Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадыльшин, Об аналогах резонатора Гельмгольца в теории усреднения, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 11, 43–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:17:24

УДК 517.956

Р. Р. Гадыльшин

Об аналогах резонатора Гельмгольца в теории усреднения

В работе рассмотрены возмущенные двумерные краевые задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями Дирихле и Неймана на семействе кривых, получающемся из границы ограниченной области Ω вырезанием большого числа отверстий, имеющих малый размер и расположенных почти периодически и близко друг к другу. Установлены соотношения между размерами отверстий и границы, при которых решение возмущенной задачи сходится к решениям задач Дирихле и Неймана в Ω и вне $\overline{\Omega}$. Для случая, когда Ω – круг, отверстия расположены периодически, усредненными задачами являются задачи Дирихле, построены асимптотики по малому параметру ε (характеризующему размер отверстий и расстояние между ними) полюсов с малой мнимой частью для аналитического продолжения решения возмущенной задачи и показан их резонансный характер.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

Известно, что задачи рассеяния E -поляризованного и H -поляризованного электромагнитных полей на идеально проводящей цилиндрической поверхности, сечением которой является кривая Γ_δ , сводятся к решениям следующих краевых задач в $\Omega_\delta = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Gamma_\delta}$:

$$(\Delta + k^2)E_\delta = J, \quad x \in \Omega_\delta, \quad E_\delta = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (1.1)$$

$$E_\delta = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial E_\delta}{\partial r} - ikE_\delta = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

для E -поляризации и соответственно

$$(\Delta + k^2)H_\delta = h, \quad x \in \Omega_\delta, \quad \frac{\partial H_\delta}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (1.3)$$

$$H_\delta = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial H_\delta}{\partial r} - ikH_\delta = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

в случае H -поляризации. Здесь $x = (x_1, x_2)$, $r = |x|$, k – положительное число, ν – нормаль к Γ_δ , J – составляющая вектора тока $\mathbf{j}$, направленного параллельно образующей цилиндрической поверхности, а h – третья компонента вектора $-\operatorname{rot} \mathbf{j}$ в случае, когда вектор $\mathbf{j}$ перпендикулярен образующей. Заметим, что в случае E -поляризации электромагнитное поле имеет вид $\mathbf{E}_\delta = \{0, 0, E_\delta\}$,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-01143, 00-15-96038) и Минобразования РФ (грант № E00-1.0-53).

$\mathbf{H}_\delta = ik^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_\delta$, а в случае H -поляризации имеет вид $\mathbf{H}_\delta = \{0, 0, H_\delta\}$, $\mathbf{E}_\delta = -ik^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_\delta - \mathbf{j}$.

Всюду далее предполагается, что J и h – функции из $L_2(\mathbb{R}^2)$ с ограниченными носителями, $\Gamma_0 \in C^\infty$ – граница ограниченной односвязной области Ω , а при $\delta = \varepsilon > 0$ кривые Γ_ε получаются из Γ_0 вырезанием большого числа отверстий, имеющих малый размер и расположенных почти периодически и близко друг к другу. А именно, пусть ω – круг единичного радиуса с центром в начале координат, $\gamma_0 = \partial\omega$, целое число $N \gg 1$, $\varepsilon = 2N^{-1}$, $0 < a(\varepsilon) < \pi/2$, θ – полярный угол, $\gamma_\varepsilon = \{(r, \theta) : r = 1, \varepsilon(-a(\varepsilon) + m\pi) < \theta < \varepsilon(a(\varepsilon) + m\pi), m = 0, 1, \dots, N-1\}$, $\mathcal{P}$ – диффеоморфизм $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathcal{P}(\omega)$, $\Gamma_\delta = \mathcal{P}(\gamma_\delta)$. При $\delta = \varepsilon$ краевые задачи (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) будем называть *возмущенными*, а их решения будем рассматривать в классе функций, квадратично интегрируемых вместе с производными первого порядка в окрестности концов кривых Γ_ε . Так как $\Omega_0 = \Omega \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$, то при $\delta = 0$ краевая задача (1.1), (1.2) распадается на две задачи Дирихле, а краевая задача (1.3), (1.4) – на две задачи Неймана: в Ω и в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, которые условимся называть *предельными внутренними* и *предельными внешними задачами* соответственно. Для краевой задачи (1.3), (1.4) и аналога краевой задачи (1.1), (1.2) (когда вместо объединения дуг Γ_ε рассматривается объединение малых двумерных областей) известно [1], что если $\text{Im } k \geq 0$ и k^2 не является собственным значением предельной внутренней задачи, то при достаточно малых отверстиях (относительно расстояний между ними) решение возмущенной задачи сходится к решению предельных задач в Ω и $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$. Таким образом, возникает ситуация, аналогичная резонатору Гельмгольца [2]–[6], когда возмущенная задача (для резонатора Гельмгольца – это задачи Дирихле или Неймана вне замкнутой кривой, в которой вырезано одно малое отверстие) и предельная внешняя задача разрешимы при всех положительных k , а предельная внутренняя задача имеет положительный дискретный спектр. Первая часть настоящей работы посвящена доказательству того, что так же, как и для резонатора Гельмгольца, у аналитических продолжений возмущенных задач существуют полюсы в нижней полуплоскости, стремящиеся к собственным частотам (к корням из собственных значений) предельных внутренних задач. Однако из самого факта существования полюсов с малой мнимой частью не следует, что они вызывают резонансные явления, заключающиеся, в частности, в том, что при положительных частотах k , близких к собственным частотам предельной внутренней задачи, решение возмущенной задачи вне Ω отличается от решения предельной внешней задачи на $O(1)$ даже в случае, когда носитель правой части уравнения лежит вне Ω . Во второй части работы для краевой задачи (1.1), (1.2) в модельном случае, когда Ω – единичный круг, а отверстия расположены периодически, строится асимптотика этих полюсов по малому параметру ε и показывается их резонансный характер. Результаты второй части анонсированы в [7].

§ 2. Формулировка основных результатов и их следствия

Пусть $S(R)$ – круг радиуса R с центром в начале координат, $\Omega_{\delta,t} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\delta \cap S(t)$. Через $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_\delta)$ обозначим замыкание функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равных нулю в окрестности Γ_δ , по норме W_2^1 , а через $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_{\delta,t})$ – замыкание функций из $C^\infty(\overline{S(t)})$,

равных нулю в окрестности Γ_δ , по норме W_2^1 . Под $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (под $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$, $\overset{\circ}{W}_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$) будем понимать множество функций, определенных в $\mathbb{R}^2$, таких, что для любого $R > 0$ их сужения на $S(R)$ принадлежат $L_2(S(R))$ ($W_2^1(S(R))$, $W_2^1(\Omega_{\delta,R})$, $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_{\delta,R})$). Аналогично, под сходимостью в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$) будем понимать, что для любого $R > 0$ имеет место сходимость в $L_2(S(R))$ (в $W_2^1(S(R))$). Для функций из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ сходимость в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$ означает, что сужение на Ω сходится в $W_2^1(\Omega)$, а сужение на $S(R) \setminus \overline{\Omega}$ сходится в $W_2^1(S(R) \setminus \overline{\Omega})$ для любого $R > 0$. И, наконец, будем говорить, что $u(\cdot, z)$ — голоморфная по некоторому комплексному параметру z функция со значениями в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$, $\overset{\circ}{W}_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$), если для любого $R > 0$ сужение u на $S(R)$ является голоморфной функцией со значением в $L_2(S(R))$ (в $W_2^1(S(R))$, $W_2^1(\Omega_{\delta,R})$, $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_{\delta,R})$).

Структура работы следующая. В §3 приводятся удобные для анализа конструкции аналитических продолжений решений краевых задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) в комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. В §§ 4, 5 исследуется сходимость по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ вспомогательных (но ключевых) задач в ограниченных областях $\Omega_{\varepsilon,L}$. В §6 доказывается существование у аналитических продолжений решений возмущенных задач полюсов с малой мнимой частью. В §7 будут доказаны следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\tau_0 > 0$, τ_0^2 — простое собственное значение задачи Дирихле в Ω , $\psi_0^{(1)}$ — соответствующая собственная функция, нормированная в $L_2(\Omega)$ и продолженная нулем вне Ω ,

$$\varepsilon \ln a(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t > 0$ такие, что при $\delta \leq \delta_0$ и $|k - \tau_0| < t$

- а) для аналитических продолжений функции Грина $G_\delta^{(1)}$ и решения краевой задачи (1.1), (1.2) справедливы представления

$$G_\delta^{(1)}(x, y, k) = \frac{\psi_\delta^{(1)}(x)\psi_\delta^{(1)}(y)}{\tau_\delta^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta^{(1)}(x, y, k), \quad (2.2)$$

$$E_\delta(x, k) = \frac{\psi_\delta^{(1)}(x)}{k^2 - \tau_\delta^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{(1)}(y) J(y) dy + \tilde{E}_\delta(x, k),$$

где $\tilde{G}_\delta^{(1)}$ и $\tilde{E}_\delta$ являются голоморфными по k функциями со значениями в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (при фиксированном $y \in \Omega_\delta$) и $\overset{\circ}{W}_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ соответственно;

- б) $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$, для $\psi_\delta^{(1)}$ и $\tilde{E}_\delta$ имеют место сходимости $\psi_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^{(1)}$ и $\tilde{E}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{E}_0$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (причем последняя — равномерно по k);
- в) для любого $R > 0$ справедлива равномерная оценка

$$\|\tilde{E}_\delta\|_{W_2^1(S(R))} \leq C(R, R_1) \|J\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

где R_1 — радиус круга, содержащего носитель функции J .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\tau_0 > 0$, τ_0^2 – простое собственное значение задачи Неймана в Ω , $\psi_0^{(2)}$ – соответствующая собственная функция, нормированная в $L_2(\Omega)$ и продолженная нулем вне $\bar{\Omega}$,

$$\frac{\pi}{2} - a(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon b(\varepsilon)}\right), \quad b(\varepsilon) > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b(\varepsilon) = 0. \quad (2.3)$$

Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t > 0$ такие, что при $\delta \leq \delta_0$ и $|k - \tau_0| < t$

- а) для аналитических продолжений функции Грина $G_\delta^{(2)}$ и решения краевой задачи (1.3), (1.4) справедливы представления

$$G_\delta^{(2)}(x, y, k) = \frac{\psi_\delta^{(2)}(x)\psi_\delta^{(2)}(y)}{\tau_\delta^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta^{(2)}(x, y, k),$$

$$H_\delta(x, k) = \frac{\psi_\delta^{(2)}(x)}{k^2 - \tau_\delta^2} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{(2)}(y)h(y) dy + \tilde{H}_\delta(x, k),$$

где $\tilde{G}_\delta^{(2)}$ и $\tilde{H}_\delta$ являются голоморфными по k функциями со значениями в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (при фиксированном $y \in \Omega_\delta$) и $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta)$ соответственно;

- б) $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$, для $\psi_\delta^{(2)}$ и $\tilde{H}_\delta$ имеют место сходимости $\psi_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^{(2)}$ и $\tilde{H}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_0$ в $W_{2,\text{loc}}(\Omega_0)$ (причем последняя – равномерно по k);
- в) для любого $R > 0$ справедлива равномерная оценка

$$\|\tilde{H}_\delta\|_{W_2^1(\Omega_{0,R})} \leq C(R, R_1)\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

где R_1 – радиус круга, содержащего носитель функции h .

Известно, что в случае, когда Ω – круг единичного радиуса, у предельных внутренних задач заведомо есть кратные собственные значения. Для задачи Дирихле – это квадраты нулей функций Бесселя $\mathcal{J}_n$ целого порядка $n \geq 1$. Причем, так как нули τ_0 функций Бесселя различных целых неотрицательных порядков не совпадают, то для задачи Дирихле эти собственные значения являются двукратными. Для задачи Неймана кратные собственные значения – это квадраты нулей τ_0 производных функций Бесселя $\mathcal{J}_n$ целого порядка $n \geq 1$. Если, к тому же, $\mathcal{J}'_m(\tau_0) \neq 0$ для неотрицательных целых $m \neq n$, то τ_0^2 – двукратное собственное значение. Соответствующими собственными функциями (как для задачи Дирихле, так и для задачи Неймана) являются функции $\mathcal{J}_n(\tau_0 r) \sin(n\theta)$ и $\mathcal{J}_n(\tau_0 r) \cos(n\theta)$. В § 8 будут доказаны следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть Ω – круг единичного радиуса, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$, $n \geq 1$ – фиксированное целое число, $\mathcal{J}_n(\tau_0) = 0$, $\psi_0^{\pm(1)}$ – соответствующие собственные

функции, ортонормированные в $L_2(\Omega)$ и продолженные нулем вне Ω , и выполнено (2.1). Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t > 0$ такие, что при $\delta \leq \delta_0$ и $|k - \tau_0| < t$

- а) для аналитических продолжений функции Грина $G_\delta^{(1)}$ и решения краевой задачи (1.1), (1.2) справедливы представления

$$G_\delta^{(1)}(x, y, k) = \frac{\psi_\delta^{+(1)}(x)\psi_\delta^{+(1)}(y) + \bar{\psi}_\delta^{(1)}(x)\bar{\psi}_\delta^{(1)}(y)}{\tau_\delta^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta^{(1)}(x, y, k),$$

$$E_\delta(x, k) = \frac{1}{k^2 - \tau_\delta^2} \left(\psi_\delta^{+(1)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{+(1)} J dy + \bar{\psi}_\delta^{(1)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\psi}_\delta^{(1)} J dy \right) + \tilde{E}_\delta(x, k),$$

где $\tilde{G}_\delta^{(1)}$ и $\tilde{E}_\delta$ удовлетворяют утверждениям п. а) теоремы 2.1;

- б) τ_δ и $\tilde{E}_\delta$ удовлетворяют утверждениям пп. б) и в) теоремы 2.1, а для функций $\psi_\varepsilon^\pm$ имеет место сходимость $\psi_\varepsilon^\pm \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^\pm$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть Ω – круг единичного радиуса, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$, $n \geq 1$ – фиксированное целое число, $\mathcal{J}'_n(\tau_0) = 0$ и τ_0 не является нулем для $\mathcal{J}'_m$ при неотрицательном целом $m \neq n$, $\psi_0^\pm$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Omega)$ и продолженные нулем вне $\bar{\Omega}$, и выполнено (2.3). Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t > 0$ такие, что при $\delta \leq \delta_0$ и $|k - \tau_0| < t$

- а) для аналитических продолжений функции Грина $G_\delta^{(2)}$ и решения краевой задачи (1.3), (1.4) справедливы представления

$$G_\delta^{(2)}(x, y, k) = \frac{\psi_\delta^{+(2)}(x)\psi_\delta^{+(2)}(y) + \bar{\psi}_\delta^{(2)}(x)\bar{\psi}_\delta^{(2)}(y)}{\tau_\delta^2 - k^2} + \tilde{G}_\delta^{(2)}(x, y, k),$$

$$H_\delta(x, k) = \frac{1}{k^2 - \tau_\delta^2} \left(\psi_\delta^{+(2)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{+(2)} h dy + \bar{\psi}_\delta^{(2)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\psi}_\delta^{(2)} h dy \right) + \tilde{H}_\delta(x, k),$$

где $\tilde{G}_\delta^{(2)}$ и $\tilde{H}_\delta$ удовлетворяют утверждениям п. а) теоремы 2.2;

- б) τ_δ и $\tilde{H}_\delta$ удовлетворяют утверждениям пп. б) и в) теоремы 2.2, а для функций $\psi_\varepsilon^\pm$ имеет место сходимость $\psi_\varepsilon^\pm \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^\pm$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$.

Однако из утверждений теорем 2.1–2.4 непосредственно не следует резонансный характер полюсов для задач рассеяния, которые сводятся к решениям (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) при $\text{supp } J, \text{supp } h \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ и положительных k . Действительно, знаменатель первого слагаемого в правой части (2.2) при вещественных k хотя и не равен нулю, но при выборе $k = \text{Re } \tau_\varepsilon$ имеет наибольший порядок малости, равный $\text{Im } \tau_\varepsilon$. С другой стороны, так как в силу п. б) $\psi_\varepsilon \rightarrow 0$ в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$, то второй сомножитель в числителе этого же члена также стремится к нулю. Для того

чтобы установить насколько существенно влияние первого члена в представлении решения при вещественных k , близких к τ_0 , в §9 строятся асимптотики τ_ε и ψ_ε в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ для модельной задачи (1.1), (1.2) в круге с периодическими отверстиями. Легко видеть, что функция

$$X_0(\xi) = \operatorname{Re} \ln(\sin z + (\sin^2 z - \sin^2 a)^{1/2}) - |\xi_2|, \quad (2.4)$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$, i – мнимая единица, продолжается периодически с $\Pi_+ = \{\xi : -\pi/2 < \xi_1 < \pi/2, \xi_2 > 0\}$ на полуплоскость $\xi_2 > 0$. Это продолжение, в свою очередь, продолжим четно на полуплоскость $\xi_2 < 0$ и для последнего продолжения сохраним прежнее обозначение X_0 . Через $\mathcal{H}_n$ обозначим функцию Ханкеля первого рода, n -го порядка, через $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице при $t < 2/3$ и нулю при $t > 5/6$, через δ_i^j – символ Кронекера, а через $[\cdot]$ – целую часть числа. В §9 будет доказана

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть Ω – круг единичного радиуса, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$, a – постоянное, $n \geq 0$ – фиксированное целое число, $\mathcal{J}_n(\tau_0) = 0$. Тогда асимптотики полюса, сходящегося к τ_0 , и соответствующих собственных функций (последних – в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$) имеют вид

$$\tau_\varepsilon = \tau_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + O(\varepsilon^3), \quad (2.5)$$

$$k_1 = \frac{\tau_0}{2} \ln \sin a, \quad k_2 = \frac{\tau_0}{8} \left(1 - 2\tau_0 \frac{\mathcal{H}'_n(\tau_0)}{\mathcal{H}_n(\tau_0)} \right) \ln^2 \sin a, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(1)}(x) = \psi_\varepsilon^{+(1)}(r, \theta) = & \sqrt{\frac{2 - \delta_0^n}{\pi}} \left(\left(\frac{\mathcal{J}_n(\tau_0 r)}{\mathcal{J}'_n(\tau_0)} + \varepsilon k_1 \frac{\mathcal{H}_n(\tau_0 r)}{\mathcal{H}_n(\tau_0)} \right) \right. \\ & \left. - \chi(|1 - r|) \frac{\varepsilon k_1}{\ln \sin a} X_0 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}, \frac{1 - r}{\varepsilon} \right) \right) \cos(n\theta) (1 + o(1)), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\bar{\psi}_\varepsilon^{(1)}(r, \theta) = \bar{\psi}_\varepsilon^{+(1)} \left(r, \theta - \left[\frac{N}{4n} \right] \varepsilon \pi \right) = \bar{\psi}_\varepsilon^{+(1)}(r, \theta) \operatorname{tg}(n\theta) (1 + o(1)), \quad n \geq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Дополнительное (по сравнению с (2.1)) ограничение, наложенное в формулировке теоремы на a , не является принципиальным для доказательства, но позволяет существенно сократить его (см. замечание 9.1).

Из (2.6) и свойств цилиндрических функций следует, что

$$\operatorname{Im} \tau_\varepsilon = \varepsilon^2 \operatorname{Im} k_2 (1 + O(\varepsilon)), \quad \operatorname{Im} k_2 = -\pi \tau_0^3 \frac{(\mathcal{J}'_n(\tau_0) \ln \sin a)^2}{8} < 0.$$

Из этих соотношений и утверждений теорем 2.1 и 2.5 следует, что для вещественных частот $k = \tau_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 t$ решение задачи (1.1), (1.2) в случае, когда $\mathcal{J}_0(\tau_0) = 0$

и $\text{supp } J \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, имеет следующие асимптотики в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x, k) &\sim \varepsilon^{-1} \frac{2k_1 i E^0(0, \tau_0)}{\tau_0(t - k_2) \pi \mathcal{H}_0(\tau_0)} \left(\frac{\mathcal{J}_0(\tau_0 r)}{\mathcal{J}_0'(\tau_0)} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon k_1 \frac{\chi(|1 - r|)}{\ln \sin a} X_0 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}, \frac{1 - r}{\varepsilon} \right) \right) \quad \text{при } r \leq 1, \\ E_\varepsilon(x, k) &\sim \frac{2k_1^2 i E^0(0, \tau_0)}{\tau_0(t - k_2) \pi \mathcal{H}_0(\tau_0)} \left(\frac{\mathcal{H}_0(\tau_0 r)}{\mathcal{H}_0(\tau_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\chi(|1 - r|)}{\ln \sin a} X_0 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}, \frac{1 - r}{\varepsilon} \right) \right) + \widehat{E}_0(x, \tau_0) \quad \text{при } r \geq 1, \end{aligned}$$

где $\widehat{E}_0$ – решение предельной внешней задачи, а $E^0(x, k)$ – решение уравнения $(\Delta + k^2)E^0 = J$ в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условию излучения (1.2).

Используя утверждения теорем 2.3 и 2.5, легко получить аналогичные асимптотики и для случая $\mathcal{J}_n(\tau_0) = 0$ при $n \geq 1$. Из приведенных формул следует, что при вещественных частотах, близких к τ_0 , даже при рассеянии поля, создаваемого внешним источником ($\text{supp } J \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_0$), решение возмущенной задачи отличается от решения внешней предельной задачи на конечную величину, а внутри резонатора имеет порядок ε^{-1} . Таким образом, из теорем 2.1, 2.3 и 2.5 следует резонансный характер полюсов с малой мнимой частью для задачи (1.1), (1.2) в единичном круге с периодическими отверстиями.

§3. Конструкция аналитических продолжений

Всюду в этом параграфе $\delta \geq 0$ считается фиксированным (т.е. зависимость от δ не исследуется).

Через $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, а через $\mathcal{B}^h(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (через $\mathcal{B}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$) обозначим множество голоморфных (мероморфных) операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$; $\mathcal{B}^{h(m)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}^{h(m)}(\mathcal{X})$. Пусть $\mathcal{Y}$ означает один из символов: $L_2, \overset{\circ}{W}_2^1$ или W_2^j , а $D = \mathbb{R}^2$ или $D = \Omega_\delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\text{loc}}(D)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}(D \cap S(R))) \quad \forall R \}, \\ \mathcal{B}^{h(m)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\text{loc}}(D)) &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{B}^{h(m)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}(D \cap S(R))) \quad \forall R \}. \end{aligned}$$

Через $\widetilde{\mathbb{C}}$ обозначим комплексную плоскость с разрезом вдоль неположительной вещественной полуоси и для функций g из $L_2(S(L))$ положим

$$(\Delta + k^2)^{-1} g \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}_0(k|x - y|) g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

В дальнейшем для функции из $L_2(S(L))$ и ее продолжения нулем вне $S(L)$ будем использовать одно и то же обозначение, понимая это продолжение как функцию из $L_2(\mathbb{R}^2)$. Из определения $(\Delta + k^2)^{-1}$ вытекает

ЛЕММА 3.1. Оператор $(\Delta + k^2)^{-1} \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2))$ при $k \in \tilde{\mathbb{C}}$ для любого $L > 0$, и если $g \in L_2(S(L))$, то функция $U = (\Delta + k^2)^{-1}g$ является решением уравнения $(\Delta + k^2)U = g$ в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющим при $\text{Im } k \geq 0$ условию излучения

$$U = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial U}{\partial r} - ikU = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Не ограничивая общности, всюду далее будем считать, что $\Omega \subset S(1)$. Пусть L – любое число, больше двух. Рассмотрим два семейства краевых задач в ограниченных областях:

$$(\Delta - 1)u_\delta = F, \quad x \in \Omega_{\delta,L}, \quad u_\delta = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (3.1)$$

$$u_\delta = 0, \quad x \in \partial S(L), \quad (3.2)$$

и

$$(\Delta - 1)u_\delta = F, \quad x \in \Omega_{\delta,L}, \quad \frac{\partial u_\delta}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\delta, \quad (3.3)$$

(3.2). Решение краевой задачи (3.1), (3.2) рассматривается в смысле теории распределений [2], [8] в классе функций из $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$, где $W_{2,0}^1(Q)$ – замыкание функций из $C^\infty(Q)$, равных нулю в окрестности ∂Q , по норме W_2^1 . Аналогично, решение краевой задачи (3.3), (3.2) рассматривается в классе функций из $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$. Здесь и далее $W_{2,0}^1(Q; q)$ – замыкание функций из $C^\infty(\overline{Q})$, равных нулю в окрестности q , по норме W_2^1 . Причем если граница области Q содержит компоненты в виде двусторонних кривых (например, Γ_δ в $\Omega_{\delta,L}$), то при замыкании они понимаются именно как двусторонние.

Наряду с (3.2) рассмотрим граничное условие

$$u_\delta = w, \quad x \in \partial S(L). \quad (3.4)$$

Через $\sigma_\delta^{(1)}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие $w \in W_2^2(S(L))$ решение $u_\delta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_{\delta,L})$ краевой задачи (3.1), (3.4) при $F = (\Delta - 1)w$, через $\sigma_\delta^{(2)}$ – оператор, ставящий в соответствие $w \in W_2^2(S(L))$ решение $u_\delta \in W_2^1(\Omega_{\delta,L})$ краевой задачи (3.3), (3.4) при $F = (\Delta - 1)w$, а через p_L – оператор сужения на $S(L)$. Далее, пусть

$$\begin{aligned} A_\delta^{(j)}(k) &\stackrel{\text{def}}{=} \chi\left(\frac{r}{L}\right) \sigma_\delta^{(j)} p_L (\Delta + k^2)^{-1} + \left(1 - \chi\left(\frac{r}{L}\right)\right) (\Delta + k^2)^{-1} \\ &= \left(1 + \chi\left(\frac{r}{L}\right) (\sigma_\delta^{(j)} p_L - 1)\right) (\Delta + k^2)^{-1}, \\ T_\delta^{(j)}(k)g &\stackrel{\text{def}}{=} \left((\Delta + k^2 + 1) \chi\left(\frac{r}{L}\right) ((1 - \sigma_\delta^{(j)} p_L) (\Delta + k^2)^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\chi\left(\frac{r}{L}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_i} ((1 - \sigma_\delta^{(j)} p_L) (\Delta + k^2)^{-1})\right) g. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\sigma_\delta^{(1)} \in \mathcal{B}(W_2^2(S(L)), \mathring{W}_2^1(\Omega_{\delta,L})) \cap \mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^2(Q))$, $\sigma_\delta^{(2)} \in \mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^1(\Omega_{\delta,L})) \cap \mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^2(Q))$ для любой области $Q \subset \Omega_{\delta,L}$, отделенной от $\partial\Gamma_\delta$ ($\partial\Gamma_0 = \emptyset$);

б) $A_\delta^{(1)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)), \mathring{W}_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta))$ при $k \in \mathbb{C}$; если $g \in L_2(S(L))$, то $E_\delta = A_\delta^{(1)}(k)g$ удовлетворяет (1.1) при $J = (I - T_\delta^{(1)}(k))g$, где I – единичный оператор, а при $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ – условию излучения (1.2);

в) $A_\delta^{(2)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta))$ при $k \in \mathbb{C}$; если $g \in L_2(S(L))$, то $h_\delta = A_\delta^{(2)}(k)g$ удовлетворяет (1.3) при $h = (I - T_\delta^{(2)}(k))g$, а при $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ – условию излучения (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость а) вытекает из сведения краевых задач (3.1), (3.4) и (3.3), (3.4) соответственно к (3.1), (3.2) и к (3.3), (3.2) и известных оценок для решения (3.1), (3.2) и (3.3), (3.2). Из а), определений операторов $A_\delta^{(j)}(k)$ и $T_\delta^{(j)}(k)$ и леммы 3.1 следует справедливость б) и в).

Из леммы 3.2 вытекает, что при $g \in L_2(S(L))$ функция $T_\delta^{(j)}(k)g \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $\text{supp } T_\delta^{(j)}(k)g \subset \overline{S(L)}$. Поэтому отображения $T_\delta^{(j)}(k)$ и $B_\delta^{(j)}(k) = I - T_\delta^{(j)}(k)$ можно рассматривать как операторы из $L_2(S(L))$ в $L_2(S(L))$. В такой трактовке операторов $T_\delta^{(j)}$ и $B_\delta^{(j)}$ из леммы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо следующее: $B_\delta^{(j)}(k), T_\delta^{(j)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$; $T_\delta^{(j)}(k)$ – компактный оператор в $L_2(S(L))$.*

Через $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ обозначим собственные частоты задачи Дирихле и задачи Неймана в Ω соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *При $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ решения возмущенных задач в $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ и предельных внешних задач в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$ единственны. При $k \notin \Sigma^{(1)}$ ($k \notin \Sigma^{(2)}$) решение предельной задачи Дирихле (Неймана) в Ω единственно в $W_2^1(\Omega)$.*

Справедливость этого утверждения хорошо известна (для трехмерной задачи Неймана вне незамкнутых поверхностей доказательство имеется, например, в [6]).

ЛЕММА 3.3. *Пусть $g \in L_2(S(L))$ и $g \neq 0$. Тогда $A_\delta^{(j)}(k)g \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству [6; лемма 2.2]. Так как в силу леммы 3.2 функция $u_\delta^{(j)} = A_\delta^{(j)}(k)g$ является решением уравнения $(\Delta + k^2)u^{(j)} = B_\delta^{(j)}(k)g$ вне Γ_δ , то при $B_\delta^{(j)}(k)g \neq 0$ справедливость леммы очевидна. Пусть $B_\delta^{(j)}(k)g = 0$ и предположим, что $u_\delta^{(j)} = 0$. Из определения $A_\delta^{(j)}(k)$ следует, что

$$u_\delta^{(j)}(x) = w(x) - \chi(rL^{-1})(w(x) - v_\delta^{(j)}(x)),$$

где $w = (\Delta + k^2)^{-1}g$, $v_\delta^{(j)} = \sigma_\delta^{(j)}p_L w$. В силу сделанного предположения

$$0 = w(x) - \chi(rL^{-1})(w(x) - v_\delta^{(j)}(x)) \quad (3.5)$$

и, следовательно, $w = 0$ вне $S(5L/6)$, а $v_\delta^{(j)} = 0$ в $S(2L/3)$. Но тогда функция $U_\delta = w - v_\delta^{(j)}$ принадлежит $W_2^2(S(L))$ и является решением краевой задачи

$$(\Delta - 1)U_\delta = 0, \quad x \in S(L), \quad U_\delta = 0, \quad x \in \partial S(L). \quad (3.6)$$

Так как решение (3.6), очевидно, равно нулю, то из (3.5) следует, что $w = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Из определения w вытекает, что $g = 0$. Последнее противоречие завершает доказательство леммы.

Из утверждения 3.1, леммы 3.3 и компактности оператора $T_\delta^{(j)}(k)$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если $\operatorname{Im} k > 0$ или $k > 0$, но $k \notin \Sigma^{(j)}$, то существует оператор $(B_\delta^{(j)})^{-1}(k) \in \mathcal{B}(L_2(S(L)))$.

В [2; глава XV, теорема 7.1] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть D — связная область комплексной плоскости, $T(k)$ ($k \in D$) — голоморфное семейство компактных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ и существует точка $k_* \in D$ такая, что $(I - T(k_*))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Тогда $(I - T(k))^{-1}$ — мероморфная функция в D со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Из утверждения 3.2 и следствия леммы 3.3 вытекает

ЛЕММА 3.4. Справедливо следующее: $(B_\delta^{(j)})^{-1}(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(S(L)))$ в $\tilde{\mathbb{C}}$.

Обозначим

$$\mathcal{A}_\delta^{(j)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} A_\delta^{(j)}(k)(B_\delta^{(j)}(k))^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Справедливы следующие утверждения:

а) $\mathcal{A}_\delta^{(1)}(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(S(L)), \mathring{W}_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta))$ в $\tilde{\mathbb{C}}$, $E_\delta = \mathcal{A}_\delta^{(1)}(k)J$ удовлетворяет (1.1), а при $\operatorname{Im} k > 0$ и $k > 0$ — и условию излучения (1.2);

$\mathcal{A}_\delta^{(2)}(k) \in \mathcal{B}^m(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\delta))$ в $\tilde{\mathbb{C}}$, $H_\delta = \mathcal{A}_\delta^{(2)}(k)h$ удовлетворяет (1.3), а при $\operatorname{Im} k > 0$ и $k > 0$ — и условию излучения (1.4);

б) если $\operatorname{supp} J \subset S(T)$ ($\operatorname{supp} h \subset S(T)$), то функция E_δ (функция H_δ) не зависит от $L \geq T$;

в) множества полюсов операторов $\mathcal{A}_\delta^{(j)}(k)$ и $(B_\delta^{(j)}(k))^{-1}$, их порядки и размерности вычетов в них совпадают (при фиксированном j) и не зависят от L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость а) следует из леммы 3.4 и пп. б) и в) леммы 3.2. Справедливость б) вытекает из утверждения 3.1 и единственности аналитического продолжения. Справедливость в) следует из очевидного представления, например, решения (1.1), (1.2) с $\operatorname{supp} J \subset S(L)$ в виде суммы голоморфной функции и решения краевой задачи (1.1), (1.2), носитель правой части которой лежит в $S(2)$.

Через $\Sigma_\delta^{(j)}$ обозначим множество полюсов $\mathcal{A}_\delta^{(j)}(k)$. Пусть $x_0 \in \Omega_\delta$, $t_0(x_0, \delta)$ — малое число такое, что круг радиуса t_0 с центром в x_0 лежит в Ω_δ и

$$g(x, x_0, k) = -\frac{i}{4}(\Delta + k^2) \left(\mathcal{H}_0(k|x - x_0|) \chi \left(\frac{|x - x_0|}{t} \right) \right) \quad \text{при } x \neq x_0,$$

$$g(x, x_0, k) = 0 \quad \text{при } x = x_0,$$

где $0 < t \leq t_0$,

$$G_\delta^{(j)}(x, x_0, k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{4} \mathcal{H}_0(k|x - x_0|) \chi\left(\frac{|x - x_0|}{t}\right) + \mathcal{A}_\delta^{(j)}(k) g(\cdot, x_0, k),$$

$\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

ЛЕММА 3.5. При при любом фиксированном $y \in \Omega_\delta$

а) $G_\delta^{(j)}(x, y, k)$ – мероморфная функция со значениями в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ при $k \in \tilde{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая уравнению $(\Delta + k^2)G_\delta^{(j)} = -\delta(x - y)$ в Ω_δ , граничным условиям $G_\delta^{(1)} = 0$ и $\partial G_\delta^{(2)}/\partial \nu = 0$ на Γ_δ , а при $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ – и условию излучения;

б) $G_\delta^{(j)}(x, y, k)$ не зависит от t и L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость а) следует из определения $G_\delta^{(j)}(x, y, k)$ и п. а) теоремы 3.1. Независимость от L вытекает из п. б) теоремы 3.1, а независимость от t – из утверждения 3.1 и единственности аналитического продолжения.

Через $\bar{\Sigma}^{(1)}$ (через $\bar{\Sigma}^{(2)}$) обозначим множество полюсов аналитических продолжений решений задачи Дирихле (Неймана) в $\mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}$, а функции $G_\delta^{(1)}$ и $G_\delta^{(2)}$ назовем функциями Грина краевых задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) соответственно.

ТЕОРЕМА 3.2. Для аналитических продолжений решений (1.1), (1.2) и функции Грина

а) справедливы равенства

$$E_\delta(x, k) = - \int_{\mathbb{R}^2} G_\delta^{(1)}(x, y, k) J(y) dy, \quad H_\delta(x, k) = - \int_{\mathbb{R}^2} G_\delta^{(2)}(x, y, k) h(y) dy,$$

$$G_\delta^{(j)}(x, y, k) = G_\delta^{(j)}(y, x, k);$$

б) множество полюсов функции $G_\delta^{(j)}$ и множество полюсов $\Sigma_\delta^{(j)}$ операторов $\mathcal{A}_\delta^{(j)}(k)$ и $(B_\delta^{(j)}(k))^{-1}$, их порядки и размерности вычетов в них совпадают (при фиксированном j);

в) $\Sigma_0^{(j)}$ представимо в виде $\Sigma^{(j)} \cup \bar{\Sigma}^{(j)}$, а множества $\Sigma_\varepsilon^{(j)}$ и $\bar{\Sigma}^{(j)}$ лежат в полуплоскости $\text{Im } k < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость а) следует из п. а) леммы 3.5 (при $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$) и единственности аналитического продолжения. В свою очередь, из п. а) доказываемой теоремы и пп. а) и в) теоремы 3.1 вытекает справедливость остальных утверждений.

§ 4. Сходимость по малому параметру для решений (3.1), (3.2)

ЛЕММА 4.1. Для функций из $\dot{W}_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 \leq C_L \varepsilon (|\ln \varepsilon| + 1) \|v\|_{W_2^1(S(L))}^2. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Ω , Γ_0 и Γ_δ — образы круга единичного радиуса ω , его границы γ_0 и периодически расположенных дуг γ_ε при диффеоморфном отображении $\mathcal{P}$, то достаточно рассмотреть случай, когда Ω — круг единичного радиуса, а $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$. В [9; лемма 10 и § 4] (см. также [10]) было доказано, что для функций v из $W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$ справедлива равномерная оценка

$$\|v\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 \leq C(Q) \frac{\varepsilon}{\lambda(a)} \|v\|_{W_2^1(Q)}^2, \quad (4.2)$$

где $Q = \Omega$, а $\lambda(a)$ — монотонно возрастающая при $a > 0$ функция, имеющая асимптотику $\lambda(a) = -\pi \ln^{-1} a(1 + o(1))$ при $a \rightarrow 0$. Справедливость (4.2) для функций $v \in W_{2,0}^1(S(L) \setminus \overline{\Omega}; \Gamma_\varepsilon)$ при $Q = S(L) \setminus \overline{\Omega}$ показана в [10]. Из (4.2) и определения $W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$, $W_{2,0}^1(S(L) \setminus \overline{\Omega}; \Gamma_\varepsilon)$ и $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ вытекает (4.1).

Через $\mathcal{L}_\delta^{(1)}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие функции F решение (3.1), (3.2). Так как $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}) \subset W_2^1(S(L))$, то $\mathcal{L}_\delta^{(1)}$ можно рассматривать как оператор с областью значений в $W_2^1(S(L))$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняется соотношение (2.1). Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_0^{(1)} \quad \text{по норме } \mathcal{B}(L_2(S(L)), W_2^1(S(L))). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через V'_δ, V' обозначим пространства, дуальные пространствам $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$ и $W_2^1(S(L))$ соответственно, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$. Напомним, что под обобщенным решением (3.1), (3.2) при $F \in V'_\delta$ понимается функция $u_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$, удовлетворяющая тождеству

$$-\langle \nabla u_\delta, \nabla v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} - \langle u_\delta, v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} = \langle F, v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} \quad (4.4)$$

при любом $v_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$. Так как $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}) \subset W_2^1(S(L))$, то $V' \subset V'_\delta$, и, следовательно, в силу теоремы Лакса–Мильграма задача (3.1), (3.2) однозначно разрешима в $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$ для любых $F \in V'$.

Покажем, что если $F \in V'$, то

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(S(L)). \quad (4.5)$$

Из (4.4) следует равномерная оценка

$$\|u_\delta\|_{W_2^1(S(L))} \leq C \|F\|_{V'}. \quad (4.6)$$

Так как $u_\delta \in W_{2,0}^1(S(L))$, то множество u_ε слабо компактно в $W_{2,0}^1(S(L))$ и, следовательно, из любой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ можно выделить подпоследовательность такую, что на ней $u_\varepsilon \rightarrow u_*$ слабо в $W_{2,0}^1(S(L))$. В силу леммы 4.1 $u_* = 0$ на Γ_0 , т.е. $u_* \in W_{2,0}^1(\Omega_{0,L})$. Так как $W_{2,0}^1(\Omega_{0,L}) \subset W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L})$, то, переходя в (4.4) к пределу при любом фиксированном $v_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{0,L})$, получаем, что $u_* = u_0$ и, следовательно,

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{слабо в } W_2^1(S(L)). \quad (4.7)$$

Из (4.4) и включений $W_{2,0}^1(\Omega_{0,L}) \subset W_{2,0}^1(\Omega_{\varepsilon,L}) \subset W_2^1(S(L))$ получаем, что

$$\langle \nabla u_\delta, \nabla u_\mu \rangle_{S(L)} + \langle u_\delta, u_\mu \rangle_{S(L)} = -\langle F, u_\mu \rangle_{S(L)}, \quad \delta \geq 0, \quad \mu = \delta, \quad \mu = 0. \quad (4.8)$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\operatorname{Im} F = 0$. Тогда из (4.8) следует равенство $\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(S(L))}^2 = -\langle F, u_\varepsilon - u_0 \rangle_{S(L)}$, правая часть которого стремится к нулю в силу (4.7). Справедливость (4.5) доказана.

Докажем справедливость (4.3) от противного. Если (4.3) неверно, то существуют постоянная $c > 0$ и последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $F_i \in L_2(S(L))$ такие, что $\|F_i\|_{L_2(S(L))} = 1$ и

$$\|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)} - \mathcal{L}_0^{(1)})F_i\|_{W_2^1(S(L))} > c, \quad (4.9)$$

$$F_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F_0 \quad \text{слабо в } L_2(S(L)) \text{ и сильно в } V'. \quad (4.10)$$

Тогда в силу (4.6) на этой последовательности имеем

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)} - \mathcal{L}_0^{(1)})F_i\|_{W_2^1(S(L))} \\ &= \|\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)}(F_i - F_0) + (\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)} - \mathcal{L}_0^{(1)})F_0 + \mathcal{L}_0^{(1)}(F_0 - F_i)\|_{W_2^1(S(L))} \\ &\leq C\|F_i - F_0\|_{V'} + \|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)} - \mathcal{L}_0^{(1)})F_0\|_{W_2^1(S(L))}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(1)} - \mathcal{L}_0^{(1)})F_i \rightarrow 0$ в $W_2^1(S(L))$ в силу (4.10), (4.5), что противоречит (4.9). Полученное противоречие доказывает (4.3).

§ 5. Сходимость по малому параметру для решений (3.3), (3.2)

ЛЕММА 5.1. *Если выполнены соотношения (2.3), то существуют функции $U_\varepsilon^+ \in W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_0 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon)$, $U_\varepsilon^- \in W_{2,0}^1(S(L) \setminus \overline{\Omega}; \Gamma_0 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon)$ такие, что*

$$\|1 - U_\varepsilon^+\|_{W_2^1(\Omega)} + \|1 - U_\varepsilon^-\|_{W_2^1(S(L) \setminus \overline{\Omega})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Γ_0 и Γ_ε — образы окружности γ_0 единичного радиуса и периодически расположенных дуг γ_ε при диффеоморфном отображении, то, очевидно, достаточно рассмотреть периодический случай для единичного круга, т.е. случай $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$.

Искомые функции $U^\pm$ будем строить, используя комбинацию метода составных разложений [11] и метода согласования асимптотических разложений [12]. Положим $X(\xi) = \ln |\sin z| - \xi_2 + \ln 2$, где $z = \xi_1 + i\xi_2$, i — мнимая единица. По определению функция X периодически продолжается с полуполосы Π_+ на всю плоскость $\mathbb{R}_+^2 = \{\xi : \xi_2 > 0\}$ (для этого продолжения сохраним обозначение X), экспоненциально убывает при $\xi_2 \rightarrow \infty$, бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}_+^2 \cup \Gamma^0$, где Γ^0 — ось $O\xi_1$ без точек $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, и

$$X(\xi) = \ln \rho + \ln 2 - \xi_2 + O(\rho^2), \quad \rho = |\xi| \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Положим $Y(\zeta) = \ln|w + (w^2 - 1)^{1/2}|$, где $w = \zeta_1 + i\zeta_2$. По определению $Y \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$,

$$Y = 0, \quad \zeta \in \gamma^1, \quad (5.3)$$

$$Y(\zeta) = \ln|\zeta| + \ln 2 + O(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

где γ^1 – интервал $(-1, 1)$ на оси $O\zeta_1$.

Обозначим

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - a(\varepsilon), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\theta}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2}, \frac{1-r}{\varepsilon} \right), \quad \zeta^m = \left(\frac{\eta_1}{\alpha} - \pi m, \frac{\eta_2}{\alpha} \right),$$

где $m \in \mathbb{Z}$,

$$U_\varepsilon^{\text{ex}}(x; b) = 1 + \varepsilon b \chi(\varepsilon^{-1/2}(1-r))X(\eta), \quad (5.5)$$

$$U_\varepsilon^{\text{in}}(x; b) = \varepsilon b Y(\zeta^m). \quad (5.6)$$

В силу (5.3) функция

$$U_\varepsilon^+(x; b) = U_\varepsilon^{\text{ex}}(x; b) \prod_{m=0}^{N-1} (1 - \chi(|\zeta^m| \alpha^{1/2})) + \sum_{m=0}^{N-1} U_\varepsilon^{\text{in}}(x; b) \chi(|\zeta^m| \alpha^{1/2}) \quad (5.7)$$

принадлежит $W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_0 \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon)$. Покажем, что

$$\|1 - U_\varepsilon^+\|_{W_2^1(\Omega)} = O(b). \quad (5.8)$$

Обозначим $\tilde{\omega}^m(t) = \Omega_0 \cap \{x : |\zeta^m| < (\varepsilon \alpha)^{-1} t\}$, $\omega(t) = \bigcup_{m=0}^{N-1} \tilde{\omega}^m(t)$. Так как функция X экспоненциально убывает при $\xi_2 \rightarrow \infty$, то из (5.2), (5.5) следует, что

$$\|1 - U_\varepsilon^{\text{ex}}\|_{W_2^1(\Omega \setminus \omega(\varepsilon \alpha^{1/2}))}^2 = O(b). \quad (5.9)$$

С другой стороны, из (5.4), (5.6) следует, что

$$\|1 - U_\varepsilon^{\text{in}}\|_{W_2^1(\omega(2\varepsilon \alpha^{1/2}))}^2 = O(b). \quad (5.10)$$

Далее, обозначим $\tilde{\eta}^m = (\eta_1 - \pi m, \eta_2)$. Заметим, что $\zeta^m = \alpha^{-1} \tilde{\eta}^m$. Перепишывая главные члены асимптотики $U_\varepsilon^{\text{ex}}$ при $\tilde{\eta}^m \rightarrow 0$ в переменных ζ^m , в силу (5.2), (5.4) получаем, что при $\alpha^{1/2} < |\tilde{\eta}^m| < 2\alpha^{1/2}$ (или, что то же самое, при $\alpha^{-1/2} < |\zeta^m| < 2\alpha^{-1/2}$)

$$U_\varepsilon^{\text{ex}}(x; b) = \varepsilon b (\ln|\zeta^m| + \ln 2) + O(b\varepsilon \alpha |\zeta^m|), \quad \alpha^{-1/2} < |\zeta^m| < 2\alpha^{-1/2}. \quad (5.11)$$

Далее, из (5.4), (5.6) следует, что

$$U_\varepsilon^{\text{in}}(x; b) = \varepsilon b (\ln|\zeta^m| + \ln 2) + O(b\varepsilon |\zeta^m|^{-2}), \quad \alpha^{-1/2} < |\zeta^m| < 2\alpha^{-1/2}. \quad (5.12)$$

Из (5.11) и (5.12) следует равенство

$$U_\varepsilon^{\text{in}}(x) - U_\varepsilon^{\text{ex}}(x) = O(b\varepsilon\alpha|\zeta|^m), \quad \alpha^{-1/2} < |\zeta| < 2\alpha^{-1/2}, \quad (5.13)$$

которое допускает дифференцирование. В свою очередь, из (5.13) следует, что

$$\begin{aligned} \|U_\varepsilon^{\text{in}} - U_\varepsilon^{\text{ex}}\|_{L_2(\overline{\omega(2\varepsilon\alpha^{1/2})} \setminus \overline{\omega(\varepsilon\alpha^{1/2})})}^2 &= O((b\varepsilon^2\alpha)^2), \\ \|\nabla(U_\varepsilon^{\text{in}} - U_\varepsilon^{\text{ex}})\|_{L_2(\overline{\omega(2\varepsilon\alpha^{1/2})} \setminus \overline{\omega(\varepsilon\alpha^{1/2})})}^2 &= O((b\varepsilon)^2\alpha). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (5.14) и (5.7) вытекает, что

$$\|U_\varepsilon^+\|_{W_2^1(\omega(2\varepsilon\alpha^{1/2}) \setminus \overline{\omega(\varepsilon\alpha^{1/2})})}^2 = O(b^2\varepsilon). \quad (5.15)$$

И наконец, из (5.9), (5.10), (5.15) и очевидного равенства

$$\|1\|_{W_2^1(\omega(2\varepsilon\alpha^{1/2}))}^2 = O(\varepsilon\alpha)$$

следует равенство (5.8).

Аналогично, обозначив через $X^-(\eta)$, $Y^-(\zeta)$ четные продолжения функций $X(\eta)$ и $Y(\zeta)$ в нижние полуплоскости $\eta_2 < 0$ и $\zeta_2 < 0$, положив

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^-(x; b) &= (1 + \varepsilon b\chi(\varepsilon^{-1/2}(1-r))X^-(\eta)) \prod_{m=0}^{N-1} (1 - \chi(|\zeta|\alpha^{1/2})) \\ &\quad + \varepsilon b \sum_{m=0}^{N-1} Y^-(\zeta) \chi(|\zeta|\alpha^{1/2}) \end{aligned}$$

и повторив рассуждения, приведенные выше для U_ε^+ , получим, что $U_\varepsilon^- \in W_{2,0}^1(S(L) \setminus \overline{\Omega}; \Gamma_0 \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon})$ и

$$\|1 - U_\varepsilon^-\|_{W_2^1(S(L) \setminus \overline{\Omega})} = O(b). \quad (5.16)$$

Из (5.8) и (5.16) следует (5.1). Лемма доказана.

Так как в силу леммы 5.1 для любых $v^+ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $v^- \in C^\infty(\overline{S(L)} \setminus \Omega)$ имеют место сходимости $v^+ U_\varepsilon^+ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v^+$ в $W_2^1(\Omega)$ и $v^- U_\varepsilon^- \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v^-$ в $W_2^1(\overline{S(L)} \setminus \Omega)$, то получаем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 5.2. Пусть выполнены соотношения (2.3) и при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $u^\varepsilon \in W_{2,0}^1(\Omega_{\varepsilon,L})$ сходится слабо к $u_*^+ \in W_2^1(\Omega)$ и $u_*^- \in W_2^1(S(L) \setminus \overline{\Omega})$. Тогда для любых функций $v^+ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $v^- \in C^\infty(\overline{S(L)} \setminus \Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla(v^+ U_\varepsilon^+) \rangle_\Omega + \langle u^\varepsilon, v^+ U_\varepsilon^+ \rangle_\Omega &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \nabla u_*^+, \nabla v^+ \rangle_\Omega + \langle u_*^+, v^+ \rangle_\Omega, \\ \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla(v^- U_\varepsilon^-) \rangle_{S(L) \setminus \overline{\Omega}} + \langle u^\varepsilon, v^- U_\varepsilon^- \rangle_{S(L) \setminus \overline{\Omega}} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \nabla u_*^-, \nabla v^- \rangle_{S(L) \setminus \overline{\Omega}} + \langle u_*^-, v^- \rangle_{S(L) \setminus \overline{\Omega}}. \end{aligned}$$

Через $\mathcal{L}_\delta^{(2)}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие функции F решение (3.3), (3.2) из $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$. Так как $W_{2,0}^1(\Omega_{\varepsilon,L}; \partial S(L)) \subset W_{2,0}^1(\Omega_{0,L}; \partial S(L)) \subset W_2^1(\Omega_{0,L})$, то $\mathcal{L}_\delta^{(2)}$ можно рассматривать как оператор с областью значений в $W_2^1(\Omega_{0,L})$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены соотношения (2.3). Тогда

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_0^{(2)} \quad \text{по норме } \mathcal{B}(L_2(S(L)), W_2^1(\Omega_0, L)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через V_δ обозначим пространства, дуальные пространствам $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$. Напомним, что под обобщенным решением (3.3), (3.2) при $F \in V_0$ понимается функция $u_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$, удовлетворяющая тождеству

$$-\langle \nabla u_\delta, \nabla v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} - \langle u_\delta, v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} = \langle F, v_\delta \rangle_{\Omega_{\delta,L}} \quad (5.17)$$

при любом $v_\delta \in W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$. Так как $W_{2,0}^1(\Omega_{\varepsilon,L}; \partial S(L))$ является подмножеством $W_{2,0}^1(\Omega_{0,L}; \partial S(L))$, то $V_0 \subset V_\varepsilon$, и, следовательно, в силу теоремы Лакса–Мильграма задача (3.3), (3.2) однозначно разрешима в $W_{2,0}^1(\Omega_{\delta,L}; \partial S(L))$ для любых $F \in V_0$. Подставляя в (5.17) $v_\delta = u_\delta$, получаем оценку

$$\|u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_\delta\|_{W_2^1(S(L) \setminus \bar{\Omega})} \leq \|F\|_{V_0}. \quad (5.18)$$

Следовательно, семейство (по параметру ε) функций u_ε слабо компактно в $W_2^1(\Omega)$ и в $W_2^1(S(L) \setminus \bar{\Omega})$. Не ограничивая общности, будем считать, что $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_*$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и в $W_2^1(S(L) \setminus \bar{\Omega})$ и сильно в $L_2(S(L))$. Пусть v^+ – произвольная функция из $C^\infty(\bar{\Omega})$. Тогда в силу леммы 5.1 функция $v^+ U_\varepsilon^+ \in W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_0 \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon)$. Следовательно, функция V_ε^+ , равная $v^+ U_\varepsilon^+$ на Ω и равная нулю на $S(L) \setminus (\bar{\Gamma}_\varepsilon \cup \Omega)$, принадлежит $W_{2,0}^1(\Omega_\varepsilon; \partial S(L))$. Подставляя $v_\varepsilon = V_\varepsilon^+$ в (5.17), получаем, что

$$-\langle \nabla u_\varepsilon, \nabla (v^+ U_\varepsilon^+) \rangle_\Omega - \langle u_\varepsilon, v^+ U_\varepsilon^+ \rangle_\Omega = \langle F, v^+ U_\varepsilon^+ \rangle_\Omega. \quad (5.19)$$

Из (5.19) в силу лемм 5.1 и 5.2, плотности вложения $C^\infty(\bar{\Omega})$ в $W_2^1(\Omega)$ и единственности решения задачи Неймана для оператора $(\Delta - 1)$ в Ω следует, что $u_* = u_0$. Аналогично доказывается слабая сходимость u_ε в $W_2^1(S(L) \setminus \bar{\Omega})$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1. Покажем, что если $F \in V_0$, то

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{сильно в } W_2^1(\Omega_0, L). \quad (5.20)$$

Из (5.17) и включений $W_{2,0}^1(\Omega_{\varepsilon,L}; \partial S(L)) \subset W_{2,0}^1(\Omega_{0,L}; S(L))$ получаем, что

$$\begin{aligned} -\langle \nabla u_\delta, \nabla u_\mu \rangle_{\Omega_{0,L}} - \langle u_\delta, u_\mu \rangle_{S(L)} &= \langle F, u_\mu \rangle_{S(L)}, \\ \mu &\geq 0, \quad \delta = 0, \quad \delta = \mu. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\text{Im } F = 0$. Тогда из (5.21) следует равенство $\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})}^2 = \langle F, u_\varepsilon - u_0 \rangle_{S(L)}$, правая часть которого стремится к нулю в силу слабой сходимости u_ε к u_0 в $W_2^1(\Omega_{0,L})$. Справедливость (5.20) доказана.

Докажем справедливость утверждения теоремы от противного. Если утверждение теоремы неверно, то существуют постоянная $c > 0$ и последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $F_i \in L_2(S(L))$ такие, что $\|F_i\|_{L_2(S(L))} = 1$ и

$$\|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)} - \mathcal{L}_0^{(2)})F_i\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} > c, \quad (5.22)$$

$$F_i \rightarrow F_0 \text{ слабо в } L_2(S(L)) \text{ и сильно в } V_0. \quad (5.23)$$

Тогда в силу (5.18) на этой последовательности имеем

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)} - \mathcal{L}_0^{(2)})F_i\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \\ &= \|\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)}(F_i - F_0) + (\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)} - \mathcal{L}_0^{(2)})F_0 + \mathcal{L}_0^{(2)}(F_0 - F_i)\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})} \\ &\leq C\|F_i - F_0\|_{V_0} + \|(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)} - \mathcal{L}_0^{(2)})F_0\|_{W_2^1(\Omega_{0,L})}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\mathcal{L}_{\varepsilon_i}^{(2)} - \mathcal{L}_0^{(2)})F_i \rightarrow 0$ в $W_2^1(\Omega_{0,L})$ в силу (5.20), (5.23), что противоречит (5.22). Полученное противоречие доказывает теорему.

§6. Существование полюсов с малой мнимой частью для аналитических продолжений решений

Из теорем 4.1, 5.1 и определения операторов $\sigma_\delta^{(j)}$ вытекает

ЛЕММА 6.1. Если выполнено соотношение (2.1), то

$$\|\sigma_\varepsilon^{(1)} - \sigma_0^{(1)}\|_{\mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^1(S(L)))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Если выполнены соотношения (2.3), то

$$\|\sigma_\varepsilon^{(2)} - \sigma_0^{(2)}\|_{\mathcal{B}(W_2^2(S(L)), W_2^1(\Omega_{0,L}))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Пусть $\mathcal{D}_\delta$ — семейство операторов из банахова пространства $\mathcal{X}$ в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (в $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0)$). Будем говорить, что $\mathcal{D}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}_0$ *сильно (слабо, по норме)* в $\mathcal{B}(\mathcal{X}, L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$ (в $\mathcal{B}(\mathcal{X}, W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2))$, $\mathcal{B}(\mathcal{X}, W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0))$), если $\mathcal{D}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}_0$ *сильно (слабо, по норме)* в $\mathcal{B}(\mathcal{X}, L_2(S(R)))$ (в $\mathcal{B}(\mathcal{X}, W_2^1(S(R)))$, $\mathcal{B}(\mathcal{X}, W_2^1(\Omega_{0,L}))$) для любого $R > 0$.

Из определений $A_\delta^{(j)}(k)$, $T_\delta^{(j)}(k)$, лемм 3.2 и 6.1 следует

ЛЕММА 6.2. Пусть K — произвольный компакт в $\tilde{\mathbb{C}}$. Тогда

- если выполнено соотношение (2.1), то $A_\varepsilon^{(1)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{(1)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2))$ и $T_\varepsilon^{(1)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_0^{(1)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in K$;
- если выполнены соотношения (2.3), то $A_\varepsilon^{(2)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{(2)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_0))$ и $T_\varepsilon^{(2)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T_0^{(2)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in K$.

В [2; глава XV, теорема 7.2] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. Пусть D – связная область комплексной плоскости, $T(k, \delta)$ – семейство компактных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, определенное для $k \in D$ и $\delta \in [0, \delta_0]$, которое голоморфно по k для каждого δ и непрерывно на $D \times [0, \delta_0]$ по норме $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Далее, пусть существует точка $k_0 \in D$ такая, что $(I - T(k_0, \delta))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ для любого $\delta \in (0, \delta_0)$. Тогда

- а) $(I - T(k, \delta))^{-1}$ (для каждого δ) есть мероморфная функция в D со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{X})$;
- б) если k_* не является полюсом $(I - T(k, \delta_*))^{-1}$, то операторнозначная функция $(I - T(k, \delta))^{-1}$ непрерывна (по норме) в окрестности (k_*, δ_*) ;
- в) полюсы $(I - T(k, \delta))^{-1}$ зависят от δ непрерывно.

Так как параметр $\varepsilon = 2N^{-1}$ дискретен, то, чтобы применить утверждение 6.1, положим $T(k, 0) = T_0^{(j)}(k)$, $\varepsilon_N = 2N^{-1}$,

$$T(k, \varepsilon) = \frac{\varepsilon_N - \varepsilon}{\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1}} T_{\varepsilon_{N+1}}^{(j)}(k) - \frac{\varepsilon_{N+1} - \varepsilon}{\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1}} T_{\varepsilon_N}^{(j)}(k) \quad \text{при } \varepsilon_{N+1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_N. \quad (6.1)$$

Семейство (6.1) в силу лемм 3.4 и 6.2 удовлетворяет условиям утверждения 6.1. Поэтому справедлива

ЛЕММА 6.3. а) Пусть выполнено соотношение (2.1). Тогда если K – произвольный компакт в $\tilde{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap \Sigma_0^{(1)} = \emptyset$, то $(B_\varepsilon^{(1)}(k))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (B_0^{(1)}(k))^{-1}$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in K$. Если $\tau_0 \in \Sigma_0^{(1)}$, то существует полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^{(1)}$, сходящийся к τ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если компакт $\tilde{K}$ не содержит собственных значений оператора $B_0^{(1)}(\tau_0)$, то при $\xi \in \tilde{K}$, k , близких к τ_0 , и малых ε существует оператор $(B_\varepsilon^{(1)}(k) - \xi)^{-1} \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$, сходящийся к $(B_0^{(1)}(k) - \xi)^{-1}$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по k и ξ .

б) Пусть выполнены соотношения (2.3). Тогда если K – произвольный компакт в $\tilde{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap \Sigma_0^{(2)} = \emptyset$, то $(B_\varepsilon^{(2)}(k))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (B_0^{(2)}(k))^{-1}$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in K$. Если $\tau_0 \in \Sigma_0^{(2)}$, то существует полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^{(2)}$, сходящийся к τ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если компакт $\tilde{K}$ не содержит собственных значений оператора $B_0^{(2)}(\tau_0)$, то при $\xi \in \tilde{K}$, k , близких к τ_0 , и малых ε существует оператор $(B_\varepsilon^{(2)}(k) - \xi)^{-1} \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$, сходящийся к $(B_0^{(2)}(k) - \xi)^{-1}$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по k и ξ .

И, наконец, из лемм 6.2 и 6.3 вытекает

ТЕОРЕМА 6.1. а) Пусть выполнено соотношение (2.1). Тогда если K – произвольный компакт в $\tilde{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap \Sigma_0^{(1)} = \emptyset$, то $\mathcal{A}_\varepsilon^{(1)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_0^{(1)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^2))$ равномерно по $k \in K$. Если $\tau_0 \in \Sigma_0^{(1)}$, то существует полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^{(1)}$, сходящийся к τ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

б) Пусть выполнены соотношения (2.3). Тогда если K – произвольный компакт в $\tilde{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap \Sigma_0^{(2)} = \emptyset$, то $\mathcal{A}_\varepsilon^{(2)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_0^{(2)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)), W_{2, \text{loc}}^1(\Omega_0))$ равномерно по $k \in K$. Если $\tau_0 \in \Sigma_0^{(2)}$, то существует полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^{(2)}$, сходящийся к τ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, из теоремы 6.1 и п. в) теоремы 3.2 следует, что у аналитического продолжения функции Грина задачи (1.1), (1.2) (задачи (1.3), (1.4)) существуют полюсы в нижней комплексной полуплоскости, сходящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к вещественным $\tau_0 \in \Sigma^{(1)}$ ($\tau_0 \in \Sigma^{(2)}$).

§ 7. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Через $S(R; z)$ обозначим открытый круг радиуса R в $\mathbb{C}$ с центром в z ,

$$P_\delta^{(j)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial S(t;0)} (B_\delta^{(j)}(k) - \zeta)^{-1} d\zeta,$$

$$\tilde{R}_\delta^{(j)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} (I - P_\delta^{(j)}(k))(B_\delta^{(j)}(k))^{-1},$$

где t такое, что в $\overline{S(t;0)}$ лежит единственное собственное значение $\lambda_0(\tau_0) = 0$ оператора $B^{(j)}(\tau_0)$ при $\tau_0 \in \Sigma_0^{(j)}$. Из леммы 6.3 вытекает

ЛЕММА 7.1. а) Пусть выполнено соотношение (2.1) и $\tau_0 \in \Sigma_0^{(1)}$. Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что $P_\delta^{(1)}(k), \tilde{R}_\delta^{(1)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$ в $S(t_0; \tau_0)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ и $P_\varepsilon^{(1)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P_0^{(1)}(k)$, $\tilde{R}_\varepsilon^{(1)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{R}_0^{(1)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in \overline{S(t_0; \tau_0)}$.

б) Пусть выполнены соотношения (2.3) и $\tau_0 \in \Sigma_0^{(2)}$. Тогда существуют $\delta_0 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что $P_\delta^{(2)}(k), \tilde{R}_\delta^{(2)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$ в $S(t_0; \tau_0)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ и $P_\varepsilon^{(2)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P_0^{(2)}(k)$, $\tilde{R}_\varepsilon^{(2)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{R}_0^{(2)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in \overline{S(t_0; \tau_0)}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть τ_0^2 – простое собственное значение предельной внутренней задачи, а $\lambda_0(\tau_0) = 0$ является простым собственным значением оператора $B_0^{(j)}(\tau_0)$. Тогда при k , близких к τ_0 , справедливо представление

$$(B_\delta^{(j)}(k))^{-1} = \frac{Q_\delta^{(j)}(k)}{k - \tau_\delta},$$

где $\tau_\delta \in \Sigma_\delta^{(j)}$, $Q_\delta^{(j)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$ в $S(t_0; \tau_0)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ и $Q_\varepsilon^{(j)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Q_0^{(j)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in \overline{S(t_0; \tau_0)}$, $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ и $\dim Q_\delta^{(j)}(\tau_\delta) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как τ_0^2 – простое собственное значение предельной внутренней задачи, а $\lambda_0(\tau_0) = 0$ является простым собственным значением оператора $B_0^{(j)}(\tau_0)$, то в силу леммы 7.1 существуют t_0 и δ_0 такие, что в круге $S(t; 0)$ лежит единственное (при фиксированных $(\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \overline{S(t_0; \tau_0)}$) и, к тому же, простое собственное значение $\lambda_\delta(k)$ оператора $B_\delta^{(j)}(k)$, являющееся голоморфной функцией по k при фиксированном δ и для которого имеет место сходимости $\lambda_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0(k)$, равномерная по $k \in S(t; \tau_0)$. Следовательно,

$$(B_\delta^{(j)}(k))^{-1} = \frac{P_\delta^{(j)}(k)}{\lambda_\delta(k)} + \tilde{R}_\delta^{(j)}(k). \quad (7.1)$$

Так как при $k = \tau_0$ решение предельной задачи может иметь полюс только первого порядка, то из (7.1) и п. б) теоремы 3.2 вытекает, что $\lambda'_0(\tau_0) \neq 0$. Следовательно, в силу теоремы Руше

$$\lambda_\delta(k) = (k - \tau_\delta) \tilde{\lambda}_\delta(k), \quad \text{где } \tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0, \quad \tilde{\lambda}_\delta(k) \neq 0, \quad (\delta, k) \in [0, \delta_0] \times \overline{S(t_0; \tau_0)}. \quad (7.2)$$

Из равенств (7.1), (7.2), леммы 7.1 и теоремы 3.2 вытекает справедливость доказываемых утверждений.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\hat{B}_\delta(k)$ – семейство $n \times n$ матриц, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) коэффициенты матриц голоморфны по k в окрестности τ_0 ;
- 2) $\hat{B}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{B}_0(k)$ равномерно по k ;
- 3) справедливо представление

$$\hat{B}_0^{-1}(k) = \frac{\hat{Q}_0(k)}{k - \tau_0},$$

где коэффициенты матрицы $\hat{Q}_0(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 и $\hat{Q}_0(\tau_0) \neq 0$;

- 4) $\hat{B}_0(\tau_0)$ – жорданова клетка-матрица с компонентами $b_{ij} = \delta_{i+1}^j$.

Тогда

- а) справедливо представление

$$\hat{B}_\varepsilon^{-1}(k) = \frac{\hat{Q}_\varepsilon(k)}{k - \tau_\varepsilon},$$

где коэффициенты матрицы $\hat{Q}_\varepsilon(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 , $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ и $\hat{Q}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{Q}_0(k)$ равномерно по k ;

- б) $\text{rank } \hat{Q}_\delta(\tau_\delta) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обратной матрицы справедливо представление

$$\hat{B}_\delta^{-1}(k) = \frac{\hat{P}_\delta(k)}{\det \hat{B}_\delta(k)}, \quad (7.3)$$

где коэффициенты матрицы $\hat{P}_\delta(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 в силу условия 1), $\hat{P}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{P}_0(k)$ равномерно по k в силу условия 2),

$$\text{rank } \hat{P}_0(\tau_0) = 1 \quad (7.4)$$

в силу условия 4) и

$$(\det \hat{B}_0(k))' \big|_{k=\tau_0} \neq 0 \quad (7.5)$$

в силу условий 1), 3) и 4). Из (7.5) следует, что в достаточно малой окрестности существует единственное (при фиксированном ε) τ_ε такое, что $\det \hat{B}_\varepsilon(\tau_\varepsilon) = 0$, причем

$$(\det \hat{B}_\varepsilon(k))'|_{k=\tau_\varepsilon} \neq 0, \quad \tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0. \quad (7.6)$$

Так как коэффициенты матриц $\hat{B}_\delta(k)$ и $\hat{P}_\delta(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 , $\hat{B}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{B}_0(k)$ и $\hat{P}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{P}_0(k)$ равномерно по k , то из (7.3) и (7.6) следует справедливость утверждения а), причем в силу (7.4) $\text{rank } \hat{Q}_0(\tau_0) = 1$, $\text{rank } \hat{Q}_\varepsilon(\tau_\varepsilon) \geq 1$. Предположение, что $\text{rank } \hat{Q}_\varepsilon(\tau_\varepsilon) > 1$, означает существование не менее двух собственных векторов, соответствующих нулевому собственному значению матрицы $\hat{B}_\varepsilon(\tau_\varepsilon)$. Выбрав их ортонормированными, получаем существование последовательности $\varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ такой, что на ней эти собственные векторы сходятся к ортонормированным собственным векторам матрицы $\hat{B}_0(\tau_0)$, соответствующим нулевому собственному значению. Последнее противоречит условию 4) (т.е. полупростоте нулевого собственного значения матрицы $\hat{B}_0(\tau_0)$). Следовательно, справедливо и утверждение б). Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Пусть τ_0^2 – простое собственное значение предельной внутренней задачи. Тогда справедливы утверждения следствия леммы 7.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_0(\tau_0) = 0$ является простым собственным значением оператора $B_0^{(j)}(\tau_0)$, то справедливость леммы вытекает из следствия леммы 7.1.

Рассмотрим теперь случай, когда $\dim P_0^{(j)}(\tau_0) = n \geq 2$ (т.е. случай, когда $\lambda_0(\tau_0) = 0$ является полупростым собственным значением оператора $B_0^{(j)}(\tau_0)$). Так как приводимые ниже рассуждения одинаковы для $j = 1$ и $j = 2$, то будем этот индекс опускать при доказательстве п. а) в рассматриваемом предположении. Обозначим $M_{\delta,1}(k) = P_\delta(k)L_2(S(L))$, $M_{\delta,2}(k) = (1 - P_\delta(k))L_2(S(L))$, а через $B_{\delta,i}(k)$ обозначим сужение $B_\delta(k)$ на $M_{\delta,i}(k)$. Известно [10], что $B_{\delta,i}(k) \in \mathcal{B}(M_{\delta,i}(k))$, и, следовательно, обращение оператора $B_\delta(k)$ сводится к обращению операторов $B_{\delta,i}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$, причем в силу леммы 7.1 оператор $B_{\delta,2}(k)$ обратим и равномерно ограничен по δ и k . Так как $P_\delta(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$ в $S(t_0; \tau_0)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ и $P_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P_0^{(1)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in \overline{S(t_0; \tau_0)}$, то известно [10], что при достаточно малых δ и k , близких к τ_0 , существует трансформирующая функция $U_\delta(k)$ такая, что $U_\delta(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$, $U_\varepsilon(k) \rightarrow U_0(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$, $U_0(\tau_0) = I$,

$$U_\delta^{-1}(k)P_\delta(k)U_\delta(k) = P_0(\tau_0),$$

проектор оператора $\hat{b}_\delta(k) = U_\delta^{-1}(k)B_\delta(k)U_\delta(k)$ не зависит от δ и k и равен $P_0(\tau_0)$, $\hat{b}_0(\tau_0) = B_0(\tau_0)$. Через $\hat{B}_\delta(k)$ обозначим сужение оператора $\hat{b}_\delta(k)$ на $M_0^{(1)}(\tau_0)$. Так как τ_0 является полюсом первого порядка предельной задачи, то в силу теоремы 3.2 τ_0 является полюсом первого порядка и для $B_0(k)$. Но тогда из определения $\hat{b}_\delta(k)$ и $\hat{B}_\delta(k)$ и леммы 7.1 вытекает, что, не ограничивая общности, оператор $\hat{B}_\delta(k)$ можно отождествить с матрицей $\hat{B}_\delta(k)$, удовлетворяющей условиям леммы 7.2. В свою очередь, из леммы 7.2, определения операторов $\hat{b}_\delta(k)$ и $U_\delta(k)$ вытекает справедливость доказываемой леммы.

Если $\tau_\delta \in \Sigma_\delta^{(j)}$ (при фиксированном j), а $g_\delta^{(j)}$ – нетривиальное решение уравнения $B_\delta^{(j)}(\tau_\delta)g_\delta^{(j)} = 0$, то в силу лемм 3.2 и 3.3 функция $\psi_\delta^{(j)} = A_\delta^{(j)}(\tau_\delta)g_\delta^{(j)} \neq 0$ удовлетворяет уравнению $(\Delta + \tau_\delta^2)\psi_\delta^{(j)} = 0$ в Ω_δ и граничным условиям $\psi_\delta^{(1)} = 0$ и $\partial\psi_\delta^{(2)}/\partial\nu = 0$ на Γ_δ . Очевидно, что если $\tau_0 \in \Sigma^{(j)}$, то $\psi_0^{(j)}$ – это собственные функции соответствующих предельных внутренних задачи в Ω , продолженные нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Для единообразия терминологии функции $\psi_\delta^{(j)}$ при любых $\tau_\delta \in \Sigma_\delta^{(j)}$ также будем называть *собственными функциями соответствующих краевых задач* (задачи (1.1), (1.2) при $j = 1$ и задачи (1.3), (1.4) при $j = 2$).

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 2.1 и 2.2. Справедливость утверждений а) и сходимость $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ вытекают из леммы 7.3 и теоремы 3.2.

В свою очередь, так как в силу теоремы 6.1 и п. а) для правых частей равенств

$$\begin{aligned} \frac{i\pi}{\tau_0} \psi_\delta^{(1)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{(1)}(y) J dy &= \int_{\partial S(t; \tau_0)} E_\delta(x, k) dk, \\ \frac{i\pi}{\tau_0} \psi_\delta^{(2)}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta^{(2)}(y) h dy &= \int_{\partial S(t; \tau_0)} H_\delta(x, k) dk \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$ имеет место сходимость в $W_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и в $W_{2, \text{loc}}(\Omega_0)$ соответственно, то, очевидно, и $\psi_\varepsilon^{(j)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^{(j)}$. Но тогда, опять же, в силу теоремы 6.1 и п. а) $\tilde{E}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{E}_0$ в $W_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и $\tilde{H}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_0$ в $W_{2, \text{loc}}(\Omega_0)$ равномерно по $k \in \partial S(t; \tau_0)$. Так как, к тому же, при фиксированном δ функции $\tilde{E}_\delta$ и $\tilde{H}_\delta$ голоморфны в круге $S(t; \tau_0)$, то, следовательно, для них справедливо утверждение п. б).

Справедливость п. в) вытекает из определения $\mathcal{A}_\delta^{(j)}(k)$ и лемм 7.3, 6.2.

§ 8. Доказательство теорем 2.3 и 2.4

Всюду в этом параграфе считается, что Ω – круг единичного радиуса, а отверстия расположены периодически, т.е. $\Omega = \omega$, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$.

ЛЕММА 8.1. Пусть выполнено соотношение (2.1), $n \geq 1$ – любое фиксированное целое число, $\mathcal{I}_n(\tau_0) = 0$ и полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^{(1)}$ сходится к τ_0 . Тогда существуют две линейно независимые собственные функции $\Psi_\varepsilon^+(r, \theta)$ и $\Psi_\varepsilon^-(r, \theta) = \Psi_\varepsilon^+(r, \theta - [N/(4n)]\varepsilon\pi)$, соответствующие этому полюсу τ_ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_\varepsilon^{(1)}(\tau_\varepsilon)g_\varepsilon^+ = 0$ и $\|g_\varepsilon^+\|_{L_2(S(L))} = 1$. Так как

$$g_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{(1)}(\tau_\varepsilon)g_\varepsilon^+ = T_0^{(1)}(\tau_0)g_\varepsilon^+ + (T_\varepsilon^{(1)}(\tau_\varepsilon) - T_0^{(1)}(\tau_0))g_\varepsilon^+,$$

то в силу следствия леммы 3.2, леммы 6.2 и слабой компактности ограниченного множества в $L_2(S(L))$ следует существование последовательности $\varepsilon_m \rightarrow 0$ такой, что на ней $g_\varepsilon^+ \rightarrow g_0^+ \neq 0$ в $L_2(S(L))$, $B_0^{(1)}(\tau_0)g_0^+ = 0$. Следовательно, на этой последовательности для соответствующих собственных функций $\Psi_\delta^+ = \mathcal{A}_\delta^{(1)}(\tau_\delta)g_\delta^+$ в силу теоремы 6.1 имеет место сходимость $\Psi_\varepsilon^+ \rightarrow \Psi_0^+ \neq 0$ в $W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$, где Ψ_0^+ – собственная функция предельной внутренней задачи (продолженная нулем вне Ω). Не ограничивая общности, будем считать, что $\Psi_0^+(x) = \mathcal{I}_n(\tau_0)r \cos(n\theta)$ при $r < 1$.

Обозначим $g_{\varepsilon}^{-}(r, \theta) = g_{\varepsilon}^{+}(r, \theta - [N/(4n)]\varepsilon\pi)$. Легко видеть, что, во-первых, $\Psi_{\varepsilon}^{-} = \mathcal{A}_{\varepsilon}^{(1)}(\tau_{\varepsilon})g_{\varepsilon}^{-}$ – тоже собственная функция и $\Psi_{\varepsilon}^{-}(r, \theta) = \Psi_{\varepsilon}^{+}(r, \theta - [N/(4n)]\varepsilon\pi)$, а, во-вторых, имеет место сходимость (на той же последовательности) Ψ_{ε}^{-} к функции $\Psi_0^{-} \neq 0$, равной $\mathcal{I}_n(\tau_0 r) \sin(n\theta)$ в Ω . Из линейной независимости функций Ψ_0^{+} и Ψ_0^{-} вытекает справедливость утверждения леммы.

Повторяя доказательство леммы 8.1, получаем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 8.2. Пусть выполнено соотношение (2.3), $n \geq 1$ – фиксированное целое число, $\mathcal{I}'_n(\tau_0) = 0$, $\mathcal{I}'_m(\tau_0) \neq 0$ для неотрицательных целых $m \neq n$ и полюс $\tau_{\varepsilon} \in \Sigma_{\varepsilon}^{(2)}$ сходится к τ_0 . Тогда существуют две линейно независимые собственные функции $\Psi_{\varepsilon}^{+}(r, \theta)$ и $\Psi_{\varepsilon}^{-}(r, \theta) = \Psi_{\varepsilon}^{+}(r, \theta - [N/(4n)]\varepsilon\pi)$, соответствующие этому полюсу τ_{ε} .

ЛЕММА 8.3. Пусть $\widehat{B}_{\delta}(k)$ – семейство $n \times n$ матриц, удовлетворяющих условиям 1)–3) леммы 7.2,

4) компоненты b_{ij} матрицы $\widehat{B}_0(\tau_0)$ равны единице при $i \geq 2$, $j = i + 1$ и нулю при остальных значениях индексов.

Тогда справедливо одно из следующих двух представлений

$$\widehat{B}_{\varepsilon}^{-1}(k) = \frac{\widehat{Q}_{\varepsilon}(k)}{k - \tau_{\varepsilon}} \quad (8.1)$$

или

$$\widehat{B}_{\varepsilon}^{-1}(k) = \frac{\widehat{Q}_{\varepsilon,1}(k)}{k - \tau_{\varepsilon}^{(1)}} + \frac{\widehat{Q}_{\varepsilon,2}(k)}{k - \tau_{\varepsilon}^{(2)}}, \quad \tau_{\varepsilon}^{(1)} \neq \tau_{\varepsilon}^{(2)}, \quad (8.2)$$

где коэффициенты матриц $\widehat{Q}_{\delta}(k)$, $\widehat{Q}_{\varepsilon,i}(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 , $\widehat{Q}_{\varepsilon}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{Q}_0(k)$, $\widehat{Q}_{\varepsilon,1}(k) + \widehat{Q}_{\varepsilon,2}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{Q}_0(k)$, $\tau_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$, $\tau_{\varepsilon}^{(i)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$, $\text{rank } \widehat{Q}_{\delta}(\tau_{\delta}) = 2$ и, если $\text{rank } \widehat{Q}_{\varepsilon,1}(\tau_{\varepsilon}^{(1)}) = \text{rank } \widehat{Q}_{\varepsilon,2}(\tau_{\varepsilon}^{(2)})$, то $\text{rank } \widehat{Q}_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon}^{(i)}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 7.2. Из условий 3) и 4) следует, что

$$\det \widehat{B}_0(k) = O((k - \tau_0)^2), \quad (\det \widehat{B}_0(k))''|_{k=\tau_0} \neq 0. \quad (8.3)$$

Из (7.3), (8.3) следуют представления (8.1) и (8.2), причем в силу условий 1), 2) коэффициенты матриц $\widehat{Q}_{\varepsilon,i}(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 , $\widehat{Q}_{\varepsilon,1}(k) + \widehat{Q}_{\varepsilon,2}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{Q}_0(k)$, $\tau_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$, $\tau_{\varepsilon}^{(i)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ и в силу условия 4) $\text{rank } \widehat{Q}_0(\tau_0) = 2$, $\text{rank } \widehat{Q}_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon}^{(i)}) \leq 2$. Допущение, что $\text{rank } \widehat{Q}_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon}^{(i)}) = 2$, приводит к противоречиям либо с условием 2), либо с неравенством $\tau_{\varepsilon}^{(1)} \neq \tau_{\varepsilon}^{(2)}$, либо с отсутствием третьего полюса. В случае, когда полюс у $\widehat{B}_{\varepsilon}^{-1}(k)$ один τ_{ε} , предположение о его втором порядке (т.е. предположение, что в представлении (8.2) $\widehat{Q}_{\varepsilon}(k)$ имеет полюс первого порядка), влечет в силу условия 3), что коэффициент при $(k - \tau_{\varepsilon})^{-2}$ стремится к нулю. Легко видеть, что последнее противоречит условию 2). Отсюда

в силу условий 1), 2) и 4) следует, что коэффициенты матрицы $\widehat{Q}_\delta(k)$ голоморфны по k в окрестности τ_0 , $\widehat{Q}_\varepsilon(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{Q}_0(k)$ и $\text{rank } \widehat{Q}_\varepsilon(\tau_\varepsilon) = 2$.

И наконец, принимая во внимание леммы 8.1 и 8.2 и повторяя доказательство леммы 7.3 (с использованием утверждения леммы 8.3 вместо леммы 7.2), получаем справедливость следующего аналога леммы 7.3.

ЛЕММА 8.4. Пусть τ_0^2 – двукратное собственное значение предельной внутренней задачи. Тогда при k , близких к τ_0 , справедливо представление

$$(B_\delta^{(j)}(k))^{-1} = \frac{Q_\delta^{(j)}(k)}{k - \tau_\delta},$$

где $\tau_\delta \in \Sigma_\delta^{(j)}$, $Q_\delta^{(j)}(k) \in \mathcal{B}^h(L_2(S(L)))$ в $S(t_0; \tau_0)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ и $Q_\varepsilon^{(j)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Q_0^{(j)}(k)$ по норме $\mathcal{B}(L_2(S(L)))$ равномерно по $k \in \overline{S(t_0; \tau_0)}$, $\tau_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ и $\dim Q_\delta^{(j)}(\tau_\delta) = 2$.

Доказательство теорем 2.3 и 2.4 повторяет доказательство теорем 2.1 и 2.2 с заменой ссылки на лемму 7.3 на ссылку на лемму 8.4 и учетом утверждений лемм 8.1 и 8.2.

§ 9. Доказательство теоремы 2.5

Всюду далее a – постоянная, Ω – круг единичного радиуса, а отверстия расположены периодически (т.е. $\Omega = \omega$, $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$), $\mathcal{I}_n(\tau_0) = 0$, $n \geq 0$ – целое число. Заметим, что если $\mathcal{I}_0(\tau_0) = 0$, то τ_0^2 – простое собственное значение задачи Дирихле в Ω , а $\mathcal{I}_0(\tau_0 r)$ – соответствующая собственная функция. Обозначим

$$\begin{aligned} \Psi(r, k; n) &= \mathcal{I}_n(kr) \cos(n\theta) && \text{при } r \leq 1, \\ \Psi(r, k; n) &= \frac{\mathcal{I}_n(k)}{\mathcal{H}_n(k)} \mathcal{H}_n(kr) \cos(n\theta) && \text{при } r > 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что Ψ при k , близких к τ_0 , является голоморфной функцией со значениями в $W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ и $W_{2, \text{loc}}^2(\Omega_0)$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца в Ω_0 , а при $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ – и условию излучения (1.2). Также очевидно, что $\Psi(x, k; n) \notin \overset{0}{W}_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ и, к тому же, имеет скачок нормальной производной на отверстиях $\Gamma_0 \setminus \overline{\Gamma_\varepsilon}$. Обозначим $\xi_1 = \theta_\varepsilon^{-1}$, $\xi_2 = (1 - r)\varepsilon^{-1}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Используя комбинацию метода составных разложений [11] и метода многих масштабов [13] (θ – аналог медленного времени), собственную функцию возмущенной задачи будем конструировать из функции

$$\Phi_\varepsilon(x, k; n) = \Psi(x, k; n) + \chi(|1 - r|)(\mathcal{I}_n(k)V_\varepsilon(\xi, \theta; n) + \alpha_\varepsilon(k; n) \cos(n\theta)|1 - r|), \quad (9.1)$$

где V_ε и α_ε – пока произвольные функции. В силу (9.1) для того чтобы функция Φ_ε принадлежала $\overset{0}{W}_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, достаточно, чтобы $V_\varepsilon \in W_2^1(S(11/6) \setminus \overline{S(1/6)})$ (как функция от x) и

$$V_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = -\cos(n\theta). \quad (9.2)$$

Будем искать V_ε в виде

$$V_\varepsilon(\xi, \theta; n) = \cos(n\theta) \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j v_j(\xi; n) + \sin(n\theta) \sum_{j=1}^2 \varepsilon^j \tilde{v}_j(\xi; n). \quad (9.3)$$

При $|1 - r| < 5/6$ оператор Δ представим в переменных ξ, θ в виде

$$\begin{aligned} \Delta = & \varepsilon^{-2} \Delta_\xi + \varepsilon^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \theta} \right) \\ & + \left(-\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 3\xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \varepsilon \left(\xi_2^2 \varphi_1(r) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2^3 \varphi_2(r) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \xi_2^2 \varphi_3(r) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \theta} + \xi_2 \varphi_4(r) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned} \quad (9.4)$$

где $\varphi_i \in C^\infty([1/6, 11/6])$. Добиваясь дополнительно, чтобы в окрестности Γ_0 функция $(\Delta + k_0^2)V_\varepsilon$ имела малую норму, подставим в нее (9.3) и (9.4) и приравняем к нулю коэффициенты при $\varepsilon^m \cos(n\theta)$ и $\varepsilon^m \sin(n\theta)$ для $m \leq 0$. В результате с учетом (9.2) получаем следующую рекуррентную систему краевых задач для коэффициентов (9.3):

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_i &= \sum_{j=1}^i \left(\xi_2^{j-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} - (j+1) \xi_2^j \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) v_{i-j} \\ &\quad - \delta_i^2 \left((\tau_0^2 - n^2) v_0 + n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{v}_1 \right), \quad \xi_2 \neq 0, \quad v_i = \delta_i^0, \quad \xi \in \Gamma^a, \\ \Delta_\xi \tilde{v}_i &= n \frac{\partial}{\partial \xi_1} v_{i-1} + \delta_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \tilde{v}_1, \quad \xi_2 \neq 0, \quad \tilde{v}_i = 0, \quad \xi \in \Gamma^a, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где Γ^a — объединение интервалов на прямой $\xi_2 = 0$, получающихся из интервала $(-a, a)$ сдвигами, кратными π , а δ_i^j — символ Кронекера. В свою очередь, в силу уравнений из (9.5) эта система краевых приводится к следующей системе рекуррентных краевых задач:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_0 &= 0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad v_0 = 1, \quad \xi \in \Gamma^a, \\ \Delta_\xi v_1 &= \Delta_\xi \left(\frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_0 \right), \quad \xi_2 \neq 0, \quad v_1 = 0, \quad \xi \in \Gamma^a, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \tilde{v}_1 &= n \frac{\partial}{\partial \xi_1} v_0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad \tilde{v}_1 = 0, \quad \xi \in \Gamma^a, \\ \Delta_\xi v_2 &= \Delta_\xi \left(\left(\frac{1}{8} \xi_2^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{3} \xi_2^3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) v_0 \right) + (n^2 - \tau_0^2) v_0 - n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{v}_1, \quad \xi_2 \neq 0, \\ &\quad v_2 = 0, \quad \xi \in \Gamma^a, \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\Delta_\xi \tilde{v}_2 = \Delta_\xi \left(\frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{v}_1 \right) - 2n \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} v_0, \quad \xi_2 \neq 0, \quad \tilde{v}_2 = 0, \quad \xi \in \Gamma^a.$$

Через γ^a обозначим дополнение $\overline{\Gamma^a}$ до оси $O\xi_1$, а через $\gamma_\pm^a$ — две стороны γ^a в случае, когда γ^a рассматривается как множество ориентированных интервалов (“ $\pm$ ” соответствует пределу при $\xi_2 \rightarrow \pm 0$), и положим $\Pi = \{\xi : -\pi/2 < \xi_1 < \pi/2\}$. Из определения (2.4) функции X_0 следует, что функции

$$v_0 = -\frac{1}{\ln \sin a} X_0, \quad v_1 = \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_0 \quad (9.8)$$

являются решениями задач (9.6) (и, следовательно, задач (9.5)), π -периодичны по ξ_2 и

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} v_0 = \pm \frac{1}{\ln \sin a} \quad \text{при } \xi \in \gamma_\pm^a, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_1 = 0 \quad \text{при } \xi_2 = 0. \quad (9.9)$$

Найдем решения (9.7) (а, следовательно, и остальные решения (9.5)). Рекуррентно определим следующие функции:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(\xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\xi_2}^{\infty} t X_0(\xi_1, t) dt, \quad \tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{X}_2, \\ \tilde{X}_4(\xi) &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{\xi_2}^{\infty} \left(t^2 X_0(\xi_1, t) + \int_t^{\infty} t X_0(\xi_1, \tau) d\tau \right) dt \right), \\ \tilde{X}_3(\xi) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{\xi_2}^{\infty} t (X_1(\xi_1, t) + \tilde{X}_1(\xi_1, t)) dt \right) \quad \text{при } \xi_2 \geq 0, \\ \varkappa_j &= -\tilde{X}_j|_{\gamma^a}, \quad X_j = \tilde{X}_j + \tilde{Y}_j, \quad j \geq 1, \end{aligned}$$

где $\tilde{Y}_j \in W_2^1(\Pi_+)$ — гармонические при $\xi_2 > 0$ функции, экспоненциально убывающие при $\xi_2 \rightarrow \infty$ и удовлетворяющие граничным условиям

$$\tilde{Y}_j = \varkappa_j \quad \text{на } \Gamma^a, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{Y}_4 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{Y}_i = a_i, \quad i = \overline{2, 3}, \quad \text{на } \gamma^a,$$

где a_i — некоторые постоянные (зависящие от a). Существование искомым функций $\tilde{Y}_j$ легко показать, используя конформное отображение Π_+ на верхнюю полуплоскость без полукруга единичного радиуса, при котором Γ^a переходит в полукружность. Пусть $(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})$ — полярные координаты на плоскости с декартовыми координатами $\tilde{\xi}$, в которую осуществляется конформное отображение, $j = \overline{2, 3}$, $Y_j(\tilde{\xi})$ — гармоническая при $\tilde{\rho} > 1$ функция, равная $\varkappa(\xi_1(\tilde{\theta}))$ при $0 < \tilde{\theta} < \pi$ и $\varkappa(\xi_1(-\tilde{\theta}))$ при $-\pi < \tilde{\theta} < 0$ на единичной окружности и ограниченная на бесконечности. Тогда легко видеть, что $\tilde{Y}_j(\xi)$ есть периодическое продолжение с Π_+ на полуплоскость $\xi_2 > 0$ функции $Y_j(\tilde{\xi}(\xi)) - Y_j(\infty)(1 + \ln^{-1} \sin a X_0(\xi))$, а $a_j = Y_j(\infty) \ln^{-1} \sin a$. Аналогично (с учетом нечетности функций $\varkappa_1$ и $\varkappa_4$) доказывается существование искомым функций $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_4$ (см. также [14; леммы 3.1, 3.2, теорема 3.1]). Продолжим четно функции $\tilde{X}_j$ в полуплоскость $\xi_2 < 0$ и сохраним за этими продолжениями обозначение X_j . Из определения функций X_j и сведения (9.5) к (9.6), (9.7) вытекает

ЛЕММА 9.1. *Функции (9.8) и*

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= -\frac{n}{\ln \sin a} X_1, & \tilde{v}_2 &= \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tilde{v}_1 + \frac{2n}{\ln \sin a} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} X_4, \\ v_2 &= \left(\frac{1}{8} \xi_2^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{3} \xi_2^3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) v_0 - \frac{1}{\ln \sin a} ((n^2 - \tau_0^2) X_2 - n^2 X_3)\end{aligned}\quad (9.10)$$

являются решениями задач (9.5), четными по ξ_2 , π -периодическими по ξ_1 , экспоненциально убывающими (вместе с производными) при $|\xi_2| \rightarrow \infty$,

$$v_i, \tilde{v}_i \in W_2^1(\Pi), \quad \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} v_i \in L_2(\Pi), \quad \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \tilde{v}_i \in L_2(\Pi). \quad (9.11)$$

Справедливы равенства (9.9) и

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \tilde{v}_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_2 = \pm B \quad \text{при} \quad \xi \in \gamma_{\pm}^a,$$

где B — некоторая постоянная (но зависящая от a и n).

Из (9.4) и леммы 9.1 вытекает

ЛЕММА 9.2. *Функция $\tilde{V}_\varepsilon = \chi(|1-r|)V_\varepsilon \in W_2^1(\Omega_0)$ удовлетворяет (9.2) и уравнению $(\Delta + k^2)\tilde{V}_\varepsilon = \tilde{F}$ в Ω_0 , где $\tilde{F}$ — голоморфная функция со значениями в $L_2(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \tilde{F} \subset \bar{S}(2)$ и $\|\tilde{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2 + \varepsilon|k - \tau_0|)$. Справедливо равенство*

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{V}_\varepsilon - \lim_{r \rightarrow 1+} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{V}_\varepsilon = -2(\varepsilon^{-1} \ln^{-1} \sin a + \varepsilon B) \cos(n\theta) \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon.$$

В свою очередь, из леммы 9.2 и определения (9.1) функции Φ_ε вытекает

ЛЕММА 9.3. *Пусть*

$$\alpha_\varepsilon(k; n) = \frac{k}{2} \left(\mathcal{J}'_n(k) - \frac{\mathcal{J}_n(k) \mathcal{H}'_n(k)}{\mathcal{H}_n(k)} \right) - \mathcal{J}_n(k) (\varepsilon^{-1} \ln^{-1} \sin a + \varepsilon B). \quad (9.12)$$

Тогда Φ_ε является голоморфной функцией со значениями в $\overset{\circ}{W}_{2, \text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)\Phi_\varepsilon = \mathcal{J}_n(k)F^{(1)} + \alpha_\varepsilon(k; n)F^{(2)}$ в Ω_ε , где $F^{(i)}$ — голоморфные функции из $L_2(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } F^{(i)} \in \bar{S}(2)$, $\|F^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon^2 + \varepsilon|k - \tau_0|)$, $\|F^{(2)}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = O(1)$. При $\text{Im } k > 0$ и $k > 0$ функция Φ_ε удовлетворяет условию излучения (1.2). Если $k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_0$ и $\alpha_\varepsilon(k(\varepsilon; n)) = 0$, то

$$\Phi_\varepsilon(x, k(\varepsilon); n) \rightarrow \mathcal{J}_n(\tau_0 r) \cos(n\theta) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega). \quad (9.13)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 5.1. Из (9.12) следует, что решение $k(\varepsilon)$ уравнения $\alpha_\varepsilon(k(\varepsilon); n) = 0$ имеет асимптотику (2.5), (2.6). Пусть $n = 0$. Из леммы 9.3 и теоремы 2.1 следует, что

$$\Phi_\varepsilon(x, k; 0) = \frac{\beta_\varepsilon(k)}{k^2 - \tau_\varepsilon^2} \psi_\varepsilon^{(1)}(x) + \tilde{E}_\varepsilon(x, k), \quad (9.14)$$

$$\|\tilde{E}_\varepsilon(\cdot, k(\varepsilon))\|_{L_2(S(R))} + |\beta_\varepsilon(k(\varepsilon))| = O(\varepsilon^3).$$

Из (9.14) и (9.13) вытекает, что, во-первых, $\tau_\varepsilon = k(\varepsilon) + O(\varepsilon^3)$ (и, следовательно, справедливы соотношения (2.5), (2.6)), а во-вторых,

$$\Phi_\varepsilon(x, k(\varepsilon); 0) = b_\varepsilon \psi_\varepsilon^{(1)}(x) + O(\varepsilon^3).$$

Из последнего равенства, (9.13) и определений Φ_ε и $k(\varepsilon)$ следует (2.7).

Аналогично, с использованием теоремы 2.3 вместо теоремы 2.1 и учетом леммы 8.1 доказывается справедливость теоремы и для $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Из приведенного доказательства легко видеть, что доказательство теоремы при более общем условии (2.1) требует лишь дополнительного анализа зависимости от a нормы в L_2 функции $\tilde{F}$ в лемме 9.2. В свою очередь, для этого достаточно исследовать зависимость от a норм функций v_j , $\tilde{v}_j$ в $W_2^1(\Pi)$ и норм функций (9.11) в $L_2(\Pi)$, что в силу явного определения (9.8), (9.10) функций v_j и $\tilde{v}_j$ не представляет принципиальных трудностей, но заметно удлинит доказательство теоремы.

Список литературы

1. Марченко В. А., Хрусов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Санчес-Паленсиа Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. Арсеньев А. А. Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 12. № 1. С. 112–138.
4. Beale J. T. Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 549–564.
5. Гадильшин Р. Р. Существование и асимптотики полюсов с малой мнимой частью для резонатора Гельмгольца // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 3–76.
6. Гадильшин Р. Р. Системы резонаторов // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 51–97.
7. Gadyl'shin R. R. On analog of the Helmholtz resonator in the averaging theory // CR Acad Sci. Paris Sér. I Math. 1999. V. 329. P. 1121–1126.
8. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
9. Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
10. Friedman A., Huang C., Yong J. Effective permeability of the boundary of a domain // Comm. Partial Differential Equations. 1995. V. 20. № 1, 2. P. 59–102.
11. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
12. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
14. Гадильшин Р. Р. Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 1. С. 3–19.

Башкирский государственный
педагогический университет, г. Уфа
E-mail: gadylshin@bspu.ru

Поступила в редакцию
20.11.2000 и 20.06.2002