Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, О существовании периодических решений уравнений с сильно растущей главной частью, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 11, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:13:33

УДК 517.911

В. В. Филиппов

О существовании периодических решений уравнений с сильно растущей главной частью

Продолжается распространение теории краевых задач на обыкновенные дифференциальные уравнения и включения с разрывными правыми частями, основанное на построении нового варианта метода сдвига вдоль траекторий. В статье развивается аппарат доказательства существования периодических решений для уравнений второго порядка с суперлинейно растущими членами.

Библиография: 16 названий.

При доказательстве существования периодического решения для уравнения $x'' + g(x) = h(t)$ ситуации, когда функция g растет линейно, т.е. когда

$$\alpha < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} < \beta,$$

и когда рост функции g быстрее линейного, т.е. когда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \infty,$$

сильно различаются.

Мы рассмотрим второй случай. Взяв за основу известные результаты на эту тему (см. [1]), мы освободим связанный с этой задачей принцип продолжения по параметру от использования метода Лерэ–Шаудера, перейдя на развиваемый нами вариант метода сдвига вдоль траекторий [2]–[4].

Мы нацелены на анализ связей геометрических свойств решений, используемых в доказательствах подобных утверждений. Переход в рассуждениях от манипулирования правой частью к обсуждению геометрических свойств решений разделяет вопросы, относящиеся к теории задачи Коши, и вопросы, относящиеся к геометрическому содержанию исследуемой проблемы. Это соответствует общей идеологии подхода [5]–[9] к построению теории обыкновенных дифференциальных уравнений. За счет ухода от обсуждения вопросов, относящихся к теории задачи Коши, мы очень сильно расширяем рассматриваемый класс уравнений в плане общих свойств правой части (непрерывность, условия Каратеодори, Дэви и т. д.). Мы продолжаем распространение теории краевых задач на уравнения и включения с разрывной правой частью.

Напомним некоторые понятия и обозначения теории [5]–[8]. Рассматриваются уравнения и включения, правые части которых определены на открытом подмножестве U произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Мы не предполагаем ничего относительно свойств

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00744).

правых частей – ни непрерывности, ни выполнения условий Каратеодори. Символ $R(U)$ обозначает множество всех множеств функций, определенных на отрезках и одноточечных подмножествах и отрезках действительной прямой, которые замкнуты относительно операций 1) перехода к функции с меньшей областью определения и 2) составления взаимного продолжения из двух функций, совпадающих на непустом пересечении областей определения. Ясно, что при любом более-менее разумном определении решения (но в духе Каратеодори) множество решений любого уравнения или включения будет удовлетворять этим двум комбинаторным условиям, т.е. множество решений этого уравнения или включения обязательно будет членом множества $R(U)$. Следуя [5]–[8] в изложении общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, мы переходим затем на аксиоматический уровень, когда вместо обычного требования типа непрерывности правых частей рассматриваемых уравнений или выполнения условий Каратеодори мы накладываем на множества решений условия типа непрерывности зависимости решений от начальных условий (см. далее условие (с)), локального существования решения задачи Коши (см. далее условие (е)) и т.д. Сказанное легко понимается, когда выполнено условие единственности решения задачи Коши и когда все обсуждаемые решения определены на всем рассматриваемом временном отрезке. В общем случае требуются дополнительные обсуждения. В частности (при отсутствии единственности решения задачи Коши), непрерывность расширяется до полунепрерывности сверху. Равномерная сходимость функций получает более приспособленную для обсуждения более широких связей интерпретацию в виде сходимости относительно расстояния Хаусдорфа между графиками функций. Это позволяет рассматривать одновременно функции с различными (но компактными) областями определения. При этом названные выше свойства (пространства решений Z) выглядят следующим образом:

(е) для любой точки (t, y) множества U найдется такая функция z , принадлежащая Z , что¹ $t \in \langle \pi(z) \rangle$ и $z(t) = y$ (т.е. задача Коши для пространства Z с начальным условием $z(t) = y$) имеет решение,

(с) для любого компактного подмножества K множества U множество Z_K компактно.

Свойство (с) является псевдонимом непрерывности зависимости решений задачи Коши от начальных условий (символ Z_K обозначает множество всех тех элементов пространства Z , графики которых лежат в K ; имеется в виду компактность относительно расстояния Хаусдорфа между графиками).

В рассматриваемом круге вопросов для нас будет существенным также требование гомологической тривиальности множеств решений, начинающихся в одной точке, а именно свойство

(h) для любой точки $(a, y_0) \in U$, множество $S_Z(y_0; a, b)$ ациклично, т.е.

$$H_i(S_Z(y_0; a, b); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{при } i = 0; \\ 0 & \text{при } i \neq 0 \end{cases}$$

для любой точки $(a, y_0) \in U$ и любого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию:

$$[a, b] \subseteq \pi(z) \text{ для любого решения задачи Коши } z \in Z^+, z(a) = y_0.$$

¹Символ $\langle M \rangle$ обозначает внутренность множества M .

Пусть $*$ – некоторый список свойств указанного типа. Символ $R_*(U)$ обозначает множество всех членов множества $R(U)$, удовлетворяющих всем условиям из списка $*$.

На множестве $R_c(U)$ естественным образом вводится топология, адекватная непрерывности зависимости решений от параметров уравнения. Именно она используется далее, например, в условии (1.2). Рассматривая семейство уравнений $y' = f(t, y, \alpha)$, мы интерпретируем непрерывность зависимости решений от параметра α следующим образом. Мы требуем, чтобы для любой последовательности индексов $\{\alpha_i, i = 1, 2, \dots\}$, сходящейся к некоторому значению α_0 , пространства Z_i решений соответствующих уравнений $y' = f(t, y, \alpha_i)$ сходились к пространству Z_0 решений уравнения $y' = f(t, y, \alpha_0)$ в смысле выполнения следующего условия:

для любого компактного подмножества K множества U и любой последовательности функций $\{z_j \in Z_j, j \in A\}$, графики которых лежат в компакте K , найдутся функция $z \in Z$ и подпоследовательность последовательности $\{z_j, j \in A\}$, сходящаяся к функции z .

Это свойство остается содержательным и при рассмотрении стационарной последовательности $Z_j \equiv Z$. В этом случае оно приобретает вид приведенного выше условия (с).

Если выполнено условие единственности решения задачи Коши и все обсуждаемые решения определены на всем рассматриваемом временном отрезке, то приведенные условия приобретают общепонятный, общеизвестный вид. Более детальное исследование подобных свойств можно найти в [3]–[8] (см. также [10] и [11]).

Символ $P^T(U)$ обозначает класс T -периодических пространств из $R(U)$, т.е. если $Z \in P^T(U)$ и $z \in Z$, то функции $z(t \pm T)$ также принадлежат Z (см. [6; §IX.4] или [8; §15.4]).

§ 1. Продолжение по параметру

Следующая теорема содержит принцип продолжения по параметру, адекватный основной обсуждаемой в этой статье ситуации и дополняющий не метод Лерэ–Шаудера, а метод сдвига вдоль траекторий. Она является вариантом теоремы 4.2 из [2] (в [2] $T = 1$; доказательство повторяется дословно с оговоркой относительно этой замены, либо нашу теорему 1.1 можно считать формальным следствием теоремы 4.2 в [2] ввиду гомеоморфности отрезков $[0, 1]$ и $[0, T]$).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть

$$(1.1) \quad U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ и } 0 < T < \infty;$$

(1.2) $-\infty < c < d < \infty$ и при любом $\lambda \in [c, d]$ пространство Z_λ принадлежит классу $P_{ceh}^T(U)$, отображение $\varphi: [c, d] \rightarrow P_{ceh}^T(U)$, заданное формулой $\varphi(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно;

$$(1.3) \quad r > 0, S_r = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = r\}, K_r = \{u : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| \leq r\};$$

$$(1.4) \quad \text{если } z \in Z_c^+, \inf \pi(z) = 0 \text{ и } z(0) \in K, \text{ то } \pi(z) \supseteq [0, T];$$

(1.5) $z(T) \neq z(0)$ для любой функции z из множества $X = \{z : z \in Z_c, \pi(z) = [0, T], z(0) \in S_r\}$ и степень сдвига $z \mapsto z(T) - z(0)$ множества X отлична от нуля;

(1.6) множество $D = \{(\lambda, z) : \lambda \in [c, d], z \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, T], z(0) = z(T)\} (\subseteq [c, d] \times C([0, T], \mathbb{R}^n))$ распадается в объединение дискретного семейства компактов.

Тогда найдется такая функция $z \in Z_d$, что $\pi(z) = [0, T]$ и $z(T) = z(0)$.

В формулировке теоремы 1.1 принадлежность пространства Z_λ классу $R_{ceh}(U)$ означает, грубо говоря, успешность распространения на соответствующее уравнение $x' = f(t, x, \lambda)$ теории задачи Коши вплоть до оценки гомологических свойств множеств решений (см. подробности в [2], [5]–[8]). Непрерывность отображения φ означает непрерывность зависимости решений уравнения $x' = f(t, x, \lambda)$ от параметра λ .

Следующая теорема содержит другой вариант принципа продолжения по параметру также для сдвига вдоль траекторий. Она является вариантом теоремы 2.1 из [3] (в [3] понятие степени не использовалось и говорилось о соответствующем гомоморфизме; тривиальные леммы 2.6 и 2.7 в [4] устраняют это расхождение, кроме того теорема 1.2 является формальным следствием теорем 6.1 и 6.2 в [12]). Она более, чем теорема 1.1, в смысле строения сдвигаемого множества (условия (1.5) и (1.10)) следует идеологии принципа продолжения по параметру в методе Лерэ–Шаудера.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть в обозначениях (1.1), (1.2)

(1.7) множество W является открытым ограниченным подмножеством пространства $C([0, T], \mathbb{R}^n)$;

(1.8) для $\lambda \in [c, d]$ $H_\lambda = \{z: z \in \varphi(\lambda) \cap [W]\}$ и $G_\lambda = \{z: z \in \varphi(\lambda) \cap W\}$;

(1.9) при любом $\lambda \in [c, d]$ $z(0) \neq z(T)$ для любой функции z из $H_\lambda \setminus G_\lambda$;

(1.10) степень сдвига $z \mapsto z(T) - z(0)$ множества $Z_c \cap (H_c \setminus G_c)$ отлична от нуля.

Тогда степень сдвига $z \mapsto z(T) - z(0)$ множества $Z_d \cap (H_d \setminus G_d)$ также отлична от нуля и найдется такая функция $z \in Z_d$, что $\pi(z) = [0, T]$ и $z(T) = z(0)$.

§ 2. Поведение траекторий

Пусть в обозначениях (1.1)

(2.1) $Z \in P_{ceh}^T(U)$ –пространство решений дифференциального включения второго порядка $x'' \in F(t, x, x')$. Т.е. речь идет о пространстве решений соответствующей системы

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' \in F(t, x, y) \end{cases}$$

первого порядка. При этом мы не накладываем ограничений на тип самой функции F (см. [9]). Принадлежность $Z \in P^T(U)$ практически равносильна T -периодичности функции F по t .

Для нас будет существенно наличие следующего свойства решений этого включения.

(2.2) Если $z = (x, y) \in Z^+$ и $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} |y(t)| = \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} |x(t)| = \infty$. Если $z = (x, y) \in Z^-$ и $\lim_{t \rightarrow \inf \pi(z)} |y(t)| = \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \inf \pi(z)} |x(t)| = \infty$.

То есть, грубо говоря, если абсциссы точек некоторой траектории ограничены, то она не уходит на бесконечность (рис. 1).

ЛЕММА 2.1. Пусть в обозначениях (1.1) и (2.1) для некоторого $R > 1$ и для любых отрезков $I, J \subseteq \mathbb{R}$ найдутся такие интегрируемые функции $\varphi_1: I \rightarrow [0, \infty)$ и $\varphi_2: J \rightarrow [0, \infty)$, что множество $F(t, x, y)$ лежит в отрезке

Рис. 1. “Запрещенные” траектории

$[-\varphi_1(x) - \varphi_2(t), \varphi_1(x) + \varphi_2(t)]$ при всех $t \in J$, $x \in I$ и $|y| > R$. Тогда условие (2.2) выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2.2) распадается на случаи в соответствии со знаками функций x и y и принадлежностью $z \in Z^+$ или $z \in Z^-$. Пусть $z = (x, y) \in Z^+$ и $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} y(t) = \infty$. Зафиксируем такое число $t_0 > 0$, что $y(t) > R$ при $t \geq t_0$. Так как $x'(t) = y(t) > R > 1$ при $t \geq t_0$, то функция $x(t)$ является здесь возрастающей. Ввиду возрастания функции x конечный или бесконечный предел $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} x(t)$ существует. Предположим, что $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} x(t) \neq \infty$, т.е. что предел $c_0 = \lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} x(t)$ строго меньше ∞ . Тогда $\sup \pi(z) \leq c_1$, где $c_1 = t_0 + (c_0 - x(t_0)) < \infty$. Для отрезков $I = [x(t_0), c_0] \subseteq \mathbb{R}$ и $J = [t_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ выберем такие интегрируемые функции $\varphi_1: I \rightarrow [0, \infty)$ и $\varphi_2: J \rightarrow [0, \infty)$, что $F(t, x, y)$ лежит в отрезке $[-\varphi_1(x) - \varphi_2(t), \varphi_1(x) + \varphi_2(t)]$. Тогда

$$\begin{aligned} |y(t) - y(t_0)| &= \left| \int_{t_0}^t y'(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^t (\varphi_1(x(s)) + \varphi_2(s)) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \varphi_1(x(s)) x'(s) ds + \int_{t_0}^t \varphi_2(s) ds \leq \int_I \varphi_1(u) du + \int_J \varphi_2(s) ds. \end{aligned}$$

Но это справедливо для любого $t \in \pi(z) \cap [t_0, \infty)$, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} y(t) \leq y(t_0) + \int_I \varphi_1(u) du + \int_J \varphi_2(s) ds < \infty.$$

(Последняя оценка справедлива в силу интегрируемости функций φ_1 и φ_2 .) Но это противоречит исходному предположению, что $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} y(t) = \infty$.

Таким образом, сделанное нами предположение, что $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} x(t) \neq \infty$, привело нас к противоречию, что и дает требуемое. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $-\infty < p_0 < p_1 < \infty$ и $R > 0$. Тогда найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $\lambda \in [c, d]$, $0 < y(\inf \pi(z)) \leq R$, $t_0 \in \pi(z)$, $y(t) > 0$ и $p_0 \leq x(t) \leq p_1$ при $t \in [\inf \pi(z), t_0)$, то $y(t_0) < m$ (рис. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда для любого $m = 1, 2, \dots$ найдется такая функция $z_m = (x_m, y_m) \in Z_{\lambda_m}^+$ и такое число $t_m \in \pi(z)$, что $0 < y_m(\inf \pi(z_m)) \leq R$, $y(t_m) \geq R + m$ и $y_m(t) > 0$, $p_0 \leq x_m(t) \leq p_1$ при $t \in [\inf \pi(z_m), t_m]$.

В силу T -периодичности рассматриваемых пространств, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $0 \leq \inf \pi(z_m) \leq T$. Кроме того, нам достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда $y_m(t) \geq 1$ при $t \in [\inf \pi(z_m), t_m]$. При этом мы имеем $t_m \leq T + p_1 - p_0$.

В силу компактности отрезка $[c, d]$ мы можем предположить дополнительно, что последовательность $\{\lambda_m, m = 1, 2, \dots\}$ сходится к некоторой точке $\lambda_0 \in [c, d]$. По лемме 10.4.1г из [8] существуют такая функция $z = (x, y) \in Z_{\lambda_0}^+$ и такая подпоследовательность $\{z_m, m \in A\}$ последовательности $\{z_m, m = 1, 2, \dots\}$, что для любой точки $t \in \pi(z)$ справедливо следующее: $\pi(z_m) \ni t$, начиная с некоторого $m = m_0$, и последовательность $\{z_m|_{(-\infty, t] \cap \pi(z_m)}, m \in A\}$ сходится к функции $z|_{(-\infty, t] \cap \pi(z)}$. В частности, $\inf \pi(z) = \lim_{m \rightarrow \infty, m \in A} \inf \pi(z_m) \in [0, T]$.

В силу того, что $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t_m) = \infty$, и в силу сказанного в предыдущем абзаце для функции z мы имеем $\pi(z) \subseteq [0, T + p_1 - p_0]$ и $\lim_{t \rightarrow \sup \pi(z)} y(t) = \infty$. Но это противоречит условию (2.2). Таким образом, сделанное допущение привело к противоречию, что и дает требуемое. Лемма доказана.

Рис. 2

Рис. 3

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $-\infty < p_0 < p_1 < \infty$ и $R > 0$. Тогда найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $p_0 \leq x(\inf \pi(z)) \leq p_1$ и $y(\inf \pi(z)) > m$, то найдется такое $t_0 \in \pi(z)$, что $x(t_0) = p_1$ и $y(t) > R$, $p_0 \leq x(t) \leq p_1$ при $t \in [\inf \pi(z), t_0]$ (рис. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать для больших R , поэтому, не ограничивая общности, мы можем предположить, что $R > 1$.

Допустим, что доказываемое неверно. Тогда для любого $m = 1, 2, \dots$ найдется такая функция $z_m = (x_m, y_m) \in Z_{\lambda_m}$, что $y(\sup \pi(z_m)) = R$, $y_m(t) > R$ и $p_0 \leq x(t) \leq p_1$ при $t \in \pi(z_m)$ и, наконец, $y_m(\inf \pi(z_m)) > R + m$. В силу T -периодичности рассматриваемых пространств, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $0 \leq \inf \pi(z_m) \leq T$. В силу того, что $x'(t) = y(t) > R > 1$, мы имеем $\sup \pi(z_m) \leq T + p_1 - p_0$.

Каждую из функций z_m продолжим произвольно до функции $z_m^* \in Z_{\lambda_m}^-$.

В силу компактности отрезка $[c, d]$ мы можем предположить дополнительно, что последовательность $\{\lambda_m, m = 1, 2, \dots\}$ сходится к некоторой точке $\lambda_0 \in [c, d]$. По лемме 10.4.11 из [8] существуют такая функция $z = (x, y) \in Z_{\lambda_0}^-$ и такая подпоследовательность $\{z_m^*, m \in A\}$ последовательности $\{z_m^*, m = 1, 2, \dots\}$, что для любой точки $t \in \pi(z)$ справедливо следующее: $\pi(z_m^*) \ni t$, начиная с некоторого $m = m_0$, и последовательность $\{z_m^*|_{[t, \infty) \cap \pi(z_m^*)}, m \in A\}$ сходится к функции $z|_{[t, \infty) \cap \pi(z)}$.

В силу того, что $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(\inf \pi(z_m)) = \infty$, и в силу сказанного в предыдущем абзаце для функции z мы имеем $\pi(z) \subseteq [0, T + p_1 - p_0]$ и $\lim_{t \rightarrow \inf \pi(z)} y(t) = \infty$. Но это противоречит условию (2.2). Таким образом, сделанное допущение привело к противоречию, что и дает требуемое. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Тогда если $z_k = (x_k, y_k) \in Z_{\lambda_k}$, $\pi(z_k) = [s_k, t_k]$, $x_k(s_k) = x_k(t_k) = 0$, $x_k(t) > 0$ при $t \in (s_k, t_k)$ и $y_k(s_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $\sup x_k([s_k, t_k]) \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В предположениях леммы 2.2 траектория $z(t)$ обязательно доходит либо до оси абсцисс, либо до вертикали $x = p_1$. В предположениях леммы 2.3 первый случай исключается и траектория $z(t)$ обязательно доходит до вертикали $x = p_1$.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $-\infty < p_0 < \infty$, $\varepsilon > 0$ и $R > 0$. Тогда найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = p_0$, $y(\inf \pi(z)) > m$ и $y'(t) \leq -\varepsilon$ почти при всех $t \in \pi(z)$, для которых $x(t) \geq p_0$, то найдется такое $s \in \pi(z)$, что $x(t) \geq p_0$ при всех $t \in [\inf \pi(z), s]$, $x(s) = p_0$ и $y(s) < -R$ (рис. 4).

Рис. 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Отметим прежде всего, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = p_0$, $y(\inf \pi(z)) > 0$ и $y'(t) \leq -\varepsilon$ почти при всех $t \in \pi(z)$, для которых $x(t) \geq p_0$, то траектория $z(t)$ не позднее, чем через время $y(\inf \pi(z))/\varepsilon$, перейдет через ось абсцисс в точке с абсциссой больше p_0 . При некотором значении $t = t_0$ точка будет ниже оси абсцисс, и далее функции $x(t)$ и $y(t)$ будут убывать, поэтому не позднее, чем через время $x(t_0)/|y(t_0)|$, траектория $z(t)$ достигнет вертикали $x = p_0$.

2) В силу 1) если мы допустим, что доказываемое неверно, то для любого $m = 1, 2, \dots$ найдется такая функция $z_m = (x_m, y_m) \in Z_{\lambda_m}$, что $x_m(t) \geq p_0$ при всех $t \in \pi(z)$, $x_m(\inf \pi(z_m)) = x_m(\sup \pi(z_m)) = p_0$, $y_m(\inf \pi(z)) > m$, $y'_m(t) \leq -\varepsilon$ при всех $t \in \pi(z)$ и $y_m(\sup \pi(z_m)) \geq -R$.

В силу сказанного в 1) число $t_m = \sup\{t : t \in \pi(z_m), y_m(t) > 0\}$ строго меньше $\sup \pi(z_m)$. Так как функция y_m является убывающей ($y'_m(t) \leq -\varepsilon$), то $y_m(t) > 0$ при $t < t_m$, $y_m(t_m) = 0$, $y_m(t) \leq 0$ при $t > t_m$ и точка t_m является точкой максимума для функции x_m . В частности, $y_m(\sup \pi(z_m)) \leq 0$ или, с учетом первоначального предположения относительно $y_m(\sup \pi(z_m))$, мы имеем $y_m(\sup \pi(z_m)) \in [-R, 0]$. Поэтому $\sup \pi(z_m) - t_m \leq R/\varepsilon$ и $x_m(t_m) \leq p_0 + R^2/\varepsilon$.

Теперь существование таких функций z_m противоречит лемме 2.3 (с $p_1 = p_0 + R^2/\varepsilon$) или следствию леммы 2.3. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу рассуждений п. 1) доказательства в предположениях леммы 2.4 траектория $z(t)$ обязательно возвращается на вертикаль $x = p_0$, теперь ниже оси абсцисс.

ЛЕММА 2.5. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $0 < p_0 < \infty$, $R > 0$, $\varepsilon > 0$ и

(2.3) если $z_k = (x_k, y_k) \in Z_{\lambda_k}$, $\pi(z_k) = [s_k, t_k]$, $x_k(s_k) = x_k(t_k) = p_0$, $x_k(t) > p_0$ при $t \in [s_k, t_k]$, то $y'_k(t) \leq -\varepsilon$ почти при всех $t \in [s_k, t_k]$.

Тогда найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > m$, то найдется такое $t_0 \in \pi(z)$, что $x(t) > 0$ при всех $t \in (\inf \pi(z), t_0)$, $x(t_0) = 0$ и $y(t_0) < -R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. рис. 5). 1) Существует такое число $m_1 > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $0 \leq x(t) \leq p_0$ при всех $t \in \pi(z)$, $x(\inf \pi(z)) = p_0$, $y(\inf \pi(z)) < -m_1$, то $y(t) < -R$ при всех $t \in \pi(z)$. Это следует из леммы 2.3 после замены переменных $(t, x, y) \mapsto (t, -x, -y)$. В силу замечания 2.1 все такие функции z продолжимы до пересечения траектории с осью ординат.

2) Существует такое число $m_2 > 0$, что если функция $z = (x, y)$ принадлежит Z_λ , $x(t) \geq p_0$ при всех $t \in \pi(z)$, $x(\inf \pi(z)) = x(\sup \pi(z)) = p_0$, $y(\inf \pi(z)) > m_2$, то $y(\sup \pi(z)) < -m_1$. Это следует из леммы 2.4.

3) Существует такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $0 \leq x(t) \leq p_0$ при всех $t \in \pi(z)$, $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > m$, то $y(t) > m_2$ при всех $t \in \pi(z)$. Это следует из леммы 2.3. Как и в 1), все такие функции z продолжимы до пересечения траектории с вертикалью $x = p_0$.

Проверка того, что при таком выборе выполняется требуемое условие, не составляет труда. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $0 < p_0 < \infty$, $R > 0$, $\varepsilon > 0$ и выполнены условие (2.3) и условие

(2.3') если $z_k = (x_k, y_k) \in Z_{\lambda_k}$, $\pi(z_k) = [s_k, t_k]$, $x_k(s_k) = x_k(t_k) = -p_0$, $x_k(t) < -p_0$, то $y'_k(t) \geq \varepsilon$ почти при всех $t \in [s_k, t_k]$.

Тогда найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > m$, то при некотором $t_0 \in \pi(z)$ кривая $z(t)$, $t \in [\inf \pi(z), t_0]$, совершает один оборот вокруг начала координат, $x(t_0) = 0$, $y(t_0) > R$ (рис. 6).

Рис. 5

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.5 со ссылкой на лемму 2.5 вместо использованных там ссылок. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $0 < p_0 < \infty$, $\varepsilon > 0$, выполнены условия (2.3) и (2.3'). Тогда

(2.4) для любых $L > 0$ и $l = 1, 2, \dots$ найдется такое число $m > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > m$, то при некотором $t_0 \in \pi(z)$ кривая $z(t)$, $t \in [\inf \pi(z), t_0]$, возвращается на положительный луч оси ординат и совершает l оборотов вокруг начала координат, пересекая положительный луч оси ординат в точках с ординатой больше L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к очевидной индукции со ссылкой на лемму 2.6. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть L — луч, начинающийся в начале координат. Пусть $R > 0$, $p_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, $l = 1, 2, \dots$, выполнены условия (2.3) и (2.3'). Тогда множество M функций $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\lambda \in [c, d]$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, для которых соответствующие траектории начинаются на луче L и точки пересечения траекторий с лучом L удалены от начала координат на расстояние, не превосходящее R , является ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО распадается на случаи в соответствии с расположением луча L . Мы ограничимся рассмотрением одного из возможных случаев, а именно мы будем предполагать, что L — положительный луч оси ординат.

1) По лемме 2.2 существует такое число R_1 , что если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\lambda \in [c, d]$, $0 < y(\inf \pi(z)) \leq R$, $y(t) > 0$ и $-p_0 \leq x(t) \leq p_0$ при всех $t \in \pi(z)$, то $y(t) < R_1$ при всех $t \in \pi(z)$.

В области $x > p_0$ ординаты точек кривых $z(t)$, $z \in M$, тем более меньше R_1 .

2) Абсциссы точек кривых $z(t)$ не превосходят $R_2 = p_0 + R_1^2/\varepsilon$.

3) Найдется такая константа $R_3 > 0$, что ординаты точек кривых $z(t)$ в правой полуплоскости $x \geq -p_0$ не меньше $-R_3$. Это следует из леммы 2.2 (см. также п. 1) доказательства леммы 2.5). В области $x < -p_0$ ординаты точек кривых $z(t)$, $z \in M$, тем более больше $-R_3$.

4) Абсциссы точек кривых $z(t)$ не меньше $R_4 = -p_0 - R_3^2/\varepsilon$.

5) Найдется такая константа $R_5 > 0$, что ординаты точек кривых $z(t)$ в правой полуплоскости $x \leq 0$ не больше R_5 . Это следует из леммы 2.2 (см. также 3)).

Другие случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

§3. Рост правой части и скорость вращения

Пусть

(3.1) функция $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируема (т.е. интегрируема на любом отрезке, лежащем в $[0, \infty)$),

$$(3.2) \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} > 0,$$

(3.3) для любой последовательности $\mu_i \rightarrow 0$, $\mu_i > 0$, последовательность функций $g_i(x) = \mu_i \gamma(x/\mu_i)$ сходится на отрезке $[0, 1]$ к бесконечности в смысле выполнения следующего условия: для любого $R > 0$ мера множества $\{x : x \in [0, 1], g_i(x) < R\}$ стремится к нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Технически удобно рассматривать не произвольные последовательности $\mu_i \rightarrow 0$, а последовательности, удовлетворяющие дополнительному условию:

$$(3.4) 1 > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots \text{ и при некотором } q \in (0, 1)$$

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \geq q.$$

В [9] показано, что в этих предположениях из исходной последовательности можно выбрать подпоследовательность таким образом, чтобы (после соответствующей перенумерации) выполнялось условие $q^2 \leq \mu_{i+1}/\mu_i \leq q$ при всех $i = 1, 2, \dots$. Теперь для произвольной последовательности $\lambda_i \rightarrow 0$ обозначим $j(k) = \sup\{i : i = 1, 2, \dots, \mu_i > \lambda_k\}$. Тогда $\mu_{j(k)} > \lambda_k$ и $\mu_{j(k)+1} \leq \lambda_k$, т.е. $\mu_{j(k)+1} \leq \lambda_k < \mu_{j(k)}$, $q^2 \leq \lambda_k/\mu_{j(k)} < 1$. Функция $\alpha_k(x) = \lambda_k \gamma(x/\lambda_k)$ связана с функцией $\beta_k(x) = \mu_{j(k)} \gamma(x/\mu_{j(k)})$ равенством $\alpha_k(x) = \nu_k \beta_k(x/\nu_k)$ с $\nu_k = \lambda_k/\mu_{j(k)} \in [q^2, 1]$. Отсюда сразу следует, что выполнение условия (3.3) для функций $\beta_k(x)$ влечет выполнение условия (3.3) для функций $\alpha_k(x)$. Тем самым выполнение условия (3.3) для какой-то одной последовательности $\mu_i \rightarrow 0$, удовлетворяющей условию (3.4), влечет выполнение условия (3.3) в полном объеме (т.е. для произвольной последовательности $\mu_i \rightarrow 0$).

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть выполнены условия (3.1)–(3.3) и

(3.5) функция $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ локально интегрируема и T -периодична,

(3.6) если функция $z = (x, y)$ принадлежит Z_λ , $x(t) > 0$ при всех $t \in \pi(z)$, то $y'(t) \leq -\gamma(x(t)) + h(t)$ почти при всех $t \in \pi(z)$.

Тогда

(3.7) если $z_k = (x_k, y_k) \in Z_{\lambda_k}$, $\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k) \leq T$, $x_k(\inf \pi(z_k)) = x_k(\sup \pi(z_k)) = 0$, $x_k(t) > 0$ при $t \in (\inf \pi(z_k), \sup \pi(z_k))$ и $\sup x_k([\inf \pi(z_k), \sup \pi(z_k)]) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (3.2) зафиксируем такие числа $Q_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, что $\gamma(x) > \varepsilon^2 x$ при $x \geq Q_0$. Возьмем произвольно $Q > Q_0$.

Мы находимся в предположениях лемм §2, и описанная там геометрия поведения решений распространяется на рассматриваемый нами случай (леммы 2.2–2.5). Кроме того, $y_k(\inf \pi(z_k)) \rightarrow \infty$ (см. пп. 1) и 2) доказательства леммы 2.8).

Ввиду T -периодичности рассматриваемых пространств, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\inf \pi(z_k) \in [0, T]$. Тогда $\sup \pi(z_k) \leq 2T$.

Начиная с некоторого k , траектория $z_k(t)$ заходит в область $x > Q$. Пусть $s_k \leq t_k$ — точки отрезка $\pi(z_k)$, соответствующие пересечению траекторией $z_k(t)$ вертикали $x = Q$ (т.е. s_k соответствует точке входа, t_k соответствует точке выхода).

В силу нашего выбора Q при $s_k \leq t \leq t_k$ функция y_k является убывающей, а функция x_k сначала возрастает (до нуля u_k функции y_k), а потом убывает.

Прежде чем начать общий анализ, выделим множество $P(Q)$ тех точек $t \in [0, 2T]$, для которых $h(t) > \varepsilon^2 Q/2$.

Пусть $\alpha > 0$. Через M_k обозначим множество тех точек $t \notin P(Q)$ отрезка $[s_k, t_k]$, для которых $\gamma(x_k(t)) \geq \alpha^2 x_k(t) + \varepsilon^2 Q/2$. Так как при этом $h(t) \leq \varepsilon^2 Q/2$ и $-\gamma(x_k(t)) \leq -\alpha^2 x_k(t) - \varepsilon^2 Q/2$, то $y'_k(t) \leq -\gamma(x_k(t)) + h(t) < -\alpha^2 x_k(t)$. Для функции $\varphi_k(t) = \arctg(-y_k(t)/(\alpha x_k(t)))$, $\varphi_k: [s_k, t_k] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, мы имеем

$$\varphi'_k(t) = \frac{\alpha((-x_k(t))y'_k(t) + y_k^2(t))}{\alpha^2 x_k^2(t) + y_k^2(t)}.$$

Если при этом еще $t \in M_k$, то

$$\varphi'_k(t) \geq \frac{\alpha(\alpha^2 x_k^2(t) + y_k^2(t))}{\alpha^2 x_k^2(t) + y_k^2(t)} = \alpha.$$

Мера образа $\varphi_k(M_k) \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ множества M_k с одной стороны не больше π , а с другой стороны не меньше меры $\mu(M_k)$ множества M_k , умноженной на α : $\alpha\mu(M_k) \leq \mu(\varphi_k(M_k)) \leq \pi$. Поэтому

$$(3.8) \quad \mu(M_k) \leq \frac{\pi}{\alpha}.$$

Для функции $\psi_k(t) = \arctg(-2y_k(t)/(\varepsilon x_k(t)))$ мы имеем

$$\psi'_k(t) = \frac{2\varepsilon((-x_k(t))y'_k(t) + 2y_k^2(t))}{\varepsilon^2 x_k^2(t) + 4y_k^2(t)}.$$

Если $t \notin P(Q)$ (т.е. если $h(t) \leq \varepsilon^2 Q/2$), то $y'_k(t)$ не превосходит $-\gamma(x_k(t)) + h(t) < -\varepsilon^2 x_k(t) + \varepsilon^2 Q/2 = -\varepsilon^2 x_k(t)/2 + \varepsilon^2(Q - x_k(t))/2$, а так как $x_k(t) \geq Q$, то $y'_k(t) \leq -\varepsilon^2 x_k(t)/2$, и, следовательно, $\psi'_k(t) \geq \varepsilon$. Если бы здесь не было точек $t \in P(Q)$, то полученная оценка означала бы, что для любого числа $\delta > 0$ траектория z_k за время $2\delta/\varepsilon$ проходит от луча $y = \delta x$, $x > 0$ до положительного луча оси абсцисс, и за такое же время проходит далее до луча $y = -\delta x$, $x > 0$. В общем случае

(3.9) мера $\mu(M'_k(\delta))$ множества $M'_k(\delta) = \{t : t \in [s_k, t_k] \setminus P(Q), |y_k(t)| \leq \delta x_k(t)\}$ не больше $4\delta/\varepsilon$.

Пусть $\mu_k = 1/x_k(u_k)$. Воспользуемся обозначениями (3.3).

Рис. 7

Если точка $t \in [s_k, t_k]$ не принадлежит множеству $M_k \cup M'_k(\delta) \cup P(Q)$, то она принадлежит либо множеству $N_k(\delta) = \{t : t \in [s_k, t_k] \setminus P(Q), y_k(t) > \delta x_k(t), \gamma(x_k(t)) < \alpha^2 x_k(t) + \varepsilon^2 Q/2\}$, либо множеству $N'_k(\delta) = \{t : t \in [s_k, t_k] \setminus P(Q), y_k(t) < -\delta x_k(t), \gamma(x_k(t)) < \alpha^2 x_k(t) + \varepsilon^2 Q/2\}$.

Кривая пересекает луч $y = \delta x, x > 0$ в некоторой точке $(a, \delta a)$ (рис. 7). После этого $x'_k(t) < \delta a$, поэтому

$$x_k(u_k) < a + \delta a \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \mu(P(Q_0)) \right) = a \frac{\varepsilon + 2\delta(\delta + \mu(P(Q_0)))}{\varepsilon},$$

$$a > \frac{\varepsilon x_k(u_k)}{\varepsilon + 2\delta(\delta + \mu(P(Q_0)))}.$$

При $t \in N_k(\delta)$ для функции $\xi_k(t) = \mu_k x_k(t)$, $\xi_k : [s_k, t_k] \rightarrow [0, 1]$, мы имеем $\xi'_k(t) = \mu_k x'_k(t) \geq \mu_k \delta a$, что больше не зависящего от k числа $A = \delta\varepsilon/(\varepsilon + 2\delta(\delta + \mu(P(Q_0))))$, $g_k(\xi_k(t)) < \alpha^2 \xi_k(t) + \varepsilon^2 Q \mu_k/2 \leq \alpha^2 \xi_k(t) + \varepsilon^2 Q/2$. Поэтому мера $\mu(N_k(\delta))$ множества $N_k(\delta)$ не больше меры $\mu(L_k)$ множества $L_k = \{v : v \in [0, 1], g_k(v) \leq \alpha^2 + \varepsilon^2 Q/2\}$, деленной на A . По аналогичным соображениям $\mu(N'_k(\delta)) \leq \mu(L_k)/A$. Таким образом, мы имеем

$$\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k) \leq (s_k - \inf \pi(z_k)) + (\sup \pi(z_k) - t_k) + \mu(M_k) + \mu(M'_k(\delta)) + \frac{2\mu(L_k)}{A} + \mu(P(Q)).$$

В силу условия (3.3) $\mu(L_k) \rightarrow 0$. Из леммы 2.2 вытекает, что $(s_k - \inf \pi(z_k)) \rightarrow 0$ и $(\sup \pi(z_k) - t_k) \rightarrow 0$. Поэтому с учетом (3.8) и (3.9)

$$0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k)) \leq \frac{\pi}{\alpha} + \frac{4\delta}{\varepsilon} + \mu(P(Q)).$$

Но числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ взяты нами произвольно, поэтому

$$(3.10) \quad 0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k)) \leq \mu(P(Q))$$

при любом $Q \geq Q_0$. В силу интегрируемости функции h на отрезке $[0, 2T]$ мы имеем $\mu(P(Q)) \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow \infty$. Поэтому из (3.10) вытекает равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k)) = 0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, с ростом геометрических размеров траекторий время полуоборота стремится к нулю.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2) и каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть $Q > 0$, $l = 1, 2, \dots$. Пусть выполнены условия (2.4), (3.7) и

(3.7') если $z_k = (x_k, y_k) \in Z_{\lambda_k}$, $\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k) \leq T$, $x_k(\inf \pi(z_k)) = x_k(\sup \pi(z_k)) = 0$, $x_k(t) < 0$ при $t \in (\inf \pi(z_k), \sup \pi(z_k))$ и $\inf x_k([\inf \pi(z_k), \sup \pi(z_k)]) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup \pi(z_k) - \inf \pi(z_k)) = 0$.

Тогда для любого $R > 0$ найдется такое число $P(R, l) > R$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda^+$, $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > P(R, l)$, то кривая $z(t)$, $t \in [\inf \pi(z), \inf \pi(z) + T] \cap \pi(z)$, совершает не менее l оборотов вокруг начала координат, пересекая положительный луч оси ординат в точках с ординатой больше или равной R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустив противное, получаем в силу леммы 2.7, что существуют такие функции $z_m = (x_m, y_m) \in Z_{\lambda_m}^+$ и точки $t_m \in \pi(z_m) \cap (T, \infty)$, $m = 1, 2, \dots$, что $x_m(\inf \pi(z_m)) = 0$ и кривая $z_m(t)$, $t \in [\inf \pi(z_m), t_m]$, совершает l оборотов вокруг начала координат, на которых пересекает положительный луч оси ординат в точках с ординатой больше или равной $R + m$.

Из леммы 2.8 вытекает, что максимумы значений функции $x_m(t)$ в области $x > 0$ стремятся к бесконечности, а минимумы значений функции $x_m(t)$ в области $x < 0$ стремятся к $-\infty$. В силу условий (3.7) и (3.7') отсюда вытекает, что время, затрачиваемое кривой $z_m(t)$, $t \in [\inf \pi(z_m), t_m]$, на прохождение областей $x < 0$ и $x > 0$, стремится к нулю. Но это означает, что, начиная с некоторого m , l -й оборот вокруг начала координат будет совершен кривой $z_m(t)$ также при $t < T$, что противоречит выбору функций z_m . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В предположениях леммы 3.2 если функция $z = (x, y)$ принадлежит Z_λ , $\pi(z) = [0, T]$, $z(0) = z(T)$, и кривая $z(t)$ пересекает положительный луч оси ординат в точках с ординатами больше или равными R не более чем l раз, то ординаты точек пересечения не превосходят $P(R, l + 1)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть

(3.11) функции $\gamma_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in [c, d]$, локально интегрируемы, функция $G_\lambda(u) = \int_0^u \gamma_\lambda(s) ds$ непрерывна по совокупности переменных u , λ , $\lim_{\substack{\lambda \in [c, d] \\ |u| \rightarrow \infty}} G_\lambda(u) = \infty$, функция $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ T -периодична и интегрируема.

Тогда пространства решений включений

$$(3.12) \quad x'' \in [-\gamma_\lambda(x) - h(t), -\gamma_\lambda(x) + h(t)]$$

удовлетворяют условию

(3.13) найдутся такие $R > 0$ и $q \geq 1$, что если $z = (x, y)$ — решение одного из включений (3.12), $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, точки $z(\inf \pi(z))$ и $z(\sup \pi(z))$ лежат на положительном луче оси ординат и ордината точки $z(\inf \pi(z))$ больше R , то

$$\frac{1}{q} \leq \frac{y(\sup \pi(z))}{y(\inf \pi(z))} \leq q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует идею доказательства леммы 6.2 из [1]. Положим $V_\lambda(x, y) = G_\lambda(x) + y^2/2$, $g_0 = \min\{G_\lambda(u) : u \in \mathbb{R}, \lambda \in [c, d]\}$, $R_1 = 1 + \sqrt{1 - 2g_0}$. Так как $G_\lambda(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по λ , то найдется такое $R_2 > 0$, что $G_\lambda(x) > R_1$ при всех $\lambda \in [c, d]$ и всех x , для которых $|x| > R_2$. Пусть $R_3 = \max\{V(x, y) : |x| \leq R_2, |y| \leq R_1\}$ и

$$q = \sqrt{e \int_0^T h(t) dt}.$$

Пусть $z = (x, y)$ – решение одного из включений (3.12), $s_0, t_0 \in \pi(z)$, $0 \leq t_0 - s_0 \leq T$, $\varphi(t) = V_\lambda(x(t), y(t))$ (с соответствующим λ) и $\varphi(t) > R_3$ при всех $t \in [s_0, t_0]$. Тогда при всех $t \in \pi(z)$ $|x(t)| > R_2$ или $|y(t)| > R_1$. Если $|y(t)| > R_1$, то $(|y(t)| - 1)^2 > 1 - 2g_0$, $|y(t)|^2/2 > |y(t)| - g_0$ и поэтому $|y(t)| < |y(t)|^2/2 + g_0 \leq \varphi(t)$. Если $|y(t)| \leq R_1$, то $|x(t)| > R_2$, $G_\lambda(x(t)) > R_1 \geq |y(t)|$ и поэтому $|y(t)| \leq G_\lambda(x(t)) + |y(t)|^2/2 = \varphi(t)$. Так как

$$|\varphi'(t)| = |\gamma_\lambda(x(t))x'(t) + y(t)y'(t)| = |y(t)| |x''(t) + \gamma_\lambda(x(t))|$$

почти при всех $t \in \pi(z)$, то в силу сказанного $|\varphi'(t)| \leq \varphi(t)h(t)$, $|(\ln(\varphi(t)))'| \leq h(t)$,

$$|\ln \varphi(t_0) - \ln \varphi(s_0)| \leq \int_0^T h(t) dt, \quad \frac{1}{q^2} \leq \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(s_0)} \leq q^2.$$

Если теперь $z = (x, y)$ – решение одного из включений (3.12), $s_0, t_0 \in \pi(z)$, $0 \leq t_0 - s_0 \leq T$ и $\varphi(s_0) > q^2 R_3$, то в силу сказанного выше $\varphi(t) > R_3$ при всех $t \in [s_0, t_0]$.

Полагаем $R = q^2 R_3$. Нам осталось только заметить, что если точки $z(s_0)$ и $z(t_0)$ лежат на оси ординат, то $\varphi(s_0) = (y(s_0))^2/2$, $\varphi(t_0) = (y(t_0))^2/2$ и поэтому $1/q \leq |y(t_0)/y(s_0)| \leq q$. Лемма доказана.

В случае, когда отрезок $[c, d]$ состоит из одной точки, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть

(3.11') функция $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируема, $G(u) = \int_0^u \gamma(s) ds$,
 $\lim_{|u| \rightarrow \infty} G(u) = \infty$, функция $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ T -периодична и интегрируема.

Тогда пространство решений включения

$$(3.12') \quad x'' \in [-\gamma(x) - h(t), -\gamma(x) + h(t)]$$

удовлетворяет условию

(3.13') найдутся такие $R > 0$ и $q > 1$, что если $z = (x, y)$ – решение включения (3.12'), $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, точки $z(\inf \pi(z))$ и $z(\sup \pi(z))$ лежат на положительном луче оси ординат и ордината точки $z(\inf \pi(z))$ больше R , то

$$\frac{1}{q} \leq \frac{y(\sup \pi(z))}{y(\inf \pi(z))} \leq q.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если пространство решений Z лежит в пространстве решений (3.12'), то пространство Z также удовлетворяет условию (3.13').

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2), (3.11), каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условию (2.1) и лежит в пространстве решений включения (3.12). Пусть при $Q = p_0 > 0$ выполнены условия (2.3), (2.3'), (3.7) и (3.7'). Тогда выполнено условие (1.6), причем все точки, соответствующие постоянным решениям, принадлежат одному из компактов в (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 выполнено условие (2.2). Фиксируем $R > 0$ и $q \geq 1$ в соответствии с леммой 3.3. При таком выборе если z принадлежит Z_λ , $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$ и $z(t) = \vec{0}$ при некотором $t \in \pi(z)$, то ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с осью ординат ограничены сверху числом R .

Если теперь

(3.14) $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$ и $x(t) = 0$, $y(t) > R$ при некотором $t \in \pi(z)$,

то кривая $z(t)$ уже не может проходить через $\vec{0}$. Кривая не может лежать целиком в верхней полуплоскости, так как, находясь в верхней полуплоскости, текущая точка этой кривой должна двигаться вправо, что противоречило бы условию $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$. По аналогичным соображениям кривая не может лежать целиком в нижней полуплоскости. Пройти из верхней полуплоскости через нижнюю и вернуться обратно в верхнюю полуплоскость кривая может, лишь если обойдет начало координат $\vec{0}$ по часовой стрелке. Через $n(z)$ обозначим число совершаемых кривой $z(t)$ оборотов.

По лемме 2.8 множество M функций z , принадлежащих Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, таких, что $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, $x(\inf \pi(z)) = x(\sup \pi(z)) = 0$, $R \leq y(\inf \pi(z)) \leq q^3 R$ и кривая $z(t)$ совершает 1 оборот вокруг начала координат, является ограниченным. Его замкнутость очевидна. Так как пространства Z_λ принадлежат $R_c(U)$, то из сказанного вытекает компактность множества M . Так как непрерывная функция достигает на компакте своего минимума, то при некотором $\varepsilon > 0$ время, затрачиваемое любой такой кривой $z(t)$ на 1 оборот вокруг начала координат, не меньше ε .

В силу выбора q если $z = (x, y)$ принадлежит Z_λ , $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$ и $x(t) = 0$, $qR \leq y(t) \leq q^2 R$ при некотором $t \in \pi(z)$, то ординаты всех других пересечений этой кривой с осью ординат лежат в отрезке $[R, q^3 R]$ и в силу сказанного выше время, затрачиваемое кривой $z(t)$ на каждый оборот вокруг $\vec{0}$, не менее ε , поэтому $n(z) \leq T/\varepsilon$. Другими словами, если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq T$, $z(\inf \pi(z)) = z(\sup \pi(z))$ и $n(z) \geq n_0$, где n_0 — любое целое число, большее T/ε , то кривая $z(t)$ не пересекает отрезок $[qR, q^2 R]$ оси ординат и поэтому либо ординаты всех точек пересечения с осью ординат строго меньше qR , либо ординаты всех точек пересечения с осью ординат строго больше $q^2 R$.

Для $n = 1, 2, \dots$ через D_n обозначим множество $\{(\lambda, z): \lambda \in [c, d], z \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, T], z(0) = z(T), n(z) = n, \text{ ордината точки по крайней мере одного пересечения кривой } z(t) \text{ с осью ординат больше } qR\}$. В силу замечания предыдущего абзаца при $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ если $(\lambda, z) \in D_n$, то ординаты всех точек пересечения кривой $z(t)$ с осью ординат больше $q^2 R$.

Пусть $D_0 = \{(\lambda, z): \lambda \in [c, d], z \in Z_\lambda, \pi(z) = [0, T], z(0) = z(T), \text{ ординаты точек пересечения кривой } z(t) \text{ с осью ординат не больше } qR\}$, $D_* = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{n_0}$.

Из замечания 3.2 легко вытекает компактность множеств D_n . В силу сделанных замечаний компакты D_n , $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, попарно не пересекаются и не пересекаются с компактом D_* . Тем самым в силу представления $D = D_* \cup D_{n_0+1} \cup D_{n_0+2} \cup \dots$ мы убедились в выполнении условия (1.6), и при этом только компакт D_* содержит точки, соответствующие постоянным решениям. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия (1.1), (1.2), (3.11'), каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, удовлетворяет условию (2.1) и лежит в пространстве решений включения (3.12'). Пусть при $Q = p_0 > 0$ выполнены условия (2.3), (2.3'), (3.7) и (3.7'). Тогда выполнено условие (1.6).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (1.1), (2.1),
(3.1') функция $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна

и

$$(3.2') \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} > 0.$$

Пусть выполнены условия (3.3) и

(3.3') для любой последовательности $\mu_i \rightarrow 0$, $\mu_i > 0$, последовательность функций $g_i(x) = \mu_i \gamma(x/\mu_i)$ сходится на отрезке $[-1, 0]$ к $-\infty$ в смысле выполнения следующего условия: для любого $R > 0$ мера множества $\{x: x \in [-1, 0], g_i(x) > -R\}$ стремится к нулю.

Пусть в обозначениях (3.11') множество $F(t, x, y)$ лежит в отрезке $[-\gamma(x) - h(t), -\gamma(x) + h(t)]$ при всех $(t, x, y) \in U$. Тогда существует такое решение $x(t)$ включения $x'' \in F(t, x, x')$, что $\pi(x) = [0, T]$, $x(0) = x(T)$ и $x'(0) = x'(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Ввиду (3.2') найдутся такие $Q > 0, \varepsilon > 0$, что $\gamma(x)/x > \varepsilon^2$ при $|x| \geq Q$. При этом выберем ε так, чтобы линейное уравнение $x'' + \varepsilon^2 x = 0$ не имело ненулевых T -периодических решений.

2) Через Y обозначим пространство решений уравнения $x'' + x'/(1 + |x'|) + \gamma(x) = 0$. Уравнение взято из [1; § 6.1].

Рассмотрим пространства Z_λ , $\lambda \in [0, T]$, определив их в слое $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ как $Z *_\lambda Y$ и затем доопределяя их во всем пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ по T -периодичности.

Здесь $Z *_\lambda Y$ обозначает результат подклеивания пространства Y к пространству Z , причем в качестве вспомогательной функции h берется проектирование произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ на сомножитель $\mathbb{R}$, т.е. пространство $Z *_\lambda Y$ при $t \leq s$ совпадает с пространством Z , а при $t \geq s$ — совпадает с пространством Y (см. [6; § VIII.7] или [8; § 11.5]).

3) Для $\lambda \in [-1, 0]$ через Z_λ ($\in R_{ceh}(U)$) [9] обозначим пространство решений уравнения $x'' - \lambda \varepsilon^2 x + (1 + \lambda)(x'/(1 + |x'|) + \gamma(x)) = 0$.

4) Пространство Z_0 мы определили дважды. Но оба способа определения дают нам один и тот же результат. В обоих случаях пространство Z_0 совпадает с пространством Y решений уравнения $x'' + x'/(1 + |x'|) + \gamma(x) = 0$, склеивая, таким образом, гомотопии в 2) и 3). Свойства этой склеенной гомотопии Γ , при которой параметр λ сначала меняется от -1 до 0 , а потом от 0 до T , мы будем обсуждать.

5) Не ограничивая общности, мы можем считать, что $h(t) \geq 1$ при всех t . Тогда все пространства Z_λ при $\lambda \in [0, T]$ лежат в пространстве решений включения (3.11'). Поэтому к гомотопии Z_λ , $\lambda \in [0, T]$, применимо следствие леммы 3.4.

Но если $x(t)$ – решение уравнения

$$x'' - \lambda \varepsilon^2 x + (1 + \lambda) \left(\frac{x'}{1 + |x'|} + \gamma(x) \right) = 0, \quad \lambda \in (-1, 0],$$

то

$$x''(t)x'(t) - \lambda \varepsilon^2 x(t)x'(t) + (1 + \lambda) \left(\frac{(x'(t))^2}{1 + |x'(t)|} + \gamma(x(t))x'(t) \right) = 0.$$

Если при этом $\pi(x) = [0, T]$, $x(0) = x(T)$ и $x'(0) = x'(T)$, то интегрируя по t от 0 до T , получаем

$$(1 + \lambda) \int_0^T \frac{(x'(t))^2}{1 + |x'(t)|} dt = 0,$$

что возможно лишь если функция $x(t)$ постоянна: $x(t) \equiv \xi$. Тогда $-\lambda \varepsilon^2 \xi + (1 + \lambda)\gamma(\xi) = 0$. Но если $|\xi| \geq Q$, то $-\lambda \varepsilon^2 \xi + (1 + \lambda)\gamma(\xi) > -\lambda \varepsilon^2 \xi + (1 + \lambda)\varepsilon^2 |\xi| = \lambda \varepsilon^2 (|\xi| - \xi) + \varepsilon^2 |\xi| \geq \varepsilon^2 |\xi| > 0$. Таким образом, $|\xi| < Q$. Поэтому если мы отнесем соответствующие точки к компакту леммы 3.4, содержащему точки, соответствующие постоянным решениям, то выполнение требуемого в (1.6) условия сохраняется.

В силу нашего выбора ε при $\lambda = -1$ есть единственное T -периодическое решение $x(t) \equiv 0$.

Таким образом, условие (1.6) выполнено для всей гомотопии Γ .

При $\lambda = -1$ в силу линейности уравнения сдвиг линеен. В силу нашего выбора ε сдвиг невырожден. Поэтому его степень равна ± 1 на окружности любого радиуса $r > 0$. Таким образом, выполнены все предположения формулировки теоремы 1.1, если в качестве пространства Z_c теоремы 1.1 взять пространство Z_{-1} решений уравнения $x'' + \varepsilon^2 x = 0$. Ссылка на теорему 1.1 завершает рассуждение. Теорема доказана.

В [1] приведена следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$(3.15) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

непрерывная функция $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -периодична. Тогда существует такое решение $x(t)$ уравнения $x'' + f(x(t)) = e(t)$, что $\pi(x) = [0, T]$, $x(0) = x(T)$ и $x'(0) = x'(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в нашем случае сводится к ссылке на теорему 3.1. При этом надо положить $\gamma = f$ и $h(x) \equiv \sup\{|e(t)| : t \in \mathbb{R}\}$. Выполнение условий (3.1')–(3.3') и (3.3) вытекает из (3.15). Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.1. Пусть выполнены предположения теоремы 3.2. Тогда существует такое решение $x(t)$ уравнения

$$x'' + f(x)(\sin^2(\ln |x|))^{1/|x|} + x = e(t),$$

что $\pi(x) = [0, T]$, $x(0) = x(T)$ и $x'(0) = x'(T)$. Полагаем

$$\gamma(x) = f(x)(\sin^2(\ln |x|))^{1/|x|} + x, \quad h \equiv \sup\{|e(t)| : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lambda_i = (2\pi i)^{-1}.$$

Тогда $g_i(x) = \lambda_i \gamma(x/\lambda_i) = \lambda_i \gamma(x/\lambda_i) (\sin^2(\ln|x|))^{\lambda_i/|x|} + x$. Неотрицательный множитель $A = (\sin^2(\ln|x|))^{\lambda_i/|x|}$ обращается в нуль в точках $x = \pm e^{\pm \pi i}$, поэтому

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} = 1.$$

На любом отрезке, не задевающем эти точки, множитель A равномерно сходится к единице. В силу этого, леммы 3.1 и (3.15) мы имеем выполнение условий (3.3) и (3.3'). В силу теоремы 3.1 существует такое решение $x(t)$ уравнения

$$x'' + f(x)(\sin^2(\ln|x|))^{1/|x|} + x = e(t),$$

что $\pi(x) = [0, T]$, $x(0) = x(T)$ и $x'(0) = x'(T)$.

§ 4. Смешанные условия на рост слагаемых

Кажется, еще никто не обратил внимание, что условия типа (3.15) могут фигурировать в списке условий спектра Фучика. В этом параграфе мы сопоставим его в виде (3.1)–(3.3) с наработанной идеологией спектра Фучика [9], [13]–[15]. Для упрощения обозначений будем рассматривать конкретный временной отрезок $[0, \pi]$.

В предварительных рассуждениях при описании поведения решений в левой полуплоскости $x < 0$ будем ориентироваться на условие (3.7'). Сформулируем соответствующее ограничение для правой полуплоскости $x \geq 0$. Пусть $U_+ = (-\infty, \infty) \times ([0, \infty) \times (-\infty, \infty))$ и

(4.1) каждое из пространств $Z_i \in P_{ceh}^\pi(U)$, $i = 1, 2, \dots$, имеет вид (2.1), последовательность пространств Z_i при $i \rightarrow \infty$ сходится на множестве U_+ к пространству решений включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$, $m = 1, 2, \dots$, и задача $z = (x, y) \in \limsup_{i \rightarrow \infty} Z_i$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) = \pi/m$ или $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) = \pi/(m+1)$, $x(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z) \rangle$, $x(\inf \pi(z)) = x(\sup \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > 0$ не имеет решения.

ЛЕММА 4.1. В обозначениях (1.1), (4.1) для любых $0 < R_0 \leq R_1 < \infty$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что если $z_i = (x_i, y_i) \in Z_i$, $i = 1, 2, \dots$, $x_i(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z_i) \rangle$, $x_i(\inf \pi(z_i)) = x_i(\sup \pi(z_i)) = 0$, $y_i(\inf \pi(z_i)) \in [R_0, R_1]$, то, начиная с некоторого $i = i_0$, $\pi/(m+1) + \varepsilon \leq \sup \pi(z_i) - \inf \pi(z_i) \leq \pi/m - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строение пространств Z_i при $x \leq 0$ не отражается на обобщаемых связях. Поэтому мы можем предположить дополнительно, что пространство Z_i симметрично относительно $\bar{0}$, т.е. не меняется при замене переменных $(t, x, y) \mapsto (t, -x, -y)$.

В силу π -периодичности рассматриваемых пространств без ограничения общности мы можем предполагать, что $0 \leq \inf \pi(z_m) \leq \pi$.

Допустив, что доказываемое не имеет места, получаем существование последовательности $\{z_i = (x_i, y_i) : i \in A\}$, для всех членов которой z_i принадлежит Z_i , $\inf \pi(z_i) \in [0, \pi]$, $\sup \pi(z_i) - \inf \pi(z_i) \leq \pi/(m+1) + 1/i$, $x_i(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z_i) \rangle$, $x_i(\inf \pi(z_i)) = x_i(\sup \pi(z_i)) = 0$, $y_i(\inf \pi(z_i)) \in [R_0, R_1]$ либо для всех членов $z_i \in Z_i$, $\inf \pi(z_i) \in [0, \pi]$, $\sup \pi(z_i) - \inf \pi(z_i) \geq \pi/m - 1/i$, $x_i(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z_i) \rangle$, $x_i(\inf \pi(z_i)) = x_i(\sup \pi(z_i)) = 0$, $y_i(\inf \pi(z_i)) \in [R_0, R_1]$. Случаи вполне аналогичны. Ограничимся рассмотрением первого.

Каждую из функций z_i максимально продолжим вправо до функции $z_i^* \in Z_i^+$. По лемме 10.4.1г из [8] существуют такое максимально продолженное вправо решение $z = (x, x')$ включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$ и такая подпоследовательность $\{z_i^* : i \in A_0\}$ последовательности $\{z_i^* : i \in A\}$, что для любой точки $t \in \pi(z)$ справедливо следующее: $\pi(z_i) \ni t$, начиная с некоторого $i = i_0$, и последовательность $\{z_i^*|_{[\inf \pi(z_i), t]} : i \in A\}$ сходится к функции $z|_{(-\infty, t] \cap \pi(z)}$.

Но пространство решений включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$ конечно. В силу результатов [16; §1] ни одно решение включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$ не может уйти за конечное время на бесконечность, поэтому $\inf \pi(z) + \pi/(m+1) \in \pi(z)$.

При этом так как $x'(\inf \pi(z)) \geq R_0 > 0$, то $x(t) > 0$ при $t \in (\inf \pi(z), t_0)$ для некоторого $t_0 > \inf \pi(z)$. Кроме того ввиду аналогичного свойства функций x_i на отрезке $[t_0, \inf \pi(z) + \pi/(m+1)]$ функция x должна обратиться в нуль. Но среди решений включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$ этому условию удовлетворяют только функции вида $a \cos((m+1)t + t_0)$ и, следовательно, $x(t) > 0$ при $t \in (\inf \pi(z), \inf \pi(z) + \pi/(m+1))$, $x(\inf \pi(z)) = x(\inf \pi(z) + \pi/(m+1)) = 0$. Но существование такой функции z противоречит условию (4.1). Сделанное допущение привело нас к противоречию. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть в обозначениях (1.1), (1.2)

(4.2) пространство $Y_{\lambda, \mu}$ получается из пространства Z_λ при замене переменных $(t, x) \mapsto (t, \mu x)$,

$0 < R_0 \leq R_1 < \infty$ и

(4.3) для некоторой последовательности $\mu_i \rightarrow 0$ при любых $\lambda_i \in [c, d]$ последовательность пространств Y_{λ_i, μ_i} сходится на множестве U_+ к пространству решений включения $x'' \in -[m^2, (m+1)^2]x$, $m = 1, 2, \dots$, и задача $z = (x, y) \in \lim \sup_{i \rightarrow \infty} Z_{\lambda_i, \mu_i}$, $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) = \pi/m$ или $\sup \pi(z) - \inf \pi(z) = \pi/(m+1)$, $x(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z) \rangle$, $x(\inf \pi(z)) = x(\sup \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > 0$ не имеет решения.

Тогда найдутся такие $i_0 = 1, 2, \dots$, $\varepsilon > 0$, что если $z = (x, y) \in Y_{\lambda, \mu_i}$, $i = i_0, i_0+1, i_0+2, \dots$, $\lambda \in [c, d]$, $x(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z) \rangle$, $x(\inf \pi(z)) = x(\sup \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) \in [R_0, R_1]$, то $\pi/(m+1) + \varepsilon \leq \sup \pi(z) - \inf \pi(z) \leq \pi/m - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустив противное, получаем существование такой последовательности функций $z_i = (x_i, y_i) \in Y_{\lambda_i, \mu_i}$, $i \in A$, что $x_i(t) > 0$ при $t \in \langle \pi(z_i) \rangle$, $x_i(\inf \pi(z_i)) = x_i(\sup \pi(z_i)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) \in [R_0, R_1]$,

$$\liminf_{\substack{i \in A \\ i \rightarrow \infty}} (\sup \pi(z_i) - \inf \pi(z_i)) \geq \frac{\pi}{m} \quad \text{или} \quad \limsup_{\substack{i \in A \\ i \rightarrow \infty}} (\sup \pi(z_i) - \inf \pi(z_i)) \leq \frac{\pi}{m+1}.$$

В силу (4.3) это входит в противоречие с доказанным в лемме 4.1. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть в обозначениях (1.1), (1.2), (4.2) и (3.11) каждое из пространств Z_λ , $\lambda \in [c, d]$, лежит в пространстве решений включения $x'' \in [-\gamma_\lambda(x) - h(t), -\gamma_\lambda(x) + h(t)]$ и выполнены условия (3.7') и (4.3). Тогда найдется такое $i_0 = 1, 2, \dots$, что если $z = (x, y) \in Y_{\lambda, \mu_i}$, $i = i_0, i_0+1, i_0+2, \dots$, $\lambda \in [c, d]$, $\pi(z) = [0, \pi]$ и $z(0) = z(\pi)$, то ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с осью ординат отличны от единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.3 найдется $q \geq 1$, для которого выполнено условие (3.13). Положим $R_0 = 1/q$ и $R_1 = q$.

В силу условия (3.7') и следствия леммы 2.3 найдется такое число $R_2 > 0$, что если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\pi(z) = [s_0, t_0]$, $x(s_0) = x(t_0) = 0$, $x(t) < 0$ при $t \in (s_0, t_0)$ и $y(s_0) < -R_2$, то $t_0 - s_0 < \varepsilon$.

В силу лемм 2.5 и 2.7 найдется такое число $R_3 > 0$, что если $z = (x, y)$ принадлежит Z_λ^+ , $x(\inf \pi(z)) = 0$, $y(\inf \pi(z)) > R_3$, то при некотором $t_0 \in \pi(z)$ кривая $z(t)$, $t \in [\inf \pi(z), t_0]$, совершает $m + 1$ оборот вокруг начала координат, пересекая отрицательный луч оси ординат в точках с ординатой меньше $-R_2$.

В соответствии с леммой 4.2 зафиксируем i_0 так, что $1/\mu_{i_0} > R_3$. В силу леммы 3.3 если кривая $z(t)$, $z \in Y_{\lambda, \mu_i}$ с $i \geq i_0$, $\pi(z) \subseteq [0, \pi]$, пересекает ось ординат в точке с ординатой 1, то ординаты других возможных ее пересечений с осью ординат лежат в отрезке $[R_0, R_1]$. Поэтому на один оборот кривая $z(t)$ затрачивает время, строго больше, чем $\pi/(m + 1)$, и строго меньше, чем π/m . Поэтому на не более чем m оборотов кривая затрачивает время меньше, чем π , а на не менее чем $m + 1$ оборот — больше, чем π .

Это означает, что нет таких функций $z = (x, y) \in Y_{\lambda, \mu_i}$, что $\pi(z) = [0, \pi]$, $x(0) = x(\pi)$, и кривая $z(t)$ по крайней мере один раз пересекает положительный луч оси ординат в точке с ординатой 1. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (1.1), (2.1), (3.1'), (3.2'), (3.3'), (3.11') и $F(t, x, y) \subseteq [-\gamma(x) + h(t), -\gamma(x) - h(t)]$ при $(t, x, y) \in U$. Пусть

$$(4.4) \quad m^2 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x)}{x} \leq (m + 1)^2, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и

$$(4.5) \quad m^2 < \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} \int_0^x \gamma(u) du, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} \int_0^x \gamma(u) du < (m + 1)^2.$$

Тогда существует такое решение $x(t)$ включения $x'' \in F(t, x, x')$, что $\pi(x) = [0, \pi]$, $x(0) = x(\pi)$ и $x'(0) = x'(\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (4.5) следует существование такой последовательности² $x_i \rightarrow \infty$, что предел

$$\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2x_i^2} \int_0^{x_i} \gamma(u) du$$

существует и $m^2 < \xi < (m + 1)^2$. Положим $\mu_i = 1/x_i$.

Ввиду (3.2') найдутся такие $Q > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $\gamma(x)/x > \varepsilon^2$ при $|x| \geq Q$. При этом выберем ε так, чтобы линейное уравнение $x'' + \varepsilon^2 x = 0$ не имело ненулевых T -периодических решений.

2) Через Y обозначим пространство решений уравнения $x'' + x'/(1 + |x'|) + \gamma(x) = 0$.

Рассмотрим пространства Z_λ , $\lambda \in [0, \pi]$, определив их в слое $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ как $Z *_\lambda Y$ и затем доопределяя их во всем пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ по π -периодичности³.

²В контексте рассматриваемых вопросов — наблюдение С. Р. Габдрахманова.

³Обозначение $Z *_\lambda Y$ было введено при доказательстве теоремы 3.1.

3) Для $\lambda \in [-1, 0]$ через Z_λ ($\in R_{ceh}(U)$) [9] обозначим пространство решений уравнения

$$x'' - \lambda \varepsilon^2 x + (1 + \lambda) \left(\frac{x'}{1 + |x'|} + \gamma(x) \right) = 0.$$

4) Пространство Z_0 мы определили дважды. Но оба способа определения дают нам один и тот же результат. В обоих случаях пространство Z_0 совпадает с пространством Y решений уравнения $x'' + x'/(1 + |x'|) + \gamma(x) = 0$, склеивая, таким образом, гомотопии в 2) и 3). Свойства этой склеенной гомотопии Γ , при которой параметр λ сначала меняется от -1 до 0 , а потом от 0 до π , мы будем обсуждать.

5) В силу леммы 2.1 при любом $\lambda \in [-1, \pi]$ пространство Z_λ удовлетворяет условию (2.2).

6) Определим пространство $Y_{\lambda, \mu}$ в соответствии с (4.2).

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $h(t) \geq 1$ при всех t . Тогда все пространства Z_λ при $\lambda \in [0, \pi]$ лежат в пространстве решений включения (3.11').

При $\lambda \in [-1, 0]$ в качестве пространства Z_λ мы имеем пространство решений уравнения

$$x'' + \frac{(1 + \lambda)x'}{1 + |x'|} + \gamma_\lambda(x) = 0$$

с $\gamma_\lambda(x) = (1 + \lambda)\gamma(x) - \lambda \varepsilon^2 x$.

Для $\lambda \in [0, \pi]$ условие (4.4) влечет выполнение первой части условия (4.3) (о сходимости к пространству решений включения $x'' \in -[m^2, (m + 1)^2]x$), а наш выбор последовательности $\mu_i \rightarrow 0$ влечет выполнение второй части условия (4.3) (об отсутствии в предельном пространстве соответствующих решений [13]–[15]). Таким образом, мы имеем возможность сослаться на лемму 4.3. Учитывая связь между Z_λ и Y_{λ, μ_i} , это означает, что найдется такое $R > 0$,⁴ что если $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\lambda \in [0, \pi]$, $\pi(z) = [0, \pi]$ и $z(0) = z(\pi)$, то ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с осью ординат отличны от R .

Как и в доказательстве теоремы 3.1, при $\lambda \in [-1, 0]$ периодические решения являются константами. Поэтому полученная в предыдущем параграфе оценка продолжается и на эти значения параметра λ .

По лемме 2.8 множество M функций $z = (x, y) \in Z_\lambda$, $\lambda \in [c, d]$, $\pi(z) = [0, \pi]$ и $z(0) = z(\pi)$, для которых ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с положительным лучом оси ординат не превосходят R , является ограниченным.

Через C обозначим верхнюю грань значений $\sup\{|x(t)|, |y(t)| : t \in \pi(z)\}$ по всем решениям $z \in M$.

Через W обозначим множество функций $z = (x, y)$ пространства $C([0, \pi], \mathbb{R}^2)$ таких, что $\sup\{|x(t)|, |y(t)| : t \in [0, \pi]\} < 2C$ и ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с положительным лучом оси ординат меньше R . Множество W открыто и ограничено в пространстве $C_s^+(U, 0)$.

При таком выборе если функция $z = (x, y)$ принадлежит $[W] \setminus W$, $\pi(z) = [0, \pi]$ и $z(0) = z(\pi)$, то ординаты точек пересечения кривой $z(t)$ с положительным лучом оси ординат не превосходят R . Поэтому в силу определения C верхняя грань $\sup\{|x(t)|, |y(t)| : t \in [0, \pi]\}$ не превосходит $C < 2C$. Но так как при этом $z \notin W$, то ордината хотя бы одной из точек пересечения кривой $z(t)$ с положительным лучом оси ординат равна R . Существование такой функции z противоречит выбору числа R . Таким образом, множество W удовлетворяет условиям (1.8), (1.9). При

⁴А именно $R = 1/\mu_{i_0} = x_{i_0}$.

$\lambda = -1$ мы имеем линейное уравнение $x'' + \varepsilon^2 x = 0$, поэтому выполнено и условие (1.10) с $c = -1$. Нам остается сослаться на теорему 1.2. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть непрерывная функция $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (4.4) и (4.5). Пусть непрерывная функция $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ π -периодична. Тогда существует такое решение $x(t)$ уравнения $x'' + \gamma(x) = e(t)$, что $\pi(x) = [0, \pi]$, $x(0) = x(\pi)$ и $x'(0) = x'(\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на теорему 4.1. При этом надо положить $h(t) \equiv \sup\{|e(t)| : t \in \mathbb{R}\}$. Теорема доказана.

Естественно, условия теорем 4.1 и 4.2 допускают “шевеления” типа приведенных в примере 3.1.

Список литературы

1. *Mawhin J.* Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations // Topological methods in differential equations and inclusions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 291–376.
2. *Филиппов В. В.* О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 139–160.
3. *Филиппов В. В.* Смесь методов Лерэ–Шаудера и Пуанкаре–Андрона в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1709–1711.
4. *Filippov V. V.* Remarks on periodic solutions of ordinary differential equations // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. № 3. P. 431–451.
5. *Филиппов В. В.* Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
6. *Филиппов В. В.* Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
7. *Filippov V. V.* Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations // Topology in nonlinear analysis. Warsaw: Polish Acad. Sci., 1996. P. 171–192. (Banach Center Publ. V. 35.)
8. *Filippov V. V.* Basic topological structures of ordinary differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
9. *Филиппов В. В.* О дифференциальных включениях второго порядка // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 2. С. 587–623.
10. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
11. *Филиппов В. В.* О теории задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 95–118.
12. *Филиппов В. В.* Что лучше в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Лерэ–Шаудера или сдвиг вдоль траекторий? // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1049–1062.
13. *Gossez J.-P., Omari P.* Nonresonance with respect to the Fučík spectrum for periodic solutions of second order ordinary differential equations // Nonlinear Anal. 1990. V. 14. P. 1079–1104.
14. *Gossez J.-P., Omari P.* Periodic solutions of a second order ordinary differential equation: a necessary and sufficient condition for nonresonance // J. Differential Equations. 1991. V. 94. № 1. P. 67–82.
15. *Habets P., Omari P., Zanolin F.* Nonresonance conditions on the potential with respect to the Fučík spectrum for the boundary value problem // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25. № 4. P. 1305–1340.
16. *Филиппов В. В.* О существовании периодических решений // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 769–784.