Общероссийский математический портал

О. В. Мельников, Асферические про- p -группы, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 11, 71–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:00:00

УДК 512.546.37

О. В. Мельников

Асферические про- p -группы

В статье вводится понятие асферической про- p -группы. Доказано, что если группа $G = F/N$ асферическая, где F – свободная про- p -группа, то для $\mathbb{F}_p[[G]]$ -модуля соотношений $\overline{N} = N/N^p[N, N]$ справедливо утверждение типа теоремы Линдона о тождествах. Описаны конечные подгруппы и центр G . Исследована структура асферической про- p -группы G , имеющей разрешимую нормальную подгруппу $A \neq \{1\}$. В частности, если $A \cong \mathbb{Z}_p$, то G содержит подгруппу конечного индекса вида $A \rtimes W$, где W – свободная про- p -группа.

Библиография: 25 названий.

Введение

Настоящая статья представляет собой фрагмент комбинаторной теории про- p -групп, связанный с их заданием порождающими и определяющими соотношениями. Объектом исследования являются про- p -группы, между определяющими соотношениями которых не существует нетривиальных зависимостей. Содержание работы (с учетом того, что предполагается подготовить продолжение настоящей статьи) примерно соответствует результатам о дискретных группах, составляющим гл. III книги [1], и их развитию в [2] и [3]. Специфика про- p -групп проявляется в том, что нам достаточно работать на уровне цепных комплексов над полем $\mathbb{F}_p$, соответствующих двумерным комплексам Кэли.

Пусть $G = F/N$, где F – некоторая свободная про- p -группа. Модулем соотношений группы G для этого копредставления назовем $\mathbb{F}_p(G)$ -модуль $\overline{N} = N/N^*$, где $N^* = N^p[N, N]$. В качестве определения асферичности про- p -групп удобно принять следующую цепную интерпретацию асферичности их комплексов Кэли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Про- p -группа G называется *асферической*, если какой-либо из ее модулей соотношений является пермутационным $\mathbb{F}_p(G)$ -модулем $\mathbb{F}_p(T, t^0)$, определяемым проконечным (иначе, булевым) пунктированным G -пространством (T, t^0) .

Определение пермутационного модуля $\mathbb{F}_p(T, t^0)$ см. в (1.8). Одна из причин, по которой здесь, вопреки традиции, модулем соотношений названа не факторгруппа $N/[N, N]$, а именно N/N^* , состоит в том, что это априори позволяет охватить определением более широкий класс про- p -групп.

Представим полученные в статье результаты, разбив их на несколько блоков. В первый блок соберем те из них, которые формально касаются определения класса асферических про- p -групп.

Прежде всего следует отметить, что (в отличие от теории дискретных групп) асферичность является в действительности свойством самой про- p -группы G , а

не ее конкретного копредставления. Точнее, пермутационность одного из модулей соотношений группы G влечет пермутационность модулей соотношений, соответствующих всем ее копредставлениям. (Это вытекает ввиду леммы (2.3) из теоремы (2.5), лежащей в основе построенной здесь теории асферических про- p -групп.) Более того, базисные G -пространства всех модулей соотношений данной асферической про- p -группы G по существу однозначно определяются в терминах группы G (см. теорему (3.5)).

Непосредственно из приведенного выше определения вытекает, что подгруппы асферических групп также асферичны. Очевидные примеры асферических групп дают конечные циклические p -группы (и по теореме (2.7) других конечных асферических p -групп нет), а также свободные про- p -группы. Асферичность сохраняется при образовании ряда свободных конструкций в классе про- p -групп (см. теорему (2.8) и следствия из нее).

Далее, среди асферических групп целиком содержится класс про- p -групп G когомологической размерности $\text{cd } G \leq 2$ (так как модули соотношений таких G свободны и, следовательно, пермутационны (см., например, [4])). Следующая теорема показывает, что если бы в определении асферичности использовались обычные, не пунктированные G -пространства, то полученный класс групп оказался бы не намного шире.

ТЕОРЕМА А. *Асферическая про- p -группа G обладает модулем соотношений, являющимся пермутационным над некоторым не пунктированным G -пространством, тогда и только тогда, когда она содержит подгруппу H конечного индекса с $\text{cd } H \leq 2$.*

Этот результат выводится в (3.8) из более точного утверждения теоремы (3.7). Отметим здесь же следствие (3.6), согласно которому каждая асферическая про- p -группа без кручения имеет когомологическую размерность не более 2.

Второй блок составляют результаты о специальных свойствах G -пространств (T, t^0) , определяющих модули соотношений N/N^* асферических про- p -групп $G = F/N$, и о расположении этих пространств в факторгруппах F/N^* . Они представлены в теоремах (3.1) и (3.2) (см. также часть (а) теоремы (3.5)). Должным образом интерпретированные эти теоремы дают утверждения об асферических про- p -группах, дискретными прототипами которых являются хорошо известные результаты о группах с одним определяющим соотношением. В частности, теорему (3.2) следует рассматривать как адекватную про- p -ситуации формулировку утверждения типа теоремы Линдона о тождествах (см. [1]).

Приведем здесь содержащиеся в теоремах (3.1) и (3.2) результаты в традиционной форме. Условимся называть *максимальным корнем из элемента r свободной про- p -группы F* такой элемент h , порождающий централизатор $C_F(r) \cong \mathbb{Z}_p$, что $r = h^q$ для $q = p^m \geq 1$. Число q естественно называть *степенью корня h* .

ТЕОРЕМА В. *Пусть $G = F/N$ – асферическая про- p -группа, где F – свободная про- p -группа. Тогда для некоторого проконечного пространства $X = I \cup \{*\}$ существуют такие элементы $r_i \in N$, $i \in I$, порождающие N как нормальную подгруппу F , что*

- (а) $\overline{N} = \bigoplus_{x \in X} A_x$ – прямая сумма над X в смысле статьи [5] циклических подмодулей A_i , порожденных образами r_i в $\overline{N}$, $i \in I$, и нулевого $A_* = \{0\}$;

- (b) для $i \in I$ модуль A_i канонически изоморфен фактормодулю $\mathbb{F}_p(G)/\mathbb{F}_p(G)(s_i - 1)$, где s_i — образ в G максимального корня из $r_i \in F$ (при этом порядок s_i совпадает со степенью корня);
- (c) если K — нетривиальная конечная подгруппа G , то существуют единственные индекс $i \in I$ и смежный класс gS_i по циклической подгруппе $S_i = \langle s_i \rangle$, для которых $K \subseteq gS_i g^{-1}$.

Пространство X в этой теореме есть не что иное, как пространство G -орбит $G \setminus T$ для G -пространства (T, t^0) из определения асферической группы (см. (3.3)). Отметим, что в такой формулировке теряется информация о том, что $\bar{N}$ — пермутационный модуль.

Третий блок результатов посвящен детальному изучению структуры асферических про- p -групп с нетривиальными разрешимыми нормальными подгруппами. Эти результаты, составляющие § 4, можно понимать также как описание строения нормализаторов (и централизаторов) абелевых подгрупп в асферических про- p -группах. В концентрированном виде полученная в § 4 информация содержится в описании разрешимых асферических про- p -групп и в следующей теореме (см. теоремы (4.9) и (4.5)).

ТЕОРЕМА С. *Произвольная асферическая про- p -группа G обладает наибольшей разрешимой нормальной подгруппой $R(G)$. Если G — неразрешимая асферическая про- p -группа с нетривиальным радикалом $R(G)$, то*

- (a) $R(G) \cong \mathbb{Z}_p$ и в группе G содержится подгруппа без кручения индекса не более 2 (и, следовательно, G — группа без кручения при $p \neq 2$);
- (b) если G без кручения, то $d(G) = r(G) + 1$, где $d(G)$ и $r(G)$ — минимальные числа порождающих и соответственно определяющих соотношений группы G ;
- (c) G обладает подгруппой конечного индекса, имеющей вид $R(G) \rtimes W$, где W — свободная про- p -группа ранга не менее 2.

Утверждения (a) и (b) этой теоремы напоминают теорему Муласуги о центре для дискретных одно-определенных групп (с той разницей, что в теореме С кардинальные числа $d(G)$ и $r(G)$ могут быть бесконечны). Соответствующий результат о неабелевых асферических про- p -группах с нетривиальным центром содержится в теореме (4.6).

Класс абелевых асферических про- p -групп описать легко: это группы, изоморфные $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Что касается разрешимых асферических про- p -групп, то в § 5 мы сформулируем теорему, дающую их полное описание. Доказательство этой теоремы планируется опубликовать позднее. В настоящей работе мы ограничимся доказательством следующего результата.

ТЕОРЕМА D. *Если $p \geq 5$, то неабелева разрешимая асферическая про- p -группа изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$.*

(Так как $\text{cd}(\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p) = 2$, то эта группа асферична.)

Первый параграф статьи содержит некоторым образом систематизированное изложение утверждений о проконечных модулях, которые, как правило, являются леммами для доказательств результатов §§ 2, 3. Хотелось бы, однако, выделить одно утверждение, представляющее самостоятельный интерес. Это предло-

жение (1.16) о существовании и единственности так называемых сердцевин в проконечных модулях над про- p -группами.

Именно это предложение позволяет получить уже упоминавшуюся базисную теорему (2.5). Мы все же приведем здесь утверждение этой теоремы в следующей, слегка усеченной форме.

ТЕОРЕМА Е. *Асферичность про- p -группы G эквивалентна тому, что в некоторой (а тогда и в каждой) точной последовательности проконечных $\mathbb{F}_p(G)$ -модулей*

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (*)$$

со свободными модулями P_0 и P_1 модуль M является пермутационным.

Это утверждение позволяет несколько иначе взглянуть на понятие асферичности про- p -групп. Дело в том, что наиболее естественный путь возникновения последовательностей вида (*) состоит в построении цепных комплексов над $\mathbb{F}_p$ по двумерным про- p -комплексам, являющимся связными, односвязными и асферическими, на которых про- p -группа G действует с тривиальными стабилизаторами вершин.

Таким образом, изучение асферических про- p -групп можно рассматривать как распространение в размерность 2 исследований проконечных групп, действующих на проконечных деревьях, начатых в [6] и развитых в [7] и [8] до построения проконечного варианта теории Басса–Серра.

§ 1. Свободные и пермутационные модули

(1.1) Через $\mathbb{F}_p(G)$ будем обозначать пополненное групповое кольцо про- p -группы G над полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Его определение содержится, например, в [9] и [4], где используется более традиционное обозначение $\mathbb{F}_p[[G]]$.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением проконечных $\mathbb{F}_p(G)$ -модулей, считая их, как правило, левыми. Для краткости будем называть их просто G -модулями. Все они являются, очевидно, абелевыми про- p -группами экспоненты p и, следовательно, изоморфны прямым произведениям $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Так как $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – единственный простой G -модуль, то кольцо $\mathbb{F}_p(G)$ является локальным (топологически) кольцом с радикалом Джекобсона $I(G)$. Здесь и везде ниже $I(G)$ означает фундаментальный идеал $\mathbb{F}_p(G)$, являющийся по определению ядром гомоморфизма аугментации $\varepsilon: \mathbb{F}_p(G) \rightarrow \mathbb{F}_p$, который отображает в единицу все элементы из $G \subset \mathbb{F}_p(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Практически все приведенные ниже результаты справедливы в более общей ситуации: по существу, важна лишь локальность кольца и полнота модулей. В ряде доказательств нужно будет только заменить $I(G)$ на радикал Джекобсона.

(1.2) *Свободный G -модуль* ранга $m \geq 0$ определим как прямое произведение

$$\mathbb{F}_p(G)^m = \prod_{i \in I} A_i, \quad A_i = \mathbb{F}_p(G),$$

$m = |I|$ экземпляров свободного модуля ранга 1. (Основанием для такого определения является лемма (1.5).) Роль *свободного базиса* этого модуля играет подмножество $X = \{x_i \mid i \in I\}$, где x_i – единица кольца $\mathbb{F}_p(G) = A_i$.

Иногда нам будет удобно элемент $\eta = (\eta_i)$, $\eta_i \in \mathbb{F}_p(G)$, из $\mathbb{F}_p(G)^{\mathfrak{m}}$ записывать, используя базис X , в виде $\eta = \sum_{i \in I} \eta_i x_i$. Корректность этой записи следует из того, что X является подмножеством, сходящимся к нулю (т.е. произвольная окрестность нуля содержит почти все элементы из X).

(1.3) Для G -модуля M через M^G обозначим множество элементов из M , неподвижных при действии G .

ЛЕММА. Если P – свободный G -модуль и группа G бесконечна, то $P^G = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $P = \mathbb{F}_p(G)$. Необходимое равенство $\mathbb{F}_p(G)^G = \{0\}$ является частным случаем более общего утверждения из [10]. Для полноты изложения приведем здесь схему доказательства в этом частном случае.

Пусть $G = \varprojlim G/U_\lambda$, где G/U_λ – конечные p -группы. Тогда, очевидно, $\mathbb{F}_p(G)^G = \varprojlim \mathbb{F}_p(G/U_\lambda)^{G/U_\lambda}$. Легко проверить, что $\mathbb{F}_p(G/U_\lambda)^{G/U_\lambda}$ состоит из элементов вида $a\nu_\lambda$, где $a \in \mathbb{F}_p$, ν_λ – сумма всех элементов из G/U_λ . Поэтому для $\mu > \lambda$ ограничение на $\mathbb{F}_p(G/U_\mu)^{G/U_\mu}$ проекции $\mathbb{F}_p(G/U_\mu) \rightarrow \mathbb{F}_p(G/U_\lambda)$ проективного предела является умножением на $[U_\lambda : U_\mu] = p^\alpha$, $\alpha > 0$, т.е. нулевым гомоморфизмом.

(1.4) Условимся через $A \otimes_G M$ обозначать введенное в [9] пополненное тензорное произведение над кольцом $\mathbb{F}_p(G)$ правого G -модуля A и левого G -модуля M . Как обычно, G -модуль M будем называть *плоским*, если функтор $A \mapsto A \otimes_G M$ является точным.

ЛЕММА. Для про- p -группы G следующие свойства G -модуля P эквивалентны:

- (i) P – свободный модуль;
- (ii) P – проективный модуль;
- (iii) P – плоский модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (ii) $\implies$ (i) устанавливается стандартными рассуждениями, использующими локальность $\mathbb{F}_p(G)$. Отметим, что в качестве свободного базиса P может быть взято произвольное сходящееся к нулю подмножество $\{x_i \mid i \in I\}$ со следующим свойством: $P/I(G)P = \prod_{i \in I} C_i$, где подгруппа $C_i \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ порождена образом элемента x_i , $i \in I$.

Справедливость импликаций (iii) $\implies$ (ii) и (i) $\implies$ (iii) установлена в [9; предложение 3.1, лемма 2.1].

(1.5) В настоящей статье существенным образом будет использоваться понятие прямой суммы (копроизведения) семейства модулей, непрерывно индексированных точками топологического пространства, введенное в [5]. Приведем здесь соответствующие определения в удобной для использования форме.

Пусть X – проконечное (иначе, булево) пространство. Семейство $\Delta = \{A_x \mid x \in X\}$ подмодулей G -модуля A считается *непрерывно индексированным точками X* , если для любой окрестности нуля W в A подмножество $\{x \in X \mid A_x \subseteq W\}$ открыто в X .

Модуль A является по определению *прямой суммой* $\bigoplus_{x \in X} A_x$ такого семейства Δ , если

- (1) подмодули A_x , $x \in X$, порождают A ;

- (2) $A_x \cap A_y = \{0\}$ при $x \neq y$;
 (3) для любого G -модуля B произвольный набор гомоморфизмов $\psi_x: A_x \rightarrow B$, $x \in X$, который определяет непрерывное отображение ψ подпространства $\bigcup_{x \in X} A_x \subset A$ в B , продолжается до гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ (т.е. $\varphi|_{A_x} = \psi_x$ для всех $x \in X$).

Представление модуля B в виде проективного предела его конечных фактормодулей позволяет при проверке условия (3) ограничиться рассмотрением только конечных B .

ЛЕММА. *Прямое произведение $\prod_{i \in I} A_i$ множества G -модулей является прямой суммой $\bigoplus_{i \in I \cup \{\infty\}} A_i$ над одноточечной компактификацией $I \cup \{\infty\}$ дискретного пространства I , где $A_\infty = \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения топологии прямого произведения вытекает, во-первых, что семейство подмодулей Δ , состоящее из $A_\infty = \{0\}$ и модулей A_i , $i \in I$, естественным образом вложенных в $\prod_{i \in I} A_i$, непрерывно индексировано.

Во-вторых, если $\psi: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow B$ — непрерывное отображение в конечный G -модуль B со свойством $\psi(0) = \psi_\infty(A_\infty) = \{0\}$, то гомоморфизмы $\psi_i = \psi|_{A_i}$ являются нулевыми для всех $i \in I$, не принадлежащих некоторому конечному подмножеству $J \subseteq I$. Поэтому в качестве гомоморфизма φ можно взять композит проекции на $\prod_{j \in J} A_j = \bigoplus_{j \in J} A_j$ и гомоморфизма $\bigoplus_{j \in J} \psi_j$.

(1.6) **ЛЕММА.** (а) Пусть $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — произвольная проективная система свободных G -модулей. Тогда предел $P = \varprojlim P_\lambda$ также является свободным G -модулем.

(б) Прямая сумма $P = \bigoplus_{x \in X} P_x$ непрерывного семейства свободных G -модулей также является свободным G -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы (1.4) достаточно доказать, что модуль P является проективным.

(а) Рассуждения, аналогичные проведенным в доказательстве предложения 1 из [11], показывают, что существование поднятия произвольного гомоморфизма $\varphi: P \rightarrow A/K$ до гомоморфизма $\psi: P \rightarrow A$ достаточно установить только для конечных модулей A . В этом случае найдется такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $\varphi = \varphi_\lambda \rho_\lambda$ для некоторого гомоморфизма $\varphi_\lambda: P_\lambda \rightarrow A/K$, где ρ_λ — проекция $P \rightarrow P_\lambda$. В силу проективности P_λ существует поднятие $\psi_\lambda: P_\lambda \rightarrow A$ гомоморфизма φ_λ . Тогда $\psi = \psi_\lambda \rho_\lambda$ — искомое поднятие φ .

(б) Согласно лемме (3.3) из [5] для любого $q \geq 0$ и произвольного правого G -модуля A

$$\mathrm{Tor}_q^G(A, P) \cong \bigoplus_{x \in X} \mathrm{Tor}_q^G(A, P_x),$$

где Tor_q^G — производные функторы пополненного тензорного произведения (см. [9]). Проективность P_x в силу леммы (1.4) эквивалентна равенству $\mathrm{Tor}_1^G(A, P_x) = \{0\}$. Поэтому $\mathrm{Tor}_1^G(A, P) = \{0\}$, откуда вытекает проективность модуля P .

(1.7) По аналогии с [12] введем понятие $\mathbb{F}_p$ -модуля, свободного над пунктированным проконечным пространством (T, t^0) .

Через $\mathbb{F}_p(T, t^0)$ будем обозначать такой проконечный $\mathbb{F}_p$ -модуль, что существует вложение $\omega: T \rightarrow \mathbb{F}_p(T, t^0)$, отображающее отмеченную точку t^0 в нуль и обладающее следующим универсальным свойством:

(*) для любого непрерывного отображения $\beta: T \rightarrow B$, $\beta(t^0) = 0$, где B – проконечный $\mathbb{F}_p$ -модуль, существует единственный гомоморфизм модулей $\varphi: \mathbb{F}_p(T, t^0) \rightarrow B$, удовлетворяющий равенству $\varphi\omega = \beta$.

Так же, как в (1.5), замечаем, что свойство (*) достаточно проверить лишь для конечных модулей B . Из этого факта немедленно следует, что если $(T, t^0) = \varprojlim (T_\lambda, t_\lambda^0)$, то $\mathbb{F}_p(T, t^0) = \varprojlim \mathbb{F}_p(T_\lambda, t_\lambda^0)$.

Так как для конечного пунктированного пространства (T_λ, t_λ^0) в качестве $\mathbb{F}_p(T_\lambda, t_\lambda^0)$ можно взять свободный $\mathbb{F}_p$ -модуль с базисом $T_\lambda - \{t_\lambda^0\}$, то мы приходим к явной конструкции модуля $\mathbb{F}_p(T, t^0)$.

Из этого явного представления вытекает, в частности, что для бесконечного пространства T

$$\mathbb{F}_p(T, t^0) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

где мощность множества I равна весу $w(T)$ топологического пространства T . (В самом деле, $w(T)$ равен, как легко видеть, мощности множества индексов λ в представлении $(T, t^0) = \varprojlim (T_\lambda, t_\lambda^0)$, где T_λ – конечные факторпространства T .)

Совершенно аналогично определяется свободный $\mathbb{F}_p$ -модуль $\mathbb{F}_p(S)$ над не пунктированным проконечным пространством S . Чтобы не рассматривать отдельно такие модули, удобно отождествлять $\mathbb{F}_p(S) = \mathbb{F}_p(T, t^0)$, где $T = S \cup \{t^0\}$ и отмеченная точка t^0 изолирована в T .

Небесполезно отметить, что $\mathbb{F}_p(\{t^0\}, t^0) = \{0\}$.

(1.8) Пусть G – про- p -группа. Пунктированное проконечное пространство (T, t^0) называется G -пространством, если G непрерывно действует на T гомеоморфизмами, оставляющими на месте отмеченную точку t^0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пермутационным G -модулем* называется модуль $\mathbb{F}_p(T, t^0)$, где (T, t^0) – какое-либо G -пространство, а действие элемента $g \in G$ определяется как автоморфизм этого модуля, продолжающий (по универсальному свойству (*)) из (1.7)) отображение $t \mapsto g \cdot t$ из T в $T \subset \mathbb{F}_p(T, t^0)$.

В дальнейшем будут важны также пермутационные G -модули $\mathbb{F}_p(S)$ над G -пространствами S , не являющимися пунктированными. В частности, пермутационными являются модули $\mathbb{F}_p(G/H)$, действие G на которых определяется левым регулярным действием G на пространстве G/H смежных классов по подгруппе H .

(1.9) Таким образом, свободный G -модуль $\mathbb{F}_p(G)$ ранга 1 является пермутационным. Пермутационность произвольного свободного G -модуля вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть M_i , $i \in I$, – пермутационные G -модули. Тогда прямое произведение $M = \prod_{i \in I} M_i$ также является пермутационным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_i = \mathbb{F}_p(T_i, t_i^0)$. Будем считать, что G -пространства T_i содержатся в модулях M_i , естественным образом вложенных в G -модуль M . При этом t_i^0 совпадает с нулем модуля M для всех $i \in I$.

Через T обозначим G -подпространство в M , равное объединению всех T_i , $i \in I$, с отмеченной точкой $t^0 = 0$. Из определения тихоновской топологии вытекает замкнутость T . С помощью леммы (1.5), в которой полагаем $G = \{1\}$, легко показать, что $M = \mathbb{F}_p(T, t^0)$.

(1.10) В дальнейшем мы, как правило, будем считать пунктированное пространство (T, t^0) подпространством в $\mathbb{F}_p(T, t^0)$; при этом $t^0 = 0$. Для замкнутого подпространства $S \subseteq T$ через $\langle S \rangle$ будем обозначать порожденный им $\mathbb{F}_p$ -подмодуль.

ЛЕММА. Для G -пространства (T, t^0) справедливы следующие утверждения.

- (а) Пусть $\delta: T \rightarrow X$ – такое непрерывное отображение на некоторое проконечное пространство X , что $\delta(g \cdot t) = \delta(t)$ для всех $g \in G$, $t \in T$. Тогда пермутационный G -модуль $\mathbb{F}_p(T, t^0) = \bigoplus_{x \in X} A_x$, где $A_x = \langle \delta^{-1}(x) \rangle$.
- (б) Пусть S – G -инвариантное подпространство T . Тогда $\langle S \rangle$ естественным образом изоморфен пермутационному G -модулю $\mathbb{F}_p(S, t^0)$, если $t^0 \in S$, или $\mathbb{F}_p(S)$, если $t^0 \notin S$.
- (с) Пусть S – G -инвариантное подпространство T и $t^0 \in S$, T/S – факторпространство T , полученное стягиванием S в точку s^0 . Тогда $(T/S, s^0)$ – пунктированное G -пространство и пермутационный G -модуль $\mathbb{F}_p(T/S, s^0)$ естественным образом изоморфен фактормодулю $\mathbb{F}_p(T, t^0)/\langle S \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА всех утверждений представляют собой, по существу, полутривиальную проверку универсальных свойств из определений (1.5) и (1.7). За деталями можно обратиться в [5], где подобная проверка проделана для более сложного случая копроизведений в категории проконечных групп.

(1.11) Пусть T – некоторое G -пространство. Через G_t условимся обозначать стабилизатор в G точки $t \in T$, а через $G \backslash T$ – пространство G -орбит в T , снабженное фактортопологией.

Для удобства ссылок сформулируем следствие из предыдущей леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Произвольный пермутационный G -модуль представляется в виде

$$\mathbb{F}_p(T, t^0) = \bigoplus_{x \in G \backslash T} M_x,$$

где $M_x = \langle O_x \rangle$ для G -орбиты $O_x \subseteq T$. При этом $M_{x^0} = \{0\}$, если x^0 – орбита точки t^0 , и $M_x \cong \mathbb{F}_p(G/G_{t(x)})$ в остальных случаях, где $t(x)$ – какой-либо элемент из орбиты O_x .

(1.12) ЛЕММА. (а) Пусть H – подгруппа про- p -группы G , M – некоторый пермутационный H -модуль. Тогда индуцированный модуль $\mathbb{F}_p(G) \otimes_H M$ является пермутационным G -модулем.

(б) Пусть $A = \mathbb{F}_p(T, t^0)$ – пермутационный G -модуль, $N \triangleleft G$. Тогда пространство N -орбит $N \backslash T$ может естественным образом рассматриваться как пунктированное G/N -пространство, и имеет место естественный изоморфизм G/N -модулей

$$A/I(N)A \cong \mathbb{F}_p(N \backslash T, y^0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $M = \mathbb{F}_p(T, t^0)$. Подмножество

$$\tilde{T} = \{g \otimes t \mid g \in G, t \in T\}$$

является, как легко видеть, замкнутым G -подпространством модуля $\widetilde{M} = \mathbb{F}_p(G) \otimes_H M$. Докажем, что вложение $(\tilde{T}, 0)$ в $\mathbb{F}_p$ -модуль $\widetilde{M}$ обладает универсальным свойством (*) из (1.7).

Используя заданное отображением $g \otimes m \mapsto gH \otimes m, m \in M$, стандартное отождествление и перестановочность тензорного произведения с проективными пределами (см. [9]), разложим $\widetilde{M}$ в проективный предел

$$\widetilde{M} = \mathbb{F}_p(G/H) \otimes M = \varprojlim \widetilde{M}_\lambda,$$

где

$$\widetilde{M}_\lambda = \mathbb{F}_p(G/V_\lambda) \otimes M = \bigoplus_{gV_\lambda \in G/V_\lambda} (\mathbb{F}_p(gV_\lambda) \otimes M).$$

Здесь $V_\lambda, \lambda \in \Lambda$, пробегает все открытые подгруппы G , содержащие H . Ясно, что достаточно проверить свойство (*) для образов $(\tilde{T}_\lambda, 0)$ пространства $\tilde{T}$ в модулях $\widetilde{M}_\lambda$. Это, однако, очевидно, так как $\tilde{T}_\lambda$ равно объединению конечного числа подпространств $\{gV_\lambda \otimes t \mid t \in T\}$, $gV_\lambda \in G/V_\lambda$, из прямых слагаемых, изоморфных M как $\mathbb{F}_p$ -модули.

(b) Каноническое отображение T на $N \setminus T$, рассматриваемое как G -отображение, определяет гомоморфизм A на $\mathbb{F}_p(N \setminus T, y^0)$, являющийся, очевидно, G -модульным. Ядро K этого гомоморфизма порождено как $\mathbb{F}_p$ -подмодуль элементами $(n_1 - 1)n_2t \in I(N)A$, где $t \in T, n_1, n_2 \in N$. Обратное включение $I(N)A \subseteq K$ вытекает из тривиальности действия N на $\mathbb{F}_p(N \setminus T, y^0)$.

(1.13) Для G -пространства (T, t^0) положим

$$\text{ess}_G(T) = \{t \in T \mid G_t \neq \{1\}\},$$

а через $\overline{\text{ess}}_G(T)$ будем обозначать замыкание в T подмножества $\text{ess}_G(T)$. Ясно, что $t^0 \in \text{ess}_G(T)$ и, следовательно, $(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0)$ — пунктированное G -пространство.

Если $\text{ess}_G(T) = \{t^0\}$, то пунктированное G -пространство (T, t^0) называется *свободным*. Не пунктированное G -пространство S будем называть *свободным*, если $\text{ess}_G(S) = \emptyset$.

Через $T_F = T/\overline{\text{ess}}_G(T)$ обозначим факторпространство, полученное стягиванием $\overline{\text{ess}}_G(T)$ в точку t_F^0 . Ясно, что (T_F, t_F^0) является свободным пунктированным G -пространством. В случае, когда пространство орбит $Y = G \setminus T_F$ бесконечно, его вес $w(Y)$ будем обозначать через $\text{fr}_G(T, t^0)$. Если Y конечно, то положим $\text{fr}_G(T, t^0) = |Y| - 1$.

(1.14) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Любой пермутационный G -модуль представляется в виде*

$$\mathbb{F}_p(T, t^0) \cong \mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0) \oplus P,$$

где P — свободный G -модуль ранга $\text{fr}_G(T, t^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме (1.10) подмодуль $E = \langle \overline{\text{ess}}_G(T) \rangle$ изоморфен $\mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T))$, а фактормодуль по нему изоморфен $\mathbb{F}_p(T_F, t_F^0)$. Из следствия (1.11) и свободы G -пространства (T_F, t_F^0) вытекает, что $\mathbb{F}_p(T_F, t_F^0)$ является прямой суммой свободных G -модулей (рангов 1 и 0). Таким образом, $\mathbb{F}_p(T_F, t_F^0)$ – свободный G -модуль (по лемме (1.6)) и $\mathbb{F}_p(T, t^0) = E \oplus P$, где $P \cong \prod_{i \in I} \mathbb{F}_p(G)$. По лемме (1.12.(b)) факторгруппа $P/I(G)P \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ изоморфна $\mathbb{F}_p(G \setminus T_F, t_F^0)$. Отсюда в силу сделанного в (1.7) замечания получаем, что $|I| = \text{fr}_G(T, t^0)$.

(1.15) Для удобства ссылок сформулируем два утверждения, вытекающих из предыдущего предложения. Первое из них позволяет достаточно широко варьировать базисное G -подпространство пермутационного модуля.

СЛЕДСТВИЕ. (а) Пусть (T, t^0) – некоторое G -пространство, V – произвольное проконечное пространство веса $w(V) = \text{fr}_G(T, t^0)$. Тогда

$$\mathbb{F}_p(T, t^0) \cong \mathbb{F}_p(T', t^0),$$

где T' – дизъюнктное объединение пунктированного G -пространства $(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0)$ и не пунктированного G -пространства $G \times V$ (с очевидным действием G).

(b) Произвольный свободный G -модуль P является свободным как H -модуль для любой подгруппы H про- p -группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Замечаем, что $\text{fr}_G(T', t^0) = w(V)$, и применяем предложение (1.14).

(b) В силу утверждения (а) $P \cong \mathbb{F}_p(G \times V)$, где $w(V) = \text{rank } P$. Свободное G -пространство $G \times V$ является свободным и как H -пространство. Поэтому из предложения (1.14) вытекает свобода H -модуля $\mathbb{F}_p(G \times V)$.

(1.16) Пусть G – про- p -группа, M – некоторый G -модуль. Подмодуль M_0 называется *сердцевиной* M (в записи, $M_0 = \text{core}(M)$), если справедливо следующее:

- (i) фактормодуль M/M_0 является свободным;
- (ii) M_0 не имеет фактормодулей, изоморфных $\mathbb{F}_p(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Произвольный G -модуль M обладает сердцевиной. Если $A = \text{core}(M)$ и $B = \text{core}(M)$, то $B = \alpha(A)$ для некоторого автоморфизма α модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве сердцевины модуля M можно взять произвольный минимальный по включению элемент A множества Ψ таких подмодулей K , что фактормодуль M/K является свободным. Возможность применения к Ψ леммы Цорна вытекает из леммы (1.6.(a)). А именно, если $\{K_j \mid j \in J\}$ – цепь в Ψ , то для пересечения $K = \bigcap_{j \in J} K_j$ фактормодуль $M/K = \varprojlim M/K_j$ также является свободным.

Свойство (ii) сердцевины M для так определенного подмодуля A является следствием его минимальности в Ψ . Действительно, если $A/A_1 \cong \mathbb{F}_p(G)$, то фактормодуль $M/A_1 \cong (A/A_1) \oplus (M/A)$ свободен.

Докажем второе утверждение. Пусть $M = A \oplus P$ и $M = B \oplus Q$ для свободных подмодулей P и Q . Через δ_A и δ_Q обозначим ретракции M на A и на Q в этих прямых разложениях, т.е. $\delta_A(a + p) = a$, $\delta_Q(b + q) = q$. Положим $\eta = \delta_Q \delta_A: M \rightarrow M$ и $\alpha = 1 - \eta$, т.е. $\alpha(m) = m - \eta(m)$ для $m \in M$.

Докажем, что эндоморфизм α модуля M является его автоморфизмом. Для этого достаточно показать, что бесконечная сумма

$$\beta(m) = m + \eta(m) + \eta^2(m) + \eta^3(m) + \cdots,$$

где $m \in M$, задает вполне определенный элемент M . Тогда, как легко видеть, отображение $m \mapsto \beta(m)$ будет обратным к α .

Заметим сначала, что для любого открытого подмодуля U в G -модуле M из конечности модуля M/U вытекает существование такого $n \geq 1$, что $I(G)^n M \subseteq U$. Поэтому для доказательства существования элемента $\beta(m)$ достаточно показать, что $\eta^n(M) \subseteq I(G)^n M$ для всех $n \geq 1$. Тривиальный в силу равенства $\eta(I(G)^n M) = I(G)^n \eta(M)$ индуктивный переход позволяет ограничиться доказательством включения $\eta(M) \subseteq I(G)M$.

Из определения эндоморфизма η следует, что $\eta(M) \subseteq Q$ и $\eta(P) = \{0\}$. Поэтому достаточно показать, что $\eta(A) \subseteq I(G)Q$.

Предположим, что $\eta(A) \not\subseteq I(G)Q$. Тогда, так как $Q/I(G)Q$ – тривиальный G -модуль, изоморфный $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, существует такой эпиморфизм $\xi: Q \rightarrow \mathbb{F}_p(G)/I(G)$, что $\xi\eta(A) \neq \{0\}$. В силу проективности Q эпиморфизм ξ поднимается до гомоморфизма $\psi: Q \rightarrow \mathbb{F}_p(G)$. Тогда для $\varphi = \psi\eta$ образ $\varphi(A) \not\subseteq I(G)$ и, следовательно, $\varphi(A) = \mathbb{F}_p(G)$. Это, однако, противоречит свойству (ii) сердцевин A .

Итак, α – автоморфизм модуля M . Докажем, что $\alpha(A) = B$. Сначала заметим, что если $a = b + q \in A$, где $b \in B$, $q \in Q$, то $\eta(a) = \delta_Q(a) = q$. Следовательно, $\alpha(A) \subseteq B$. Отсюда и из прямого разложения $M = \alpha(A) \oplus \alpha(P)$ вытекает, что $B = \alpha(A) \oplus L$, где $L = B \cap \alpha(P)$.

Используя разложение $M = B \oplus Q$, получаем, что $L \oplus Q \cong M/\alpha(A) \cong P$. Таким образом, L – свободный G -модуль. В силу свойства (ii) сердцевин B имеем $L = \{0\}$, т.е. $B = \alpha(A)$.

(1.17) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для G -пространства (T, t^0) подмодуль $\langle \overline{\text{ess}}_G(T) \rangle \cong \mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0)$ является сердцевиной $\mathbb{F}_p(T, t^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения (1.14) достаточно доказать, что не существует эпиморфизма φ модуля $\mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0)$ на свободный G -модуль $\mathbb{F}_p(G)$.

Предположим, что φ – такой эпиморфизм. Так как $\mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0)$ порождается подмножеством $\text{ess}_G(T)$, то $\varphi(t) \notin I(G)$ для некоторой точки t , стабилизатор которой $G_t \neq \{1\}$. Поэтому $g \cdot \varphi(t) = \varphi(g \cdot t) = \varphi(t)$ для некоторого элемента $g \neq 1$. Это, однако, противоречит тому, что $\varphi(t)$ – свободный порождающий G -модуля $\mathbb{F}_p(G)$.

(1.18) Два пермутационных G -модуля $\mathbb{F}_p(T, t^0)$ и $\mathbb{F}_p(V, v^0)$ назовем *подобными*, если $\mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0) \cong \mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(V), v^0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – про- p -группа, M, K – такие G -модули, что $M \oplus P \cong K \oplus Q$ для некоторых свободных G -модулей P и Q . Тогда из пермутационности модуля M следует, что K – пермутационный модуль, подобный M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если $K_0 = \text{core}(K)$, $M_0 = \text{core}(M)$, то $K_0 = \text{core}(K \oplus Q)$ и $M_0 = \text{core}(M \oplus P)$. В силу предположения (1.16) $K_0 \cong M_0$. Если $M = \mathbb{F}_p(T, t^0)$, то из предложения (1.17) следует, что $K \cong \mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_G(T), t^0) \oplus L$, где L – свободный G -модуль. Из пермутационности свободных модулей вытекает теперь пермутационность K . Утверждение о подобии M и K немедленно следует из предложения (1.17).

§ 2. Асферические группы: определение и примеры

(2.1) Пусть G – про- p -группа. Ее *копредставлением* будем называть эпиморфизм $\varphi: F \rightarrow G$, где F – некоторая свободная про- p -группа. Часто мы будем отождествлять G с факторгруппой F/N , где $N = \text{Ker } \varphi$, и записывать копредставление в виде равенства $G = F/N$.

Копредставление $\varphi: F \rightarrow G$ называется *минимальным*, если $N = \text{Ker } \varphi$ содержится в $F^* = F^p[F, F]$. В случае конечно порожденной группы G минимальность φ эквивалентна равенству $\text{rank } F = d(G)$, где $d(G)$ – минимальное число порождающих G , $\text{rank } F$ – ранг свободной про- p -группы F , равный, очевидно, $d(F)$.

Сопряжение в группе F естественным образом превращает факторгруппу $\overline{N} = N/N^*$, где $N^* = N^p[N, N]$, в левый $\mathbb{F}_p(G)$ -модуль. Везде ниже будем называть $\overline{N}$ *модулем соотношений группы G , соответствующим копредставлению φ* .

Так как N^* является подгруппой Фраттини про- p -группы N , то модуль соотношений $\overline{N}$ обладает следующим полезным свойством.

ЛЕММА. Для копредставления $G = F/N$ подмножество $R \subset N$ порождает N как нормальный делитель в F (т.е. является множеством определяющих соотношений G для данного копредставления), если его образ $\overline{R}$ порождает G -модуль $\overline{N}$.

(2.2) ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Про- p -группа G называется *асферической*, если существует такое ее копредставление $G = F/N$, что модуль соотношений $\overline{N}$ является пермутационным G -модулем.

Стоит, вероятно, сразу же отметить, что из доказанной ниже теоремы (2.5) вытекает, что пермутационность одного из модулей соотношений про- p -группы G влечет пермутационность всех ее модулей соотношений.

(2.3) ЛЕММА. Пусть F – свободная про- p -группа с базисом X , $\varphi: F \rightarrow G$ – эпиморфизм, $N = \text{Ker } \varphi$. Тогда существует точная последовательность G -модулей

$$0 \longrightarrow \overline{N} \xrightarrow{\delta} L_X \xrightarrow{\lambda} \mathbb{F}_p(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где L_X – свободный G -модуль с базисом $\{w_x \mid x \in X\}$, $\lambda(w_x) = \varphi(x) - 1$ и для $n \in N$

$$\delta(\overline{n}) = \sum_{x \in X} \varphi \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) w_x.$$

Здесь $\overline{n}$ – образ элемента $n \in N$ в факторгруппе $\overline{N}$, а элементы $\partial n / \partial x \in \mathbb{F}_p(F)$ являются про- p -аналогами производных Фокса [13]. Удобное их определение мы

приведем ниже в доказательстве леммы (2.4). Сейчас же отметим, что отображение $\partial/\partial x$ из группы F в левый F -модуль $\mathbb{F}_p(F)$ можно охарактеризовать как непрерывный скрещенный гомоморфизм, заданный равенствами $\partial x/\partial x = 1$ и $\partial z/\partial x = 1$ для всех $z \in X, z \neq x$.

В дальнейшем на (1) будем ссылаться как на *точную последовательность модуля соотношений* $\overline{N}$ про- p -группы G .

Построение последовательности (1) проводится аналогично описанному в §3.1 [14] для случая дискретных групп. Выделим фрагмент рассуждений, содержащий необходимые в про- p -случае изменения, в виде следующей леммы.

(2.4) Пусть H – подгруппа про- p -группы G . Через $I_G(H)$ обозначим ядро гомоморфизма $\psi: \mathbb{F}_p(G) \rightarrow \mathbb{F}_p(G/H)$ левых G -модулей, индуцированное каноническим отображением G на G/H . Ясно, что $I_G(H) = \mathbb{F}_p(G)I(H)$.

В случае, когда $H \triangleleft G$, левый идеал $I_G(H)$ кольца $\mathbb{F}_p(G)$ является, очевидно, двусторонним. Это позволяет, в частности, получить равенство, $I_G(H) = I(H)\mathbb{F}_p(G)$.

ЛЕММА. Пусть H – подгруппа свободной про- p -группы F , Y – базис H как свободной про- p -группы. Тогда $I_F(H)$ является левым свободным F -модулем с базисом $Y - 1 = \{y - 1 \mid y \in Y\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Рассмотрим сначала случай, когда $H = F$. Воспользуемся хорошо известным изоморфизмом $\gamma: \mathbb{F}_p(F) \rightarrow \mathbb{F}_p[[T]]$, где $\mathbb{F}_p[[T]]$ – кольцо формальных степенных рядов над $\mathbb{F}_p$ от множества $T = \{t_y \mid y \in Y\}$ некоммутирующих переменных (см., например, [4]). По построению $\gamma(y) = 1 + t_y$ для $y \in Y$.

Легко видеть, что идеал $\Delta(T)$, состоящий из рядов без свободного члена, является левым свободным $\mathbb{F}_p[[T]]$ -модулем с базисом T . Так как $\gamma(I(F)) = \Delta(T)$, то F -модуль $I(F)$ также свободен с базисом $Y - 1$.

Обещанное выше явное определение свободных производных элемента $v \in F$ дается разложением

$$v - 1 = \sum_{y \in Y} \frac{\partial v}{\partial y} (y - 1)$$

элемента $v - 1 \in I(F)$ по базису $Y - 1$.

(2) В случае, когда H – произвольная подгруппа F , отметим как следствие части (1) доказательства, что $I(H)$ является свободным H -модулем с базисом $Y - 1$. Рассмотрим $\mathbb{F}_p(F)$ как правый H -модуль. По следствию (1.15.(b)) и лемме (1.4) этот модуль плоский. Поэтому вложение $I(H) \subset \mathbb{F}_p(H)$ индуцирует инъективный гомоморфизм левых F -модулей

$$\chi: \mathbb{F}_p(F) \otimes_H I(H) \rightarrow \mathbb{F}_p(F) \otimes_H \mathbb{F}_p(H) \cong \mathbb{F}_p(F),$$

образ которого совпадает с $\mathbb{F}_p(F)I(H) = I_F(H)$.

Так как модуль слева является, очевидно, свободным с базисом $\{1 \otimes (y - 1) \mid y \in Y\}$, то отсюда получаем, что $Y - 1$ – свободный базис F -модуля $I_F(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (2.3). Факторы цепочки

$$\mathbb{F}_p(F) \supset I(F) \supset I_F(N) \supset I_F(N)I(F)$$

подмодулей левого F -модуля $\mathbb{F}_p(F)$ дают точную последовательность левых F -модулей

$$0 \rightarrow I_F(N)/I_F(N)I(F) \rightarrow I(F)/I_F(N)I(F) \rightarrow \mathbb{F}_p(F)/I_F(N) \rightarrow \mathbb{F}_p(F)/I(F) \rightarrow 0,$$

на которых N действует, очевидно, тривиально.

Докажем, что эта последовательность изоморфна (1) как последовательность G -модулей.

Ясно, что $\mathbb{F}_p(F)/I(F) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и эпиморфизм φ дает изоморфизм $\mathbb{F}_p(F)/I_F(N) \cong \mathbb{F}_p(G)$. По лемме (2.4) $I(F)$ – левый свободный F -модуль с базисом $X - 1$. Поэтому фактормодуль $I(F)/I_F(N)I(F)$ является левым свободным G -модулем, базис которого составляют образы w_x элементов $x - 1 \in X - 1$.

Непосредственные вычисления показывают, что отображение $n \mapsto n - 1$ из подгруппы $N \subseteq F$ в идеал $I_F(N)$ индуцирует гомоморфизм $\beta: \overline{N} \rightarrow I_F(N)/I_F(N)I(F)$ левых G -модулей. Докажем биективность β .

Пусть Y – базис N как свободной про- p -группы. Используя правую версию леммы (2.4), получаем, что $I_F(N)/I_F(N)I(F)$ является (правым) $\mathbb{F}_p$ -модулем, свободным над образом $Y - 1$. Так как $\overline{N}$ – свободный $\mathbb{F}_p$ -модуль с базисом $\bar{Y}$ и β биективно отображает базис на базис, то β – изоморфизм $\mathbb{F}_p$ -модулей.

(2.5) Для фиксированной про- p -группы G рассмотрим класс точных последовательностей левых $\mathbb{F}_p(G)$ -модулей вида

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (2)$$

в которых модули P_0 и P_1 свободны.

Подчеркнем, что все последовательности модулей соотношений группы G принадлежат этому классу.

ТЕОРЕМА. (а) Если для про- p -группы G существует последовательность (2), в которой модуль M пермутационный, то G – асферическая группа.

(б) Если G – асферическая про- p -группа с пермутационным модулем соотношений $\overline{N}$, то в любой последовательности (2) M является пермутационным G -модулем, подобным $\overline{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму Шанюэля (см., например, [15]) к последовательности (2) и к последовательности (1) модуля соотношений $\overline{N}$ группы G . Получим изоморфизм

$$M \oplus Q' \cong \overline{N} \oplus Q'',$$

где $Q' = L_X \oplus P_0$, $Q'' = P_1 \oplus \mathbb{F}_p(G)$ – свободные G -модули. В силу предложения (1.18) G -модули M и $\overline{N}$ одновременно являются пермутационными и как пермутационные подобны. Отсюда, очевидно, вытекает справедливость обоих утверждений теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем будет доказано, что для асферической группы G утверждение о подобии всех пермутационных модулей M , участвующих в последовательностях вида (2), усиливается до утверждения, что их базисные G -пространства по существу изоморфны (см. теорему (3.5.(b))).

(2.6) ТЕОРЕМА. (а) *Класс асферических про- p -групп замкнут относительно образования подгрупп.*

(б) *Каждая про- p -группа G кохомологической размерности $\text{cd } G \leq 2$ является асферической.*

В частности, все свободные про- p -группы асферичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $G = F/N$ – асферическая группа, где $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T, t^0)$ для G -пространства (T, t^0) . Если H – подгруппа G , то $H = L/N$ для свободной про- p -группы L , $N \subseteq L \subseteq F$. Таким образом, $\overline{N}$ – пермутационный модуль соотношений группы H с базисным H -пространством (T, t^0) .

(б) Условие $\text{cd } G \leq 2$ эквивалентно, как известно, существованию свободной (в силу леммы (1.4)) $\mathbb{F}_p(G)$ -резольвенты длины 2 модуля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Эта резольвента дает последовательность G -модулей вида (2) с пермутационным по лемме (1.9) модулем M . Асферичность группы G вытекает теперь из теоремы (2.5).

(2.7) Ввиду утверждения (а) предыдущей теоремы следующую теорему можно рассматривать как описание класса конечных подгрупп асферических про- p -групп.

ТЕОРЕМА. *Конечная p -группа является асферической тогда и только тогда, когда она циклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть G – конечная p -группа. Рассмотрим ее минимальное копредставление $G = F/N$. Так как ранг свободной про- p -группы равен $d(G) < \infty$ и индекс $[F : N] = |G| < \infty$, то $d(N) < \infty$. Поэтому модуль соотношений $\overline{N}$ конечен. Известно (см., например, [14; §11.7]), что минимальный модуль соотношений конечной p -группы прямо неразложим.

Если G – асферическая группа, то по теореме (2.5) конечный модуль $\overline{N}$ является пермутационным. Из его неразложимости получаем в силу следствия (1.11), что $\overline{N} \cong \mathbb{F}_p(G/H)$ для некоторой подгруппы H .

Таким образом, размерность $\overline{N}$ над полем $\mathbb{F}_p$ равна $[G : H] = p^m$, $m \geq 0$. С другой стороны, из формулы Шрейера для ранга свободной подгруппы N группы F следует, что эта размерность равна $(d(G) - 1)p^k + 1$, где $p^k = |G|$, и поэтому не делится на p . Следовательно, $m = 0$ и $d(G) = 1$, т.е. G – циклическая группа.

(2) Циклическая группа G порядка p^n имеет минимальное копредставление $G = \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$. Соответствующий модуль соотношений изоморфен $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и, следовательно, является пермутационным.

(2.8) Следующее утверждение дает, в частности, возможность строить новые асферические группы с помощью некоторых свободных конструкций в классе про- p -групп. Чтобы избежать громоздких топологических построений, приведем его здесь не в максимально возможной общности.

Будем говорить, что (T, t^0) является G -пространством *дискретного типа*, если любая окрестность отмеченной точки t^0 содержит почти все G -орбиты пространства $\overline{\text{ess}}_G(T)$. Это условие эквивалентно, очевидно, тому, что дополнение в пространстве орбит $G \setminus \overline{\text{ess}}_G(T)$ отмеченной точки $G \cdot t^0 = \{t^0\}$ является дискретным подпространством.

ТЕОРЕМА. *Пусть для про- p -группы G существует точная последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p(E, e^0) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}_p(V, v^0) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (3)$$

пермутационных модулей, в которой

- (i) (E, e^0) и (V, v^0) – G -пространства дискретного типа,
- (ii) стабилизаторы G_v точек $v \in V$, $v \neq v^0$, асферичны,
- (iii) стабилизаторы G_e точек $e \in E$, $e \neq e^0$, свободны.

Тогда G – асферическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на идеях, использованных в [16] при доказательстве предложения 6 в § 1.

Применяя к каноническому отображению $\overline{\text{ess}}_G(V)$ на $G \setminus \overline{\text{ess}}_G(V)$ утверждение (а) леммы (1.10) и учитывая лемму (1.5), из предложения (1.14) получаем

$$\mathbb{F}_p(V, v^0) = P \oplus \left(\prod_{\alpha \in A} \mathbb{F}_p(G/H_\alpha) \right),$$

где P – свободный G -модуль, A – дополнение в $G \setminus \overline{\text{ess}}_G(V)$ точки $G \cdot v^0 = \{v^0\}$, H_α – стабилизатор в G какой-либо точки из G -орбиты $\alpha \in A$.

Для каждого $\alpha \in A$ возьмем последовательность

$$0 \rightarrow M_\alpha \rightarrow L_\alpha \rightarrow K_\alpha \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (4)$$

модуля соотношений группы H_α . По условию M_α – пермутационный H_α -модуль. Умножив (4) тензорно над H_α на правый H_α -модуль $\mathbb{F}_p(G)$, получим последовательность левых G -модулей

$$0 \rightarrow \widetilde{M}_\alpha \rightarrow \widetilde{L}_\alpha \rightarrow \widetilde{K}_\alpha \rightarrow \mathbb{F}_p(G/H_\alpha) \rightarrow 0,$$

где $\widetilde{L}_\alpha$ и $\widetilde{K}_\alpha$ свободны, а $\widetilde{M}_\alpha = \mathbb{F}_p(G) \otimes_{H_\alpha} M_\alpha$ – пермутационный в силу леммы (1.12.(а)) G -модуль. Так как по следствию (1.15.(b)) и лемме (1.4) H_α -модуль $\mathbb{F}_p(G)$ плоский, то все полученные последовательности точны.

Возьмем их прямое произведение по всем $\alpha \in A$ и прибавим точную последовательность

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\text{id}} P \longrightarrow 0.$$

Получим точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{L} \rightarrow \widetilde{K} \rightarrow \mathbb{F}_p(V, v^0) \rightarrow 0 \quad (5)$$

со свободными модулями $\widetilde{L}$ и $\widetilde{K}$ и с пермутационным по лемме (1.9) модулем $\widetilde{M}$.

Теперь через B обозначим дополнение в $G \setminus \overline{\text{ess}}_G(E)$ точки $G \cdot e^0 = \{e^0\}$. Пусть F_β – стабилизатор в G какой-либо точки из G -орбиты $\beta \in B$. Так как по условию $\text{cd } F_\beta \leq 1$, то существуют свободные F_β -резольвенты

$$0 \rightarrow I(F_\beta) \rightarrow \mathbb{F}_p(F_\beta) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Повторив проделанные выше построения, используя эти последовательности вместо (4), получим свободную G -резольвенту модуля $\mathbb{F}_p(E, e^0)$

$$0 \rightarrow \widetilde{Q}_1 \rightarrow \widetilde{Q}_0 \rightarrow \mathbb{F}_p(E, e^0) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Стандартным образом (см., например, [17]) поднимем гомоморфизм φ из последовательности (3) G -модулей до морфизма $\Phi = (\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0)$ комплекса (6) в комплекс (5); здесь $\varphi_2 = 0$. Конус этого морфизма Φ (см. [17]) дает точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \tilde{M} \oplus \tilde{Q}_1 \rightarrow \tilde{L} \oplus \tilde{Q}_0 \rightarrow \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

в которой модули $\tilde{K}$ и $\tilde{L} \oplus \tilde{Q}_0$ свободны, а $\tilde{M} \oplus \tilde{Q}_1$ – пермутационный G -модуль. Применяя теорему (2.5), заключаем, что G – асферическая группа.

(2.9) Применим предыдущую теорему для доказательства асферичности простейших свободных конструкций.

Свободное амальгамированное про- p -произведение $G = H *_A K$ нам удобно будет считать факторгруппой L/M , $L = H * K$ – свободное про- p -произведение, M – нормальная подгруппа в L , порожденная элементами $a^{-1}\beta(a)$, где a пробегает подгруппу $A \leq H$, β – изоморфизм A на подгруппу $B \leq K$. Аналогично, HNN-расширение понимаем как факторгруппу L/M , $L = H * \langle t \rangle$, $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_p$, а нормальная подгруппа M порождена элементами $tat^{-1}\beta(a)^{-1}$, где $a \in A \leq H$, β – изоморфизм A на подгруппу $B \leq H$.

Условимся говорить, что про- p -группа G является *амальгамированным произведением* (или *HNN-расширением*) своих подгрупп, если канонический эпиморфизм группы L на G инъективно отображает H и K в G . Заметим, что, как показано в [18], эта инъективность не всегда (в отличие от случая дискретных групп) имеет место.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – амальгамированное свободное про- p -произведение своих асферических подгрупп H и K или HNN-расширение асферической подгруппы H . Тогда G – асферическая про- p -группа при условии, что объединяемая подгруппа A или ассоциированные подгруппы A, B (в случае HNN-расширения) являются свободными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях G – фундаментальная про- p -группа конечного графа групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$. Граф Γ состоит из одного ребра e и либо двух вершин v, w , либо (в случае HNN-расширения) одной вершины v ; при этом $\mathcal{G}(e) = A$, $\mathcal{G}(v) = H$, $\mathcal{G}(w) = K$. В предложении (3.8) статьи [7] построено стандартное про- p -дерево $S = S(\mathcal{G}, \Gamma)$ с действием G на нем. Соответствующий цепной комплекс над $\mathbb{F}_p$ дает точную последовательность (3) с G -пространствами $E = G/A$ и $V = (G/H) \cup (G/K)$ или $V = G/H$ (см. нижнюю строку диаграммы из доказательства (3.8) в [7]). Ясно, что условия теоремы (2.8) выполнены.

(2.10) Из предыдущего следствия вытекает, разумеется, асферичность свободного про- p -произведения конечного числа асферических групп. Можно показать, что то же верно для так называемого ограниченного свободного про- p -произведения (определение см., например, в [19]) произвольного множества групп.

В настоящее время автору неизвестно, является ли асферическим произвольное свободное про- p -произведение семейства асферических групп, непрерывно индексированных точками проконечного пространства, введенное в [5] (а также, в иной форме, в [20]).

Тем не менее, в отдельных случаях можно, применяя специальные приемы, установить асферичность свободных про- p -произведений. В качестве примера рассмотрим конструкцию, которую назовем здесь *свободной про- p -степенью* $\star_T H$ группы H над проконечным пространством T .

Проекция $H \times T$ на T определяет непрерывное разбиение $H \times T$ на слои $H_t = \{(h, t) \mid h \in H\}$, которые для всех $t \in T$ можно считать группами, изоморфными H . Непрерывное отображение $\chi: H \times T \rightarrow K$, где K – проконечная группа, будем называть *послойным гомоморфизмом*, если $\chi(h_1 h_2, t) = \chi(h_1, t) \chi(h_2, t)$.

По определению про- p -группа $G = \star_T H$, если существует такой послойный гомоморфизм $\omega: H \times T \rightarrow G$, что для любого послойного гомоморфизма $\chi: H \times T \rightarrow K$, где K – про- p -группа, существует единственный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow K$, обладающей свойством $\varphi \omega = \chi$.

(2.11) СЛЕДСТВИЕ. *Свободная про- p -степень $G = \star_T H$ асферической группы H над проконечным пространством T является асферической группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на том, что группа G изоморфна подгруппе асферической в силу (2.9) группы $W = H * F(T)$, где $F(T)$ – свободная про- p -группа над пространством T в смысле [12].

Через U обозначим нормальную подгруппу в W , порожденную свободным сомножителем H . Несложно проверить, что $U \cong \star_{F(T)} H$ (см., например, [21; лемма 2.3]). Пусть $\omega: H \times F(T) \rightarrow U$ – соответствующий универсальный послойный гомоморфизм. В силу [12] можем считать, что $T \subset F(T)$. Тогда, применяя теорему (1.4) из [5], получаем, что подгруппа U , порожденная подмножеством $\omega(H \times T)$, изоморфна G .

§ 3. Основные свойства асферических групп

(3.1) ТЕОРЕМА. *Пусть G – асферическая про- p -группа, (T, t^0) – такое G -пространство, что для некоторого копредставления $G = F/N$ модуль соотношений $\overline{N}$ изоморфен $\mathbb{F}_p(T, t^0)$. Тогда*

- (a) *стабилизатор G_t произвольной точки $t \in T$, отличной от t^0 , является конечной циклической группой;*
- (b) *если K – конечная подгруппа G , то $K \subseteq G_t$ для некоторой точки $t \neq t^0$ из T ;*
- (c) *$G_t \cap G_s = \{1\}$ для любых отличных от t^0 точек $t \neq s$ из T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность модуля соотношений для $\overline{N}$ дает точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p(T, t^0) \xrightarrow{\delta} P_1 \xrightarrow{\lambda} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

со свободными G -модулями P_0 и P_1 , ранги которых равны 1 и $\text{rank } F$ соответственно.

Образ $t \neq t^0$ при δ является ненулевым элементом из $P_1^{G_t}$. Поэтому в силу следствия (1.15.(b)) и леммы (1.3) группа G_t конечна. Утверждение (a) вытекает теперь из теоремы (2.7).

По той же теореме (2.7) циклической является произвольная конечная подгруппа K группы G . Если $K \neq \{1\}$, то модуль соотношений ее минимального копредставления $K \cong \mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p$ изоморфен $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. С другой стороны, $\overline{N}$ также является модулем соотношений группы K . Из теоремы (2.5.(b)) получаем, что если (T, t^0) рассматривать как K -пространство, то $\mathbb{F}_p(\overline{\text{ess}}_K(T), t^0) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Следовательно, $\overline{\text{ess}}_K(T) = \{t, t^0\}$. Таким образом, в T существует, причем единственная, точка $t \neq t^0$, неподвижная при действии K .

Из существования такой точки t вытекает, что $K \subseteq G_t$. Из утверждения о единственности следует, что если $K = G_t \cap G_s \neq \{1\}$ при $t \neq t^0 \neq s$, то $t = s$.

(3.2) ТЕОРЕМА. Пусть $G = F/N$ – асферическая про- p -группа, модуль соотношений $\overline{N}$ которой является пермутационным с базисным G -пространством $(T, t^0) \subset \overline{N}$. Тогда для каждой точки $t \in T$, $t \neq t^0$, существует такой элемент $r_t \in N$, что

- (а) образ r_t в факторгруппе $\overline{N} = N/N^*$ совпадает с t ;
- (б) стабилизатор G_t точки t равен образу в G централизатора $C_F(r_t)$;
- (в) $r_t = h_t^{q_t}$ для некоторого элемента $h_t \in F$, порождающего подгруппу $C_F(r_t) \cong \mathbb{Z}_p$, и $q_t = |G_t|$.

(3.3) Отложив на время доказательство, покажем, как сформулированная во введении теорема В выводится из двух предыдущих теорем.

Пусть $\{O_i \mid i \in I\}$ – множество всех G -орбит T , отличных от $G \cdot t^0 = \{t^0\}$. Для каждого $i \in I$ выберем точку $t(i) \in O_i$. Через h_i обозначим элемент $h_{t(i)}$ из теоремы (3.2). Пусть S_i – подгруппа в G , порожденная образом элемента h_i , $r_i = h_i^{q_i}$, где $q_i = |S_i|$.

Из теоремы (3.2) следует, что $S_i = G_{t(i)}$. Теперь, учитывая (3.2.(а)), из следствия (1.11) получаем, что для $G \setminus T = I \cup \{*\}$ (где $*$ – $\{t^0\}$) $\overline{N} = \bigoplus_{x \in G \setminus T} A_x$, где A_i – циклический G -подмодуль, порожденный элементом $\bar{r}_i = t(i)$, и существует канонический изоморфизм $A_i \cong \mathbb{F}_p(G/S_i)$, а $A_* = \{0\}$.

Таким образом, утверждения (а) и (б) теоремы В получены. Для доказательства (в) привлекаем теорему (3.1). Из утверждения (б) этой теоремы следует, что $K \subseteq G_t$ для некоторого $t \in T$, $t \neq t^0$. Если $t \in O_i$, то $t = g \cdot t(i)$ и, следовательно, $G_t = gS_i g^{-1}$. Если кроме того $K \subseteq hS_j h^{-1} = G_v$, где $v = h \cdot t(j)$, то $v = t$ по (3.1.(в)). Поэтому $j = i$ и $g^{-1}h \in G_{t(i)} = S_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Стремление придать теореме В традиционную форму привело к некоторой потере информации о строении $\overline{N}$ как пермутационного G -модуля. Эта информация восстанавливается, если дополнить формулировку теоремы В следующим утверждением:

- (д) элементы $r_i \in N$ могут быть выбраны так, что подмножество

$$T = \left(\bigcup_{i \in I} G \cdot \bar{r}_i \right) \cup \{0\}$$

замкнуто в G -модуле $\overline{N}$.

(3.4) ЛЕММА. Пусть F – свободная про- p -группа, $N \triangleleft F$, a – элемент из F , образ которого в F/N имеет конечный порядок $q = p^m > 1$. Тогда $a^q \notin N^*$ и, более того, свободная про- p -группа N имеет базис вида $Y = \{a^q, a^k y_j a^{-k} \mid j \in J, 0 \leq k \leq q-1\}$ для некоторого множества элементов $y_j \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можем считать, что $F = \langle a, N \rangle$. Так как $a \notin N$, то $a \notin F^*$. Тогда $F/F^* = \langle \beta(a) \rangle \times B$, где β – канонический эпиморфизм F на F/F^* и $B \subseteq \beta(N)$. Это позволяет построить свободный базис F вида $\{a, y_j \mid j \in J\}$, где $y_j \in N$. Нетрудно видеть, что в силу открытости подгруппы N в F для построения свободного базиса группы N можно использовать переписывающий процесс Рейдемейстера–Шрейера. Для системы представителей $\{a^k \mid 0 \leq k \leq q-1\}$ он приводит к множеству Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (3.2). Так как нам будет важна G -модульная структура $\overline{N}$, условимся записывать аддитивно эту факторгруппу мультипликативной группы N . Пусть $\varphi: F \rightarrow G$ и $\beta: N \rightarrow \overline{N}$ – канонические эпиморфизмы.

Если для $t \in T$, $t \neq t^0$, стабилизатор $G_t = \{1\}$, то в качестве $h_t = r_t$ можем взять произвольный прообраз при β элемента $t \in \overline{N}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q = |G_t| > 1$.

Пусть a – такой элемент из F , что $G_t = \langle \varphi(a) \rangle$. Нужный в теореме элемент h_t построим в виде $h = na^k$, где $n \in N$, $1 \leq k \leq p-1$.

Из леммы (3.4) следует, что $\overline{N}$, рассматриваемый как G_t -модуль, имеет вид $\overline{N} = \langle b \rangle \oplus W$, где $b = \beta(a^q)$, W – свободный G_t -модуль. Пусть элемент $t \in \overline{N}$ представляется в виде $t = c + v$, где $c = kb$ для $0 \leq k \leq p-1$, $v \in W$. Тогда из $t \in \overline{N}^{G_t}$, $c \in \overline{N}^{G_t}$ следует, что $v \in \overline{N}^{G_t}$. Поэтому v не содержится ни в каком свободном базисе G_t -модуля W и, следовательно, $v \in I(G_t)W$.

В частности, $v \in I(G)\overline{N}$. С другой стороны, из леммы (1.12.(b)) следует, что точка $t \neq t^0$ из T не содержится в $I(G)\overline{N}$. Поэтому $c \neq 0$ и, следовательно, $(k, p) = 1$. Таким образом, положив $d = a^k$, получаем $\beta(d) = c$ и элемент $s = \varphi(d)$ порождает подгруппу G_t .

Далее, нетрудно показать, что фундаментальный идеал $I(G_t)$ циклической p -группы $G_t = \langle s \rangle$ порядка q порождается как $\mathbb{F}_p$ -модуль элементом $1 + s + s^2 + \dots + s^{q-1}$. Следовательно,

$$v = (1 + s + s^2 + \dots + s^{q-1})w$$

для некоторого $w \in W \subset \overline{N}$. Пусть $w = \beta(n)$ для $n \in N$. Положим $h = nd$. Тогда, во-первых, его образ $\varphi(h) = s$ порождает G_t . Во-вторых, элемент $r = h^q$ принадлежит N и может быть представлен в виде

$$r = n(dnd^{-1})(d^2nd^{-2}) \dots (d^{q-1}nd^{-(q-1)})d^q.$$

Следовательно, $\beta(r) = v + c = t$.

Таким образом, осталось только проверить, что $\langle h \rangle = C_F(r)$. Легко показать, что централизатор $C_F(r)$ изоморфен $\mathbb{Z}_p$ (так как он является свободной про- p -группой с нетривиальным центром). Ясно, что $\langle h \rangle \subseteq C_F(r)$ и что из неравенства $\langle h \rangle \neq C_F(r)$ вытекает существование такого $g \in C_F(r)$, что $h = g^p$. Но тогда $G_t = \langle \varphi(h) \rangle$ оказалось бы подгруппой индекса p в подгруппе $K = \langle \varphi(g) \rangle$ группы G , что невозможно в силу утверждений (b) и (c) теоремы (3.1).

(3.5) Используем теорему (3.2) для получения дополнительной информации о базисных G -пространствах модулей соотношений асферических про- p -групп G .

Элементы g_1 и g_2 про- p -группы G будем считать *эквивалентными*, если $\langle g_1 \rangle = \langle g_2 \rangle$. Факторпространство замкнутого в G подмножества

$$G[p] = \{g \in G \mid g^p = 1\}$$

по этому отношению эквивалентности совпадает, очевидно, с факторпространством

$$\mathcal{S}_p(G) = G[p]/\mathbb{F}_p^*$$

по действию $g \mapsto g^\lambda$ (для $\lambda = 1, 2, \dots, p-1$) мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_p$. Иначе, $\mathcal{S}_p(G)$ – пространство подгрупп G порядка не более p , снабженное стандартной топологией.

Сопряжение в группе G превращает пунктированное пространство $(\mathcal{S}_p(G), \{1\})$ в G -пространство.

ТЕОРЕМА. Пусть G – асферическая про- p -группа, (T, t^0) – такое G -пространство, что $\overline{N} \cong \mathbb{F}_p(T, t^0)$ для некоторого копредставления $G = F/N$. Тогда

- (а) подмножество $\text{ess}_G(T)$ замкнуто в T ;
- (б) пунктированные G -пространства $(\text{ess}_G(T), t^0)$ и $(\mathcal{S}_p(G), \{1\})$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E = F/N^*$ и будем считать $\overline{N} = N/N^*$ подгруппой E , содержащей G -подпространство T . При этом отмеченная точка t^0 совпадает с единицей. Канонический эпиморфизм E на факторгруппу $G = E/\overline{N}$ будем обозначать через ψ .

(1) Через $\rho: E \rightarrow E$ обозначим отображение $y \mapsto y^p$. Так как $\rho(E)$ замкнуто в E , то для доказательства утверждения (а) теоремы достаточно установить равенство

$$\text{ess}_G(T) = T \cap \rho(E).$$

Если $y^p = t \in T$ и $t \neq 1$, то $\psi(y) \neq 1$. Ясно, что $\psi(y) \in G_t$ и, следовательно, $t \in \text{ess}_G(T)$. Так как $1 = t^0 \in \text{ess}_G(T)$, то получаем включение $T \cap \rho(E) \subseteq \text{ess}_G(T)$. Обратное включение вытекает из того, что по теореме (3.2) $\text{ess}_G(T) \subseteq \rho(E)$.

(2) Для доказательства утверждения (б) теоремы введем подмножество $S = \rho^{-1}(\text{ess}_G(T))$. Из замкнутости $\text{ess}_G(T)$ в E следует компактность пространства S . Кроме того, $\rho(S) = \text{ess}_G(T)$.

Докажем, что для элементов $s_1, s_2 \in S$ равенство $\rho(s_1) = \rho(s_2)$ эквивалентно равенству $\psi(s_1) = \psi(s_2)$.

Пусть $\psi(s_1) = \psi(s_2) = g$. Если $g = 1$, то $s_i \in \overline{N} = \text{Ker } \psi$ и, следовательно, $s_1^p = 1 = s_2^p$. Если $g \neq 1$, то по лемме (3.4) $t_i = s_i^p \neq 1$, $i = 1, 2$. Так как, очевидно, $g \in G_{t_1} \cap G_{t_2}$, то равенство $t_1 = t_2$ вытекает из теоремы (3.1.(с)).

Предположим теперь, что $s_1^p = s_2^p = t \in T$. Если $t = t_0 = 1$, то по лемме (3.4) $s_i \in \overline{N}$, $i = 1, 2$, и, следовательно, $\psi(s_1) = 1 = \psi(s_2)$. Если $t \neq 1$, то $\psi(s_1)$ и $\psi(s_2)$ являются элементами порядка p , содержащимися в стабилизаторе G_t . Так как $t \neq t^0$, то в силу теоремы (3.1.(а)) G_t – циклическая p -группа. Следовательно, $s_2 = s_1^k n$, где $1 \leq k \leq p-1$, $n \in \overline{N} = \text{Ker } \psi$. Покажем, что $k = 1$.

Через η обозначим канонический эпиморфизм E на $E/[E, \overline{N}]$. Используя в нужном месте центральность подгруппы $\eta(\overline{N})$ в группе $\eta(E)$, получаем следующую цепочку равенств:

$$\eta(s_2^p) = \eta(s_1^k n)^p = \eta(s_1^k)^p \eta(n)^p = \eta(s_1^p)^k.$$

Замечаем теперь, что в модульных обозначениях $\eta(\overline{N}) = \overline{N}/I(G)\overline{N}$. Поэтому в силу леммы (1.12.(b)) $\eta(\overline{N})$ является свободным $\mathbb{F}_p$ -модулем над пространством $(\eta(T), \eta(t^0))$. Отсюда, очевидно, следует, что для $t \neq t^0$ полученное выше равенство $\eta(t) = \eta(t)^k$ возможно только при $k = 1$.

(3) Из доказанного выше утверждения следует, что пространства $\text{ess}_G(T) = \rho(S)$ и $\psi(S) \subseteq G[p]$ гомеоморфны одному и тому же факторпространству компактного пространства S . Явно гомеоморфизм

$$\beta: \text{ess}_G(T) \rightarrow \psi(S)$$

задается равенством $\beta(t) = \psi(s)$, где $s \in S$ и $s^p = t$.

Покажем теперь, что каноническая сюръекция $\gamma: G[p] \rightarrow \mathcal{S}_p(G)$ биективно отображает $\psi(S)$ на $\mathcal{S}_p(G)$.

Ясно, что $\gamma^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ и $1 \in \psi(S)$. Если $\langle g \rangle \in \mathcal{S}_p(G)$ имеет порядок p , то по теореме (3.1) существует точка $t \neq t^0$ из $\text{ess}_G(T)$, для которой $\langle g \rangle \subseteq G_t$. Пусть s — такой элемент из S , что $\beta(t) = \psi(s)$. Тогда $\psi(s)$ — элемент порядка p в циклической группе G_t и, следовательно, $\langle \psi(s) \rangle = \langle g \rangle$, т.е. $\gamma(\psi(s)) = \langle g \rangle$.

Предположим, что $\gamma(\psi(s_1)) = \langle g \rangle$. Тогда $1 \neq \psi(s_1) \in G_t \cap G_{t_1}$, где $t_1 = s_1^p$. По теореме (3.1.(c)) $t_1 = t$. Следовательно, $\psi(s_1) = \beta(t_1) = \beta(t) = \psi(s)$.

(4) Осталось лишь проверить, что гомеоморфизм $\gamma\beta$ является G -отображением пространства $(\text{ess}_G(T), t^0)$ на пространство $(\mathcal{S}_p(G), \{1\})$. Пусть $h = \psi(w) \in G$, $t = s^p \in \text{ess}_G(T)$ для некоторых $w \in E$, $s \in S$. Тогда $h \cdot t = wtw^{-1} = (ws w^{-1})^p$ и $h\langle \psi(s) \rangle h^{-1} = \langle \psi(wsw^{-1}) \rangle$.

(3.6) Приведем одно следствие из теоремы (3.1), которое дает обратное к теореме (2.6.(b)) утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Если G — асферическая про- p -группа без кручения, то $\text{cd } G \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = F/N$ — копредставление с пермутационным модулем $\overline{N} = (T, t^0)$. По теореме (3.1.(a)) стабилизаторы всех точек $t \neq t^0$ из T тривиальны, т.е. $\text{ess}_G(T) = \{t^0\}$. Тогда из предложения (1.14) следует, что $\overline{N}$ — свободный G -модуль. Поэтому последовательность модуля соотношений является свободной G -резольвентой длины 2 модуля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, откуда $\text{cd } G \leq 2$.

(3.7) Следующая теорема дает характеристику в терминах модулей соотношений класса асферических про- p -групп G , имеющих виртуальную когомологическую размерность $\text{vcd } G \leq 2$.

Будем говорить, что G -пространство (T, t^0) имеет *компактный тип*, если отмеченная точка t^0 является изолированной в подпространстве $\overline{\text{ess}}_G(T)$.

ТЕОРЕМА. Пусть G — асферическая про- p -группа с модулем соотношений $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T, t^0)$. Группа G тогда и только тогда содержит открытую подгруппу H когомологической размерности $\text{cd } H \leq 2$, когда (T, t^0) является G -пространством компактного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся гомеоморфизмом пунктированных пространств

$$\beta: (\text{ess}_G(T), t^0) \rightarrow (\psi(S), 1)$$

из доказательства теоремы (3.5). Если точка t^0 изолирована в $\text{ess}_G(T)$, то $\{1\}$ – открытое подмножество в $\psi(S)$. Следовательно, $\psi(S) \cap H = \{1\}$ для некоторой открытой подгруппы H группы G . Предположим, что существует элемент $g \in H$ порядка p . Тогда, как показано в части (3) доказательства теоремы (3.5), $\langle g \rangle = \langle \psi(s) \rangle$ для некоторого $s \in S$. Ясно, что $1 \neq \psi(s) \in H$.

Из полученного противоречия следует, что асферическая группа H не имеет кручения. Поэтому в силу следствия (3.6) $\text{cd } H \leq 2$.

Обратно, пусть H – открытая подгруппа G без кручения. Так как $\psi(S) \subseteq G[p]$, то $H \cap \psi(S) = \{1\}$. Поэтому подмножество $\{1\}$ открыто в $\psi(S)$, что эквивалентно изолированности t^0 в T .

(3.8) Теорема А, сформулированная во введении, является, в сущности, лишь переформулировкой теоремы (3.7).

В самом деле, если для копредставления $G = F/N$ модуль $\overline{N} = \mathbb{F}_p(S)$, где S – не пунктированное G -пространство, то $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T, t^0)$, где $T = S \cup \{t^0\}$ с изолированной отмеченной точкой t^0 . Обратно, предположим, что $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T, t^0)$ и точка t^0 изолирована в $\text{ess}_G(T)$. Тогда $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T', t^0)$, где T' – G -пространство из следствия (1.15. (а)). Из его описания следует, что точка t^0 изолирована во всем T' . Поэтому $\overline{N} \cong \mathbb{F}_p(S)$ для $S = T' - \{t^0\}$.

§4. Разрешимые нормальные подгруппы и центр

В этом параграфе исследуется структура асферической группы G с абелевой нормальной подгруппой $A \neq \{1\}$. Группа A обязана быть изоморфной одной из групп $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (см. следствие (4.2)). Наибольший интерес представляет случай $A \cong \mathbb{Z}_p$, рассматриваемый в теореме (4.5); в остальных случаях группа G оказывается разрешимой (предложение (4.1) и теорема (4.4)). Особо хотелось бы отметить утверждение (b) теоремы (4.5) о локальном строении группы G . Ситуация теоремы (4.5) возникает в теореме (4.6) о центре и теореме (4.9) о разрешимом радикале асферических групп.

(4.1) Следующее утверждение является фактически переформулировкой полученных в §3 результатов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть K – нетривиальная конечная подгруппа асферической про- p -группы G . Тогда ее нормализатор $N_G(K) \cong \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по (2.6. (а)) группа $N_G(K)$ также асферична, то без ограничения общности можно считать, что $K \triangleleft G$.

Пусть $\overline{N} = \mathbb{F}_p(T, t^0)$ – пермутационный модуль соотношений группы G . По предложению (3.1) $K \subseteq G_t$ для некоторого $t \neq t^0$ из T . Тогда нормальность K в группе G дает, что $G_t \cap gG_tg^{-1} \supseteq K \neq \{1\}$ для произвольного $g \in G$. Так как $gG_tg^{-1} = G_s$, где $s = g \cdot t$, то вновь по (3.1) $g \cdot t = t$. Таким образом, $G = G_t \cong \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.

(4.2) СЛЕДСТВИЕ. *Абелева про- p -группа является асферической тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих групп: $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в абелевой про- p -группе G существует элемент $g \neq 1$ конечного порядка, то предыдущее предложение, примененное к подгруппе $K = \langle g \rangle$, дает $G \cong \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.

Если G без кручения, то, как хорошо известно, $G \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}_p$. При этом $\text{cd } G = |I|$ (см., например, [22]). Поэтому в силу следствия (3.6) из асферичности G вытекает, что $|I| \leq 2$.

(4.3) ЛЕММА. *Пусть G – бесконечная асферическая про- p -группа, содержащая абелеву нормальную подгруппу $A \neq \{1\}$. Тогда в G существует такая открытая нормальная подгруппа G_1 без кручения, содержащая централизатор $C_G(A)$, что факторгруппа $G_1/C_G(A)$ не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения (4.1) бесконечность G влечет бесконечность A . Пусть $1 \neq g \in C_G(A)$ и $K = \langle g \rangle$. Тогда из $A \subseteq N_G(K)$ следует, что $|K| = \infty$. Таким образом, $C_G(A)$ – группа без кручения.

Факторгруппа $G/C_G(A)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } A$. По следствию (4.2) группа A изоморфна либо $\mathbb{Z}_p$, либо $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Поэтому $\text{Aut } A$ изоморфна либо мультипликативной группе $\mathbb{Z}_p^*$ кольца целых p -адических чисел, либо группе $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$. Так как обе эти группы почти без кручения, то в $G/C_G(A)$ также существует подгруппа $G_1/C_G(A)$ без кручения конечного индекса.

(4.4) ТЕОРЕМА. *Пусть в асферической про- p -группе G содержится нормальная подгруппа A , изоморфная $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Тогда*

- (а) *подгруппа A открыта в G (в частности, G – разрешимая группа);*
- (б) *централизатор $C_G(A)$ изоморфен $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, совпадает со своим централизатором в G и является наибольшей нормальной абелевой подгруппой G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть G_1 – открытая подгруппа без кручения из леммы (4.3). Построим такую открытую подгруппу $H \subseteq G_1$, что $A \subseteq H$ и $H^* \cap A = A^p$.

Так как индекс $[A : A^p]$ конечен, то существует такая открытая нормальная подгруппа U группы G_1 , что $U \cap A \subseteq A^p$. Положим $H = \psi^{-1}(\psi(A)) = AU$, где ψ – канонический эпиморфизм G_1 на G_1/U .

(2) Докажем равенство $H = A$, из которого будет следовать открытость A в группе G .

Предположим, что существует элемент $g \in H$, не принадлежащий A . Так как $H \subseteq G_1$, то $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_p$. Если $\langle g \rangle \cap A = \{1\}$, то подгруппа $\langle g, A \rangle$ изоморфна $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \rtimes \mathbb{Z}_p$ и имеет поэтому когомологическую размерность 3 (см. [22; гл. I, предложение 22]), что невозможно ввиду следствия (3.6). Поэтому образ g в факторгруппе G_1/A имеет конечный порядок p^m , $m \geq 1$. В силу того, что по лемме (4.3) $G_1/C_G(A)$ – группа без кручения, $g \in C_G(A)$.

Положим $h = g^{p^{m-1}}$. Тогда $h^p \in H^* \cap A = A^p$ и, следовательно, $h^p = d^p$ для некоторого $d \in A$. Так как $h \notin A$, то элемент $v = h^{-1}d$ из $C_G(A)$ нетривиален. С другой стороны, $v^p = h^{-p}d^p = 1$. Получили противоречие с тем, что по лемме (4.3) группа $C_G(A)$ не имеет кручения.

(3) Доказанная выше конечность индекса $[G : A]$ означает, что $C_G(A)$ – группа, центр которой имеет конечный индекс. По известной теореме Шура это влечет конечность ее коммутанта K . В силу леммы (4.3) $K = \{1\}$. Таким образом, $C_G(A)$ – абелева асферическая про- p -группа, содержащая подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. По следствию (4.2) $C_G(A) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Теперь мы можем повторить все проведенные выше рассуждения для нормальной подгруппы $C_G(A)$ вместо A и получить, что $C_G C_G(A) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Поэтому равенство $C_G C_G(A) = C_G(A)$ получится как следствие того факта, что $C_G(A)$ – наибольшая абелева нормальная подгруппа в G . Докажем это.

(4) Пусть B – произвольная абелева нормальная подгруппа G . Докажем, что подгруппа $D = C_G(A) \cdot B$ абелева.

Предположим, что $B \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Из открытости A в G следует, что $A_0 = A \cap B$ изоморфна $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Тогда, как показано выше, $C_G(A_0)$ – абелева группа и $D \subseteq C_G(A_0)$.

Если $B = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_p$, то из открытости A в G следует, что $b^{p^m} \in A$ для некоторого $m \geq 0$. Пусть $g \in C_G(A)$. Так как $B \triangleleft G$, то $gbg^{-1} = b^\xi$ для некоторого $\xi \in \mathbb{Z}_p^*$. Тогда $b^{p^m} = gb^{p^m}g^{-1} = (b^{p^m})^\xi$ и, следовательно, $\xi = 1$. Таким образом, абелевы подгруппы B и $C_G(A)$ поэлементно коммутируют и, следовательно, D абелева.

Теперь из абелевости D и включения $A \subseteq C_G(A) \subseteq D$ следует, что $D \subseteq C_G(A)$. Таким образом, $C_G(A)$ содержит произвольную абелеву нормальную подгруппу B , что и требовалось доказать.

(4.5) ТЕОРЕМА. Пусть в асферической про- p -группе G содержится нормальная подгруппа A , изоморфная $\mathbb{Z}_p$. Тогда

- (а) существует содержащая A подгруппа G_1 без кручения индекса $[G : G_1] \leq 2$;
- (б) в G содержится нормальная подгруппа H конечного индекса, являющаяся полупрямым произведением $H = A \rtimes W$, где W – свободная про- p -группа;
- (с) если G без кручения, то

$$d(G) = r(G) + 1, \quad (1)$$

где $d(G)$ и $r(G)$ – минимальные числа порождающих группы G и соответственно ее определяющих соотношений.

Доказательство теоремы отложим до конца параграфа. Сейчас сделаем несколько замечаний о ее формулировке.

(1) При $p \neq 2$ утверждение (а) означает, что сама G является группой без кручения.

(2) В утверждении (б) не исключается случай $W = \{1\}$, т.е. случай, когда $\text{rank } W = 0$. Кроме того произвольное полупрямое произведение $\mathbb{Z}_p \rtimes W$ является асферической про- p -группой (так как $\text{cd}(\mathbb{Z}_p \rtimes W) \leq 2$).

(3) Согласно [22] числа $d(G)$ и $r(G)$ равны размерностям $\dim H^q(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ над полем $\mathbb{F}_p$ при $q = 1$ и $q = 2$ соответственно. Поэтому равенство (1) в теореме следует понимать как равенство кардинальных чисел.

(4.6) Предыдущую теорему можно рассматривать как обобщение про- p -аналога теоремы Мурасути о дискретных группах с одним определяющим соотношением, содержащегося в утверждениях (а) и (с) следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Если G – неабелева асферическая про- p -группа с нетривиальным центром $Z(G)$, то

- (а) $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p$ и группа G не имеет кручения;
- (б) в G содержится нормальная подгруппа конечного индекса $H = Z(G) \times W$, где W – свободная про- p -группа и $\text{rank } W \geq 1$;
- (с) $d(G) = r(G) + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В утверждении (б) $\text{rank } W = 1$ только в одном случае: $p = 2$ и G – разрешимая про-2-группа с заданием

$$G = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

При этом $Z(G) = \langle b^2 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы (4.3) следует, что G – группа без кручения. Следствие (4.2) и теорема (4.4) при $A = Z(G)$ показывают, что из неабелевости группы G вытекает изоморфизм $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p$.

Теперь применение теоремы (4.5) дает утверждения (с) и (б) за исключением неравенства $\text{rank } W \geq 1$. Его справедливость вытекает из следующей ниже леммы (4.7), согласно которой $G \cong \mathbb{Z}_p$, если $W = \{1\}$.

Что касается замечания, то оно является следствием разрешимости G при $W \cong \mathbb{Z}_p$ и доказываемого далее предложения (4.8.(б)).

(4.7) ЛЕММА. Пусть про- p -группа G содержит открытую нормальную подгруппу $A \cong \mathbb{Z}_p$. Тогда для наибольшей конечной нормальной подгруппы K группы G либо $G/K \cong \mathbb{Z}_p$, либо $p = 2$ и G/K изоморфна бесконечной диэдральной про-2-группе

$$\mathbb{D}(2^\infty) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование K вытекает из того, что порядки конечных подгрупп в G ограничены сверху порядком $|G/A| < \infty$. Профакторизовав по K , будем в дальнейшем считать, что в G не существует нетривиальных конечных нормальных подгрупп.

Предположим, что G не изоморфна $\mathbb{Z}_p$ и что A – максимальная среди изоморфных $\mathbb{Z}_p$ открытых нормальных подгрупп G . Из $[G : A] < \infty$ вытекает конечность индекса центра группы $C_G(A)$. Тогда по теореме Шура коммутант группы $C_G(A)$ является конечной нормальной в G подгруппой и, следовательно, тривиален. Таким образом, $C_G(A)$ – конечно порожденная абелева про- p -группа. Поэтому ее периодическая часть конечна и инвариантна в G и, следовательно, тривиальна. Так как в $C_G(A) \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$ содержится открытая подгруппа $A \cong \mathbb{Z}_p$, то $C_G(A) \cong \mathbb{Z}_p$. Сделанное выше предположение о максимальной A влечет равенство $C_G(A) = A$.

Сопряжение в G дает изоморфизм λ группы G/A на нетривиальную конечную p -подгруппу $\lambda(G/A)$ группы $\mathbb{Z}_p^* \cong \text{Aut } A$. Из строения мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$ кольца $\mathbb{Z}_p$ вытекает, что это возможно, лишь если $p = 2$ и $\lambda(G/A) = \{\pm 1\}$. Поэтому $G = \langle A, g \rangle$, где $g^2 = b \in A$ и $gag^{-1} = a^{-1}$ для любого $a \in A$. Тогда $b = gb g^{-1} = b^{-1}$, откуда $b = 1$. Итак, $G = A \rtimes \langle g \rangle \cong \mathbb{D}(2^\infty)$.

(4.8) Следующее утверждение послужит в дальнейшем базисом для получения полного описания класса разрешимых асферических про- p -групп (см. по этому поводу §5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – неабелева разрешимая асферическая про- p -группа. Тогда

- (а) либо G содержит открытую нормальную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, либо $p = 2$ и $G \cong \mathbb{D}(2^\infty)$;
- (б) если G без кручения, то $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) В разрешимой группе G содержится абелева нормальная подгруппа $A \neq 1$. В силу предложения (4.1) и следствия (4.2) A изоморфна либо $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, либо $\mathbb{Z}_p$. В первом случае по теореме (4.4) сама подгруппа A открыта в G . Во втором случае из теоремы (4.5) вытекает существование открытой подгруппы $H = A \times W$, где W – свободная про- p -группа. В силу разрешимости G $\text{rank } W \leq 1$. Поэтому либо $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, либо $W = \{1\}$ и подгруппа $A \cong \mathbb{Z}_p$ открыта в G . Применяем лемму (4.7) и получаем, учитывая предложение (4.1), что $p = 2$ и $G \cong \mathbb{D}(2^\infty)$.

(б) Пусть G – группа без кручения. Тогда из доказанного уже утверждения (а) вытекает существование в G открытой подгруппы $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Заметим, что H – группа Демушкина ранга $d(H) = 2$ (см. [23]), и воспользуемся следующим набором результатов общего характера.

(i) Класс бесконечных групп Демушкина совпадает с классом групп Пуанкаре размерности 2 (см. [22]).

(ii) Класс групп Пуанкаре фиксированной размерности замкнут относительно перехода к конечным расширениям без кручения (см. [22; дополнение к гл. I]).

(iii) Эйлеровы характеристики группы G и ее открытой подгруппы H связаны соотношением $\chi(H) = \chi(G)[G : H]$ (см. [16]). При этом $\chi(G) = 2 - d(G)$, если G – группа Демушкина.

В результате получаем, что G – группа Демушкина ранга 2. В силу [23] $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

(4.9) ТЕОРЕМА. (а) Каждая асферическая про- p -группа G обладает разрешимым радикалом $R(G)$.

(б) Если асферическая про- p -группа G с нетривиальным радикалом $R(G)$ не разрешима, то $R(G) \cong \mathbb{Z}_p$ и группа G обладает всеми свойствами из теоремы (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если $|G| < \infty$, то $R(G) = G$. Пусть группа G бесконечна и N – нетривиальная разрешимая нормальная подгруппа в G . Применение леммы (4.3) к последнему нетривиальному члену A ряда коммутантов N дает существование в G открытой нормальной подгруппы G_1 без кручения. В силу предложения (4.1) $|N| = \infty$. Поэтому из предложения (4.8. (б)) следует, что $N_1 = N \cap G_1$ изоморфна $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}_p$. Таким образом, длины ряда коммутантов $\delta(N)$ разрешимых нормальных подгрупп N группы G ограничены сверху числом $2 + \delta(G/G_1)$.

Последнее утверждение позволяет применить к множеству $\mathfrak{M}$ разрешимых нормальных подгрупп G лемму Цорна и доказать существование в $\mathfrak{M}$ максимальных элементов. Пусть M – один из них. Так как $NM \in \mathfrak{M}$ для любого $N \in \mathfrak{M}$, то $N \subseteq M$. Следовательно, $M = R(G)$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G .

(b) Предположим, что $R(G) \neq \{1\}$ и $R(G) \neq G$. Так же, как и в начале доказательства части (a), получаем существование в $R(G)$ открытой подгруппы R_1 , которая нормальна в G и изоморфна $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}_p$.

Предположим, что $R_1 \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. Если $R_1 \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, то по теореме (4.4) R_1 открыта в G и, следовательно, G – разрешимая группа. Таким образом, группа R_1 не абелева. Тогда ее коммутант A является, как легко видеть, изоморфной $\mathbb{Z}_p$ нормальной подгруппой в G . Отсюда в силу теоремы (4.5) вытекает существование в G открытой подгруппы $H = A \rtimes W$, где W – свободная про- p -группа.

Через ρ обозначим проекцию H на W . Так как $H \cap R_1$ открыта в R_1 , то $R_1 \cap H \neq A = \text{Ker } \rho$. Поэтому $\rho(R_1 \cap H)$ является нетривиальной абелевой нормальной подгруппой свободной про- p -группы W . В частности, $\rho(R_1 \cap H) \cong \mathbb{Z}_p$, откуда следует, что $W \cong \mathbb{Z}_p$ (см., например, [24; лемма 2.8]). Вопреки предположению группа G оказывается разрешимой.

Таким образом, $R_1 \cong \mathbb{Z}_p$. В силу леммы (4.7) для доказательства изоморфизма $R(G) \cong \mathbb{Z}_p$ достаточно только исключить случай $p = 2$, $R(G) \cong \mathbb{D}(2^\infty)$.

Предположим, что радикал $R = R(G)$ равен $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong \mathbb{D}(2^\infty)$. Так как $b^2 = 1$, то в силу предложения (4.1) получаем, что подгруппа $C_G(b)$ конечна и что из конечности содержащейся в ней нормальной в G подгруппы $C_G(R)$ вытекает равенство $C_G(R) = \{1\}$.

В результате не разрешимая про-2-группа G оказывается изоморфной подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } R$. Однако легко проверить, что 2-силовская подгруппа группы $\text{Aut } R$, где $R \cong \mathbb{D}(2^\infty)$, является разрешимой. В самом деле, коммутант $B = [R, R]$ равен $\langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ и открыт в R . Поэтому для стандартного гомоморфизма α группы $\text{Aut } R$ в $\text{Aut } B \times \text{Aut}(R/B)$ образ $\alpha(S)$ – разрешимая группа, а ядро $\text{Ker } \alpha$, очевидно, абелево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (4.5). (a) Согласно лемме (4.3) централизатор $C_G(A)$ не имеет кручения. Факторгруппа $G/C_G(A)$ изоморфна про- p -подгруппе группы $\text{Aut } A \cong \mathbb{Z}_p^*$. Как известно, $\mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ при $p \neq 2$ и $\mathbb{Z}_2^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Поэтому либо $G/C_G(A)$ без кручения, либо $p = 2$ и в $G/C_G(A)$ содержится подгруппа $G_1/C_G(A)$ без кручения индекса 2.

(b) (1) В силу утверждения (a) можно без ограничения общности считать, что G – группа без кручения. Так же, как в начале доказательства теоремы (4.4), строим такую открытую нормальную в G подгруппу H , что $A \subseteq H$ и $H^* \cap A = A^p$, где $H^* = H^p[H, H]$. Поэтому мы можем выбрать в H минимальную систему порождающих $\{a, b_y \mid y \in Y\}$, где $\langle a \rangle = A$.

Пусть F – свободная про- p -группа с базисом $X = \{z\} \cup Y$. Минимальное копредставление $\varphi: F \rightarrow H$ зададим равенствами $\varphi(z) = a$, $\varphi(y) = b_y$ для $y \in Y$. Положим $V = \langle Y \rangle$, $B = \varphi(V)$ и обозначим через ψ ограничение $\varphi|_V$. По построению $\alpha(B) = H/A$, где α – канонический эпиморфизм H на H/A . Так как V – свободная про- p -группа с базисом Y , то гомоморфизм $\tau = \alpha\psi$ группы V на H/A является копредставлением H/A . Обозначим $K = \text{Ker } \tau$.

Нашей целью является доказательство того, что модуль соотношений $\overline{K}$ построенного копредставления является свободным H/A -модулем.

После этого можно будет, рассматривая последовательность модуля соотношений $\overline{K}$ как $\mathbb{F}_p(H/A)$ -свободную резольвенту модуля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, утверждать, что $\text{cd}(H/A) \leq 2$. Тогда из предложения 22 [22; гл. I] вытекает равенство

$1 + \text{cd}(H/A) = \text{cd } H \leq 2$, откуда $\text{cd}(H/A) \leq 1$. Таким образом, H/A – свободная про- p -группа и, следовательно, $H = A \rtimes W$, где $W \cong H/A$.

(2) Рассмотрим соответствующую копредставлению $\varphi: F \rightarrow H$ последовательность модуля соотношений (см. лемму (2.3))

$$0 \longrightarrow \overline{N} \xrightarrow{\delta} L_X \xrightarrow{\lambda} \mathbb{F}_p(H) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (2)$$

Здесь $N = \text{Ker } \varphi$, L_X – свободный H -модуль с базисом $\{w_x \mid x \in X\}$. Так как $\text{cd } H \leq 2$ по следствию (3.6), то (2) является свободной H -резольвентой модуля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

В силу следствия (1.15) последовательность (2) можно рассматривать как свободную A -резольвенту $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогда из $\text{cd } A = 1$ следует, что $\text{Ker } \varepsilon$ – свободный A -модуль. Поэтому $L_X = \text{Im } \delta \oplus D$ для некоторого A -подмодуля D . Следовательно,

$$I(A)L_X = I(A) \text{Im } \delta \oplus I(A)D,$$

откуда

$$\text{Im } \delta \cap I(A)L_X = I(A) \text{Im } \delta. \quad (3)$$

Обозначим $L'_X = L_X / I(A)L_X$. Так как $A \triangleleft H$, то канонический эпиморфизм $\beta: L_X \rightarrow L'_X$ является H -модульным и из (3) следует, что

$$\beta(\text{Im } \delta) \cong \overline{N} / I(A)\overline{N}.$$

Этот изоморфизм будем рассматривать как изоморфизм H/A -модулей. Из свободы H -модуля $\overline{N}$ вытекает свобода $\overline{N} / I(A)\overline{N}$ как H/A -модуля. Таким образом, $\beta(\text{Im } \delta)$ – свободный H/A -подмодуль в L'_X .

(3) Заметим, что L'_X является свободным H/A -модулем с базисом $\{w'_x \mid x \in X\}$, где $w'_x = \beta(w_x)$. Отображение β в выбранных базисах явно задается следующим образом:

$$\beta\left(\sum_{x \in X} \eta_x w_x\right) = \sum_{x \in X} \alpha(\eta_x) w'_x.$$

Если $B \cap A = \{1\}$, то $H = A \rtimes B$, откуда $\text{cd}(H/A) \leq \text{cd } H \leq 2$. Повторив рассуждения, приведенные в конце части (1) доказательства, получим, что B – свободная про- p -группа. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $B \cap A = \langle d \rangle$, где $d = a^{p^m}$. Отметим, что здесь $m \geq 1$, так как A не содержится в $B = \langle b_y \mid y \in Y \rangle$.

Выберем теперь такой элемент $v \in V$, что $\psi(v) = d$. Естественная факторизация

$$\varphi: F = \langle z \rangle * V \rightarrow A * B \rightarrow A \rtimes B \rightarrow H$$

гомоморфизма φ показывает, что $N = \text{Ker } \varphi$ порождается как нормальная подгруппа в F множеством

$$R = \text{Ker } \psi \cup \{vz^{-p^m}\} \cup \{yzy^{-1}s_y^{-1} \mid y \in Y\},$$

где s_y — элемент из $\langle z \rangle$, для которого $\varphi(s_y) = b_y a b_y^{-1}$. Поэтому из описания гомоморфизма δ в лемме (2.3) следует, что подмодуль $\beta(\text{Im } \delta)$ порождается в L'_X элементами

$$\beta\delta(\bar{r}) = \sum_{x \in X} \alpha\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) w'_x,$$

где r пробегает R .

(4) Представим $L_X = L_z \oplus L_Y$, где $L_z = \mathbb{F}_p(H)w_z$, $L_Y = \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{F}_p(H)w_y$. Тогда $L'_X = \beta(L_z) \oplus \beta(L_Y)$.

Если $r \in \text{Ker } \psi \subseteq V$, то $\partial r / \partial z = 0$ и $\partial r / \partial y \in \mathbb{F}_p(V)$. Следовательно, элементы

$$\xi_r = \beta\delta(\bar{r}) = \sum_{y \in Y} \tau\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) w'_y \quad (4)$$

принадлежат $\beta(L_Y)$.

Если $r = vz^{-p^m}$, то $\varphi(\partial r / \partial z) = -\varphi(v)a^{-p^m}\sigma$, где $\sigma = 1 + a + a^2 + \dots + a^{p^m-1}$. Из $m \geq 1$ вытекает, что $\sigma \in I(A) \subseteq \text{Ker } \alpha$ и, следовательно, $\alpha\varphi(\partial r / \partial z) = 0$. Так как $\partial r / \partial y = \partial v / \partial y \in \mathbb{F}_p(V)$, элемент

$$\zeta = \beta\delta(\bar{r}) = \sum_{y \in Y} \tau\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) w'_y \quad (5)$$

также принадлежит $\beta(L_Y)$.

Если $r = uzu^{-1}s_u^{-1}$ для некоторого $u \in Y$, то $\partial r / \partial y = 0$ для всех $u \neq y \in Y$. Далее, $\varphi(\partial r / \partial u) = \varphi(1 - uzu^{-1}) = 1 - b_u a b_u^{-1} \in I(A) \subseteq \text{Ker } \alpha$. Таким образом, $\beta\delta(\bar{r}) \in \beta(L_z)$.

Из проведенных выше вычислений следует, что $\beta(\text{Im } \delta) = M_z \oplus M_Y$, где $M_z \subseteq \beta(L_z)$, $M_Y \subseteq \beta(L_Y)$. Поэтому из доказанной в части (2) свободы H/A -модуля $\beta(\text{Im } \delta)$ вытекает свобода модуля M_Y .

(5) Теперь, вновь воспользовавшись леммой (2.3), построим последовательность модуля соотношений, соответствующую копредставлению $\tau: V \rightarrow H/A$. Участвующий в этой последовательности свободный H/A -модуль L'_Y с базисом $\{w'_y \mid y \in Y\}$ можно отождествить с модулем $\beta(L_Y)$.

Из формул (4) и (5) следует, что при этом отождествлении подмодуль M_Y , порожденный элементами ζ и ξ_r , $r \in \text{Ker } \psi$, переходит в подмодуль $\text{Im } \delta'$ модуля L'_X , который изоморфен модулю соотношений $\bar{K}$. В самом деле, нормальная подгруппа $K = \psi^{-1}(B \cap A)$ группы V порождена подмножеством $\{v\} \cup \text{Ker } \psi$.

Таким образом, $\bar{K} \cong M_Y$ — свободный H/A -модуль, что и требовалось доказать.

(с) Установим сначала справедливость равенства $d(H) = r(H) + 1$ для открытой в G подгруппы $H = A \rtimes W$ из утверждения (b) теоремы.

Очевидно, что $d(H) = d(W) + 1$. Далее, $H^2(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H^1(W, H^1(A, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \cong H^1(W, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (см., например, [22; гл. I, п. 3.3]), откуда $r(H) = d(W)$.

Для переноса этого равенства на группу G рассмотрим два случая.

(1) Числа $d(G)$ и $r(G)$ конечны. Так как по следствию (3.6) $\text{cd } G \leq 2$, то эйлерова характеристика $\chi(G) = 1 - d(G) + r(G)$. Как известно, $\chi(H) = [G : H]\chi(G)$. Поэтому из установленного выше равенства $\chi(H) = 0$ получаем нужное нам $\chi(G) = 0$.

(2) Одно из чисел $d(G)$, $r(G)$ бесконечно. В этом случае воспользуемся следующими неравенствами

$$\begin{aligned} r(G) &\leq r(H) \leq [G : H]r(G), \\ d(G) &\leq d(H) + d(G/H), \quad d(H) \leq [G : H]d(G) \end{aligned}$$

(первое неравенство в силу $\text{cd } G = 2$ вытекает из сюръективности гомоморфизма коограничения $\text{сог}: H^2(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$).

Из двойного неравенства следует, что бесконечность одного из чисел $r(G)$, $r(H)$ влечет равенство $r(G) = r(H)$. Такое же утверждение о числах $d(G)$ и $d(H)$ вытекает из остальных неравенств. Учитывая, что $d(H) = r(H) + 1$, получаем отсюда, что в рассматриваемом случае имеет место равенство $d(G) = r(G)$, эквивалентное требуемому.

(4.10) ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что доказательства всех результатов этого параграфа используют только следующие внутренние свойства асферических про- p -групп G .

(С) Централизатор любого элемента порядка p в группе G является циклической группой.

(D) Когомологическая размерность $\text{cd } H \leq 2$ для любой подгруппы H без кручения группы G .

Более того, из одного свойства (С) про- p -группы G без труда выводится вся информация о кручении в асферических группах, которая дается теоремой (3.1). А именно:

- (а) любая конечная подгруппа G является циклической;
- (б) если K_1 и K_2 — конечные подгруппы G , то из $K_1 \cap K_2 \neq \{1\}$ следует, что либо $K_1 \subseteq K_2$, либо $K_2 \subseteq K_1$;
- (с) если $K \cap gKg^{-1} \neq \{1\}$ для $g \in G$ и конечной подгруппы K , то подгруппа $\langle K, g \rangle$ является циклической.

Поэтому было бы интересно исследовать возникший таким образом класс (CD) -групп и выяснить, насколько он шире класса асферических про- p -групп. В частности, можно поставить следующие вопросы.

1) Справедлива ли для (CD) -групп сформулированная во введении теорема В типа теоремы Линдона о тождествах или даже ее вариант для $\mathbb{Z}_p(G)$ -модуля соотношений $N^{ab} = N/[N, N]$?

(Как отмечалось в пункте (3.3), из утверждения теоремы В не вытекает пермутационность модуля $\overline{N}$.)

2) Можно ли класс (CD) -групп охарактеризовать каким-либо свойством $\mathbb{Z}_p(G)$ -модулей соотношений N^{ab} , близким к пермутационности?

§ 5. О разрешимых асферических про- p -группах

(5.1) Для краткости формулировок введем два рабочих термина. Будем называть про- p -группу *стандартной*, если она изоморфна одной из следующих групп:

- (i) $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$;
- (ii) группе Демушкина $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ ранга 2;
- (iii) в случае $p = 2$ бесконечной диэдральной про-2-группе $\mathbb{D}(2^\infty)$.

Асферичность стандартных про- p -групп вытекает из теорем (2.6), (2.7) и следствия (2.9).

Для малых p зададим порождающими и определяющими соотношениями четыре про- p -группы, которые назовем здесь *специальными*. А именно, про-3-группа

$$E_3(3) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_1 x_2 x_3 = 1 \rangle$$

и про-2-группы

$$\begin{aligned} E_2(2) &= \langle x_1, x_2, y \mid x_1^2 = x_2^2 = x_1 x_2 y^2 = 1 \rangle, \\ E_2(3) &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 = x_2^4 = x_3^4 = x_1 x_2 x_3 = 1 \rangle, \\ E_2(4) &= \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Следствие (2.9) позволяет установить асферичность групп $E_2(j)$, $j = 2, 4$. Строение специальных групп и, в частности, их разрешимость видны из следующего их описания:

$$E_3(3) = \langle a, b \rangle \rtimes \langle c \rangle \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \quad cac^{-1} = b, \quad cbc^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

(это представление получается из исходного с помощью преобразований Титце после замены порождающих по формулам $x_1 = ca$, $x_2 = c$, $x_3 = ca^{-1}c$);

$$\begin{aligned} E_2(2) &= \langle a, b \rangle \rtimes \langle c \rangle \cong (\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \\ bab^{-1} &= a^{-1}, \quad cac^{-1} = a^{-1}, \quad cbc^{-1} = b^{-1}a \end{aligned}$$

(здесь $x_1 = b^{-2}c$, $x_2 = c$, $y = b$);

$$E_2(3) = \langle a, b \rangle \rtimes \langle c \rangle \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}), \quad cac^{-1} = b, \quad cas^{-1} = a^{-1}$$

(здесь $x_1 = ac^2$, $x_2 = c$, $x_3 = ca^{-1}$);

$$E_2(4) = \langle a, b \rangle \rtimes \langle c \rangle \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad cac^{-1} = a^{-1}, \quad cbc^{-1} = b^{-1}$$

(здесь $x_1 = ac$, $x_2 = cb$, $x_3 = c$, $x_4 = (abc)^{-1}$).

(5.2) Анонсируем справедливость следующего описания класса разрешимых асферических про- p -групп.

ТЕОРЕМА. *Разрешимая про- p -группа является асферической тогда и только тогда, когда она либо стандартная, либо специальная группа.*

Эта теорема представляет собой следствие решения намного более общей классификационной задачи, которое будет получено в следующей публикации.

Однако “бóльшая часть” теоремы может быть доказана с помощью самых элементарных фактов линейной алгебры. Ниже приводится это простое рассуждение.

(5.3) Сформулированная во введении теорема D вытекает из следующего предложения и сделанного выше замечания об асферичности стандартных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $p \neq 2$. Если G – разрешимая асферическая про- p -группа, не являющаяся стандартной, то $p = 3$ и $G \cong E_3(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как G не является стандартной, то из следствия (4.2) и предложения (4.8) вытекает, что в G имеются элементы порядка p и существует открытая нормальная подгруппа $H \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$. Если бы H была неабелева, то ее коммутант был бы нормальной подгруппой в G , изоморфной $\mathbb{Z}_p$. Тогда из теоремы (4.5.(a)) следовало бы, что G – группа без кручения.

Таким образом, $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Применяя теорему (4.4), получаем нормальную подгруппу $W = C_G(H)$, изоморфную $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, обладающую свойством $C_G(W) = W$. Сопряжение в G определяет изоморфизм G/W на нетривиальную конечную p -подгруппу K группы $\text{Aut } W \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$. Следующее далее описание таких подгрупп без сомнения хорошо известно.

(2) Сначала воспользуемся следующими фактами:

- (i) при $p \neq 2$ ядро стандартного эпиморфизма $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ на $\text{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ не имеет кручения;
- (ii) группа унитарных матриц $UT(2, \mathbb{F}_p)$ имеет порядок p и является p -силовой подгруппой в $\text{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

Отсюда, прежде всего, вытекает, что $K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и, следовательно, $G = W \rtimes \langle c \rangle$, где c – произвольно выбранный в G элемент порядка p . Далее, в векторном $\mathbb{F}_p$ -пространстве $\overline{W} = W/W^*$ существует базис $\{\overline{v}, \overline{w}\}$, в котором сопряжению с помощью элемента c соответствует матрица $\overline{C} \in UT(2, \mathbb{F}_p)$. Иначе, $\overline{C}\overline{v} = \overline{v}$, $\overline{C}\overline{w} = \gamma\overline{v} + \overline{w}$ для некоторого $0 \neq \gamma \in \mathbb{F}_p$. Ясно, что $\{\overline{w}, \overline{C}\overline{w}\}$ также является базисом $\overline{W}$. Поэтому если a – произвольный прообраз в W элемента $\overline{w} \in W/W^*$, то $W = \langle a, b \rangle$, где $b = cac^{-1}$.

(3) Будем считать, что W вложено в векторное пространство $W \otimes \mathbb{Q}_p$ над полем p -адических чисел с базисом $\{a, b\}$. Пусть действию элемента $c \in G$ на W соответствует матрица $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$. Через $f_A(t)$ обозначим минимальный многочлен A над $\mathbb{Q}_p$, т.е. порождающий элемент идеала

$$I_A = \{h(t) \in \mathbb{Q}_p[t] \mid h(A) = 0\}.$$

Заметим теперь, что

- (iii) характеристический многочлен $P_A(t) = \det(tE - A)$ принадлежит I_A и имеет степень 2;
- (iv) так как $|c| = p$, то многочлен $t^p - 1 = (t - 1)g(t)$ принадлежит I_A ;
- (v) многочлен $g(t) = t^{p-1} + t^{p-2} + \dots + 1$ неприводим (так как многочлен $g(x+1)$ из $\mathbb{Q}_p[x]$ удовлетворяет критерию Эйзенштейна).

Так как векторы a и $Aa = b$ не пропорциональны, степень $\deg f_A(t) \geq 2$. Поэтому в силу (iii) $\deg f_A(t) = 2$. Так как $p \geq 3$, то $f_A(t) \neq t^p - 1$ и в силу (iv) и (v) $f_A(t) = g(t)$.

Отсюда, прежде всего, следует, что $p = 3$. Далее, равенство $A^2 + A + E = f_A(A) = 0$ означает, что $c^2ac^{-2} = a^{-1}(cac^{-1})^{-1}$ или, иначе, $cbc^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Таким образом, $G \cong E_3(3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобное доказательство в случае $p = 2$ должно включать исследование элементов порядка 2 в группах автоморфизмов неабелевых групп $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$ и быть более разветвленным в части, касающейся 2-подгрупп из $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Результаты, которые планируется поместить в упоминавшееся выше продолжение статьи, анонсированы в [25].

Список литературы

1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
2. Huebschmann J. Cohomology theory of aspherical groups and of small cancellation groups // J. Pure Appl. Algebra. 1979. V. 14. № 2. P. 137–143.
3. Chiswell I. M., Collins D. J., Huebschmann J. Aspherical group presentations // Math. Z. 1981. V. 178. № 1. P. 1–36.
4. Кох Х. Теория Галуа p -расширений. М.: Мир, 1973.
5. Мельников О. В. Подгруппы и гомологии свободных произведений проконечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 1. С. 97–120.
6. Gildenhuys D., Ribes L. Profinite groups and Boolean graphs // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 12. № 1. P. 21–47.
7. Залесский П. А., Мельников О. В. Подгруппы проконечных групп, действующих на деревьях // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 4. С. 419–439.
8. Залесский П. А., Мельников О. В. Фундаментальные группы графов проконечных групп // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 4. С. 117–135.
9. Brumer A. Pseudo-compact algebras, profinite groups and class formations // J. Algebra. 1966. V. 4. № 3. P. 442–470.
10. Мельников О. В. Факторгруппы проконечных групп с двойственностью Пуанкаре // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 1996. № 3. С. 54–58.
11. Gruenberg K. W. Projective profinite groups // J. London Math. Soc. 1967. V. 42. № 1. P. 155–165.
12. Gildenhuys D., Lim C.-K. Free pro- $\mathcal{C}$ -groups // Math. Z. 1972. V. 125. № 1. P. 233–254.
13. Fox R. H. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring // Ann. of Math. (2). 1953. V. 57. № 3. P. 547–560.
14. Gruenberg K. W. Cohomological topics in group theory // Lecture Notes in Math. V. 143. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
15. Басс Х. Алгебраическая K -теория. М.: Мир, 1973.
16. Serre J.-P. Cohomologie des groupes discrets // Ann. of Math. Stud. 1971. V. 70. P. 77–169.
17. Бурбаки Н. Алгебра. Гл. X. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
18. Ribes L. On amalgamated products of profinite groups // Math. Z. 1971. V. 123. № 4. P. 357–374.
19. Binz E. N., Neukirch J., Wenzel G. H. A subgroup theorem for free products of pro-finite groups // J. Algebra. 1971. V. 19. № 1. P. 104–109.
20. Haran D. On closed subgroups of free products of profinite groups // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 123. № 2. P. 266–298.
21. Мельников О. В. О свободных произведениях абсолютных групп Галуа // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 1. С. 113–118.
22. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
23. Labute J. P. Classification of Demushkin groups // Canad. J. Math. 1967. V. 19. № 1. P. 106–132.
24. Мельников О. В. Нормальные делители свободных проконечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 1. С. 3–25.
25. Мельников О. В., Шишкевич А. А. Про- p -группы с виртуальной двойственностью Пуанкаре размерности 2 // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 13–15.