Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 10, 75–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 07:01:28

УДК 517.538.5+517.956.2

Х. Х. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский

О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций

В работе устанавливаются новые необходимые и достаточные условия равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами и полианалитическими рациональными функциями на компактных множествах комплексной плоскости. Анализируется также взаимосвязь между указанными аппроксимационными задачами и задачей Дирихле для бианалитических функций.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Напомним, что функция f называется n -аналитической на некотором открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, если $\bar{\partial}^n f = 0$ на U (в классическом смысле). Здесь n натуральное, а

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

— оператор Коши–Римана. Ясно, что f имеет в U (однозначное) представление

$$f(z) = \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \cdots + \bar{z} f_1(z) + f_0(z), \quad (1.1)$$

где $f_0, \dots, f_{n-1}$ — голоморфные в U функции. В частности, любой n -аналитический полином p (т.е. полином от переменных z и $\bar{z}$, удовлетворяющий всюду в $\mathbb{C}$ уравнению $\bar{\partial}^n p = 0$) имеет вид:

$$p(z, \bar{z}) = \bar{z}^{n-1} p_{n-1}(z) + \cdots + \bar{z} p_1(z) + p_0(z),$$

где $p_0, \dots, p_{n-1}$ — полиномы комплексного переменного z . В литературе (см., например, [1]) n -аналитические функции часто называют *полианалитическими* функциями *порядка* n .

Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$ с внутренностью X° , $C(X)$ — пространство всех непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой

Работа первого автора поддержана фондом Министерства образования и науки Испании (грант PB98-1242-C02-02) и фондом Генералитета Каталонии (грант 2000-SGR-00059).

Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00618 и 00-15-96008) и фондом Министерства образования и культуры Испании (грант SAB 1998-0049).

Работа третьего автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00618, 00-15-96008 и 01-01-06373) и фондом INTAS (грант YSF-2001/2-16).

$\|f\|_X = \max_{z \in X} |f(z)|$, $\mathcal{A}_n(X) = \{f \in C(X) : \bar{\partial}^n f = 0 \text{ на } X^\circ\}$. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ (соответственно $\mathcal{R}_n^X$) совокупность всех n -аналитических полиномов (соответственно n -аналитических рациональных функций с “полюсами” вне X , т.е. функций вида (1.1), у которых все коэффициенты $f_0, \dots, f_{n-1}$ – рациональные функции от z с полюсами вне X). Определим пространства $\mathcal{P}_n(X)$ и $\mathcal{R}_n(X, Y)$ (где Y – компакт, содержащий X) как замыкания в $C(X)$ подпространств $\{p|_X : p \in \mathcal{P}_n\}$ и $\{f|_X : f \in \mathcal{R}_n^Y\}$ соответственно. Нетрудно показать, что при $1 \leq s \leq n$ и любом X справедливы включения

$$\mathcal{P}_s(X) \subset \mathcal{P}_n(X) \subset \mathcal{R}_n(X, X) \subset \mathcal{A}_n(X).$$

Мы будем изучать следующую задачу аппроксимации для “классов функций”.

ЗАДАЧА 1.1. Найти необходимые и достаточные условия на компакт X , при которых выполняется равенство

$$\mathcal{P}_n(X) = \mathcal{A}_n(X). \quad (1.2)$$

В случае $n = 1$ задача 1.1 полностью решена в работе С.Н. Мергеляна [2] в топологических терминах:

ТЕОРЕМА 1.2. *Равенство $\mathcal{P}_1(X) = \mathcal{A}_1(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно.*

Всюду в дальнейшем задача 1.1 рассматривается при фиксированном $n \geq 2$. Здесь ситуация оказывается сложнее и интереснее: даже более простая на первый взгляд задача о совпадении пространств $\mathcal{P}_n(X)$ и $\mathcal{R}_n(X, X)$ до сих пор остается нерешенной (по теореме Рунге $\mathcal{P}_1(X) = \mathcal{R}_1(X, X)$, если и только если $\mathbb{C} \setminus X$ связно).

В работе [3] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus X$, $n \geq 2$. Тогда $\mathcal{P}_n(X) = \mathcal{A}_n(X)$.*

Таким образом, условие связности $\mathbb{C} \setminus X$ является достаточным в задаче 1.1 и в случае аппроксимации n -аналитическими многочленами, $n \geq 2$. Однако это условие уже не является необходимым для выполнения (1.2) при $n \geq 2$: если X – замкнутый контур, то соответствующий критерий приближаемости носит “чисто аналитический” характер (см. [4]).

Напомним, что ограниченная область Ω называется *областью Каратеодори*, если $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$, где Ω_∞ – неограниченная (связная) компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ (в частности, Ω односвязна и $\Omega = \overline{\Omega}^\circ$). Компактное множество $X \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если $\partial X = \partial\hat{X}$, где $\hat{X}$ – объединение X со всеми ограниченными компонентами его дополнения (так называемая *полиномиальная оболочка* X).

Под *контуром* понимается замкнутая жорданова кривая (не обязательно спрямляемая) в $\mathbb{C}$. Если Γ – контур, то $D(\Gamma)$ – область, им ограниченная. Пусть $\Gamma_1 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ – единичная окружность, а $D_1 = D(\Gamma_1) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ – единичный круг.

В §2 получены критерий совпадения пространств $C(\partial\Omega)$ и $\mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ для областей Каратеодори Ω (теорема 2.2 (1)) и критерий совпадения пространств $\mathcal{A}_n(X)$ и

$\mathcal{P}_n(X)$ для компактов Каратеодори X (теорема 2.2 (2)). Существенным для формулировки этих результатов является понятие *неванлинновской области* (см. определение 2.1).

В §3 мы исследуем свойства неванлинновских областей и приводим ряд примеров, иллюстрирующих результаты §2.

В §4 изучается задача 1.1 в случае $X = \Gamma \cup K$, где Γ – контур, а K – компактное подмножество области $D(\Gamma)$. Теорема 4.3 содержит два достаточных условия на K и Γ , при которых равенство (1.2) выполнено. Далее приводятся примеры, где равенство (1.2) не выполняется и, в частности, показывается, что достаточные условия приближаемости в теореме 4.3 не являются необходимыми. Таким образом, при исследовании задачи 1.1 возникают достаточно сложные аналитические характеристики множества X , зависящие также и от n . Например, если Γ – некоторый эллипс, а K – отрезок, соединяющий его фокусы, то для $X = \Gamma \cup K$ имеет место соотношение $P_2(X) \neq P_3(X) = C(X)$.

В §5 (см. следствие 5.3 и теорему 5.5) анализируется взаимосвязь между условием приближаемости (1.2) (где $n = 2$, а $X = \partial\Omega$ – граница жордановой области Ω) и условиями разрешимости и единственности в соответствующей задаче Дирихле для бианалитических (т.е. 2-аналитических) функций в области Ω . В отличие от классической задачи Дирихле для гармонических функций, до сих пор неизвестно: существуют ли области, регулярные для $\bar{\partial}^2$ -задачи Дирихле?

§2. Аппроксимация на компактах Каратеодори

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, k – какое-либо (фиксированное) конформное отображение единичного круга D_1 на Ω . Известно, что для почти всех (п.в.) t на Γ_1 (относительно длины на Γ_1) существуют угловые граничные значения $k(t)$ функции k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют две ограниченные голоморфные функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ в Ω (причем $v \neq 0$) такие, что для п.в. точек $t \in \Gamma_1$ выполняется следующее равенство *угловых граничных значений*:

$$\overline{k(t)} = \frac{u(k(t))}{v(k(t))}. \quad (2.1)$$

Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора k . Более того, по теореме единственности Лузина–Привалова [5; гл. 4, раздел 2.5] *отношение* u/v определено в Ω (для неванлинновской Ω) единственным образом.

Класс неванлинновских областей обозначим через $\mathcal{N}$. Используя традиционную терминологию (см., например, [6; гл. II, §6]), можно сказать, что область Ω является неванлинновской тогда и только тогда, когда существуют функции $u, v \in H_\infty(\Omega)$ ($v \neq 0$) такие, что $\bar{\zeta} = u(\zeta)/v(\zeta)$ на $\partial\Omega$ *почти всюду* (п.в.) в смысле конформных отображений. Здесь $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$ – граничные значения $u(z)$ и $v(z)$ на $\partial\Omega$, существующие на $\partial\Omega$ п.в. в смысле конформных отображений, а через $H_p(D_1)$ и $H_\infty(\Omega)$ обозначаются соответствующие классы Харди, $p \in [1, \infty)$.

Свойства областей класса $\mathcal{N}$ и конкретные примеры таких областей обсуждаются в §3.

Первым основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $n \geq 2$ – натуральное.

(1) Если Ω – область Каратеодори в $\mathbb{C}$, то

$$C(\partial\Omega) = \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) \iff \Omega \notin \mathcal{N}.$$

(2) Пусть X – компакт Каратеодори в $\mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$, если и только если каждая ограниченная компонента множества $\mathbb{C} \setminus X$ не является неванлинновской областью.

Всюду в дальнейшем под *мерой* понимается конечная комплекснозначная борелевская мера в $\mathbb{C}$. Через $\text{Spt } \mu$ обозначается носитель меры μ , а через $|\mu|$ – соответствующая ей *вариационная мера*. Термин “ μ -п.в.”, как обычно, означает “ $|\mu|$ -п.в.” Если μ – мера, а E – борелевское множество, то $\mu|_E$ есть сужение меры μ на множество E , т.е. $\mu|_E(E_1) = \mu(E \cap E_1)$.

Для спрямляемого контура Γ через $d\zeta|_\Gamma$ обозначается *мера* на Γ , действующая (как функционал на пространстве $C(\Gamma)$) по формуле $d\zeta|_\Gamma(f) = \int_\Gamma f(\zeta) d\zeta$. В случае $\Gamma = \Gamma_1$ мы используем комплексный параметр t (вместо ζ) и соответствующую меру обозначаем через $dt|_{\Gamma_1}$.

Преобразованием Коши меры μ называется (обобщенная) функция

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Хорошо известно, что $\hat{\mu}$ голоморфна вне $\text{Spt } \mu$ и $\bar{\partial}\hat{\mu} = \frac{i}{2}\mu$ в смысле обобщенных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Докажем (1). Точнее, мы установим, что

$$C(\partial\Omega) \neq \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) \iff \Omega \in \mathcal{N}.$$

Предположим, что $\Omega \in \mathcal{N}$. Тогда найдутся такие голоморфные и ограниченные в Ω функции u и $v \not\equiv 0$, что выполняется (2.1). Выберем точку $z_0 \in \Omega$ такую, что $0 < |u(z_0) - \bar{z}_0 v(z_0)|$. Покажем, что $\left. \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1}}{z - z_0} \right|_{\partial\Omega} \notin \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$. В самом деле, если мы предположим противное, то для любого $\delta > 0$ найдутся такие рациональные функции $f_0, \dots, f_{n-1}$ с полюсами вне $\overline{\Omega}$, что

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} \bar{\zeta}^s f_s(\zeta) - \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z}_0)^{n-1}}{\zeta - z_0} \right| < \delta$$

при $\zeta \in \partial\Omega$. Пусть $w_0 = k^{-1}(z_0) \in D_1$. Имеем

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} f_s(k(t)) \frac{u(k(t))^s}{v(k(t))^s} - \frac{[u(k(t)) - \overline{k(w_0)}v(k(t))^{n-1}]}{v(k(t))^{n-1}[k(t) - k(w_0)]} \right| < \delta$$

для п.в. $t \in \Gamma_1$, в которых выполняется (2.1) (в частности, $k(t)$ определено и принадлежит $\partial\Omega$). То есть

$$\left| \sum_{s=0}^{n-1} f_s(k(t)) u(k(t))^s v(k(t))^{n-1-s} [k(t) - k(w_0)] - [u(k(t)) - \overline{k(w_0)} v(k(t))]^{n-1} \right| \leq \delta \sup_{\tau \in \Gamma_1} |v(k(\tau))|^{n-1} |k(\tau) - k(w_0)| \quad (2.2)$$

для п.в. $t \in \Gamma$. Заметим, что функции в левой и правой частях неравенства (2.2) (знаки модулей опускаются) представляют собой граничные значения соответствующих функций из $H_\infty(D_1)$, поэтому по принципу максимума модуля мы можем подставить w_0 вместо t в (2.2):

$$|[u(k(w_0)) - \overline{k(w_0)} v(k(w_0))]^{n-1}| \leq \delta \sup_{\tau \in \Gamma_1} |v(k(\tau))|^{n-1} |k(\tau) - k(w_0)|,$$

что дает противоречие при достаточно малых δ .

Обратно, пусть $C(\partial\Omega) \neq \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$, тогда $C(\partial\Omega) \neq \mathcal{R}_2(\partial\Omega, \overline{\Omega})$. Поэтому найдется мера $\mu \neq 0$ на $\partial\Omega$ такая, что $\mu \perp \mathcal{R}_1(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ и $\bar{\zeta}\mu \perp \mathcal{R}_1(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ (символ $\perp$ означает ортогональность). Так как Ω является областью Каратеодори, то согласно [7; лемма 9] меры μ и $\bar{\zeta}\mu$ не имеют атомов.

Пусть $F(z) = \hat{\mu}(z)$, $G(z) = \bar{\zeta}\mu(z)$, $f(w) = F(k(w))k'(w)$ и $g(w) := G(k(w))k'(w)$. Мы утверждаем, что $f, g \in H_1(D_1)$. Нам будет удобно сформулировать это (скорее всего, известное) утверждение в виде леммы и привести его доказательство.

ЛЕММА 2.3. Пусть Ω — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, ν — мера на $\partial\Omega$, ортогональная к $\mathcal{R}_1(\partial\Omega, \overline{\Omega})$, а k — конформное отображение D_1 на Ω . Тогда $\hat{\nu}(k(w))k'(w) \in H_1(D_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 = k(0)$. Без ограничения общности будем считать (в этом доказательстве), что $k'(0) > 0$. Выберем последовательность спрямляемых контуров $\{T_m\}_{m=1}^\infty$ таких, что $\Omega \subset D(T_m) \subset D(T_{m-1})$ и $\{T_m\}$ сходится к $\partial\Omega$ при $m \rightarrow \infty$ (в качестве T_m может быть взят образ окружности $\{|w| = 1 - 1/(m+1)\}$ при каком-либо фиксированном конформном отображении круга $\{|w| < 1\}$ на Ω_∞). Пусть $\varphi_m: D(T_m) \rightarrow D_1$ — конформный изоморфизм с нормализацией $\varphi_m(z_0) = 0$, $\varphi'_m(z_0) > 0$. По теореме Каратеодори [8; с. 74–80] последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к k^{-1} равномерно на компактах из Ω . Зафиксируем произвольную точку $w \in D_1$ и положим $z_m = \varphi_m^{-1}(w)$. Функция

$$\begin{cases} h(\zeta) = \frac{1}{\varphi_m(\zeta) - \varphi_m(z_m)} - \frac{1}{\varphi'_m(z_m)(\zeta - z_m)} & \text{при } \zeta \neq z_m, \\ h(z_m) = -\frac{\varphi''_m(z_m)}{2\varphi'_m(z_m)} \end{cases}$$

голоморфна в $D(T_m)$ (т.е. $h \in \mathcal{R}_1(\partial\Omega, \overline{\Omega})$), а $\nu \perp \mathcal{R}_1(\partial\Omega, \overline{\Omega})$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\nu(\zeta)}{\varphi_m(\zeta) - \varphi_m(z_m)} = \frac{\hat{\nu}(z_m)}{\varphi'_m(z_m)}.$$

Определим меры ν_m по формулам $\nu_m(S) = \nu(\varphi_m^{-1}(S \cap D_1))$ для произвольного борелевского множества $S \subset \mathbb{C}$. Тогда $\text{Spt } \nu_m \subset D_1$ и имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\nu_m(\tau)}{\tau - w} = \widehat{\nu}(\varphi_m^{-1}(w))(\varphi_m^{-1})'(w), \quad (2.3)$$

причем $\nu_m \perp \mathcal{P}_1$ и $\|\nu_m\| \leq \|\nu\|$. Пусть ν_0 – какая-либо предельная точка последовательности $\{\nu_m\}$ в *-слабой топологии (пространства мер). Тогда $\text{Spt } \nu_0 \subset \Gamma_1$ и $\nu_0 \perp \mathcal{P}_1(\Gamma_1)$.

По известной теореме Ф. и М. Риссов (см., например, [5; гл. 2, § 5]) найдется функция $h \in H_1(D_1)$ (угловые граничные значения которой мы обозначим через $h(t)$) с условием $\nu_0 = h(t)dt|_{\Gamma_1}$. Переходя к пределу в (2.3), получаем

$$\widehat{\nu}_0(w) = \widehat{\nu}(k(w))k'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{d\nu_0(t)}{t - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{h(t) dt}{t - w} = h(w)$$

для всех $w \in D_1$, так что $\widehat{\nu}(k(w))k'(w) \in H_1(D_1)$ и лемма доказана.

Положим

$$\Psi(z) = \overline{z}F(z) - G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{z} - \overline{\zeta}}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Так как ядро $\frac{\overline{z} - \overline{\zeta}}{\zeta - z}$ ограничено и μ не имеет атомов, то $\Psi \in C(\mathbb{C})$. Кроме того, при

фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ имеем $\frac{\overline{z} - \overline{\zeta}}{\zeta - z} \in \mathcal{R}_2(\partial\Omega, \overline{\Omega})$, т.е. $\Psi(z) = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.

Следовательно, $(\overline{z}F(z) - G(z)) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \partial\Omega, z \in \Omega$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{f(w)\overline{k(w)} - g(w)}{k'(w)} = F(k(w))\overline{k(w)} - G(k(w)) = \overline{z}F(z) - G(z) \rightarrow 0$$

при $w \rightarrow \Gamma_1, w \in D_1$ (здесь $z = k(w)$).

Так как $f, g \in H_1(D_1)$, то функция $f(w)\overline{k(w)} - g(w)$ имеет п.в. на Γ_1 угловые предельные значения. Кроме того, для п.в. $t \in \Gamma_1$ и для любого угла Штольца Θ_t с вершиной в точке t (т.е. Θ_t – это угол с раствором $\alpha < \pi$ с вершиной в точке t , биссектриса которого проходит через центр круга D_1) существует последовательность $\{w_l\} \in \Theta_t$ такая, что $w_l \rightarrow t$ при $l \rightarrow \infty$ и $\limsup_{l \rightarrow \infty} |k'(w_l)| < \infty$. В самом деле, если это не так, то функция $1/k'(w)$ имеет нулевые угловые значения на множестве положительной длины на Γ_1 , что невозможно в силу граничной теоремы единственности Лузина–Привалова.

Итак, для п.в. $t \in \Gamma_1$ имеет место $f(t)\overline{k(t)} - g(t) = 0$. Заметим, что $f \not\equiv 0$, так как $\mu \not\equiv 0$ (см. [7; лемма 4]). Поскольку $H_1(D_1) \subset N(D_1)$ (класс Неванлинны) и (согласно [5; гл. 2, раздел 2.1]) всякая функция класса Неванлинны представляется в виде отношения двух функций класса $H_\infty(D_1)$, то для п.в. $t \in \Gamma_1$ имеем

$$\overline{k(t)} = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g_1(t)}{f_1(t)} = \frac{u(k(t))}{v(k(t))},$$

где $f_1, g_1 \in H_\infty(D_1)$, $u, v \in H_\infty(\Omega)$. Таким образом, $\Omega \in \mathcal{N}$ и утверждение (1) теоремы 2.2 полностью доказано.

Докажем утверждение (2). Пусть найдется ограниченная компонента Ω в $\mathbb{C} \setminus X$ с условием $\Omega \in \mathcal{N}$. Тогда согласно утверждению (1) теоремы 2.2 существует ненулевая мера μ с носителем $\text{Spt } \mu \subset \partial\Omega$ такая, что $\mu \perp \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$ и, следовательно, $\mu \perp \mathcal{P}_n(X)$. Так как $\mu \neq 0$ и $\widehat{\mu}(z) = 0$ вне $\overline{\Omega}$, то в силу [7; лемма 4] существует такая точка $z_0 \in \Omega$, что $\widehat{\mu}(z_0) \neq 0$. Это означает, что $\mu \not\perp (z - z_0)^{-1} \in \mathcal{A}_n(X)$, т.е. $\mathcal{A}_n(X) \neq \mathcal{P}_n(X)$ и первая часть утверждения (2) проверена.

Для доказательства обратного утверждения в (2) нам потребуется лемма, являющаяся непосредственным следствием [7; лемма 7] и известной теоремы Рунге:

ЛЕММА 2.4. Пусть X – компакт Каратеодори, Ω – некоторая ограниченная компонента его дополнения, $U = (\widehat{X})^\circ \setminus \Omega$. Тогда существует последовательность $\{q_j\} \subset \mathcal{P}_1$ с условиями:

- 1) $q_j \rightrightarrows 1$ на каждом компакте в Ω ;
- 2) $q_j \rightrightarrows 0$ на каждом компакте в U ;
- 3) $\|q_j\|_{\widehat{X}} \leq C$, где C – абсолютная константа.

Пусть μ – произвольная ненулевая мера на X , $\mu \perp \mathcal{P}_n(X)$. Фиксируем произвольную ограниченную компоненту Ω множества $\mathbb{C} \setminus X$. По условию $\Omega \notin \mathcal{N}$. Мы утверждаем, что $\widehat{\zeta^s \mu}(z) = 0$ при $z \in \Omega$ и $s = 0, \dots, n-1$. Действительно, выберем согласно лемме 2.4 последовательность $\{q_j\} \subset \mathcal{P}_1$ для рассматриваемых X , Ω и $U = (\widehat{X})^\circ \setminus \Omega$. Определим меры $\mu_j = q_j \mu$. Пусть μ_Ω – некоторая предельная точка последовательности $\{\mu_j\}$ в $*$ -слабой топологии пространства мер (т.е. существует последовательность $\{j_l\}$ такая, что $j_l \rightarrow +\infty$ и $\mu_{j_l} \xrightarrow{*} \mu_\Omega$ при $l \rightarrow +\infty$). Ясно, что $\text{Spt } \mu_\Omega \subset \partial X$ и для любых $s = 0, \dots, n-1$ и $z_0 \notin \text{Spt } \mu$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta^s \mu_\Omega}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{z}^s d\mu_\Omega(z)}{z - z_0} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{z}^s q_{j_l}(z) d\mu(z)}{z - z_0} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(q_{j_l}(z) - q_{j_l}(z_0)) \overline{z}^s d\mu(z)}{z - z_0} + \frac{q_{j_l}(z_0)}{2\pi i} \int \frac{\overline{z}^s d\mu(z)}{z - z_0} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{q_{j_l}(z_0)}{2\pi i} \int \frac{\overline{z}^s d\mu(z)}{z - z_0} = \begin{cases} \widehat{\zeta^s \mu}(z_0) & \text{при } z_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{при } z_0 \in (U \setminus \text{Spt } \mu) \cup \Omega'_\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

где Ω'_∞ – неограниченная компонента $\mathbb{C} \setminus X$. Из последнего вытекает, что $\mu_\Omega \perp \mathcal{P}_n(X)$, и мы (для доказательства того, что $\widehat{\zeta^s \mu}(z) = 0$ на Ω) можем (и будем) считать, что $\text{Spt } \mu \subset \partial X$ (достаточно рассмотреть вместо μ меру μ_Ω и повторить рассуждение). Но тогда из предыдущей серии равенств мы получаем, что $\widehat{\zeta^s \mu_\Omega}(z_0) = 0$ на $U \cup \Omega'_\infty$. Поскольку $\text{Spt } \mu \subset \partial X$ и $\mu \perp \mathcal{P}_1(X)$, то из [7; лемма 9] следует, что μ (и, следовательно, μ_Ω) не имеет атомов. Функция

$$f_\Omega(w) = \frac{1}{\pi} \int \frac{(\overline{z} - \overline{w}) d\mu_\Omega(z)}{z - w}$$

непрерывна на $\mathbb{C}$ и обращается в нуль на $U \cup \Omega'_\infty$, так что $f_\Omega(w) = 0$ вне $\overline{\Omega}$. Как известно, $\overline{\partial}^2 f_\Omega = \mu_\Omega$ в обобщенном смысле, так что $\text{Spt } \mu_\Omega \subset \partial\Omega$ и, следовательно, $\mu_\Omega \perp \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega})$. Так как $\Omega \notin \mathcal{N}$, то согласно утверждению (1) теоремы $\mu_\Omega = 0$ и нужное утверждение получено. Таким образом, доказано, что для любой компоненты Ω дополнения $\mathbb{C} \setminus X$ имеет место $\widehat{\zeta^s \mu}(z) = 0$ при $z \in \Omega$ и $s = 0, \dots, n-1$, т.е. $\mu \perp \mathcal{R}_n(X, X)$.

Для доказательства теоремы 2.2 остается установить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если X – компакт Каратеодори, то $\mathcal{R}_n(X, X) = \mathcal{A}_n(X)$ при всех натуральных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ непосредственно вытекает из емкостного критерия Витушкина [9; гл. 2, § 5, теорема 1], а случай $n = 2$ – из [10; теорема 3.1]. При $n > 2$ доказательство проводится по той же схеме (схеме Витушкина) или аналогично доказательству в [3]. Тем не менее для удобства читателя мы обсудим основные моменты доказательства ввиду его технической сложности.

Положим $L = \bar{\partial}^n$, и пусть $\Phi(z) = \bar{z}^{n-1}((n-1)!\pi z)^{-1}$ – фундаментальное решение для L , $\partial := \partial/\partial z$, $B(a, r)$ – открытый круг с центром a и радиусом $r > 0$. Зафиксируем какую-либо $f \in \mathcal{A}_n(X)$ и продолжим ее до непрерывной функции в $\mathbb{C}$ с компактным носителем.

Теперь зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и построим стандартное δ -разбиение единицы $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ на $\mathbb{C}$, где $\varphi_j \in C_0^\infty(B(a_j, \delta))$ и $a_j = \delta j$ (см. [10]). Пусть $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 : B(a_j, \delta) \cap \partial X \neq \emptyset\}$. При каждом $j \in J$ найдется $a_j^* \in B(a_j, \delta) \setminus X$ и жорданова кривая γ_j в $\overline{B(a_j^*, \delta)} \setminus X$ с началом в точке a_j^* и концом на $\partial B(a_j^*, \delta)$. При $j \notin J$ положим $a_j^* = a_j$.

Пусть $f_j = \Phi * (\varphi_j Lf)$, так что $Lf_j = \varphi_j Lf$ в обобщенном смысле и

$$f_j(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^s \bar{\partial}^s \partial^m \Phi(z - a_j^*),$$

где ряд (типа Лорана) сходится в метрике $C^\infty(|z - a_j^*| > 2\delta)$ (c_m^s зависят от j). Стандартным образом доказывается (см. [10]), что

$$\|f_j\|_{B(a_j^*, 3\delta)} \leq A\omega(\delta),$$

$$|c_m^s| \leq \frac{A\omega(\delta)(2\delta)^{2-n+m+s}}{m!s!}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь и далее (в этом доказательстве) константа A зависит только от n и может меняться в разных соотношениях.

Установим аналог леммы 3.1 из [10]. Для произвольно взятой жордановой кривой Γ в $\overline{B(0, \delta)}$ с началом в точке 0 и концом a , $|a| = \delta$, построим функцию g_Γ следующим образом. Пусть

$$h(z) = c_0(z^n(z - \delta^{-1}a)^n \sqrt{z(z - \delta^{-1}a)} - p_0(z)),$$

где голоморфная ветвь корня (вне кривой $\delta^{-1}\Gamma$), константа c_0 и полином p_0 (не зависящий от $\delta^{-1}\Gamma$) подобраны так, что $\lim_{z \rightarrow \infty} zh(z) = 1$. Теперь полагаем

$$g_\Gamma(z) = \frac{\bar{z}^{n-1}h(z/\delta)}{(n-1)!\pi\delta},$$

так что

$$\|\bar{\partial}^s \partial^m g_\Gamma\|_{B(0, 3\delta) \setminus \Gamma} \leq A\delta^{n-2-s-m}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Кроме того,

$$g_\Gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \partial^m \Phi(z)$$

при $|z| > \delta$, причем $d_0 = 1$ и справедливы оценки:

$$|d_m| \leq \frac{A\delta^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Следующие неравенства элементарны:

$$|\bar{\partial}^s \partial^m \Phi(z)| \leq Am! |z|^{n-2-s-m}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad m = 0, 1, \dots$$

При $j \in J$ положим $\gamma_j^* = \gamma_j - a_j^*$, так что определены $g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*)$ и мы можем ввести функции

$$g_j(z) := \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-s} \beta_l^s \bar{\partial}^s \partial^l g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) =: \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^s \bar{\partial}^s \partial^m \Phi(z - a_j^*)$$

(последний ряд сходится в $C^\infty(\{|z - a_j^*| > 2\delta\})$), где $n(n+3)/2$ коэффициентов β_l^s могут быть найдены из следующих условий:

$$c_m^s = b_m^s, \quad s = 0, \dots, n-1, \quad m = 0, \dots, n-s.$$

Пусть

$$g_{\gamma_j^*}(z - a_j^*) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^* \partial^m \Phi(z - a_j^*),$$

где $d_0^* = 1$ и $|d_m^*| \leq A\delta^m/m!$, $m = 0, 1, \dots$. Тогда

$$b_m^s = \sum_{l=0}^{\min\{m, n-s\}} \beta_l^s d_{m-l}^*, \quad s = 0, \dots, n-1, \quad m = 0, 1, \dots$$

Мы получаем следующую (распадающуюся по s треугольную) систему уравнений на β_l^s :

$$c_m^s = \sum_{l=0}^m \beta_l^s d_{m-l}^*, \quad s = 0, \dots, n-1, \quad m = 0, \dots, n-s.$$

Отсюда получаем $|\beta_l^s| \leq A\omega(\delta)\delta^{2-n+l+s}$ и, следовательно,

$$\|g_j\|_{B(a_j^*, 3\delta)} \leq A\omega(\delta),$$

$$|b_m^s| \leq \frac{A\omega(\delta)(2\delta)^{2-n+m+s}m^n}{m!s!}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad m = 0, 1, \dots$$

Таким образом,

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leq A\omega(\delta) \min\left(1, \frac{\delta^3}{|z - a_j^*|^3}\right)$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ (вне $B(a_j^*, 3\delta)$ используются приведенные выше оценки для c_m^s , b_m^s , $\bar{\partial}^s \partial^m \Phi(z - a_j^*)$ и соответствующие разложения типа Лорана с центром a_j^*). Наконец, в последнем неравенстве a_j^* можно заменить на a_j . Из леммы Витушкина

[9; гл. 2, § 4, лемма 1] следует, что функция f равномерно на X приближается функциями $\sum_{j \in J} g_j + \sum_{j \notin J} f_j$ при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку $Lg_j = 0$ в окрестности X , $f_j \equiv 0$ при $B(a_j, \delta) \subset X^\circ$ и $Lf_j = 0$ вне $B(a_j, \delta)$, остается воспользоваться классической теоремой Рунге.

Вопрос о нахождении условий на компакт X , необходимых и достаточных для выполнения равенства $\mathcal{R}_n(X, X) = \mathcal{A}_n(X)$, представляет самостоятельный интерес. Отметим работы [11]–[13], связанные с этой задачей. Так, в работах [3; § 4] и [13] поставлена следующая задача, которая пока остается нерешенной: верно ли, что для любого компакта X в $\mathbb{C}$ имеет место равенство $\mathcal{A}_2(X) = \mathcal{R}_2(X, X)$?

Заметим, что если $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно, то по теореме Рунге можно показать, что $\mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) = \mathcal{P}_n(\partial\Omega)$. Из этого факта и из теоремы 2.2 (1) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Если Ω – область Каратеодори и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно, а $n \geq 2$ – натуральное число, то $\mathcal{C}(\partial\Omega) = \mathcal{P}_n(\partial\Omega)$, если и только если $\Omega \notin \mathcal{N}$.*

§ 3. Свойства неванлинновских областей. Примеры наличия и отсутствия аппроксимации

Оказывается, что свойство $\Omega \in \mathcal{N}$ имеет следующую характеристику в терминах конформных отображений D_1 на Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$. Свойство $\Omega \in \mathcal{N}$ имеет место тогда и только тогда, когда конформное отображение k единичного круга D_1 на область Ω допускает псевдопродолжение неванлинновского типа через Γ_1 на $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$. Это означает, что существуют такие ограниченные голоморфные в $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$ функции $u_1(\cdot)$ и $v_1(\cdot)$ ($v_1 \not\equiv 0$), что при $\tilde{k}(w) = u_1(w)/v_1(w)$, $|w| > 1$, для п.в. $t \in \Gamma_1$ имеет место равенство $\tilde{k}(t) = k(t)$ (здесь $k(t)$ суть угловые граничные значения k изнутри D_1 , а $\tilde{k}(t)$ – угловые граничные значения $\tilde{k}$ изнутри $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $g(\cdot)$ положим $g_*(w) = \overline{g(\overline{w})}$ для всех w , где g_* определена.

Пусть $\Omega \in \mathcal{N}$, и пусть u и v взяты из определения 2.1. При $|w| > 1$ определим $u_1(w) = (u(k(1/w)))_*$ и $v_1(w) = (v(k(1/w)))_*$. В силу (2.1) для п.в. $t \in \Gamma_1$ имеем, что если $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$ некасательно стремится к t , то

$$\tilde{k}(w) = \frac{u_1(w)}{v_1(w)} = \frac{(u(k(1/w)))_*}{(v(k(1/w)))_*} = \frac{\overline{u(k(w'))}}{\overline{v(k(w'))}} \rightarrow k(t),$$

так как $w' = 1/\overline{w} \in D_1$ также некасательно стремится к t .

Обратно, пусть существуют функции u_1 и v_1 и выполнено условие псевдопродолжения. Определим при $|w| < 1$ функции $U(w) = (u_1(1/w))_*$ и $V(w) = (v_1(1/w))_*$. Как и в предыдущем случае, для п.в. $t \in \Gamma_1$ получаем, что если $w \in D_1$ некасательно стремится к t , то

$$\frac{U(w)}{V(w)} = \frac{(u_1(1/w))_*}{(v_1(1/w))_*} = \frac{\overline{u_1(w')}}{\overline{v_1(w')}} \rightarrow \overline{\tilde{k}(t)} = \overline{k(t)},$$

так как $w' = 1/\overline{w} \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$ некасательно стремится к t . Остается положить $u(z) = U(k^{-1}(z))$ и $v(z) = V(k^{-1}(z))$.

Применим предложение 3.1 к случаю жордановых неванлинновских областей, границы которых будем называть *неванлинновскими контурами*. Совокупность всех неванлинновских контуров мы также будем обозначать через $\mathcal{N}$. Понятие неванлинновского контура (в несколько других терминах) было введено в [4] (для спрямляемых контуров) и в [14] (для произвольного контура). Утверждение следствия 2.6 для жордановых областей было получено в [14].

Заметим, что для области $\Omega = D(\Gamma)$, ограниченной спрямляемым контуром Γ , свойство $\bar{\zeta} = u(\zeta)/v(\zeta)$ может пониматься напрямую – как равенство соответствующих угловых граничных значений п.в. на Γ .

В частном случае, когда конформное отображение k круга D_1 на область $D(\Gamma)$ может быть продолжено до отображения, конформного в некоторой окрестности множества $\overline{D_1}$ (это в точности означает, что Γ – аналитический контур), нетрудно показать, что функция

$$S(z) = k_* \left(\frac{1}{k^{-1}(z)} \right)$$

голоморфна и однолистка в некоторой связной окрестности U контура Γ . Эту окрестность можно выбрать так, чтобы

$$\Gamma = \{\zeta \in U : \bar{\zeta} = S(\zeta)\}. \quad (3.1)$$

Функция S называется *функцией Шварца* контура Γ . Очевидно, что S однозначно определена в некоторой связной окрестности контура Γ (см. [15], где подробно изучаются свойства этой функции). В случае, когда Γ – аналитический контур, из предложения 3.1 вытекает, что $\Gamma \in \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда k является рациональной функцией с полюсами вне $\overline{D_1}$ (см. также [15; гл. 14]). В последнем случае $S = u/v$ имеет конечное число особых точек (полюсов) в $D(\Gamma)$.

Рассмотрим ряд конкретных примеров. Очевидно, $\Gamma_1 = \{t \in \mathbb{C} : \bar{t} = 1/t\} \in \mathcal{N}$. Функцию Шварца для эллипса

$$\Gamma_{ab} = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad 0 < b < a, \quad (3.2)$$

легко вычислить непосредственно:

$$S(z) = \frac{(a^2 + b^2)z - 2ab\sqrt{z^2 - c^2}}{c^2}. \quad (3.3)$$

Здесь $c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$ и в (3.3) берется та голоморфная ветвь $s(z)$ многозначной функции $\sqrt{z^2 - c^2}$ вне $[-c, c]$, которая удовлетворяет условию $s(a) = b$. Таким образом, $\Gamma_{ab} \notin \mathcal{N}$.

Пусть теперь Ω – односвязная ограниченная область с границей, содержащей две (достижимые из Ω) аналитические дуги, причем функции Шварца этих дуг (в соответствующих окрестностях этих дуг) задают аналитические элементы, не продолжаемые друг в друга (такие дуги назовем *аналитически независимыми*). Из теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что в этом случае $\Omega \notin \mathcal{N}$ (см. также [4; предложение 2]). Таковыми являются все многоугольники.

Проиллюстрируем применение теоремы 2.2. Пусть Ω – “рог изобилия”, представляющий собой область, ограниченную двумя спиралями $z = (1 + e^{-\theta})e^{i\theta}$ и $z = (1 + 2e^{-\theta})e^{i\theta}$, $\theta \in [0, +\infty)$, а также отрезком $[2, 3]$ вещественной оси. Так

как $\partial\Omega$ содержит аналитически независимые дуги (достижимые из Ω), то $\Omega \notin \mathcal{N}$. Заметим, что $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. По теореме 2.2 (1) $C(\partial\Omega) = \mathcal{R}_n(\partial\Omega, \overline{\Omega}) \neq \mathcal{P}_n(\partial\Omega)$ при любом $n \geq 2$. С другой стороны, по теореме 2.2 (2) для $X = \partial\Omega \cup D_1$ имеет место $\mathcal{A}_n(X) = \mathcal{P}_n(X)$ для любого $n \geq 2$. Пусть теперь Ω_1 является образом области Ω под действием преобразования $(x + iy) \rightarrow (x + iy/\sqrt{2})$. По теореме 2.2 (2) “рог изобилия” Ω_1 , “накручивающийся” на эллипс $\{x^2 + 2y^2 = 1\}$, обладает тем свойством, что $C(\partial\Omega_1) = \mathcal{P}_n(\partial\Omega_1)$ при $n \geq 2$.

Другие важные примеры неванлинновских областей можно найти в [16] и [17; п. 4.2, пример 5].

Изучение геометрических свойств неванлинновских областей и контуров представляет особый интерес. Естественно возникает, например, следующая задача.

ЗАДАЧА 3.2. Верно ли, что всякий неванлинновский контур спрямляем?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если D – жорданова область со спрямляемой границей Γ и $D \in \mathcal{N}$, то функция $u - \bar{z}v$ (для всех допустимых u и v , см. определение 2.1) непрерывно продолжается из области D на $\overline{D}$, причем $u - \bar{z}v = 0$ на Γ .

Доказательство этого предложения приведено в §5 сразу после доказательства утверждения (1) теоремы 5.5.

В завершение §5 будет построен спрямляемый неванлинновский контур Γ такой, что соответствующие функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ не могут быть выбраны (ни одна из них) из пространства $\mathcal{A}_1(\overline{D(\Gamma)})$ (см. пример 5.8).

П. Ахерн обратил наше внимание на следующий результат Р. Дугласа, Г. Шапиро и А. Шилдса [18] (который мы сформулируем в нашей терминологии): ограниченная односвязная область Ω является неванлинновской тогда и только тогда, когда k не является циклическим вектором оператора обратного сдвига $f \mapsto (f(z) - f(0))/z$ в пространстве $H_2(D_1)$ (см. [18; теорема 2.2.1]).

§4. Аппроксимация на объединении компактных множеств

Фиксируем натуральное $n \geq 2$. Исследуемый в этом параграфе вопрос может быть кратко сформулирован следующим образом. Пусть X_1 и X_2 – компакты в $\mathbb{C}$, $X = X_1 \cup X_2$; когда для X справедливо равенство (1.2)?

Заметим, что в общей ситуации указанный вопрос не вполне удачен: возможно все. Например, оба компакта $X_1 = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ и $X_2 = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ удовлетворяют (1.2), что не так для $X = X_1 \cup X_2$. Противоположная ситуация возникает в случае $X_1 = \{z : |z - 1| = 1\} \cup \{z : |z + 1| \leq 1\}$ и $X_2 = \{z : |z + 1| = 1\} \cup \{z : |z - 1| \leq 1\}$, достаточно воспользоваться теоремами 1.3 и 2.2. С другой стороны, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, то (1.2) может иметь место при $X = X_1 \cup X_2$, только если (1.2) справедливо для каждого из X_1 и X_2 по отдельности. Более того, последнее условие также и достаточно, если $\widehat{X_1} \cap \widehat{X_2} = \emptyset$.

В этом параграфе рассматривается специальный частный случай, в котором $X_1 = \Gamma$ – произвольный контур, $\Gamma \notin \mathcal{N}$ (т.е. $\mathcal{P}_n(\Gamma) = C(\Gamma)$), а $X_2 = K$ – компакт в $D = D(\Gamma)$ с условием (1.2). Мы получим два достаточных условия, при которых $X = K \cup \Gamma$ удовлетворяет (1.2), а также несколько примеров, для которых это не так. В результате становится ясным, что основную роль здесь играет положение K относительно немероморфных особых точек (обобщенной) функции Шварца контура Γ .

Для дальнейшего нам необходимо выяснить структуру мер, ортогональных пространству $\mathcal{P}_1(X)$ на компактах X рассматриваемого вида.

ЛЕММА 4.1. Пусть Γ – спрямляемый контур в $\mathbb{C}$, K – произвольный компакт в $D = D(\Gamma)$, $X = \Gamma \cup K$, μ – мера на K . Тогда всякая мера σ , удовлетворяющая условиям

$$\text{Spt } \sigma \subset X, \quad \sigma|_K = \mu, \quad \sigma \perp \mathcal{P}_1(X),$$

имеет следующий вид:

$$\sigma = \mu + \hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_{\Gamma} + h(\zeta) d\zeta|_{\Gamma}, \quad (4.1)$$

где $h \in E_1(D)$ (класс Смирнова, см. [5; гл. 3, § 7]), а $h(\zeta)$ – угловые предельные значения функции h на Γ .

Обратно, для всякой меры μ на K и $h \in E_1(D)$ мера σ (определенная согласно (4.1)) ортогональна $\mathcal{P}_1(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\rho := \mu + \hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_{\Gamma} \perp \mathcal{P}_1(X)$.

Действительно, для всякого $p \in \mathcal{P}_1$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_X p(z) d\rho(z) &= \int_K p(z) d\mu(z) + \int_{\Gamma} p(\zeta) \hat{\mu}(\zeta) d\zeta \\ &= \int_K \left[p(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{p(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right] d\mu(z) = \int_K [p(z) - p(z)] d\mu(z) = 0 \end{aligned}$$

согласно теоремам Фубини и Коши.

Так как носитель меры $\sigma - \rho$ принадлежит Γ , то сама эта мера ортогональна $\mathcal{P}_1(X)$ и $\mathcal{P}_1(\Gamma)$ одновременно. Остается воспользоваться обобщенной теоремой Ф. и М. Риссова (см. [5; гл. 3]).

Нам потребуется расширить понятие неванлинновского контура применительно к данной задаче.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Спрямляемый контур Γ в $\mathbb{C}$ назовем *локально неванлинновским* (пишем $\Gamma \in \mathcal{N}_{\text{loc}}$), если существуют компактное множество $K_0 \subset D(\Gamma)$ и голоморфные ограниченные функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot) \not\equiv 0$ в $D(\Gamma) \setminus K_0$ такие, что для п.в. $\zeta \in \Gamma$ выполняется равенство угловых граничных значений

$$\bar{\zeta} = \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)}. \quad (4.2)$$

Следующий результат позволяет найти ряд новых нетривиальных примеров множеств, удовлетворяющих (1.2) при $n \geq 2$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\Gamma \notin \mathcal{N}$ – спрямляемый контур, K – компакт в $D = D(\Gamma)$ с условием (1.2), а $X = \Gamma \cup K$.

- (1) Если $\Gamma \notin \mathcal{N}_{\text{loc}}$, то $\mathcal{P}_n(X) = \mathcal{A}_n(X)$ (здесь n такое же, как и для K).
- (2) Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\text{loc}}$, u, v и K_0 взяты из определения 4.2. Если u/v не может быть продолжено мероморфно из $D \setminus (\widehat{K_0} \cup K)$ на $D \setminus \widehat{K}$, то $\mathcal{P}_n(X) = \mathcal{A}_n(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим противное: $\mathcal{P}_n(X) \neq \mathcal{A}_n(X)$, так что найдется мера σ на X такая, что $\sigma \perp \mathcal{P}_n(X)$, но $\sigma \not\perp \mathcal{A}_n(X)$. Пусть $\mu = \sigma|_K$, тогда согласно лемме 4.1 имеет место (4.1) с некоторой функцией $h \in E_1(D)$. Так как $\bar{z}^s \sigma \perp \mathcal{P}_1(X)$ при $s = 1, \dots, n-1$, то мы получаем:

$$\bar{z}^s \mu + \bar{\zeta}^s \widehat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma + \bar{\zeta}^s h(\zeta) d\zeta|_\Gamma \perp \mathcal{P}_1(X). \quad (4.3)$$

Пусть $\mu_s = \bar{z}^s \mu$. Снова применяя лемму 4.1, получаем, что

$$\bar{z}^s \mu + \widehat{\mu}_s(\zeta) d\zeta|_\Gamma \perp \mathcal{P}_1(X).$$

Следовательно, при $s = 1, \dots, n-1$ имеем:

$$(\bar{\zeta}^s \widehat{\mu}(\zeta) - \widehat{\mu}_s(\zeta) + \bar{\zeta}^s h(\zeta)) d\zeta|_\Gamma \perp \mathcal{P}_1(X).$$

А так как носители этих мер лежат на Γ , то все они ортогональны также и $\mathcal{P}_1(\Gamma)$. По (обобщенной) теореме Ф. и М. Риссов найдутся функции $h_s \in E_1(D)$ такие, что $\bar{\zeta}^s \widehat{\mu}(\zeta) - \widehat{\mu}_s(\zeta) + \bar{\zeta}^s h(\zeta) = h_s(\zeta)$ или, что то же самое,

$$\bar{\zeta}^s (h(\zeta) + \widehat{\mu}(\zeta)) = h_s(\zeta) + \widehat{\mu}_s(\zeta) \quad (4.4)$$

$d\zeta|_\Gamma$ -п.в. при $s = 1, \dots, n-1$.

Мы утверждаем, что $h(z) + \widehat{\mu}(z) \not\equiv 0$ в $D \setminus \widehat{K}$ (откуда $h(\zeta) + \widehat{\mu}(\zeta) \neq 0$ п.в. на Γ). В самом деле, в противном случае ввиду (4.1) и (4.3) мы бы имели $\mu \perp \mathcal{P}_n(X)$. А поскольку $\text{Spt } \mu \subset K$, то $\mu \perp \mathcal{P}_n(K) = \mathcal{A}_n(K)$, $\mu \neq 0$. Откуда с очевидностью $\mu \perp \mathcal{A}_n(X)$, что и дает нужное противоречие.

Таким образом, при $s = 1, \dots, n-1$ для п.в. точек $\zeta \in \Gamma$ имеет место равенство угловых предельных значений:

$$\bar{\zeta}^s = \frac{h_s(\zeta) + \widehat{\mu}_s(\zeta)}{h(\zeta) + \widehat{\mu}(\zeta)}.$$

Пусть k конформно отображает D_1 на D . Согласно [5; гл. 3, §6] функции $h_1(k(w))k'(w)$, $h(k(w))k'(w)$ и $k'(w)$ принадлежат классу $H_1(D_1)$ (а следовательно, и $N(D_1)$), поэтому найдутся ограниченные голоморфные в D функции u_0 , u_1 , v_0 и v_1 такие, что $h_1 = u_1/v_1$ и $h = u_0/v_0$. Отсюда для п.в. $\zeta \in \Gamma$ получаем

$$\bar{\zeta} = \frac{(u_1(\zeta) + v_1(\zeta)\widehat{\mu}_1(\zeta))v_0(\zeta)}{(u_0(\zeta) + v_0(\zeta)\widehat{\mu}(\zeta))v_1(\zeta)}, \quad (4.5)$$

где числитель и знаменатель в (4.5) голоморфны и ограничены вблизи Γ в D . Последнее означает, что $\Gamma \in \mathcal{N}_{\text{loc}}$, а это противоречит нашему предположению в (1).

Для доказательства (2) мы используем (4.5) и граничную теорему единственности Лузина–Привалова [5; гл. 4, раздел 2.6], согласно которым u/v должно совпадать с правой частью (4.5) в $D \setminus (\widehat{K_0} \cup \widehat{K})$ и, следовательно, u/v должно продолжаться по формуле (4.5) мероморфно в $D \setminus \widehat{K}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. В теореме 4.3 условие спрямляемости контура $\Gamma \notin \mathcal{N}$ может быть опущено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что свойство локальной неванлинновости, введенное для спрямляемых контуров, допускает естественное распространение на ограниченные односвязные области G : достаточно в определении 4.2 заменить $D(\Gamma)$ на G , Γ на ∂G и понимать равенство (4.2) в смысле конформных отображений (см. (2.1) в определении 2.1).

Пусть $K \subset \Omega$ – компакт с условием (1.2) и $X = \partial\Omega \cup K$. Предположим, что $\mathcal{A}_n(X) \neq \mathcal{P}_n(X)$ и $\sigma \not\equiv 0$ – такая мера X , что $\sigma \perp \mathcal{P}_n(X)$, но $\sigma \not\perp \mathcal{A}_n(X)$. Пусть k – конформное отображение D_1 на Ω , продолженное согласно теореме Каратеодори (см. [19; гл. II, раздел C, п. 1]) до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{D_1}$ и $\overline{\Omega}$. “Перенесем картинку” из $\overline{\Omega}$ в $\overline{D_1}$ с помощью k^{-1} . Пусть $K' = k^{-1}(K)$ и $X' = \Gamma_1 \cup K'$. Определим меру σ' на X' по формуле $\sigma' = k^{-1}(\sigma)$, так что

$$\int f(w) d\sigma'(w) = \int f(k^{-1}(z)) d\sigma(z)$$

для любой функции $f \in C(\overline{D_1})$. Покажем, что $\overline{k}^s \sigma' \perp \mathcal{P}_1(X')$ при $s = 0, \dots, n-1$. В самом деле, для любого $p \in \mathcal{P}_1$ имеем

$$\int_{X'} p(w) \overline{k(w)}^s d\sigma'(w) = \int_X p(k^{-1}(z)) \overline{z}^s d\sigma(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X q_j(z) \overline{z}^s d\sigma(z) = 0,$$

где последовательность $\{q_j\} \subset \mathcal{P}_1$ выбрана так, что $\|q_j - p(k^{-1}(\cdot))\|_{\overline{\Omega}} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ (это возможно по теореме Мергеляна).

Остается дословно повторить доказательство теоремы 4.3, заменяя (всюду, где нужно) умножение на $\overline{z}^s$ умножением на $\overline{k(w)}^s$. Так, вместо (4.4) получаем:

$$\overline{k(t)}^s (h(t) + \widehat{\mu'}(t)) = h_s(t) + \widehat{(\overline{k}^s \mu')}(t)$$

при $s = 1, \dots, n-1$ для п.в. точек $t \in \Gamma_1$, где $\mu' = \sigma'|_{K'}$, и функции $h(\cdot)$ и $h_s(\cdot)$ при $s = 1, \dots, n$ принадлежат $H_1(D_1)$.

Итак, если Γ – какой-либо контур, содержащий аналитически независимые дуги, то $\Gamma \notin \mathcal{M}_{\text{ос}}$ и для Γ применима теорема 4.3 (1). Приведем примеры использования теоремы 4.3 (2).

ПРИМЕР 4.5. Пусть S – функция Шварца (3.3) эллипса (3.2), т.е. $\Gamma = \Gamma_{ab}$. Поскольку полное аналитическое продолжение по Вейерштрассу аналитического элемента $(S, \mathbb{C} \setminus [-c, c])$ имеет только две (конечные) особые точки $\pm c$ – ветвления второго порядка, то по теореме 4.3 (2) при всех $n \geq 2$ имеет место $\mathcal{P}_n(K \cup \Gamma) = \mathcal{A}_n(K \cup \Gamma)$ для любого компакта K в D с условием (1.2), у которого $\widehat{K}$ “не соединяет” c и $-c$ (или проще: если $\widehat{K}$ не содержит одну из них). Здесь в качестве K_0 берется подходящая жорданова кривая в $D(\Gamma)$, соединяющая c и $-c$.

Представляется интересным найти также противоположный пример для этого же Γ . Пусть γ – какая-либо простая аналитическая дуга в $D = D(\Gamma)$, соединяющая c и $-c$, обладающая тем свойством, что ее функция Шварца φ (т.е. $\varphi(z) = \overline{z}$ на γ) голоморфна в некоторой окрестности множества $\overline{D}$; например, $\gamma = [-c, c]$, а $\varphi(z) = z$. Мы докажем, что если $K = \gamma$, то $\mathcal{P}_2(X) \neq C(X)$, однако $\mathcal{P}_n(X) = C(X)$ при $n \geq 3$.

Пусть $\sigma \perp \mathcal{P}_1(X)$, $\mu = \sigma|_K$. По лемме 4.1 найдется $h \in E_1(D)$ такая, что

$$\sigma = \mu + \hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma + h(\zeta) d\zeta|_\Gamma.$$

Так как $\varphi \in \mathcal{P}_1(\overline{D}) \subset \mathcal{P}_1(X)$, то $\varphi^s \sigma \perp \mathcal{P}_1(X)$ при $s = 1, \dots, n-1$. Следовательно, $\sigma \perp \mathcal{P}_n(X)$, если и только если $(\bar{z}^s \sigma - \varphi^s \sigma) \perp \mathcal{P}_1(X)$ или, эквивалентно (поскольку $\bar{z} = \varphi(z)$ на γ),

$$(\bar{\zeta}^s - \varphi^s(\zeta))(\hat{\mu}(\zeta) d\zeta|_\Gamma + h(\zeta) d\zeta|_\Gamma) \perp \mathcal{P}_1(\Gamma)$$

при $s = 1, \dots, n-1$.

Таким образом, условие $\mathcal{P}_n(X) \neq C(X)$ эквивалентно тому, что найдутся ненулевая мера μ на γ и функции $h \in E_1(D)$ и $h_s \in E_1(D)$ такие, что (ввиду $\bar{\zeta} = S(\zeta)$ на Γ):

$$(S^s(z) - \varphi^s(z))(\hat{\mu}(z) + h(z)) = h_s(z), \quad s = 1, \dots, n-1, \quad (4.6)$$

в $D \setminus \gamma$ (заметим, что здесь S выбрана голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \gamma$).

Пусть $n \geq 3$ и указанные $\mu \neq 0, h, h_s$ с условиями (4.6) существуют. Как и в доказательстве теоремы 4.3(1) получаем, что $h(z) + \hat{\mu}(z) \neq 0$ в $D \setminus \gamma$, так что $h_1 \neq 0$ и $h_2 \neq 0$ в D . В то же время из (4.6) следует, что $h_2(z) = h_1(z)(S(z) + \varphi(z))$, что невозможно. Таким образом, $\mathcal{P}_n(X) = C(X)$ при $n \geq 3$.

Пусть теперь $n = 2$. Найдем нужные μ, h, h_1 . Элементарные вычисления показывают, что $S(z) \neq \bar{z}$ при $z \in D$ (при $z \in \gamma$ берутся граничные значения функции S на γ). Последнее означает (ввиду $\varphi(z) = \bar{z}$ на γ), что функция $\frac{1}{S(z) - \varphi(z)}$ ограничена вблизи γ , т.е. $S(z) - \varphi(z)$ имеет только конечное число нулей в $W \setminus \gamma$ (где W — некоторая окрестность множества $\overline{D}$, в которой φ голоморфна). Возьмем в качестве h_1 некоторый полином с такими же нулями (с учетом порядков), как у $S - \varphi$ в $W \setminus \gamma$. Нам надо иметь

$$\hat{\mu}(z) = \frac{h_1(z)}{S(z) - \varphi(z)} - h(z).$$

Пусть $\chi \in C_0^\infty(W)$ такова, что $\chi = 1$ в некоторой окрестности W_1 множества $\overline{D}$, $W_1 \subset W$. Определим

$$\mu = \chi \bar{\partial} \left(\frac{h_1}{S - \varphi} \right),$$

где последнее равенство понимается в обобщенном смысле. Из формулы Коши и хорошо известной конструкции *-слабых пределов соответствующих мер можно показать, что μ есть ненулевая мера на γ , абсолютно непрерывная относительно длины на γ .

Наконец, положим

$$h = \frac{h_1}{S - \varphi} - \hat{\mu} \quad \text{в } W_1.$$

Тогда $h \in \mathcal{A}_1(\overline{D}) \subset E_1(D)$. Ввиду $\mathcal{P}_2(\gamma) = C(\gamma)$ найдется полином $p \in \mathcal{P}_2$ со свойством $\int p d\mu \neq 0$. Теперь возьмем функцию $f = p$ на K и $f(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \Gamma$.

Тогда $f \in C(X)$, но $\int f d\sigma = \int f d\mu \neq 0$. По построению $\sigma \perp \mathcal{P}_2(X)$, а значит, $C(X) \neq \mathcal{P}_2(X)$.

ПРИМЕР 4.6. В этом примере мы покажем, что условие на X , достаточное для выполнения (1.2), которое приведено в теореме 4.3 (2), не является необходимым. Конкретно, (1.2) может выполняться для $X = K \cup \Gamma$, где Γ – аналитический контур, у которого функция Шварца S голоморфна в $D \setminus \widehat{K}$, $K = \widehat{K}$ и $K^\circ = \emptyset$.

Пусть Γ – образ единичной окружности Γ_1 под действием отображения $z = \exp w$. Для Γ имеем $S(z) = \exp(1/\log z)$, где $\log z$ есть главная ветвь логарифма в правой полуплоскости. Функция S имеет единственную особую точку $z = 1$ в D , которая является существенно особой, так что $\mathcal{P}_2(\Gamma) = C(\Gamma)$. Мы утверждаем, что если $K = \widehat{K}$ имеет плоскую лебегову меру нуль, то $\mathcal{P}_2(X) = C(X)$. По теореме 4.3 нам нужно рассмотреть только случай $1 \in K$. Пусть, от противного, $\mathcal{P}_2(X) \neq C(X)$. Тогда согласно (4.4) найдутся мера $\mu \neq 0$ на K , функции h и h_1 из $E_1(D)$ такие, что

$$(\widehat{\bar{z}\mu}) - S\hat{\mu} = Sh - h_1 \quad (4.7)$$

в $D \setminus K$. Так как K имеет нулевую лебегову меру, то (4.7) верно в $D \setminus \{1\}$ в обобщенном смысле. Применяя оператор $\bar{\partial}$ к (4.7), мы получаем

$$\bar{z}\mu - S(z)\mu = 0, \quad z \in D \setminus \{1\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\bar{z} \neq S(z)$ в D , откуда $\text{Spt } \mu = \{1\}$. Следовательно,

$$\hat{\mu}(z) = (\widehat{\bar{z}\mu}) = \frac{\text{Const}}{z-1},$$

что противоречит (4.7), ибо для S точка 1 существенно особая. Можно показать, что тот же результат справедлив, если S имеет только конечное число особых точек в D ($\Gamma \notin \mathcal{N}$) и конечное число точек $z \in D$ с условием $\bar{z} = S(z)$.

§ 5. Аппроксимация бианалитическими полиномами и $\bar{\partial}^2$ -задача Дирихле

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей T . Определим

$$\mathcal{S}_2(T) = \{\varphi \in C(T) : \exists f_\varphi \in C(\bar{\Omega}), \bar{\partial}^2 f_\varphi(z) = 0, z \in \Omega, f_\varphi|_T = \varphi\}.$$

В стандартной терминологии $\mathcal{S}_2(T)$ есть совокупность функций $\varphi \in C(T)$, для которых $\bar{\partial}^2$ -задача Дирихле разрешима в классическом смысле. Говорят, что Ω является $\bar{\partial}^2$ -регулярной, если $\mathcal{S}_2(T) = C(T)$, и $\bar{\partial}^2$ -иррегулярной в противном случае. На самом деле возникает

ЗАДАЧА 5.1. Существует ли хотя бы одна $\bar{\partial}^2$ -регулярная область в $\mathbb{C}$?

Следующее предложение подтверждает, что ответ на последний вопрос скорее всего отрицателен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть Γ – контур, содержащий какую-либо аналитическую дугу γ , тогда область $D = D(\Gamma)$ является $\bar{\partial}^2$ -иррегулярной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – функция Шварца дуги γ , т.е. S голоморфна в некоторой окрестности U дуги γ и $\bar{z} = S(z)$ на γ . Мы можем дополнительно потребовать, чтобы $U \cap D$ было связным. Возьмем какую-либо точку $a \in U \cap D$. Мы утверждаем, что функция $\varphi := 1/(z - a)|_{\Gamma} \notin \mathcal{S}_2(\Gamma)$. Пусть, от противного, найдется $f_\varphi \in \mathcal{A}_2(\bar{D})$, $f_\varphi|_{\Gamma} = \varphi$. Тогда $f_\varphi(z) = f_0(z) + \bar{z}f_1(z)$, где f_0 и f_1 голоморфны в D . Ввиду [3; лемма 3] имеем:

$$|f_1(z)| \leq A \frac{\omega(f_\varphi, \text{dist}(z, \Gamma))}{\text{dist}(z, \Gamma)} \quad (5.1)$$

для всех $z \in D$, где $\omega(f_\varphi, \cdot)$ есть модуль непрерывности функции f_φ в $\bar{D}$ и A – абсолютная константа. Рассмотрим “когерентную” функцию $f_\Gamma(z) = f_0(z) + S(z)f_1(z)$ (см. [1; с. 53]), голоморфную в $D \cap U$. Из (5.1) получаем

$$f_\varphi(z) - f_\Gamma(z) = f_1(z)(\bar{z} - S(z)) \rightarrow 0 \text{ равномерно при } z \rightarrow \gamma_0, \quad z \in D \cap U,$$

где γ_0 – некоторая невырожденная аналитическая поддуга в γ . Следовательно, f_Γ непрерывно продолжается на $D \cup \gamma_0$, $f_\Gamma = \varphi$ на γ_0 , так что $f_\Gamma(z) = 1/(z - a)$ в $D \cap U$, что невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. (1) Для всякого контура Γ справедливо

$$\mathcal{S}_2(\Gamma) \subset \mathcal{P}_2(\Gamma) \subset C(\Gamma).$$

(2) Для любого $\Gamma \notin \mathcal{N}$, содержащего некоторую аналитическую поддугу,

$$\mathcal{S}_2(\Gamma) \neq \mathcal{P}_2(\Gamma) = C(\Gamma). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (1) пользуемся теоремой 1.3; чтобы установить (2), применяем теорему 2.2 и предложение 5.2.

Представляется полезным сравнить (5.2) с соответствующей ситуацией для гармонических функций в шкале равномерной и липшицевых норм. Пусть Γ – произвольный контур в $\mathbb{C}$. При любом $q \in [0, 1/2)$ всякая функция $f \in \text{lip}(q, \Gamma)$ может быть единственным образом продолжена до функции $F \in \text{lip}(q, \bar{D})$, гармонической в $D = D(\Gamma)$ (см. [20]), причем f приближаема в $\text{Lip}(q, \Gamma)$ -норме на Γ гармоническими полиномами (см. [21; следствие 1.2]; там же, в [21], можно найти определения пространств $\text{Lip}(q, X)$ и $\text{lip}(q, X)$, $q \in [0, 1)$). При $q \in [1/2, 1)$ существуют контур Γ , а также функция $f \in \text{lip}(q, \Gamma)$, $\text{Lip}(q, \Gamma)$ -приближаемая на Γ гармоническими полиномами, для которой соответствующее решение F задачи Дирихле не принадлежит $\text{Lip}(q, \bar{D})$ (см. [21; предложение 3.5]). Это означает, что ситуация, аналогичная (5.2), для гармонических функций возникает только с порядка гладкости $q = 1/2$.

В следующем результате дается полное описание пространств $\mathcal{S}_2(\Gamma)$ и $\mathcal{P}_2(\Gamma)$ в специальном случае, когда Γ есть аналитический неванлинновский контур.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть Γ – аналитический неванлинновский контур, $D = D(\Gamma)$, а $S = u/v$ – функция Шварца контура Γ (мы вправе считать, что u и v голоморфны на открытом множестве U , содержащем $\bar{D}$, причем u и v не имеют общих нулей в U). Тогда

$$\mathcal{S}_2(\Gamma) = \mathcal{P}_2(\Gamma) = \{\varphi \in C(\Gamma) : P[\varphi v] \in \mathcal{A}_1(\bar{D})\}, \quad (5.3)$$

где P – оператор Пуассона для области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $B(\Gamma)$ правую часть в (5.3). По следствию 5.3 достаточно показать, что $\mathcal{P}_2(\Gamma) \subset B(\Gamma)$ и $B(\Gamma) \subset \mathcal{S}_2(\Gamma)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_2(\Gamma)$. Тогда найдутся последовательности $\{p_m(z)\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{P}_1$ и $\{q_m(z)\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{P}_1$ такие, что $\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} (p_m + \bar{z}q_m)$ равномерно на Γ . Отсюда вытекает, что $\varphi v = \lim_{m \rightarrow \infty} (vp_m + uq_m)$ равномерно на Γ и, следовательно, по принципу максимума модуля $\{vp_m + uq_m\}$ сходится равномерно на $\bar{D}$ к функции $f \in \mathcal{A}_1(\bar{D})$. Откуда $P[\varphi v] = f$.

Теперь докажем другое включение. Согласно [22; с. 329] найдутся функции $e_1(\cdot)$ и $e_2(\cdot)$, голоморфные в U , с условием $e_1 v + e_2 u = 1$. Отсюда для всякой функции $f \in \mathcal{A}_1(\bar{D})$ выполнено $f = v f_1 + u f_2$, где $f_1 = f e_1 \in \mathcal{A}_1(\bar{D})$ и $f_2 = f e_2 \in \mathcal{A}_1(\bar{D})$.

Теперь возьмем любую функцию $\varphi \in B(\Gamma)$ и рассмотрим $f = P[\varphi v]$. Согласно приведенным аргументам

$$P[\varphi v] = v f_1 + u f_2 \quad \text{в } \bar{D},$$

поэтому $\varphi = f_1 + f_2(u/v) = f_1 + f_2 \bar{z}$ на Γ при $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_1(\bar{D})$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{S}_2(\Gamma)$. Этим завершается доказательство (5.3).

Следующая теорема указывает также на отсутствие эквивалентности между условием приближаемости (1.2) при $X = \partial\Omega$ для области Каратеодори Ω и свойством единственности решений $\bar{\partial}^2$ -задачи Дирихле в Ω .

ТЕОРЕМА 5.5. (1) Если $\Omega \in \mathcal{N}$ — область Каратеодори, то найдется такая функция $f \in \mathcal{A}_2(\bar{\Omega})$, что $f|_{\partial\Omega} = 0$, но $f \not\equiv 0$ в Ω .

(2) Существуют спрямляемый контур $\Gamma \notin \mathcal{N}_{\text{loc}}$ и функция f с теми же свойствами, что и в (1); указанный контур может даже быть аналитическим всюду, за исключением одной точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Согласно [1; теорема 3.8] каждый аналитический контур $\Gamma \notin \mathcal{N}$ обладает свойством единственности, т.е. из $f \in \mathcal{A}_2(\bar{D})$, $D = D(\Gamma)$, и $f|_\Gamma = 0$ вытекает $f \equiv 0$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5 (1). Пусть $\Omega \in \mathcal{N}$. Так же как в доказательстве теоремы 2.2, мы можем найти ненулевую меру μ на $\partial\Omega$ такую, что $\mu \perp \mathcal{R}_2(\partial\Omega, \bar{\Omega})$. Согласно [7; лемма 9] мера μ не имеет атомов. Рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{z - \zeta} d\mu(\zeta),$$

которая (в силу аргументов, приведенных в доказательстве утверждения (1) теоремы 2.2) всюду определена, непрерывна и обращается в нуль вне Ω . Так как $\mu \not\equiv 0$, то $\Psi \not\equiv 0$, т.е. функция $\Psi(\cdot)$ полностью удовлетворяет условиям п. (1) теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}$ спрямляем, а u и v взяты из определения 2.1. По формуле Коши, которая остается справедливой для функций класса $H_\infty(D)$, имеем:

$$u(z) - \bar{z}v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} v(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

так что, как и чуть выше, остается заметить, что мера $v d\zeta|_\Gamma$ конечна и не имеет атомов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5 (2). Здесь мы будем следовать идее Мазалова [16], модифицируя его конструкцию нигде не аналитического неванлинновского контура.

Возьмем какую-либо последовательность различных точек $\{a_l\}$ таких, что $2/3 < |a_l| < 1$ и $|a_l| \nearrow 1$ при $l \rightarrow +\infty$, и последовательность положительных чисел $\{r_l\}$, которые (обе) будут конкретизированы позже. Сейчас мы только потребуем, чтобы все круги $B_l = B(a_l, r_l)$, $l \geq 1$, были попарно внешними и $r_l < d_l/2$, где $d_l = 1 - |a_l|$. В частности, $\bigcup_{l=1}^{\infty} B_l \subset \{w : 1/2 < |w| < 1\}$.

Теперь возьмем последовательность $\{\varepsilon_l\}$, $\varepsilon_l > 0$, с условием

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{r_l} \leq 1, \quad (5.4)$$

гарантирующим, что функция

$$g(w) = \frac{1}{w} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{w - a_l} \quad (5.5)$$

мероморфна в D_1 , голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_1}$ и непрерывна на $\overline{\mathbb{C}} \setminus D_1$. Более того,

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \frac{1}{|w|} + 1 \quad \text{при } w \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_l, \\ |g(w)| &\leq 3 + \frac{\varepsilon_j}{|w - a_j|} \quad \text{при } w \in B_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Введем $k(w) := g_*(1/w)$ и оценим $|g(w) - \overline{k(w)}|$ при $1/2 \leq |w| < 1$, $w \notin \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$:

$$\begin{aligned} |g(w) - \overline{k(w)}| &\leq \left| \frac{1}{w} - \overline{w} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(1 - |w|^2)}{|w - a_l||1 - a_l \overline{w}|} \\ &\leq 3(1 - |w|) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_l(1 - |w|)}{r_l d_l} \leq 5(1 - |w|). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Последнее выполняется при дополнительном требовании

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{r_l d_l} \leq 1, \quad (5.7)$$

которое включает (5.4). Ввиду

$$k(w) = w - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l w}{\overline{a_l}(w - a_l^*)}, \quad a_l^* = \frac{1}{\overline{a_l}},$$

имеем

$$k'(w) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{\overline{a_l}^2 (w - a_l^*)^2}.$$

Из (5.7) следует, что последняя (производная) функция действительно существует в D_1 , причем k задает конформное отображение из D_1 на некоторую жорданову область с гладкой границей, ибо при $|w| \leq 1$ имеет место

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{|a_l|^2 |w - a_l^*|^2} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{d_l^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Нам необходимо следующее утверждение.

ЛЕММА 5.7. *Существует голоморфная функция h в D_1 , $h \not\equiv 0$, со следующими свойствами:*

$$|h(w)|(1 - |w|) = \eta(w) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |w| \rightarrow 1, \quad (5.8)$$

ее множество нулей $\{a_l\}_{l=0}^{\infty}$ ($a_0 = 0$, $2/3 < |a_l| < 1$ при $l \geq 1$) не удовлетворяет условию Бляшке, т.е.

$$\sum_{l=1}^{\infty} (1 - |a_l|) = +\infty, \quad (5.9)$$

и, более того, $\lim_{l \rightarrow \infty} a_l = 1$.

Сначала мы продолжим и завершим доказательство теоремы 5.5; лемма 5.7 будет доказана чуть позже.

Сейчас мы фиксируем h и соответствующую $\{a_l\}_{l=0}^{\infty}$ из леммы 5.7. Если

$$\lambda_l = \lim_{z \rightarrow a_l} \frac{h(w)}{w - a_l},$$

то мы можем найти такие $\rho_l > 0$, что при $|w - a_l| \leq \rho_l$ имеет место

$$|h(w)| \leq (|\lambda_l| + 1)|w - a_l| \leq \frac{1}{l}, \quad l \geq 1.$$

Теперь мы уже можем конкретизировать $\{r_l\}$, которые должны только удовлетворять приведенным выше (непосредственно перед (5.4)) требованиям и, дополнительно, условиям $r_l \leq \rho_l$ при $l \geq 1$. Рассмотрим в D_1 функцию

$$F(w) = h(w)(g(w) - \overline{k(w)}),$$

где ε_l в (5.5) выбраны с условием (5.7).

При $w \in B_l$ находим:

$$\begin{aligned} |F(w)| &\leq |h(w)| |g(w)| + |h(w)| |k(w)| \\ &\leq |h(w)| \left(3 + \frac{\varepsilon_l}{|w - a_l|} \right) + 2|h(w)| \leq \frac{5}{l} + \varepsilon_l (|\lambda_l| + 1). \end{aligned}$$

Окончательное условие на ε_l , дополнительное к (5.7), таково: $(|\lambda_l| + 1)\varepsilon_l \leq 1/l$ при $l \geq 1$. Из него мы получаем

$$|F(w)| \leq \frac{6}{l}, \quad w \in B_l.$$

Но в $D_1 \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$, пользуясь (5.6) и (5.8) (также ввиду $h(0) = 0$), мы имеем

$$|F(w)| \leq \frac{A(1 - |w|)\eta(w)}{(1 - |w|)} = A\eta(w) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |w| \rightarrow 1.$$

Таким образом, F непрерывно продолжается на $\overline{D_1}$, $F|_{\Gamma_1} = 0$, но $F \not\equiv 0$ в D_1 . Теперь положим $\Gamma = k(\Gamma_1)$, $D = D(\Gamma)$. Искомая функция $f \in \mathcal{A}_2(\overline{D})$ имеет вид:

$$f(z) = F(k^{-1}(z)) = h(k^{-1}(z))(g(k^{-1}(z)) - \overline{z}).$$

Пусть $\Gamma'_1 = \Gamma_1 \setminus \{1\}$ и $\Gamma' = k(\Gamma'_1)$. Нетрудно проверить, что k на самом деле конформно в некоторой окрестности множества $\overline{D_1} \setminus \{1\}$, т.е. Γ' есть открытая аналитическая дуга. Функция $g_1(z) = g(k^{-1}(z))$ мероморфна в D , непрерывна на $D \cup \Gamma'$, а также $g_1(\zeta) = \bar{\zeta}$ на Γ' , поскольку g непрерывна на $\overline{D_1} \setminus \{1\}$ и $g = \bar{k}$ на Γ'_1 . Если, от противного, $\Gamma \in \mathcal{N}_{\text{loc}}$, т.е. найдутся u, v и K_0 как в определении 2.1, то по теореме Лузина–Привалова имеем $g_1 = u/v$ всюду в $D \setminus K_0$, а это означает, что $v(k(a_l)) = 0$ для всех достаточно больших l . Последнее, однако, невозможно, поскольку $v \circ k$ ограничена и голоморфна в $D_1 \setminus k^{-1}(K_0)$ и, следовательно, из хорошо известных свойств конформных отображений получаем, что $\{a_l\}$ должна удовлетворять условию Бляшке (см. [19; гл. IV, раздел А, п. 1]), что противоречит (5.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.7. Рассмотрим функцию

$$h_0(w) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \alpha w^{\beta^m}), \quad w \in D_1,$$

где $\alpha > 1$ и $\beta \geq 2$ целое. В [23; с. 699, случай (4.9)] приведены достаточные условия на α и β (например, далее мы берем $\alpha = 2, \beta = 6$), при которых h_0 принадлежит пространству Бергмана $A^2(D_1)$ (т.е. пространству всех голоморфных функций f в D_1 , для которых $|f|^2$ интегрируема по площади в D_1).

Следовательно, множество W_0 , состоящее из всех корней порядков 6^m из $-1/2$ при $m = 1, 2, \dots$, является нулевым множеством для класса $A^2(D_1)$. Возьмем

$$W = \left\{ w \in W_0 : \text{существует } m \geq 1 \text{ такое, что } w^{6^m} = -\frac{1}{2}, 0 < \arg w < \frac{2\pi}{m} \right\}.$$

Пусть теперь $\{a_l\}$ есть какая-либо последовательность, нумерующая точки из W таким образом, что $|a_l| \nearrow 1$ при $l \rightarrow +\infty$. Согласно [23; теорема 3] всякое непустое подмножество любого нулевого множества для $A^2(D_1)$ снова является нулевым множеством для $A^2(D_1)$. Поэтому найдется функция $h \in A^2(D_1)$, $h \not\equiv 0$, такая, что $h(a_l) = 0$ при $l \geq 1$ и $h(0) = 0$.

Чтобы установить (5.8), достаточно воспользоваться теоремой о среднем и неравенством Шварца:

$$\pi r^2 |h(w)| = \left| \int_{B(w,r)} h(z) dx dy \right| \leq r \pi^{1/2} \left(\int_{B(w,r)} |h(z)|^2 dx dy \right)^{1/2},$$

где $r = 1 - |w|$. Откуда

$$|h(w)|(1 - |w|) \leq \left(\int_{\{1-2r < |z| < 1\}} |h(z)|^2 dx dy \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости.

Остается доказать, что множество нулей функции h удовлетворяет (5.9). Действительно, если $a_l \in W$ является корнем степени 6^m из $-1/2$, то $1 - |a_l| = 1 - \exp(-(\log 2)/6^m)$. Так как последнее число сравнимо с $(\log 2)/6^m$ и всего имеется порядка $6^m/m$ таких корней $a_l \in W$, то справедливо (5.9). Очевидно также, что $\lim_{l \rightarrow \infty} a_l = 1$. Лемма 5.7 и теорема 5.5 доказаны.

ПРИМЕР 5.8. Теперь мы можем привести пример спрямляемого контура $\Gamma \in \mathcal{N}$ такого, что соответствующие функции u и v из определения 2.1 не могут быть (обе из них) взяты из $\mathcal{A}_1(\overline{D})$, $D = D(\Gamma)$.

Рассмотрим доказательство теоремы 5.5 (2), но теперь вместо функции h из леммы 5.7 мы будем использовать произведение Бляшке h_1 с тем свойством, что множество предельных точек его нулей $\{a_l\}$ ($a_0 = 0$, $2/3 < |a_l| < 1$ при $l \geq 1$, каждый a_l есть простой нуль для h_1) содержит некоторый невырожденный интервал в Γ_1 . Как раньше, мы можем выбрать $\{r_l\}$ и $\{\varepsilon_l\}$ так, что функция

$$F(w) = h_1(w)(g(w) - \overline{k(w)})$$

имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_1}$ с условием $F|_{\Gamma_1} = 0$ и k отображает конформно D_1 на некоторую жорданову область D с гладкой границей Γ .

По принципу максимума $h_1 g \in H_\infty(D_1)$. Так как угловые пределы функции h_1 равны по модулю единице п.в. на Γ_1 (см. [22; с. 335]), то $g(w)$ для п.в. $t \in \Gamma_1$ имеет угловые пределы, равные $\overline{k(t)}$. Положим $u(z) = h_1(k^{-1}(z))g(k^{-1}(z))$, $v(z) = h_1(k^{-1}(z))$, так что $\zeta = u(\zeta)/v(\zeta)$ в смысле угловых предельных значений п.в. на Γ , откуда $\Gamma \in \mathcal{N}$. Пусть, от противного, мы можем найти некоторые ограниченные голоморфные функции u_0 и v_0 в D такие, что u_0 или v_0 принадлежит $\mathcal{A}_1(\overline{D})$ и $\zeta = u_0(\zeta)/v_0(\zeta)$ п.в. на Γ . Тогда $uv_0 = u_0v$ в D . Так как $v(k(a_l)) = 0$, а $u(k(a_l)) \neq 0$, мы имеем $v_0(k(a_l)) = 0$ при $l \geq 1$, так что v_0 не может быть в $\mathcal{A}_1(\overline{D})$. Но если $u_0 \in \mathcal{A}_1(\overline{D})$, то $v_0(\zeta) = u_0(\zeta)/\zeta$ непрерывна на Γ_1 (мы предположили, что $0 \notin \Gamma$), однако тогда v_0 должна принадлежать $\mathcal{A}_1(\overline{D})$, что невозможно. Доказательство завершено.

В заключение отметим, что не существует ограниченной односвязной области Ω такой, что для Ω выполнены одновременно свойства общей разрешимости и единственности решения $\overline{\partial}^2$ -задачи Дирихле.

В самом деле, пусть, от противного, существует такая область Ω . Возьмем $z_0 \in \Omega$ и рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0} \Big|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$. В силу свойства разрешимости существует функция $f_\varphi \in C(\overline{\Omega})$, бианалитическая в Ω , с условием $f_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi$. Тогда $(z - z_0)f_\varphi(z) - 1 = 0$ на $\partial\Omega$. Так как выполнено свойство единственности, имеем $(z - z_0)f_\varphi(z) - 1 = 0$ в Ω . А это неверно, например в точке z_0 .

Список литературы

1. Balk M. B. Polyanalytic functions. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. (Math. Res. V. 63.)
2. Мергелян С. Н. Равномерное приближение функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. № 2. С. 31–122.
3. Carmona J. J. Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44. P. 113–126.
4. Федоровский К. Ю. О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 604–610.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
6. Лаврентьев М. А. О функциях комплексного переменного, представимых рядами полиномов // Избранные труды. Матем. и мех. М.: Наука, 1990. С. 149–185.

7. Бишоп Э. Граничные меры аналитических дифференциалов // Некоторые вопросы теории приближений. М.: ИЛ, 1963. С. 87–100.
8. Carathéodory C. Conformal representations. New York: Dover Publ., 1998.
9. Витускин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
10. Парамонов П. В., Федоровский К. Ю. О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. №2. С. 123–144.
11. Trent T., Wang J. L. Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. P. 62–64.
12. Wang J. L. A localization operator for rational modules // Rocky Mountain J. Math. 1989. V. 19. №4. P. 999–1002.
13. Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator // Pacific J. Math. 1993. V. 159. P. 379–396.
14. Fedorovski K. Yu. On uniform approximation by polyanalytic polynomials on compact subsets of the plane // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. 1999. V. 53. №3. P. 27–39.
15. Davis P. The Schwarz function and its applications. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1974. (Carus Math. Monogr. V. 17.)
16. Мазалов М. Я. Пример непостоянной бианалитической функции, обращающейся в нуль всюду на нигде не аналитической границе // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №3–4. С. 524–526.
17. Бовен А., Парамонов П. В. Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений // Матем. сб. 1998. Т. 189. №4. С. 3–24.
18. Douglas R. G., Shapiro H. S., Shields A. L. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1970. V. 20. №1. P. 37–76.
19. Кусис П. Введение в теорию пространств H_p . М.: Мир, 1984.
20. Johnston E. H. The boundary modulus of continuity of harmonic functions // Pacific J. Math. 1980. V. 90. P. 87–98.
21. Парамонов П. В. C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 105–128.
22. Rudin W. Real and complex analysis. New York: McGraw-Hill, 1987.
23. Horowitz Ch. Zeros of functions in the Bergman spaces // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 693–710.

Автономный университет г. Барселона (Испания);

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Государственный университет управления

E-mail: jcar@mat.uab.es, petr@paramonov.msk.ru, const@fedorovski.mccme.ru

Поступила в редакцию

26.02.2002