , т.е. существует гомоморфизм $c: X \rightarrow Y$ такой, что

$$d(c) = \varphi' - \varphi'' + c \circ \varphi' - \varphi'' \circ c.$$

Множество классов эквивалентности возмущений дифференциала по введенному отношению эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}(X)$.

Рассмотрим более общую ситуацию, в которой возникает функтор $\mathcal{D}$. Пусть A — биградуированная дифференциальная алгебра

$$A = \sum_{n,m} A_{n,m}^n,$$

дифференциал в которой сохраняет верхнюю градуировку и понижает нижнюю на единицу. Семейство $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ элементов $\varphi_n \in A_{-1}^n$ будем называть *скрещивающим семейством*, если оно удовлетворяет соотношениям

$$d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0,$$

где $\cup$ обозначает умножение в A .

Два скрещивающих семейства φ', φ'' будем называть *эквивалентными* и обозначать $\varphi' \sim \varphi''$, если существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$ элементов $c_n \in A_0^n$, удовлетворяющих соотношениям $c_0 = 1$ и

$$d(c) = c \cup \varphi' - \varphi'' \cup c.$$

Множество классов эквивалентности скрещивающих семейств по введенному отношению эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}(A)$.

Определим понятие функтора $\mathcal{D}$ для коммутативных A_∞ -алгебр. Пусть A — дифференциальная биградуированная коммутативная A_∞ -алгебра, $A = \sum_{n,m} A_m^n$. Дифференциал сохраняет верхнюю градуировку и уменьшает нижнюю на единицу. Операции $\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A$ сохраняют верхнюю градуировку и увеличивают нижнюю на n .

Семейство $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ элементов $\varphi_n \in A_{-1}^n$ будем называть *скрещивающим семейством*, если выполняются соотношения

$$d(\varphi) + \sum_{n \geq 0} \pi_n(\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi) = 0.$$

Два скрещивающих семейства φ', φ'' будем называть *эквивалентными* и обозначать $\varphi' \sim \varphi''$, если существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$ элементов $c_n \in A_0^n$, удовлетворяющих соотношениям $c_0 = 1$ и

$$d(c) = \sum_{n \geq 0} \pi_n(c \otimes \varphi' \otimes \cdots \otimes \varphi' + \varphi'' \otimes \cdots \otimes \varphi'' \otimes c).$$

Множество классов эквивалентности скрещивающих семейств по введенному отношению эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}(A)$.

Легко видеть, что соответствие $A \rightarrow \mathcal{D}(A)$ определяет функтор $\mathcal{D}$ из категории коммутативных A_∞ -алгебр в категорию множеств с отмеченными точками. Более того, гомотопные коммутативные A_∞ -отображения $f, g: A' \rightarrow A''$ индуцируют одно и то же отображение

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g): \mathcal{D}(A') \rightarrow \mathcal{D}(A'').$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если A', A'' — гомотопически эквивалентные коммутативные A_∞ -алгебры, то имеет место биекция*

$$\mathcal{D}(A') \leftrightarrow \mathcal{D}(A'').$$

В частности, если основное кольцо является полем, то для коммутативной A_∞ -алгебры A имеет место биекция

$$\mathcal{D}(A') \leftrightarrow \mathcal{D}(H_*(A)),$$

где гомологии $H_(A)$ рассматриваются как коммутативная A_∞ -алгебра.*

Вычисление функтора $\mathcal{D}$ может быть произведено с использованием произведения Масси. Пусть A — дифференциальная биградуированная алгебра. Рассмотрим скрещивающие семейства $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$, $\varphi_n \in A_{-1}^n$.

Соотношение $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi = 0$ перепишем в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(\varphi_1) &= 0, \\ d(\varphi_2) + \varphi_1 \cup \varphi_1 &= 0, \\ d(\varphi_3) + \varphi_1 \cup \varphi_2 + \varphi_2 \cup \varphi_1 &= 0, \\ &\dots \\ d(\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \cup \varphi_{n-i} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства вытекает, что элемент φ_1 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_1 \in H_{-1}(A^1)$.

Из второго равенства следует, что произведение $h_1 \cup h_1$ равно нулю.

Третье равенство означает, что произведение Масси $m_1(h_1 \otimes h_1 \otimes h_1)$ равно нулю и т. д.

Таким образом, для элемента $h_1 \in H_{-1}(A^1)$ все произведения Масси равны нулю, т.е. для всех $n \geq 0$ выполняются равенства

$$m_n(h_1 \otimes \dots \otimes h_1) = 0.$$

Из размерностных соображений следует, что эти равенства можно переписать в виде

$$\sum_n m_n(h_1 \otimes \dots \otimes h_1) = 0.$$

Множество таких элементов h_1 обозначим через $J_1 H_{-1}(A)$.

Пусть φ и φ' – эквивалентные скрепляющие семейства. Это означает, что существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$, $c_n \in A_0^n$, для которого выполняются равенства $c_0 = 1$ и

$$d(c) = c \cup \varphi - \varphi' \cup c, \quad c \in A_0, \quad c = 1 + c_1 + c_2 + \dots$$

Последнее равенство можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(c_1) &= \varphi_1 - \varphi'_1, \\ d(c_2) &= \varphi_2 - \varphi'_2 + c_1 \cup \varphi_1 - \varphi'_1 \cup c_1, \\ &\dots \\ d(c_n) &= \varphi_n - \varphi'_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \varphi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'_i \cup c_{n-i}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что эквивалентные скрепляющие семейства φ и φ' порождают один и тот же элемент h_1 .

Таким образом, мы имеем отображение

$$p_1: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_1 H_{-1}(A).$$

Заметим, что если модуль A_{-1}^1 является конечно порожденным, то для элемента h_1 мы можем выбрать представители $\psi_n^1 \in A_{-1}^n$ так, что будет выполняться соотношение скрещивающего семейства.

Кроме того, скрещивающее семейство $\psi^1 = \{\psi_n^1\}$ будет удовлетворять соотношению $d(c_1) = \varphi_1 - \psi_1^1$. Следовательно, для скрещивающего семейства $F_{c_1}(\varphi)$ будет выполняться равенство $F_{c_1}(\varphi)_1 = \psi_1$.

Подправим скрещивающую коцепь φ , взяв вместо нее $F_{c_1}(\varphi)$. Рассмотрим семейство $\varphi^1 = \varphi - \psi^1$. Оно удовлетворяет соотношениям

$$d(\varphi^1) + \psi^1 \cup \varphi^1 + \varphi^1 \cup \psi^1 + \varphi^1 \cup \varphi^1 = 0, \quad \varphi_1^1 = 0,$$

которые следуют из того, что ψ^1 и $\varphi^1 + \psi^1$ являются скрещивающими семействами.

Первое из этих соотношений можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(\varphi_2^1) &= 0, \\ d(\varphi_3^1) + \psi_1^1 \cup \varphi_2^1 + \varphi_2^1 \cup \psi_1^1 &= 0, \\ d(\varphi_4^1) + \psi_1^1 \cup \varphi_3^1 + \psi_2^1 \cup \varphi_3^1 + \varphi_2^1 \cup \psi_2^1 + \varphi_3^1 \cup \psi_1^1 + \varphi_2^1 \cup \varphi_2^1 &= 0, \\ &\dots \\ d(\varphi_n^1) + \sum_{i=1}^{n-2} \psi_i^1 \cup \varphi_{n-i}^1 + \sum_{i=1}^{n-2} \varphi_i^1 \cup \psi_{n-i}^1 + \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_i^1 \cup \varphi_{n-i}^1 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства вытекает, что элемент φ_2^1 является циклом и, следовательно, порождает элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$.

Из второго равенства следует, что произведение $h_1 \cup h_2 + h_1 \cup h_2$ равно нулю.

Третье равенство означает, что произведение Масси

$$m_1(h_1 \otimes h_1 \otimes h_2 + h_1 \otimes h_2 \otimes h_1 + h_2 \otimes h_1 \otimes h_1) + h_2 \cup h_2$$

равно нулю и т. д.

Таким образом, элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$ для всех $n \geq 2$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \dots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $k \geq 2$ и $i_1, \dots, i_k$ таким, что

$$i_1 + \dots + i_k = n, \quad \max\{i_1, \dots, i_k\} = 2.$$

Обозначим $h^1 = h_1$, $h^2 = h_1 + h_2$. Из размерностных соображений следует, что эти соотношения вместе с соотношениями для h_1 можно переписать в виде

$$\sum_n m_n(h^1 \otimes \dots \otimes h^1) = 0, \quad \sum_n m_n(h^2 \otimes \dots \otimes h^2) = 0.$$

Пусть φ и φ' – эквивалентные скрепляющие семейства. Тогда соответствующие подправленные семейства также будут эквивалентны, т.е. существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющее соотношению $d(c) = c \cup \varphi - \varphi' \cup c$. Перепишем это соотношение в виде системы

$$\begin{aligned} d(c_1) &= 0, \\ d(c_2) &= \varphi_2 - \varphi'_2 + c_1 \cup \varphi_1 - \varphi'_1 \cup c_1, \\ &\dots \\ d(c_n) &= \varphi_n - \varphi'_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \varphi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'_i \cup c_{n-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства этой системы вытекает, что c_1 является циклом и, следовательно, определяет элемент $g_1 \in H_0(A^1)$.

Из второго равенства следует, что для элементов h_2, h'_2 , соответствующих скрепляющим семействам φ, φ' , выполняется соотношение

$$h_2 - h'_2 = g_1 \cup h_1 - h_1 \cup g_1$$

и т. д.

Между элементами $h^2 = h_1 + h_2$ определим отношение эквивалентности $\sim$, положив $h^2 \sim h'^2$, если $h_1 = h'_1$ и существует $g^1 = 1 + g_1$, для которого выполняются равенства

$$\sum_n m_n (h'^2 \otimes \dots \otimes g^1 \otimes \dots \otimes h^2) = 0,$$

где сумма берется также по всем i , где i – место элемента g^1 , $1 \leq i \leq n + 2$. Множество классов эквивалентности таких элементов h^2 обозначим через $J_2 H_{-1}(A)$. В результате получим отображение

$$p_2: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_2 H_{-1}(A).$$

В случае, если модуль A^2_{-1} является конечно порожденным, мы можем выбрать представители $\psi^2 = \{\psi_n^2\}_{n \geq 2}$ элемента h_2 , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \varphi_2^1 - \psi_2^2 &= d(c_2), \\ d(\psi^2) + \psi^1 \cup \psi^2 + \psi^2 \cup \psi^1 + \psi^2 \cup \psi^2 &= 0. \end{aligned}$$

Подправим скрепляющее семейство φ , взяв вместо него $F_{c_2}(\varphi)$. Рассмотрим семейство $\varphi^2 = \varphi^1 - \psi^2$. Повторяя предыдущие построения для семейства φ^2 , мы получаем элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$ и т. д.

Рассмотрим множество последовательностей $h = \{h_i\}_{i \geq 1}$ элементов $h_i \in H_{-1}(A^i)$, для которых элементы $h^n = h_1 + \dots + h_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_k m_k (h^n \otimes \dots \otimes h^n) = 0.$$

Используя размерностные соображения, легко видеть, что они выполняются тогда и только тогда, когда для любых $i \geq 1$ и $n > i$ выполняются соотношения

$$\sum m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется также по всем $k \geq 2$ и $i_1, \dots, i_k$ таким, что

$$i_1 + \cdots + i_k = n, \quad \max\{i_1, \dots, i_k\} = i.$$

Между этими последовательностями определим отношение эквивалентности, полагая $h \sim h'$, если существует последовательность $g = \{g_i\}_{i \geq 0}$ элементов $g_i \in H_0(A^i)$, $g_0 = 1$, таких, что элементы $g^n = 1 + g_1 + \cdots + g_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_k m_k(h'^n \otimes \cdots \otimes g^n \otimes \cdots \otimes h^n) = 0.$$

Соответствующее фактормножество обозначим через $JH_{-1}(A)$. Описанный выше процесс дает отображение

$$p: \mathcal{D}(A) \rightarrow JH_{-1}(A).$$

Непосредственная проверка показывает, что оно является биекцией.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Для дифференциальной биградуированной алгебры A с конечно порожденными модулями A_{-1}^n имеет место биекция*

$$\mathcal{D}(A) \leftrightarrow JH_{-1}(A).$$

Заметим, что рассмотренное выше отображение $p_1: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_1H_{-1}(A)$ индуцирует короткую точную последовательность с отмеченными точками

$$* \longrightarrow \mathcal{D}^1(A) \xrightarrow{i^1} \mathcal{D}(A) \xrightarrow{p^1} J_1H_{-1}(A) \longrightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^1(A)$ – подмножество множества $\mathcal{D}(A)$, порожденное скрещивающими семействами φ , для которых $\varphi_1 = 0$.

Пусть φ – скрещивающее семейство, удовлетворяющее соотношению $\varphi_1 = 0$. Соотношение $d(\varphi) + \varphi \cup \varphi$ можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(\varphi_2) &= 0, \\ d(\varphi_3) &= 0, \\ d(\varphi_4) + \varphi_2 \cup \varphi_2 &= 0, \\ &\dots \\ d(\varphi_n) + \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_i \cup \varphi_{n-i} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства вытекает, что элемент φ_2 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$.

Из второго равенства вытекает, что элемент φ_3 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$.

Третье равенство означает, что произведение $h_2 \cup h_2$ равняется нулю и т. д.

Таким образом, элементы h_2, h_3 удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $i_1, \dots, i_k = 2, 3$.

Обозначим через $J^2 H_{-1}(A)$ множество элементов $h_2 \in H_{-1}(A^2)$, для которых существует элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$, так что выполняются приведенные выше соотношения.

Соответствие $\varphi \mapsto h_2$ определяет отображение

$$p^2: \mathcal{D}^1(A) \rightarrow J^2 H_{-1}(A)$$

и короткую точную последовательность

$$* \longrightarrow \mathcal{D}^2(A) \xrightarrow{i^2} \mathcal{D}^1(A) \xrightarrow{p^2} J^2 H_{-1}(A) \longrightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^2(A)$ — подмножество множества $\mathcal{D}^1(A)$, порожденное скрещивающими семействами φ , для которых $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$.

Вообще, для $n \geq 1$ обозначим через $J^n H_{-1}(A)$ множество элементов $h_n \in H_{-1}(A^n)$, для которых существуют элементы $h_i \in H_{-1}(A^i)$, $n < i < 2n$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $n \leq i_1, \dots, i_k \leq 2n - 1$.

Соответствие $\varphi \mapsto h_n$ определяет отображение

$$p^n: \mathcal{D}^n(A) \rightarrow J^n H_{-1}(A)$$

и короткую точную последовательность

$$* \longrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(A) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}^n(A) \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}(A) \longrightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^n(A)$ — подмножество множества $\mathcal{D}(A)$, порожденное скрещивающими семействами φ , для которых $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_{n-1} = 0$.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 5. Если A – биградуированная дифференциальная алгебра с конечно порожденными модулями A_{-1}^n , то для любого $n \geq 1$ имеет место короткая точная последовательность

$$* \longrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(A) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}^n(A) \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}(A) \longrightarrow *.$$

В частности, $\mathcal{D} = 0$ тогда и только тогда, когда $J^n H_{-1}(A) = 0$ для всех $n \geq 1$.

Вернемся теперь к вопросу о вычислении множества $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X)$ классов эквивалентности коммутативных A_{∞} -структур на цепном комплексе X . Как было доказано выше, оно находится в биективном соответствии с множеством $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X_*)$.

Заметим, что если две коммутативные A_{∞} -структуры π и π' на X_* эквивалентны, то $\pi(2) = \pi'(2)$. Поэтому $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X_*)$ распадается в объединение множеств $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X_*, \pi(2))$ классов эквивалентности A_{∞} -структур с заданной структурой коммутативной алгебры $\pi(2)$. Рассмотрим вопрос о вычислении этих множеств.

Пусть X – градуированный модуль с заданной структурой коммутативной алгебры. Как и раньше, это будет означать наличие операции $\pi(2): X \otimes X \rightarrow X$, понижающей размерность на единицу и удовлетворяющей соотношению

$$\pi(2)(\pi(2) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(2)) = 0,$$

или короче $\pi(2) \cup \pi(2) = 0$, и условию коммутативности

$$\pi(2) = \pi(2) \circ T,$$

где T – перестановочное отображение.

Обозначим через

$$C_{\text{com}}^*(X; X) = \sum_n C_{\text{com}}^n(X; X), \quad C_{\text{com}}^n(X; X) = \text{Hom}(SX^{\otimes n} / \sigma(i, n-i); SX),$$

комплекс Хохшильда для коммутативных алгебр, дифференциал в котором определен формулой

$$d(f) = f \cup \pi(2) + (-1)^{n+1} \pi(2) \cup f,$$

где $n = \dim f$.

Имеет место умножение

$$\cup: C_{\text{com}}^n(X; X) \otimes C_{\text{com}}^m(X; X) \rightarrow C_{\text{com}}^{n+m-1}(X; X),$$

определенное формулой

$$f \cup g = \sum f(1 \otimes \cdots \otimes g \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется по всем k , где k – место, на котором может стоять g .

Однако это умножение не перестановочно с дифференциалом и не является ассоциативным. Для преодоления этой трудности воспользуемся понятием $\vee$ -алгебры [4]. А именно для цепного комплекса Y обозначим через $Y \vee Y$ подкомплекс тензорного произведения $Y \otimes Y$, состоящий из элементов $z \in Y \otimes Y$, для которых $z + T(z) = 0$, где T – перестановочное отображение. Аналогичным образом определяются подкомплексы $Y^{\vee n}$ тензорных произведений $Y^{\otimes n}$.

Цепной комплекс Y называется $\vee$ -алгеброй, если задано отображение

$$\cup: Y \vee Y \rightarrow Y,$$

понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее соотношению

$$\cup(\cup \otimes 1 + 1 \otimes \cup) = 0: Y \vee Y \vee Y \rightarrow Y.$$

Непосредственная проверка показывает, что ограничение умножения

$$\cup: C_{\text{com}}^*(X; X) \otimes C_{\text{com}}^*(X; X) \rightarrow C_{\text{com}}^*(X; X)$$

на подкомплекс $C_{\text{com}}^*(X; X) \vee C_{\text{com}}^*(X; X)$ задает на $C_{\text{com}}^*(X; X)$ структуру $\vee$ -алгебры.

Легко проверить, что семейство $\{\pi(n)\}_{n \geq 2}$ отображений $\pi(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$ задает на X структуру коммутативной A_∞ -алгебры тогда и только тогда, когда семейство $\{\pi(n)\}_{n \geq 3}$ является скрещивающим семейством $\vee$ -алгебры $C_{\text{com}}^*(X; X)$, т.е. выполняются соотношения $d(\pi) + \pi \cup \pi = 0$.

Таким образом, мы можем применить методы вычисления функтора $\mathcal{D}$.

Обозначим через $J^n H_{-1}^*(X; X)$ множество элементов $h(n)$, $n \geq 3$, в гомологиях Хохшильда $(H_{\text{com}})_{-1}^n(X; X)$, для которых существуют элементы $h(i)$ в $(H_{\text{com}})_{-1}^i(X; X)$, $n < i < 2n$, такие, что выполняются соотношения

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h(i_1) \otimes \cdots \otimes h(i_k)) = 0,$$

где сумма берется по всем $n \leq i_1, \dots, i_k \leq 2n - 1$.

Повторяя предыдущие рассуждения о вычислении функтора $\mathcal{D}$, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – конечно порожденный градуированный модуль с заданной структурой коммутативной алгебры $\pi(2): X \otimes X \rightarrow X$. Тогда для любого $n \geq 1$ имеет место короткая точная последовательность

$$* \longrightarrow \mathcal{D}_{\infty}^{n+1}(X, \pi(2)) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}_{\infty}^n \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}^*(X; X) \longrightarrow *,$$

где $\mathcal{D}_{\infty}^n(X, \pi(2))$ – подмножество $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X, \pi(2))$, порожденное коммутативными A_∞ -структурами $\pi = \{\pi(i)\}$, для которых $\pi(i) = 0$, если $3 < i < n$.

В частности, $\mathcal{D}_{\infty}^{\text{com}}(X, \pi(2)) = 0$ тогда и только тогда, когда для любых $n \geq 3$ выполняется $J^n H_{-1}^*(X; X) = 0$.

Эта теорема дает ответ на вопрос о возможности продолжения заданной структуры коммутативной алгебры до нетривиальной структуры коммутативной A_∞ -алгебры.

В качестве примера рассмотрим свободную коммутативную алгебру $A = T_s X$, образованную из тензорной алгебры TX факторизацией по действию симметрических групп Σ_n на тензорных произведениях $X^{\otimes n}$. Пусть кольцо коэффициентов является полем характеристики нуль.

Определим фильтрацию в $B_{\wedge} A$

$$B_{\wedge} A = G_1 B_{\wedge} A \supset G_2 B_{\wedge} A \supset \cdots \supset G_k B_{\wedge} A \supset \cdots,$$

полагая $G_k B_{\wedge} A$ состоящим из элементов $[a_1, \dots, a_n]$, для которых сумма степеней сомножителей, входящих в $a_1, \dots, a_n$, больше либо равна k . Эта фильтрация порождает фильтрацию в комплексе Хохшильда $C_{\text{com}}^*(A; A)$. Дифференциал δ_1 соответствующей спектральной последовательности выражается формулой

$$\delta_1(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Поэтому для члена E_2 этой спектральной последовательности имеет место изоморфизм

$$E_2 \cong \text{Hom}(H_*(B_{\wedge} A); A).$$

В работе [9] показано, что если основное кольцо есть поле характеристики нуль, то $B_{\wedge} T_s X \simeq X$, следовательно,

$$H_n(B_{\wedge} A) \cong \begin{cases} X, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

А отсюда гомологии Хохшильда в размерностях больших единицы равны нулю. Тогда по теореме 3 будем иметь, что свободную коммутативную алгебру нельзя продолжить до нетривиальной структуры коммутативной A_{∞} -алгебры.

Список литературы

1. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
2. *Смирнов В. А.* A_{∞} -структуры и функтор $\mathcal{D}$ // Изв. РАН. 2000. Т. 64. № 5. С. 148–162.
3. *Берикашвили Н. А.* Дифференциалы спектральной последовательности // Труды Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе. 1976. Т. 51. С. 1–105.
4. *Смирнов В. А.* Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. 1998. Т. 62. № 3. С. 121–154.
5. *Кадеишвили Т. В.* К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. С. 183–188.
6. *Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D.* Perturbation theory in differential homological algebra // Illinois J. Math. 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
7. *Смирнов В. А.* Функтор $\mathcal{D}$ для скрещенных тензорных произведений // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 465–472.
8. *Brown E.* Twisted tensor products // Ann. of Math. (2). 1959. V. 69. P. 223–246.
9. *Smirnov V. A.* Simplicial and operad methods in algebraic topology // Transl. Math. Monogr. 2001. V. 198.