Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 11, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:54:37

УДК 517.98

А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов

Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов

Рассматриваются некоторые задачи спектральной теории линейных отношений на банаховых пространствах. Изучаются линейные дифференциальные включения в банаховом пространстве. Ведется построение фазового пространства и решений с использованием спектральной теории линейных отношений, эргодических теорем и вырожденных полугрупп линейных операторов.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Статья посвящена изучению некоторых вопросов спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) и построению решений линейных дифференциальных включений с помощью вырожденных полугрупп линейных ограниченных операторов. В последнее время наметился устойчивый интерес к теории линейных отношений, и в связи с этим следует упомянуть о появившихся недавно монографиях [1], [2]. В них имеется обширная библиография, и они удачно дополняют одна другую: первая посвящена общим вопросам теории линейных отношений и, в частности, их спектральной теории, во второй рассматриваются приложения к дифференциальным уравнениям. Отметим, что в российской математической литературе теория линейных отношений не нашла достаточного освещения, и обратим внимание на работу [3], в которой рассматривались линейные отношения в гильбертовом пространстве и, в особенности, вопросы, связанные с индефинитной метрикой.

Приведем используемые ниже понятия из теории линейных отношений. При этом, руководствуясь принципом автономности изложения, мы не всегда придерживаемся терминологии из [1], [2] (например, мы сознательно избегаем понятия многозначного линейного оператора) и в связи с потребностями спектральной теории ограничиваемся, по преимуществу, рассмотрением линейных отношений на одном банаховом пространстве, хотя многие понятия можно вводить, как в [1], для линейных отношений между двумя линейными нормированными пространствами.

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется *линейным отношением между банаховыми пространствами X и Y* . Если оно замкнуто в $X \times Y$, то называется *замкнутым линейным отношением*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00408).

Подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$, являющееся проекцией $\mathcal{A}$ на X , называется *областью определения линейного отношения* $\mathcal{A} \subset X \times Y$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$; кроме того, $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x, 0) \in \mathcal{A}\}$ — *ядро отношения* $\mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in Y \mid \exists x \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$ — *область его значений*, являющаяся проекцией $\mathcal{A}$ на Y . Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0 \forall y \in \mathcal{A}x$.

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X \times Y$ называется линейное подпространство из $X \times Y$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$.

Значит, $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$ и под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$.

Произведением линейных отношений $\mathcal{A} \subset X \times Y, \mathcal{B} \subset Y \times Z$, где Z — банахово пространство, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in D(\mathcal{B}) \subset Y \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}, (y, z) \in \mathcal{B}\}$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\} \subset Y \times X$.

Каждое линейное отношение $\mathcal{A} \subset X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\tilde{\mathcal{A}}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow 2^Y$, где $\tilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются и для их обозначения используется один и тот же символ $\mathcal{A}$.

Множество замкнутых линейных отношений из $X \times Y$ обозначим через $LR(X, Y)$; если же $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X, X)$. При этом множество $LO(X, Y)$ линейных замкнутых операторов, действующих из X в Y , считается включенным (при отождествлении с их графиком) в $LR(X, Y)$. Таким образом, $LR(X, Y)$ содержит банахово пространство $\text{Hom}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y . Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X, X)$ и $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X . Итак, $\text{End } X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Под записью $M \subset N$ условимся в дальнейшем понимать не обязательно строгое включение множества M в множество N ; иначе будем делать специальную оговорку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X, Y)$ называется *инъективным*, если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\text{Im } \mathcal{A} = Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X, Y)$ назовем *непрерывно обратимым*, если оно одновременно инъективно и сюръективно, и тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \text{Hom}(Y, X)$.

В следующем определении и в дальнейшем символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств. В выражении “линейное отношение” слово “линейное” будет, как правило, опускаться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Резольвентным множеством отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$. *Спектром отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X, \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$.

Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [4; § 4.8] и определение 2.1), причем $\text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A}) = \mathcal{A}0$, $\text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A}) = D(\mathcal{A}) \quad \forall \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. В связи с этими равенствами далее используются обозначения $\text{Ker } R$, $\text{Im } R$ вместо $\text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $\text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})$.

Если $B \in \text{End } X$ – квазинильпотентный оператор, то $\sigma(B^{-1}) = \emptyset$ (см. § 2). Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра отношения, далее используется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Расширенным спектром отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если выполнены следующие три условия:

- 1) $\mathcal{A}0 = \{0\}$, т.е. $\mathcal{A} \in LO(X)$;
- 2) резольвента $R(\cdot, \mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ допускает аналитическое продолжение в точку ∞ ;
- 3) $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{A}) = 0$.

В противном случае полагается $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называется *расширенным резольвентным множеством отношения* $\mathcal{A}$.

Из определения 1.5 и теоремы Лиувилля имеем, что если $X \neq \{0\}$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{A} \in LR(X)$, причем $\infty \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ при $\dim \mathcal{A}0 \geq 1$, т.е. когда $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$.

Определение расширенного спектра линейных операторов имеется в монографиях [4], [5]. Отметим, что приводимые в §§ 2–5 результаты демонстрируют неизмеримо более важную роль понятия расширенного спектра для линейных отношений.

На актуальность изучения линейных отношений указывают приводимые ниже в п.п. 1.1–1.8 *примеры задач*, в которых они могут возникать. Изложение будем сопровождать введением новых понятий и определений.

1.1. Если $\mathcal{A} \in LO(X)$ и $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$, то $\mathcal{A}^{-1}$ – линейное отношение из $LR(X)$. В частности, любой обыкновенный дифференциальный оператор $\mathcal{A}: C^{(n)}[a, b] \subset C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ вида

$$(\mathcal{A}x)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t),$$

где $a_k \in C[a, b]$, $k = \overline{1, n}$, действующий в банаховом пространстве $C[a, b]$ непрерывных и ограниченных на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ комплексных функций, имеет конечномерное ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ размерности $n \geq 1$, и поэтому $\mathcal{A}^{-1} \in LR(C[a, b])$ – линейное отношение. Если $\mathcal{A}x = x'$, то

$$\mathcal{A}^{-1}x = \int x(t) dt, \quad x \in C[a, b].$$

1.2. Пусть $\mathcal{A} \in LO(X)$ – линейный оператор, имеющий неплотную область определения, т.е. $\overline{D(\mathcal{A})} \neq X$. Тогда сопряженный оператор не определен. Тем не менее можно определить (см. также [2; п. 1.5]) сопряженное к $\mathcal{A}$ линейное отношение $\mathcal{A}^* \subset X^* \times X^*$, где X^* – сопряженное к X банахово пространство, естественным образом:

$$\mathcal{A}^* = \{(\eta, \xi) \in X^* \times X^* \mid \xi(y) = \eta(x) \forall (x, y) \in \mathcal{A}\}. \quad (1.1)$$

Ясно, что $\mathcal{A}^*0 = \{\eta \in X^* \mid \eta(x) = 0 \forall x \in D(\mathcal{A})\} = D(\mathcal{A})^\perp$. Важно отметить, что это определение отношения $\mathcal{A}^*$ пригодно и для $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$.

Впервые определение сопряженного линейного отношения было дано Дж. фон Нейманом в [6], и, видимо, эта работа дала старт развитию теории линейных отношений.

1.3. Любая псевдорезольвента $\mathcal{R}: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$, определенная на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, является резольventой отношения $\mathcal{A} = (\mathcal{R}(\lambda_0))^{-1} + \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in U$, причем $\rho(\mathcal{A}) \supset U$ и определение $\mathcal{A}$ не зависит от выбора числа λ_0 из U (более подробно см. §2).

1.4. Назовем последовательность операторов A_n из $LO(X)$ *сходящейся*, если резольventные множества $\rho(A_n)$, $n \geq 1$, имеют непустое пересечение, причем $\bigcap_{n \geq 1} \rho(A_n)$ содержит открытое связное множество U , и для некоторого $\lambda_0 \in U$ последовательность $R(\lambda_0, A_n)$, $n \geq 1$, является фундаментальной относительно операторной нормы в $\text{End } X$. Тогда для любого $\lambda \in U$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda, A_n) = R(\lambda) \in \text{End } X$ и функция $R: U \rightarrow \text{End } X$ является псевдорезольventой, но не обязательно резольventой некоторого оператора из $LO(X)$. С учетом п. 1.3 заключаем, что предел $\mathcal{A}_0$ последовательности замкнутых операторов является, вообще говоря, линейным отношением.

1.5. Сильно непрерывная полугруппа операторов $\{T(t); t \geq 0\}$ из алгебры $\text{End } X$ называется *вырожденной полугруппой*, если $T(0) \neq I$.

Пусть $\{T(t); t \geq 0\}$ – вырожденная полугруппа из $\text{End } X$. Тогда $T(0) = P$ – нетривиальный проектор и $X = X_0 \oplus X_1$, где $X_0 = \text{Im } P$, $X_1 = \text{Ker } P$. Следовательно, $T(t) = T_0(t) \oplus T_1(t)$, $t \geq 0$, где $T_0(t) = 0 \in \text{End } X_0 \forall t \geq 0$ и $\{T_1(t); t \geq 0\}$ – полугруппа класса C_0 из $\text{End } X$. Поэтому существуют постоянные $M_1 \geq 1$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\|T_1(t)\| \leq M_1 \exp(\omega_1 t)$, $t \geq 0$. Такая оценка позволяет рассмотреть преобразование Лапласа $\mathcal{R}: \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda > \omega_1\} \rightarrow \text{End } X$ полугруппы $\{T(t); t \geq 0\}$, которое является резольventой (см. п. 1.3) некоторого линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, причем $\text{Ker } \mathcal{R}(\lambda_0) = X_0$, если $\text{Re } \lambda_0 > \omega_1$. Линейное отношение $\mathcal{A}$ назовем *генератором вырожденной полугруппы операторов* $\{T(t); t \geq 0\}$.

Вырожденные полугруппы операторов возникают, например, при рассмотрении последовательностей полугрупп $\{T_n(t); t \geq 0\}$ класса C_0 , сходимость которых означает одновременное выполнение следующих условий:

- 1) $\|T_n(t)\| \leq M \exp(\omega t)$, $t \geq 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторых $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_0, A_n)x = \mathcal{R}(\lambda_0)x$ существует для некоторого $\text{Re } \lambda_0 > \omega$ и всех $x \in X$, где A_n – генератор полугруппы $\{T_n(t); t \geq 0\}$.

При выполнении этих условий $\mathcal{R}$ – резольвента некоторого отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, являющегося генератором некоторой вырожденной полугруппы операторов $\{T(t); t \geq 0\}$ из алгебры $\text{End } X$. Исследование сходимости вырожденных полугрупп проведено в [7]. Следует отметить, что применение теории линейных отношений позволяет упростить некоторые доказательства. Например, утверждение теоремы 3.6 в [7] легко следует из п. 1.3 (более подробное обсуждение проведено в § 2).

1.6. Линейный оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ называется *допускающим замкнутое расширение* (см. [8; гл. III, § 1, п. 3]), если из условий: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $x_n \in D(A)$; 2) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$, следует, что $y = 0$. Эквивалентное определение: линейный оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ *допускает замкнутое расширение*, если замыкание его графика $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in X \times X \mid x \in D(A)\}$ является графиком линейного оператора. В общем случае замыкание $\overline{A} = \overline{\Gamma(A)}$ графика оператора A является отношением из $LR(X)$.

1.7. Пусть $A, B \in \text{Hom}(X, Y)$. Функция $\mathcal{P}(\lambda) = A + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{C}$, называется линейным пучком. Известно, что многие задачи математической физики сводятся к изучению условий обратимости операторов $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Линейные пучки возникают также после специальных преобразований пучков полиномиальных и введенных С. Г. Крейном. В то же время исследование линейных пучков во многих случаях сводится к изучению спектральных свойств линейных отношений $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$ (см. § 6).

1.8. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in X \quad (1.2)$$

для линейного дифференциального уравнения

$$F\dot{x}(t) = Gx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad (1.3)$$

с парой линейных замкнутых операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , при $\text{Ker } F \neq \{0\}$.

В вопросах разрешимости и построения решений уравнения (1.3) используются два подхода. Первый основан на спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов (см., например, [9]–[12]). Второй базируется на использовании линейного дифференциального включения вида

$$\dot{y}(t) \in \mathcal{A}y(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad y(0) = y_0 \in D(\mathcal{A}), \quad (1.4)$$

где $\mathcal{A} \in LR(X)$ и имеет вид $\mathcal{A} = F^{-1}G$. Такой прием используется в монографии [2] (см. также [13] и замечание 7.1). Построение решений в [2], например, велось с использованием полугруппы линейных операторов, генератором которой служило отношение $\mathcal{A}$. Вместе с тем ограничения на $\mathcal{A}$ не позволяли рассматривать в [2] важные классы дифференциальных включений даже в конечномерном пространстве X (см. замечание 4.3).

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории линейных отношений, которые мало затронуты в монографиях [1], [2]. Многие из них оказываются весьма полезными в приложениях к теории дифференциальных

включений вида (1.4). В §2 приводятся некоторые результаты о псевдорезольвентах, которые можно получить, используя линейные отношения, а также доказаны теоремы о спектральном разложении линейного отношения и о спектре обратного отношения. В §3 получены алгебраические условия (в терминах стабилизации областей определения и образов нуля степеней линейного отношения) изолированности точки ∞ в расширенном спектре линейного отношения. В §4 с помощью эргодических теорем получено описание фазового пространства для дифференциального включения (1.4). С использованием некоторых аналогов условий теоремы Хилле–Филлипса–Иосиды–Феллера–Миядэры (ХФИФМ) [4] строятся сильно непрерывные вырожденные полугруппы операторов по линейным отношениям. В §5 строятся аналитические вырожденные полугруппы операторов по линейным секториальным отношениям. Приложения спектральной теории линейных отношений к спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов приводятся в §6, к задаче (1.2)–(1.3) – в §7.

§2. О псевдорезольвентах, спектральном разложении линейного отношения и спектре обратного отношения

Наиболее широким классом сильно непрерывных при $t > 0$ полугрупп ограниченных операторов, рассматриваемых в монографии [4], являются полугруппы класса E (см. [4; определение 18.4.1]). Достаточно полную информацию о полугруппах класса E дают псевдорезольвенты, построение которых велось в [4] с помощью преобразования Лапласа полугрупп. Исследованию псевдорезольвент уделяется достаточно большое внимание как в [4; гл. 18, теоремы 5.8.3–5.8.6, 5.9.1–5.9.3], так и в ряде современных работ (см. [1], [2], [7], [14], [15]). Использование линейных отношений, в особенности их спектральная теория, может оказать существенную помощь при изучении псевдорезольвент, поскольку псевдорезольвенты являются резольвентами линейных отношений, которые в [4] не рассматривались.

Опишем более подробно такой подход. При этом обратимся к ряду известных результатов и получим их более простым способом, а временами уточним их. Нам представляется, что такая точка зрения многим утверждениям о псевдорезольвентах придает более рельефное и естественное очертание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ называется *псевдорезольвентой*, если для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ выполняется равенство (тождество Гильберта)

$$\mathcal{R}(\lambda_1) - \mathcal{R}(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathcal{R}(\lambda_1)\mathcal{R}(\lambda_2).$$

Отметим, что определение 2.1 допускает случай, когда $\Omega = \{\lambda_0\}$ – одноточечное множество, и тогда $\mathcal{R}(\lambda_0)$ может быть любым эндоморфизмом из алгебры $\text{End } X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Псевдорезольвента $\mathcal{R}_{\max}: \Omega_{\max} \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ называется *максимальным продолжением псевдорезольвенты* $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$, если она является расширением любого другого продолжения $\mathcal{R}$. Такую псевдорезольвенту назовем *максимальной*. Множество $\text{Sing } \mathcal{R} = \mathbb{C}/\Omega_{\max}$ называется *сингулярным множеством псевдорезольвенты* $\mathcal{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $Q \in \text{End } X$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ – псевдорезольвента. Будем говорить, что оператор Q является *вложенным в $\mathcal{R}$ в точке λ_0* , если $\lambda_0 \in \Omega$ и $Q = \mathcal{R}(\lambda_0)$.

Непосредственно из определений 2.1–2.3 следует, что вопрос о вложении оператора в множество значений некоторой псевдорезольвенты может быть сведен к вопросу построения максимального продолжения псевдорезольвент.

ТЕОРЕМА 2.1. *Каждая псевдорезольвента $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ имеет единственное максимальное продолжение. Оно является резольвентой некоторого линейного отношения $\mathcal{A}$ и $\text{Sing } \mathcal{R} = \sigma(\mathcal{A})$. В частности, если $Q \in \text{End } X$ и $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, то существует единственная максимальная псевдорезольвента $\mathcal{R}_0: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ такая, что $\lambda_0 \in \Omega$ и Q является вложенным в $\mathcal{R}_0$ в точке λ_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ и два линейных отношения $\mathcal{A}_k = (\mathcal{R}(\lambda_k))^{-1} + \lambda_k I$, $k = 1, 2$, имеющие одинаковые области определения $D(\mathcal{A}_k) = \text{Im } \mathcal{R} = \text{Im } \mathcal{R}(\lambda_k)$, $k = 1, 2$. Поскольку $\mathcal{A}_k = \{(\mathcal{R}(\lambda_k)y, y + \lambda_k \mathcal{R}(\lambda_k)y) \mid y \in X\}$, то из тождества Гильберта получаем, что $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{R}(\lambda) = R(\lambda, \mathcal{A}) \ \forall \lambda \in \Omega$ и из доказанного следует, что $R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X$ – единственное максимальное продолжение $\mathcal{R}$. Это означает, что $\text{Sing } \mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Утверждение теоремы 2.1 о существовании максимального продолжения получено в [4; теорема 5.8.6] значительно большими усилиями. Утверждение о вложении ограниченного оператора в некоторую псевдорезольвенту доказано в [7; теорема 3.6]. Ввиду справедливости оценки

$$\|R(\lambda, A)\| \geq r(R(\lambda, A)) \geq (\text{dist}(\lambda, \sigma(A)))^{-1} \quad \forall \lambda \in \rho(A)$$

(см. следствие 2.1 из теоремы 2.4) теорема 2.1 содержит также предложение 3.5 из [7] о росте нормы псевдорезольвенты при приближении к $\text{Sing } \mathcal{R}$.

Понятие сингулярного множества псевдорезольвенты вводилось в [15]. В силу теоремы 2.1 оно совпадает со спектром линейного отношения, резольвента которого является расширением исследуемой псевдорезольвенты. Этот факт является чрезвычайно важным в вопросах изучения псевдорезольвент с помощью спектральной теории линейных отношений.

Следующая теорема уточняет утверждение 5.8.4 из [4] и легко следует из теоремы 2.1. В ее условиях символ $\text{Sp } \mathfrak{A}$ будет обозначать спектр коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей, т.е. $\text{Sp } \mathfrak{A}$ – компактное топологическое пространство ненулевых непрерывных комплексных гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, $\hat{a}: \text{Sp } \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$, $\chi \in \text{Sp } \mathfrak{A}$ – преобразование Гельфанда элемента a из $\text{Sp } \mathfrak{A}$ (см. [16]).

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $\mathcal{R}: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$ – максимальная псевдорезольвента и $\mathfrak{A}$ – наименьшая замкнутая подалгебра из банаховой алгебры $\text{End } X$, содержащая все операторы $\mathcal{R}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$, и оператор I . Тогда ее спектр $\text{Sp } \mathfrak{A}$ гомеоморфен расширенному спектру $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, резольвентой которого служит функция $\mathcal{R}: \Omega = \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X$. Далее, существует гомеоморфизм $\alpha: \text{Sp } \mathfrak{A} \rightarrow \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$, для которого*

$$\widehat{R(\lambda, \mathcal{A})}(\chi) = \frac{1}{\lambda - \alpha(\chi)}, \quad \chi \in \text{Sp } \mathfrak{A}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}).$$

При этом $\alpha(\chi_\infty) = \infty$ для характера $\chi_\infty \in \text{Sp } \mathfrak{A}$, определяемого условиями $R(\lambda, \mathcal{A}) \in \text{Ker } \chi_\infty \quad \forall \lambda \in \rho(\mathcal{A}), \chi_\infty(I) = 1$.

Благодаря теореме 2.1 вводимые далее определения и доказываемые на их основе утверждения оказываются вполне корректными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Замкнутое линейное подпространство $X_0 \subset X$ назовем *инвариантным для отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ с непустым $\rho(\mathcal{A})$, если X_0 инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A}), \lambda \in \rho(\mathcal{A})$. *Сужением отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *на подпространство* X_0 назовем отношение $\mathcal{A}_0 \in LR(X)$, резольвентой которого является сужение $R_0: \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X_0, R_0(\lambda) = R(\lambda, \mathcal{A}) \upharpoonright X_0, \lambda \in \rho(\mathcal{A})$, резольвенты $R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X$ на X_0 и обозначим его через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть

$$X = X_0 \oplus X_1 \quad (2.1)$$

— прямая сумма инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LR(X)$ подпространств и пусть $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright X_1$. Тогда будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой отношений* $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, и записывать

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1. \quad (2.2)$$

При этом $\mathcal{A}0 = \mathcal{A}_00 \oplus \mathcal{A}_10$, и равенства (2.1), (2.2) означают, что множество $\mathcal{A}x$ для любого $x \in D(\mathcal{A})$ определяется формулой

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}_0x_0 + \mathcal{A}_1x_1, \quad x = x_0 + x_1,$$

где $x_i \in D(\mathcal{A}_i) \subset X_i, i = 0, 1$, и $\mathcal{A}x$ — алгебраическая сумма множеств $\mathcal{A}_0x_0, \mathcal{A}_1x_1$.

ЛЕММА 2.1. Если для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеют место равенства (2.1), (2.2), то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1)$, где $\mathcal{A}_i$ — сужение $\mathcal{A}$ на $X_i, i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определений 2.4 и 2.5 следует равенство

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, \mathcal{A}_0) \oplus R(\lambda, \mathcal{A}_1), \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}), \quad (2.3)$$

обеспечивающее справедливость утверждения.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$. Тогда $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{End } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A} \in \text{End } X$, то, очевидно, что $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$.

Обратно, пусть $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$. Тогда согласно определению 1.5 отношение $\mathcal{A}$ является линейным замкнутым оператором с резольвентой, удовлетворяющей условию $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{A}) = 0$, причем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma_0$ — компакт из $\mathbb{C}$. Таким образом, функция $\lambda \mapsto (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ голоморфна вне круга достаточно большого радиуса и представима в виде сходящегося ряда $R(\lambda, \mathcal{A}) = -\sum_{n=0}^{\infty} K_n \lambda^{-n-1}$, где $K_n \in \text{End } X, n \geq 0$. Значит, существует $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (-\lambda R(\lambda, \mathcal{A})) = K_0$. Из эргодической теоремы [4; теорема 18.8.3] следует, что $K_0 = P_0$ является проектором на $X_0 = \overline{D(\mathcal{A})} = D(\mathcal{A})$.

Покажем, что $P_0 = I$. Отметим, что из доказанного следует, что для сужения $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$ справедливо равенство $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}_0)) = I_0$, где I_0 —

тождественный оператор в X_0 . Значит, $R(\lambda, \mathcal{A}_0)$ – обратимые операторы из алгебры $\text{End } X_0$ при достаточно больших $|\lambda|$. Если $X \neq X_0$, то возьмем $x \in X \setminus X_0$ и положим $y_0 = R(\lambda, \mathcal{A})x \in \overline{D(\mathcal{A})} = X_0$. Тогда найдется $x_0 \in X$ такой, что $R(\lambda, \mathcal{A}_0)x_0 = y_0$. Так как $R(\lambda, \mathcal{A})(x_0 - x) = 0$, то $x_0 = x \in X_0$. Полученное противоречие влечет равенство $D(\mathcal{A}) = X_0 = X$.

Отметим, что в [1] условие $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ по определению означало, что $0 \notin \sigma(\mathcal{A}^{-1})$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ и его расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ представим в виде

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad (2.4)$$

где σ_0 – компакт из $\mathbb{C}$, σ_1 – замкнутое множество из $\tilde{\mathbb{C}}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда существуют разложения (2.1), (2.2), в которых инвариантные относительно $\mathcal{A}$ замкнутые подпространства X_0, X_1 и его сужения $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright X_1$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;
- 2) $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A} 0 = \text{Ker } R(\cdot, \mathcal{A}) = \text{Ker } R(\cdot, \mathcal{A}_1) \subset X_1$, $D(\mathcal{A}) = X_0 \oplus D(\mathcal{A}_1)$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – замкнутая жорданова кривая (или конечное число таких кривых), расположенная в $\rho(\mathcal{A})$ так, что внутри нее лежит σ_0 , а вне – σ_1 . Рассмотрим проектор Рисса

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda \in \text{End } X \quad (2.5)$$

и определяемое им разложение X в прямую сумму подпространств вида

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad X_0 = \text{Im } P_0, \quad X_1 = \text{Ker } P_0.$$

Определение 2.4 принуждает нас проверить, что $R(\mu, \mathcal{A})X_i \subset X_i$, $\mu \in \rho(\mathcal{A})$, $i = 0, 1$. Для этого достаточно установить, что $R(\mu, \mathcal{A})P_0 = P_0 R(\mu, \mathcal{A}) \quad \forall \mu \in \rho(\mathcal{A})$, но это свойство вытекает из (2.5) и коммутативности множества значений резольвенты отношения $\mathcal{A}$.

Рассмотрим сужения R_0 и R_1 резольвенты $R(\cdot, \mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ на X_0, X_1 соответственно. Если $x_0 \in \text{Ker } R$, то непосредственно из (2.5) вытекает, что $P_0 x_0 = 0$, и, значит, $\text{Ker } R \subset X_1$. Это означает, что R_0 является резольвентой некоторого оператора $\mathcal{A}_0 \in LO(X)$.

Функции R_0 и R_1 определены на $\rho(\mathcal{A})$. Покажем, что R_0 допускает аналитическое продолжение на множество $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \sigma_0$ и выполнено условие $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{A}_0) = 0$, тогда $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X$ в силу леммы 2.2. Функцию $R_0: \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X_0$ с использованием тождества Гильберта представим в виде

$$\begin{aligned} R_0(\mu)x_0 &= R(\mu, \mathcal{A}_0)x_0 = R(\mu, \mathcal{A})P_0 x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\mu, \mathcal{A})R(\lambda, \mathcal{A})x_0 d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(\mu, \mathcal{A}) - R(\lambda, \mathcal{A})}{\mu - \lambda} x_0 d\lambda. \end{aligned}$$

Если μ лежит вне кривой γ , то $\int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = 0$. Поэтому, учитывая произвольность кривой γ с указанными свойствами, получаем, что функция $R_0(\cdot, \mathcal{A})$ допускает аналитическое продолжение на множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_0$; причем из полученного равенства

$$R_0(\mu)x_0 = R(\mu, \mathcal{A}_0)x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu - \lambda)^{-1} R(\lambda, \mathcal{A})x_0 d\lambda$$

вытекает, что $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} R(\mu, \mathcal{A}_0) = 0$. Осталось воспользоваться леммой 2.2, из которой находим, что $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$.

Пусть $\mathcal{A}_1 \subset LR(X_1)$ — отношение, резольвентой которого служит $\mathcal{R}_1$. Аналогично доказывается, что функция $R(\cdot, \mathcal{A}_1) = R_1: \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X_1$ допускает аналитическое продолжение на множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_1$. Следовательно, $\tilde{\sigma}_1 \subset \sigma_1$ и в силу леммы 2.1 приходим к равенствам $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$. Остальные свойства отношения $\mathcal{A}_1$ немедленно следуют из свойства $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ обратного к $\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ отношения $\mathcal{A} - \lambda I$ и $\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$ представимы в виде

$$\mathcal{A} - \lambda I = \{(x, y - \lambda x) \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I = \{(y, x - \lambda^{-1}y) \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Вначале докажем, что при $\lambda \neq 0$ инъективность одного из этих отношений влечет инъективность другого. Если $0 \neq x_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$, то $\exists y_0$ такой, что $y_0 - \lambda x_0 = 0$, т.е. $y_0 = \lambda x_0 \neq 0$ и тогда $(y_0, x_0 - \lambda^{-1}y_0) = (y_0, 0) \in \mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$. Верно и обратное, так как отношение $\mathcal{A} - \lambda I$ получается из отношения $\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$ той же процедурой, что и $\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$ из $\mathcal{A} - \lambda I$.

Далее, непосредственно из определения отношений $\mathcal{A} - \lambda I$ и $\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$, $\lambda \neq 0$, следует, что их множества значений имеют вид $\{y - \lambda x \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$ и, следовательно, совпадают. Поэтому сюръективность одного из них влечет сюръективность второго.

Из доказанного вытекает, что линейные отношения $\mathcal{A} - \lambda I$ и $\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I$ обратимы одновременно, если $\lambda \neq 0$. Таким образом, множества $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ и $\sigma(\mathcal{A}^{-1}) \setminus \{0\}$ переходят друг в друга при отображении $\lambda \mapsto 1/\lambda$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda = 0$. Пусть $0 \notin \sigma(\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$ и согласно определению расширенного спектра его резольвенту $R(\lambda, \mathcal{A}^{-1}) = (\mathcal{A}^{-1} - \lambda I)^{-1}$ следует рассмотреть в окрестности точки ∞ . Так как $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{A}^{-1}) = 0$, то $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ согласно определению 1.5. Обратно, пусть $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$. Тогда из леммы 2.2 следует, что $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$. Это означает, что $0 \notin \sigma(\mathcal{A}) \subset \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$.

Те же рассуждения применимы к $\mathcal{A}^{-1}$ и поэтому в итоге получаем требуемое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если $\mathcal{A} \in LR(X)$ и $\mu \in \rho(\mathcal{A})$, то

$$\sigma(R(\mu, \mathcal{A})) = \{(\mu - \lambda)^{-1} \mid \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}.$$

Утверждение следствия 2.1 было получено в [1; теорема V.4.2]. Отметим, что определение спектра линейного отношения было введено А. Фавини, А. Яги в [17]. Однако ни в указанной статье, ни в монографии [2] ими не использовалось понятие расширенного спектра линейного отношения. Определение расширенного спектра для линейных отношений на нормированных пространствах было введено в монографии Р. Кросса [1], но, по существу, оно мало использовалось.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для $\mathcal{A} \in LR(X)$ следующие условия эквивалентны:

$$1) \quad \mathcal{A} \in \text{End } X; \quad 2) \quad \infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}); \quad 3) \quad 0 \notin \sigma(\mathcal{A}^{-1}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для $\mathcal{A} \in LR(X)$ верно равенство $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ точно тогда, когда $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$ – квазинильпотентный оператор.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $\lambda \neq 0$, то имеют место равенства

$$(\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda I - \lambda^2(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad (2.6)$$

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}(\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из описания множества значений отношения $\mathcal{A} - \lambda I$, проведенного при доказательстве теоремы 2.4, следует, что оператор $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$ строится следующим образом: любой вектор $z \in X$ может быть представлен в виде $z = y - \lambda x$, где $(x, y) \in \mathcal{A}$, и тогда $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}z = x$. Так как $x - (1/\lambda)y = -(1/\lambda)z$, то получаем $(\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}z = -\lambda y = -\lambda(z + \lambda x) = -\lambda z - \lambda^2(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}z$. Следовательно, имеет место равенство (2.6). Равенство (2.7) вытекает из (2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если $\mathcal{A} = B^{-1}$, где B – квазинильпотентный оператор из $\text{End } X$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ и $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = B + \lambda B^2 + \lambda^2 B^3 + \dots$. В частности, $R(\cdot, \mathcal{A})$ – многочлен, если B – нильпотентный оператор из $\text{End } X$.

Теорема 2.4 и соотношения (2.6), (2.7) позволяют утверждать, что для расширенного спектра линейных отношений все точки расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, включая ∞ , являются в некотором смысле равноправными. Если же точка ∞ входит в расширенный спектр линейного замкнутого оператора и является в нем изолированной, то она может служить только существенно особой точкой его резольвенты (см. [4; теорема 5.9.4]).

Пусть Δ – открытое множество из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, содержащее расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$. Символом $\mathfrak{F}(\Delta)$ обозначим алгебру комплексных функций, определенных и аналитических на Δ . Пусть γ – некоторая замкнутая жорданова кривая, окружающая $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$, и функция $f \in \mathfrak{F}(\Delta)$ такова, что интеграл $\int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda$ абсолютно сходится. Тогда формула

$$f(\mathcal{A}) = \delta f(\infty)I - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda, \quad (2.8)$$

где $\delta = 1$ или $\delta = 0$ в зависимости от того, находится $\lambda = \infty$ внутри γ или вне γ , определяет ограниченный оператор из алгебры $\text{End } X$. Более того, он принадлежит коммутативной подалгебре $\mathfrak{A}$, введенной перед теоремой 2.2. Этот факт позволяет получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.5 (об отображении спектра). *Для $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеет место равенство $\sigma(f(\mathcal{A})) = f(\tilde{\sigma}(\mathcal{A})) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку спектр оператора $f(\mathcal{A})$ совпадает с множеством значений его преобразования Гельфанда, то доказываемое представление следует из следующих равенств, использующих теорему Коши, теорему 2.2 и формулу (2.8):

$$\begin{aligned} \sigma(f(\mathcal{A})) &= \{\chi(f(\mathcal{A})) \mid \chi \in \text{Sp } \mathfrak{A}\} \\ &= \left\{ \delta f(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) \chi(R(\lambda, \mathcal{A})) d\lambda \mid \chi \in \text{Sp } \mathfrak{A} \right\} \\ &= \left\{ \delta f(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\xi \mid \xi \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A}) \right\} = f(\tilde{\sigma}(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Теорема 2.5 является аналогом теоремы 5.12.1 из [4], полученной для линейных замкнутых операторов. Приведенное здесь доказательство оказалось более простым благодаря использованию теоремы 2.2, которая, в свою очередь, является уточненным аналогом теоремы 5.8.4 из [4].

§3. Условия компактности спектра линейных отношений

Далее в оставшейся части работы считается выполненным следующее условие *несингулярности* рассматриваемых линейных отношений.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. Резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ не пусто.

Непосредственно из определения обратного отношения и свойств линейных отношений, сформулированных в §2 (см. также свойства отношений, перечисленные в §6), следует

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$. Независимо от выбора $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ справедливо равенство

$$\text{Ker}(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^k = \mathcal{A}^k 0, \quad \text{Im}(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^k = D(\mathcal{A}^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Приведенная лемма обеспечивает корректность обозначений $\text{Ker } R^k$ и $\text{Im } R^k$, $k \in \mathbb{N}$, для степеней резольвенты отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ обладает свойством *стабилизации степеней на бесконечности*, если существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathcal{A}^{m-1} 0 \subset \mathcal{A}^m 0 = \mathcal{A}^{m+1} 0, \quad D(\mathcal{A}^{m-1}) \supset D(\mathcal{A}^m) = D(\mathcal{A}^{m+1}), \quad (3.1)$$

где включения являются строгими. Число m называется *порядком стабилизации*.

Отметим, что при $m = 1$ считается, что $\{0\} \subset \mathcal{A} 0 = \mathcal{A}^2 0$, $X \supset D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^2)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.2. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ обладает свойством стабилизации степеней на бесконечности порядка m .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $m \geq 2$ – натуральное число. Для линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) точка ∞ является полюсом порядка $m-2$ функции $R(\cdot, \mathcal{A})$ при $m \geq 3$, ∞ – устранимая особая точка функции $R(\cdot, \mathcal{A})$ при $m = 2$;
- 2) банахово пространство X представимо в виде прямой суммы $X = X_0 \oplus X_\infty$ инвариантных относительно $\mathcal{A}$ замкнутых подпространств $X_0 = D(A^m)$, $X_\infty = \mathcal{A}^m 0$, причем сужение $\mathcal{A}_0$ отношения $\mathcal{A}$ на X_0 принадлежит $\text{End } X_0$, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A})$ и, кроме того, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, $\mathcal{A}_\infty^{-1} \in \text{End } X_\infty$, $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$ для сужения $\mathcal{A}_\infty$ отношения $\mathcal{A}$ на X_∞ и $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$;
- 3) выполнены условия предположения 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). По условию ∞ – изолированная точка в $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$, поэтому $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \{\infty\}$, где $\sigma_0 = \sigma(\mathcal{A})$ – компактное множество из $\mathbb{C}$. Положив $\sigma_1 = \{\infty\}$, получим представление (2.4) и затем, применив теорему 2.3, придем к разложениям

$$X = X_0 \oplus X_\infty, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\infty, \quad (3.2)$$

где $X_\infty = X_1$, $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_1$. Из теоремы 2.3 также следует, что $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$, $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, причем в силу следствия 2.3 оператор $\mathcal{A}_\infty^{-1} \in \text{End } X_\infty$ квазинильпотентен. Поскольку $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, то из следствий 2.4 и 2.5 получаем, что резольвента отношения $\mathcal{A}_\infty$ представима в виде

$$R(\lambda, \mathcal{A}_\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (\mathcal{A}_\infty^{-1})^{i+1}$$

в окрестности точки ∞ . Ввиду того, что по условию она имеет полюс в этой точке порядка $m-2$, то $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$ и $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$. Заметим, что $R(\lambda, \mathcal{A}_\infty) = \mathcal{A}_\infty^{-1}$ при $m = 2$, т.е. ∞ является устранимой особой точкой функции $R(\cdot, \mathcal{A})$. Вышеизложенное обеспечивает выполнение всех свойств из условия 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Из разложений (3.2) с указанными свойствами получаем, что

$$\mathcal{A}^k 0 = 0 \oplus \mathcal{A}_\infty^k 0, \quad D(\mathcal{A}^k) = X_0 \oplus D(\mathcal{A}_\infty^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $(R(0, \mathcal{A}_\infty))^m = (\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$ и $(R(0, \mathcal{A}_\infty))^{m-1} = (\mathcal{A}_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$, то свойство 3) следует из леммы 3.1. Отметим, что отношения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_\infty$ обладают свойством стабилизации степеней на бесконечности порядка m одновременно.

3) $\Rightarrow$ 1). Из предположения 3.2 и леммы 3.1 следует, что имеют место соотношения

$$\text{Ker } B^{m-1} \subset \text{Ker } B^m = \text{Ker } B^{m+1}, \quad \text{Im } B^{m-1} \supset \text{Im } B^m = \text{Im } B^{m+1},$$

где $B = R(\lambda_0, \mathcal{A}) \in \text{End } X$, $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. Положим $V = B^m \in \text{End } X$, тогда $\text{Ker } V = \text{Ker } V^2$, $\text{Im } V = \text{Im } V^2$. Следует доказать, что

$$X = X_0 \oplus X_\infty, \quad (3.3)$$

где $X_\infty = \text{Ker } V$ и $X_0 = \text{Im } V$. Отметим, что X_∞, X_0 – инвариантные подпространства для V и сужение $V_0: X_0 \rightarrow X_0$ оператора V_0 на X_0 является обратимым оператором.

Доказательство справедливости разложения (3.3) можно найти, например, в [19; гл. 6].

Докажем, что 0 – изолированная точка в $\sigma(V)$ и X_0 – замкнутое подпространство в X . С этой целью рассмотрим факторпространство $\widehat{X} = X/X_\infty$ и фактороператор

$$\widehat{V} \in \text{End } \widehat{X}, \quad \widehat{V}\widetilde{x} = \widetilde{Vx},$$

где через $\widetilde{y} = y + X_\infty$ обозначен класс смежности, содержащий вектор $y \in X$. Поскольку $X/X_\infty = X_0/X_\infty$, то $\widehat{V}$ – обратимый оператор из $\text{End } \widehat{V}$. Следовательно, $0 \notin \sigma_0 = \sigma(\widehat{V})$. Пусть $0 \neq \mu_0 \notin \sigma_0$. Докажем, что $\mu_0 \notin \sigma(V)$. Если $x_0 \in \text{Ker}(V - \mu_0 I)$, то $(V - \mu_0 I)x_0 = 0$, и, следовательно, $(\widehat{V} - \mu_0 I)\widetilde{x}_0 = \widetilde{0} \in \widehat{X}$, где $\widetilde{x}_0 = x_0 + X_\infty$. Из обратимости оператора $\widehat{V} - \mu_0 I$ следует, что $\widetilde{x}_0 = \widetilde{0}$, т.е. $x_0 \in X_\infty$. Сужение V_∞ оператора V на X_∞ равно нулю и $\mu_0 \neq 0$, поэтому $x_0 = 0$. Итак, $\text{Ker}(V - \mu_0 I) = \{0\}$.

Докажем сюръективность оператора $V - \mu_0 I$. Пусть y – произвольный вектор из X . Из обратимости оператора $\widehat{V} - \mu_0 I$ следует, что существует класс смежности $\widetilde{x} = x + X_\infty$ такой, что $(\widehat{V} - \mu_0 I)\widetilde{x} = \widetilde{y}$, т.е. $y_0 = (V - \mu_0 I)x - y \in X_\infty$. Так как $Vy_0 = 0$, то $(V - \mu_0 I)y'_0 = y_0$ для $y'_0 = -\mu_0^{-1}y_0$. Поэтому $(V - \mu_0 I)(x - y'_0) = y + y_0 - y_0 = y$. Следовательно, оператор $V - \mu_0 I$ сюръективен.

Из доказанного следует, что $\sigma(V) \subset \{0\} \cup \sigma_1$, причем $0 \notin \sigma_1$. Поскольку $V = (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m$, то 0 – изолированная точка в $\sigma(R(\lambda_0, \mathcal{A}))$. Теперь ясно, что в разложении (3.3) подпространство X_0 служит образом проектора Рисса, построенного по оператору $R(\lambda_0, \mathcal{A})$ и спектральному множеству $\sigma(R(\lambda_0, \mathcal{A})) \setminus \{0\}$, и поэтому является замкнутым.

Как уже отмечалось ранее, подпространства X_∞ и X_0 не зависят от выбора $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ и совпадают соответственно с замкнутыми подпространствами $\mathcal{A}^m 0$ и $D(\mathcal{A}^m)$. Из следствия 2.1 теоремы 2.1 следует, что $\{\infty\}$ – изолированная точка в $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$, $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A} \upharpoonright X_0)$ и $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A} \upharpoonright X_\infty) = \{\infty\}$, т.е. $\mathcal{A} \upharpoonright X_0 \in \text{End } X_0$, причем $(R(\lambda, \mathcal{A}))^{m-1} \neq 0$, $(R(\lambda, \mathcal{A}))^m = 0 \ \forall \lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Отсюда следует, что выполнено условие 1).

Введем в рассмотрение собственные и присоединенные векторы линейных отношений, отвечающие точке ∞ . При этом будут учитываться результаты теорем 2.4 и 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Любой ненулевой вектор x_0 из $\mathcal{A}0 \subset X$ назовем *собственным вектором отношения* $\mathcal{A} \in LR(X)$, *отвечающим точке* ∞ . Вектор $x_1 \in X$ называется *корневым вектором отношения* $\mathcal{A}$, *отвечающим точке* ∞ , если существует число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $x_1 \in \mathcal{A}^k 0$. Число k из $\mathbb{N}$ называется *высотой корневого вектора* x_1 , если $x_1 \in \mathcal{A}^k 0 \setminus \mathcal{A}^{k-1} 0$.

Непосредственно из определения 3.2 следует, что замкнутое подпространство $\mathcal{A}^k 0 = \text{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^k$ состоит из корневых векторов отношения $\mathcal{A}$, отвечающих точке ∞ , высоты, не превосходящей k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем говорить, что отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеет *конечную жорданову цепочку* $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ *длины* k , *отвечающую точке* ∞ , если x_0 – собственный вектор для $\mathcal{A}$, отвечающий точке ∞ , и x_i , $2 \leq i \leq k-1$, –

корневые векторы, отвечающие той же точке, для которых имеют место следующие соотношения:

$$x_0 \in \mathcal{A}0, \quad x_i \in \mathcal{A}x_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad x_{k-1} \notin \mathcal{A}^k 0$$

(и, следовательно, каждый вектор x_i , $0 \leq i \leq k-1$, имеет высоту i). Векторы $x_1, \dots, x_{k-1}$ называются *присоединенными к собственному вектору x_0* .

ЛЕММА 3.2. *Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеет конечную жорданову цепочку $x_0, \dots, x_{k-1}$ длины k , отвечающую точке ∞ , точно тогда, когда для некоторого $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ (и, значит, для всех $\lambda_0 \in \rho(A)$) верны равенства*

$$R(\lambda_0, \mathcal{A})x_0 = 0, \quad x_0 \in \mathcal{A}0, \quad R(\lambda_0, \mathcal{A})x_i = x_{i-1}, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

и отсутствует вектор x такой, что $R(\lambda_0, \mathcal{A})x = x_{k-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ назовем *фредгольмовым на бесконечности*, если $D(\mathcal{A})$ – замкнутое подпространство в X и, кроме того, $\mathcal{A}0$, $X/D(\mathcal{A})$ – конечномерные линейные пространства. Число $\text{ind } \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}0 - \dim(X/D(\mathcal{A}))$ назовем *индексом фредгольмова отношения $\mathcal{A}$, отвечающим точке ∞* .

Непосредственно из определения 3.4 следует, что отношение $\mathcal{A}$ является фредгольмовым на бесконечности точно тогда, когда фредгольмовым является оператор $R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, и их индексы совпадают.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 3.1, определений 3.2–3.4 и леммы 3.2, являясь расшифровкой приводимых в них понятий. Кроме того, при установлении эквивалентности свойств 2) и 3) следует учесть, что если индекс отношения $\mathcal{A}$ нулевой, то таким же будет индекс всех его степеней.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для фредгольмова на бесконечности отношения $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ индекса нуль следующие условия эквивалентны:*

- 1) *все жордановы цепочки отношения $\mathcal{A}$, отвечающие точке ∞ , имеют длину, не превосходящую числа $m \in \mathbb{N}$, причем существует жорданова цепочка длины m ;*
- 2) $\mathcal{A}^{m-1}0 \subset \mathcal{A}^m 0 = \mathcal{A}^{m+1}0$;
- 3) $D(\mathcal{A}^{m-1}) \supset D(\mathcal{A}^m) = D(\mathcal{A}^{m+1})$;
- 4) ∞ – полюс порядка $m-2$, если $m \geq 3$, и ∞ – устранимая особая точка при $m = 2$ резольвенты $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, отношения $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, X – конечномерное пространство, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ состоит из конечного множества точек, число которых не превосходит размерности $n = \dim X$ пространства X , причем для отношения $\mathcal{A}$ имеет место следующее спектральное разложение*

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i + Q + \mathcal{A}_\infty, \quad m+1 \leq n,$$

где $P_i \in \text{End } X$ – проекторы Рисса, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_i\}$, $1 \leq i \leq m$, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, Q , $\mathcal{A}_\infty^{-1}$ – нильпотентные операторы из алгебры $\text{End } X$, перестановочные между собой и с проекторами P_i , $1 \leq i \leq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Следствие 3.1, как и остальные результаты в §§ 3–5, получено при условии, что выполнено предположение 3.1. Если оно не выполнено, то может оказаться, что $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$ даже при $1 \leq \dim X < \infty$. Так будет, например, для отношения $\mathcal{A} = X \times X$.

§ 4. О некоторых аналогах условий Хилле–Филлипса–Иосиды–Феллера–Миядеры для линейных отношений

Пусть $\mathcal{A}$ – отношение из $LR(X)$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad (4.1)$$

$$x(0) = x_0 \in D(\mathcal{A}). \quad (4.2)$$

Дифференцируемая функция $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которой $x(0) = x_0$, $x(t) \in D(\mathcal{A}) \forall t \geq 0$, называется *решением задачи Коши* (4.1), (4.2), если она удовлетворяет включению (4.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Замыкание в X множества начальных условий вида (4.2), для которых существует решение задачи (4.1), (4.2), назовем *фазовым пространством дифференциального включения* (4.1) и обозначим символом $\Phi(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При рассмотрении однородных линейных дифференциальных уравнений, как и в теории полугрупп линейных операторов, замена $x(t) = \exp(\lambda_0 t)y(t)$, где $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, приводит (4.1) к дифференциальному включению, определяемому непрерывно обратимым отношением $\mathcal{A} - \lambda_0 I$. Поэтому без потери общности при необходимости в рассматриваемых далее вопросах можно считать, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$, т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – решение дифференциального включения (4.1), $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ и $0 \in \rho(\mathcal{A})$, то $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ является решением дифференциального уравнения (см. лемму 7.1)

$$\mathcal{B}\dot{x} = x. \quad (4.3)$$

В этом параграфе рассматриваются линейные отношения, для которых ∞ не обязательно является изолированной точкой в расширенном спектре. С помощью эргодических теорем формируются подпространства, содержащие в себе фазовое пространство для дифференциальных включений, а затем с помощью некоторых аналогов условий теоремы Хилле–Филлипса–Иосиды–Феллера–Миядеры (ХФИФМ) для линейных отношений строятся вырожденные полугруппы линейных ограниченных операторов. Как и ранее, всюду считается выполненным предположение 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что m -я степень резольвенты отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ обладает *свойством минимального роста на бесконечности*, если существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(\mathcal{A})$ такая, что

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty; \quad 2) \quad \sup_{n \geq 1} \{|\lambda_n^m| \|(R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m\|\} < \infty. \quad (4.4)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.1. Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ удовлетворяет условиям (4.4) из определения 4.2.

ТЕОРЕМА 4.1. Если для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнено предположение 3.2, то для него выполнено и предположение 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями теоремы 3.1 и доказанной в ней эквивалентностью трех условий. Следовательно, выполнено условие 2). Тогда $R(\lambda; \mathcal{A}) = R(\lambda; \mathcal{A}_\infty) \oplus R(\lambda; \mathcal{A}_0)$, если число λ удовлетворяет оценке $|\lambda| \geq r_0 > 0$ для достаточно большого r_0 . Поскольку $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$, $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda; \mathcal{A}_0) = 0$ и $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$, то из представления резольвенты $R(\cdot, \mathcal{A}_\infty)$ отношения $\mathcal{A}_\infty$, полученного при доказательстве теоремы 3.1, следует, что $(R(\lambda; \mathcal{A}_\infty))^m = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, $(R(\lambda; \mathcal{A}))^m = (R(\lambda; \mathcal{A}_0))^m \oplus 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и тогда для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \rho(\mathcal{A})$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ выполнено предположение 4.1.

ЛЕММА 4.1. Если выполнено предположение 4.1, то длины всех жордановых цепочек отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, отвечающих точке ∞ , не превосходят m и все они лежат в $X_\infty = \mathcal{A}^m 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное и рассмотрим собственный вектор x_0 отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, отвечающий точке $\lambda = \infty$, для которого имеется жорданова цепочка длины $k \geq m + 1$. Образует k -мерное подпространство $\tilde{X}_\infty$, являющееся линейной оболочкой вектора x_0 и всех его присоединенных элементов. Через $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ обозначим сужение отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ на $\tilde{X}_\infty$ и заметим, что $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathcal{A}}_\infty) = \{\infty\}$. В силу леммы 3.2 имеем $(R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m x_m = x_0 \neq \{0\}$, $n \geq 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n^m| \|(R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m x_m\| = \infty$ при $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

В условиях предположения 4.1 введем в рассмотрение ограниченную последовательность операторов из алгебры $\text{End } X$ вида

$$A_n = I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

и замкнутое подпространство

$$\tilde{X} = \{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x\}.$$

Для построения фазового пространства $\Phi(\mathcal{A})$ дифференциального включения (4.1) привлечем из статьи [20] эргодические теоремы, примененные к последовательности A_n . Вначале сформулируем некоторые используемые здесь понятия и результаты из [20] (причем не в самом общем виде).

Пусть $\mathfrak{A}$ – наименьшая замкнутая подалгебра из банаховой алгебры $\text{End } X$, содержащая все операторы $R(\lambda; \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, и тождественный оператор I . Тогда $\mathfrak{A}$ – коммутативная банахова алгебра с единицей и последовательность (A_n) принадлежит $\mathfrak{A}$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим наименьший замкнутый идеал $\mathcal{J} = \mathcal{J}_m$ из алгебры $\mathfrak{A}$, содержащий операторы $(R(\lambda; \mathcal{A}))^m$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Ограниченную последовательность линейных операторов (A_n) из алгебры $\mathfrak{A}$ назовем $\mathcal{J}$ -последовательностью, если выполнены следующие два условия:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n F\| = 0 \quad \forall F \in \mathcal{J};$$

2) $A_n x - x \in \overline{\mathcal{J}x} = \overline{\{Fx; F \in \mathcal{J}\}} \quad \forall x \in X$.

Пусть (A_n) является $\mathcal{J}$ -последовательностью. Символом $\text{Erg}(X, (A_n))$ обозначим (замкнутое) подпространство

$$\text{Erg}(X, (A_n)) = \{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x\}$$

и назовем его *эргодическим подпространством, отвечающим $\mathcal{J}$ -последовательности (A_n)* .

ЛЕММА 4.2. *В условиях предположения 4.1 последовательность (A_n) является $\mathcal{J}$ -последовательностью и, следовательно, $\tilde{X} = \text{Erg}(X, (A_n))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ограниченности последовательности (A_n) для проверки условия 1) из определения 4.2 достаточно установить справедливость равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(R(\mu, \mathcal{A}))^m\| = 0$ для любого фиксированного числа μ из $\rho(\mathcal{A})$. Оно следует из неравенств

$$\|A_n(R(\mu, \mathcal{A}))^m\| \leq \text{const}(\mu)|\lambda_n^{-1}|, \quad n \geq 1,$$

которые, в свою очередь, вытекают (в результате неоднократного применения тождества Гильберта) из следующих оценок:

$$\|(R(\lambda_n, \mathcal{A}))^k (R(\mu, \mathcal{A}))^{m-k}\| \leq \text{const} |\lambda_n|^{-k}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad n \geq 1.$$

Условие 2) из определения 4.2, очевидно, выполнено.

Так как подпространство $\tilde{X}$ инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, то оно инвариантно относительно отношения $\mathcal{A}$, и поэтому можно рассмотреть сужение $\tilde{\mathcal{A}}$ отношения $\mathcal{A}$ на $\tilde{X}$ (см. определение 2.4).

Следующее утверждение вытекает из [20; лемма 1] и служит конкретизацией формулируемых в ней свойств.

ТЕОРЕМА 4.2. *В условиях предположения 4.1 подпространство $\tilde{X}$ допускает разложение в прямую сумму*

$$\tilde{X} = X_0 \oplus X_\infty \tag{4.6}$$

двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств X_0, X_∞ , причем $X_0 = \overline{D(\mathcal{A}^m)}$, $X_\infty = \mathcal{A}^m 0$, и соответствующее разложение отношения $\tilde{\mathcal{A}} \in LR(\tilde{X})$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\infty \tag{4.7}$$

обладает свойствами: $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$, $\mathcal{A}_0: D(\mathcal{A}_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ — линейный замкнутый оператор со спектром $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \sigma(\mathcal{A})$ и с плотной в X_0 областью определения $D(\mathcal{A}_0^m)$ оператора $\mathcal{A}_0^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Разложение (4.4) пространства $\tilde{X}$ осуществляет проектор P_0 , определяемый соотношениями

$$P_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A_n)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m x, \quad x \in \tilde{X},$$

$$\text{Im } P_0 = X_0, \quad \text{Ker } P_0 = X_\infty,$$

и не зависящий от выбора последовательности (λ_n) из $\rho(\mathcal{A})$, удовлетворяющей условиям предположения 4.1 (см. [20; лемма 2]). Отметим еще, что $D(\mathcal{A}_0^k)$ плотно в X_0 при любом $k \in \mathbb{N}$ (см. [20]).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. В условиях предположения 4.1 линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ с плотной в X областью определения $D(\mathcal{A}^m)$ для отношения $\mathcal{A}^m$ является линейным оператором.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. В условиях предположения 4.1 подпространство $\mathcal{A}^m 0$ конечномерно, если $\overline{D(\mathcal{A}^m)}$ имеет конечную коразмерность в X .

Следующее утверждение вытекает из [20; теорема 1].

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполнено предположение 4.1. Для того чтобы $\tilde{X} = X$, необходимо и достаточно, чтобы векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0$ разделяли функционалы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0$ сопряженного к X банахова пространства X^* ($\mathcal{A}^* \subset X^* \times X^*$ – сопряженное к $\mathcal{A}$ линейное отношение (см. п. 1.2)).

В частности, $\tilde{X} = X$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) X – рефлексивное банахово пространство;
- 2) $R(\lambda_0, \mathcal{A}) \in \text{End } X$ – слабо компактный оператор при некотором $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$;
- 3) $\dim \mathcal{A}^m 0 = \dim (\mathcal{A}^*)^m 0 < \infty$.

Отметим, что утверждение теоремы 4.2 для рефлексивного банахова пространства и при $m = 1$ приведено в [2; п. 1.3] и в [13].

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Если в условиях предположения 4.1 линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ имеет компактную резольвенту, то $X = X_0 \oplus X_\infty = \mathcal{A}^m 0 \oplus \overline{D(\mathcal{A}^m)}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4.2. Существуют такие числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\text{Re } \lambda > \omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^{mn}\| \leq \frac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)^{mn}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Проведем построение фазового пространства $\Phi(\mathcal{A})$ и вырожденных подгрупп линейных операторов, с помощью которых определяются решения задачи (4.1), (4.2). Построения проводятся в условиях, когда выполнено предположение 4.2 и $\dim \mathcal{A} 0 \geq 1$, т.е. $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$. Из предположения 4.2 следует, что выполнено предположение 4.1. Поэтому согласно лемме 4.1 можно рассматривать эргодическое подпространство $\tilde{X} = \text{Erg}(X, (A_n))$, построенное по ограниченной последовательности $(A_n) \in \text{End } X$. Она определена формулой (4.5), где (λ_n) – произвольная последовательность из $\mathbb{R}_+ \cap \rho(\mathcal{A})$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Таким образом, имеет место утверждение теоремы 4.2 о разложении подпространства $\tilde{X}$. При этом подпространства $X_\infty = \mathcal{A}^m 0$, $X_0 = \overline{D(\mathcal{A}^m)}$ являются инвариантными для отношения $\mathcal{A}$. Для сужения $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0 \in LO(X_0)$ отношения $\mathcal{A}$ на X_0 остается выполненным предположение 4.2. Докажем, что оно позволяет построить на X_0 полугруппу $\{T_0(t); t \geq 0\}$ класса C_0 с генератором $\mathcal{A}_0$, имеющим в силу теоремы 4.2 плотную в X_0 область определения $D(\mathcal{A}_0)$.

Для построения такой полугруппы используем аналог аппроксимации Иосиды (см. [4; теорема 12.3.1]) следующего вида:

$$A_n^0 = \left(-\frac{\lambda_n}{m}\right)(I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m) \in \text{End } X_0, \quad n \geq 1.$$

ЛЕММА 4.3. В условиях предположения 4.1 для любого $\mu \in \rho(\mathcal{A})$ справедлива оценка

$$\|(A_n^0 - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m \mathcal{A}_0)(R(\mu, \mathcal{A}_0))^m\| \leq \text{const } |\lambda_n|^{-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем левую часть в (4.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (A_n^0 - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m \mathcal{A}_0)(R(\mu, \mathcal{A}_0))^m \\ &= \left(\left(-\frac{\lambda_n}{m}\right)(I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m) - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m \mathcal{A}_0 \right)(R(\mu, \mathcal{A}_0))^m \\ &= (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m \\ & \quad \times \left(\left(-\frac{\lambda_n}{m}\right)(I - \lambda_n^{-1} \mathcal{A}_0)^m + \left(\frac{\lambda_n}{m}\right)(I - m\lambda_n^{-1} \mathcal{A}_0) \right)(R(\mu, \mathcal{A}_0))^m \\ &= \left(-\frac{\lambda_n}{m}\right)(-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m \sum_{k=2}^m C_m^k \lambda_n^{-k} \mathcal{A}_0^k (R(\mu, \mathcal{A}_0))^m. \end{aligned}$$

Теперь оценка (4.9) является следствием полученного представления ее левой части и предположения 4.1.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть для линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнено предположение 4.2 и $\dim \mathcal{A}0 \geq 1$. Тогда

$$\Phi(\mathcal{A}) \cap \tilde{X} = \overline{D(\mathcal{A}^m)} = X_0$$

и существует единственная вырожденная полугруппа операторов $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\} \subset \text{End } \tilde{X}$, генератором которой служит отношение $\tilde{\mathcal{A}} \in LR(\tilde{X})$, определяемое равенствами $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$ на X_0 , $D(\tilde{\mathcal{A}}) = X_0 \cap D(\mathcal{A})$, $\tilde{\mathcal{A}}0 = X_\infty$. Полугруппа $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ обладает свойствами:

- 1) ее сужение $\{T_0(t); t \geq 0\} \subset \text{End } X_0$ на X_0 является полугруппой класса C_0 , и любое решение $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ задачи (4.1), (4.2) с $x_0 \in D(\mathcal{A}_0) \subset X_0$ имеет вид $x(t) = T_0(t)x_0$, $t \geq 0$;
- 2) $\tilde{T}(0) \in \text{End } \tilde{X}$ – проектор на подпространство X_0 параллельно X_∞ .

Если векторы из подпространства $X_\infty = \mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $X_\infty^* = (\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$ (например, если выполнено одно из трех условий теоремы 4.3), то $\tilde{X} = X$, причем $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале будем считать, что предположение 4.2 выполнено при $M = 1$ и $\omega = 0$. Тогда $\|(-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m\| \leq 1$ и поэтому верны оценки

$$\exp(A_n^0 t) \leq 1, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0. \quad (4.10)$$

Покажем, что в условиях предположения 4.2 с $M = 1$ и $\omega = 0$ выполнены следующие условия:

- (i) $T_0(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(A_n^0 t)x$ существует для каждого $x \in X_0$;
- (ii) $\{T_0(t); t \geq 0\}$ — полугруппа класса C_0 на X_0 ;
- (iii) генератором полугруппы является оператор $\mathcal{A}_0$.

Докажем (i). Пусть $T_n^0(t) = \exp(A_n^0 t)$, $n \geq 1$, $t \geq 0$. Тогда для $x \in X_0$ имеем

$$\begin{aligned} T_n^0(t)x - T_k^0(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds} T_k^0(t-s) T_n^0(s)x ds \\ &= \int_0^t T_k^0(t-s) T_n^0(s) (A_k^0 x - A_n^0 x) ds. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценки

$$\|T_n^0(t)x - T_k^0(t)x\| \leq t \|A_n^0 x - A_k^0 x\|, \quad t \geq 0, \quad x \in X_0.$$

Из неравенства (4.9) и из леммы 4.3 (см. также замечание 4.3) следует, что последовательность $(A_n^0 x)$ фундаментальна на любом векторе x из $D(\mathcal{A}_0^{m+1})$ и сходится к вектору $\mathcal{A}_0 x$. Поскольку $D(\mathcal{A}_0^{m+1})$ плотно в X_0 и $\|T_n^0(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$, то последовательность функций $\varphi_n(t) = T_n^0(t)x$, где $x \in X_0$, сходится равномерно на каждом промежутке $[0, t_0]$ из $\mathbb{R}_+$.

Докажем (ii). Из поточечной сходимости полугрупп $\{T_n^0(t); t \geq 0\}$, $n \geq 1$, следует, что их предел определяет *сжимающую* полугруппу $\{T_0(t); t \geq 0\} \subset \text{End } X_0$ класса C_0 .

Докажем (iii). Пусть генератором полугруппы $\{T_0(t); t \geq 0\}$ является оператор $B_0: D(B_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$. Покажем, что $B_0 = \mathcal{A}_0$. Если $x \in D(\mathcal{A}_0^{m+1})$, то по доказанному последовательность функций $\varphi_n(t) = T_n^0(t)x$, $t \geq 0$, $n \geq 1$, сходится равномерно на каждом компактном промежутке $[0, t_0]$ к функции $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow X_0$. Так как $\varphi'_n(t) = T_n^0(t)A_n^0 x$, $t \geq 0$, то $\varphi'_n(t)$ сходится равномерно к функции $T_0(t)\mathcal{A}_0 x$. Следовательно, $x \in D(B_0)$, $\mathcal{A}_0 x = B_0 x \quad \forall x \in D(\mathcal{A}_0^{m+1})$ и поэтому $\mathcal{A}_0(R(\lambda_0, \mathcal{A}_0))^{m+1} = B_0(R(\lambda_0, B_0))^{m+1} \quad \forall \lambda_0 > 0$ (отметим, что $\mathbb{R}_+ \subset \rho(\mathcal{A}_0) \cap \rho(B_0)$). Из этого равенства находим, что $(R(\lambda_0, \mathcal{A}_0))^m = (B_0 - \lambda_0 I)(R(\lambda_0, \mathcal{A}_0))^{m+1}$, и, значит, $R(\lambda_0, B_0) = R(\lambda_0, \mathcal{A}_0)$, т.е. $B_0 = \mathcal{A}_0$.

Обратимся теперь к общему случаю в предположении 4.2. Если $\omega \neq 0$, то, переходя при необходимости от отношения $\mathcal{A}$ к $\mathcal{A} - \omega I$, считаем, что $\omega = 0$ (см. замечание 4.1). Таким образом, выполнено условие

$$\|(-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}))^{mn}\| \leq M \quad \forall \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $\mu > 0$ определим новую норму на X формулой

$$\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|(-\mu R(\mu, \mathcal{A}))^{mn} x\|, \quad x \in X.$$

Относительно этой нормы выполнены условия

- (iv) $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|, x \in X$;
- (v) $\|(-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}))^m\|_\mu \leq 1 \quad \forall \lambda > 0$.

Следовательно, нормы $\|\cdot\|_\mu, \|\cdot\|$ эквивалентны, и отношение $\mathcal{A}$ удовлетворяет предположению 4.2 с $M = 1$ и $\omega = 0$ по норме $\|\cdot\|_\mu$. Осталось воспользоваться свойствами (i)–(iii).

Теперь построенную полугруппу операторов $\{T_0(t); t \geq 0\} \subset \text{End } X_0$ расширим на $\tilde{X}$ до *вырожденной* полугруппы операторов $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\} \subset \text{End } \tilde{X}$, положив $\tilde{T}(t)x = T_0(t)x, x \in X_0$, и $\tilde{T}(t)x = 0 \quad \forall x \in X_\infty$. Ясно, что все решения задачи (4.1), (4.2) с $x_0 \in X_0$ задаются с помощью полугруппы $\{T_0(t); t \geq 0\}$ на подпространстве X_0 , и генератором для $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ является линейное отношение $\tilde{\mathcal{A}}$ на $\tilde{X}$ с указанными в формулировке теоремы 4.4 свойствами. Очевидна единственность вырожденной полугруппы $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ с постулируемыми свойствами.

Докажем, что $\Phi(\mathcal{A}) \cap X_\infty = \{0\}$. Допустим, что существует ненулевой вектор x_1 из $\Phi(\mathcal{A}) \cap X_\infty$ и $\tilde{x}_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – решение для включения (4.1) с $\tilde{x}_1(0) = x_1 \in D(\mathcal{A})$. Если $P_\infty \in \text{End } \tilde{X}$ – проектор на X_∞ параллельно подпространству X_0 , то $P_\infty \tilde{x}_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow X_\infty$ – решение для включения $\dot{x}(t) \in \mathcal{A}_\infty x(t), t \geq 0$, причем $x_\infty(0) = x_1 \in X_\infty$. Учитывая замечание 4.2 и тот факт, что $0 \in \rho(\mathcal{A}_\infty)$, получаем $\mathcal{A}_\infty^{-1} \dot{x}_\infty(t) = x_\infty(t) \quad \forall t \geq 0$. Следовательно, $x_\infty(t) \in \text{Im } \mathcal{A}_\infty^{-1}$ при всех $t \geq 0$ и, значит, $x_\infty(t) \in \text{Im}(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = \{0\} \quad \forall t \geq 0$, т.е. $x_1(0) = x_1 = 0$. Получено противоречие.

Если векторы из $\mathcal{A}^m 0$ разделяют функционалы из $(\mathcal{A}^*)^m 0$, то $X = \tilde{X}$ согласно теореме 4.3. Следовательно, $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Утверждения теоремы 4.4 при $m = 1$ приведены в монографии [2; гл. II]. Отметим, что если $\mathcal{A}$ – линейное отношение на конечномерном пространстве X , причем $\mathcal{A}^2 0 \neq \mathcal{A} 0$, то даже в этом случае результаты из [2] оказываются неприменимыми. Разложение $X = \overline{D(\mathcal{A})} \oplus \mathcal{A} 0$ было получено в [2] только для рефлексивного банахова пространства. При $m > 1$ дифференциальные включения вида (4.1) рассматривались в [13] методом *n-интегрированных* полугрупп. Однако основные результаты анонсированы в [13] при априорном предположении о существовании разложения $X = \overline{D(\mathcal{A}^m)} \oplus \mathcal{A}^m 0$; отмечалось его наличие для рефлексивного банахова пространства X при условии, что $m = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть для линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, удовлетворяющего предположению 4.1, существуют числа $M > 0, \omega \in \mathbb{R}$ такие, что для всех $x \in X_0, \lambda \in \mathbb{C}$ с $\text{Re } \lambda > \omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^n x\| \leq \frac{M\|x\|}{(\text{Re } \lambda - \omega)^n}.$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 4.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. В условиях теоремы 4.4 можно доказать, что фазовое пространство $\Phi(\mathcal{A})$ не содержит векторов из $X \setminus \tilde{X}$ со следующими свойствами:

- 1) x_0 – вектор, для которого задача Коши (4.1), (4.2) имеет m раз дифференцируемое решение;
- 2) x_0 – вектор, для которого задача Коши (4.1), (4.2) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $\|x(t)\| \leq M \exp(\omega t), t \geq 0$.

Непосредственно из теоремы 4.4 следует

ТЕОРЕМА 4.5. Если для линейного оператора $A \in LO(X)$ с $\overline{D(A)} = X$ выполнены условия предположения 4.2, то A является генератором полугруппы класса C_0 .

Из теорем 3.1 (условие 2)), 4.1 и 4.4 вытекает

ТЕОРЕМА 4.6. Если отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ удовлетворяет одному из условий теоремы 3.1, то $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$, причем каждое решение $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ задачи (4.1), (4.2) с $x_0 \in X_0$ определяется с помощью аналитической группы операторов $\{\exp \mathcal{A}_0 t, t \in \mathbb{R}\}$ и имеет вид $x(t) = (\exp \mathcal{A}_0 t)x_0, t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что полугруппа $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$, построенная в теореме 4.4 по разложению (3.2) пространства X , имеет вид $\tilde{T}(t) = \exp \mathcal{A}_0 t \oplus 0$. Ее можно также записать в виде $T_0(t) = (\exp \mathcal{A}_0 t)P_0, t \geq 0$. Каждое решение x включения (4.1) при всех $t \geq 0$ представимо в форме $x(t) = T_0(t)x_0, x_0 \in X_0 = \Phi(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Подпространство X_0 в условиях предположения 4.2 является фазовым пространством $\Phi(\mathcal{A})$ (подпространством начальных условий) для обобщенных решений (mild solutions [14]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Подпространство X_∞ , возникающее в условиях предположения 4.1, согласно теореме 4.1 не вносит вклада в фазовое пространство $\Phi(\mathcal{A})$ в силу нильпотентности оператора $\mathcal{A}_\infty^{-1}$. Однако если $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$, т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$ — квазинильпотентный оператор, то может оказаться, что $\Phi(\mathcal{A}) = X$. Примером может быть любой оператор $A \in LO(X)$, являющийся генератором полугруппы класса C_0 с $\tilde{\sigma}(A) = \{\infty\}$. В частности, генератор нильпотентной полугруппы класса C_0 (см. [14]).

§ 5. Секториальные линейные отношения и аналитические вырожденные полугруппы операторов

В этом параграфе определяются секториальные линейные отношения и по ним осуществляется построение вырожденных аналитических полугрупп линейных операторов. При получении основных результатов также существенно используются эргодические теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ назовем *секториальным с углом* $\theta \in (\pi/2, \pi)$, если для некоторого $a \in \mathbb{R}$ сектор

$$\Omega = \Omega_{a, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - a)| < \theta, \lambda \neq a\}$$

содержится в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ и для каждого $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ существуют числа $m \in \mathbb{N}$ и $M_\delta \geq 1$ такие, что

$$\sup_{\lambda \in \Omega_{a, \theta - \delta}} \|((a - \lambda)R(\lambda, \mathcal{A}))^m\| = M_\delta < \infty. \quad (5.1)$$

Всюду в этом параграфе считается выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5.1. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является секториальным.

Имея в виду замечание 4.1, в определении секториального отношения без ограничения общности можно принять $a = 0$. Таким образом, условия (5.1) при $a = 0$ принимают форму

$$\sup_{\lambda \in \Omega_{0, \theta - \delta}} \|(-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}))^m\| = M_\delta < \infty. \quad (5.1^0)$$

В дальнейшем все построения будут проводиться при выполнении условия (5.1⁰), однако в формулировках результатов ограничение $a = 0$ не будет фигурировать.

Для построения аналитической полугруппы операторов, генератором которой является секториальное отношение $\mathcal{A}$, нам потребуется

ЛЕММА 5.1. *Для резольвенты секториального линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ справедлива оценка*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq C(1 + |\lambda|)^{m-2}, \quad \lambda \in \Omega_{a, \theta - \delta}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\frac{d}{d\lambda}(R(\lambda, \mathcal{A}))^n = n(R(\lambda, \mathcal{A}))^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, то для любой фиксированной точки $\lambda_0 \in \Omega_{a, \theta - \delta} \subset \rho(\mathcal{A})$

$$(R(\lambda, \mathcal{A}))^n = n \int_{\lambda_0}^{\lambda} (R(\mu, \mathcal{A}))^{n+1} d\mu + (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^n, \quad (5.3)$$

где интегрирование ведется по любой кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей точки λ_0 , λ из $\Omega_{a, \theta - \delta}$ и целиком лежащей в $\Omega_{a, \theta - \delta}$. Доказываемая оценка вытекает из представления (5.3), которое следует последовательно рассмотреть при $n = m - 1, m - 2, \dots, 1$, т.е. m раз проинтегрировав функцию $\mu \mapsto (R(\mu, \mathcal{A}))^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ – секториальное отношение из $LR(X)$ с углом θ . Положим для $z \in \Omega_{0, \theta - \delta}$, где $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$,

$$T(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda. \quad (5.4)$$

В качестве кривой $\gamma = \gamma(r, \varepsilon)$ в определении 5.2 можно взять объединение трех кривых $\gamma_k(r, \varepsilon)$, $k = 1, 2, 3$, следующего вида:

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, \varepsilon) &= \{-\rho e^{-i(\theta - \varepsilon)} \mid -\infty \leq -\rho \leq -r\}, \\ \gamma_2(r, \varepsilon) &= \{r e^{i\alpha} \mid -(\theta - \varepsilon) \leq \alpha \leq \theta - \varepsilon\}, \\ \gamma_3(r, \varepsilon) &= \{\rho e^{i(\theta - \varepsilon)} \mid r \leq \rho \leq \infty\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = (\delta_0 - \delta)/2$, $\delta_0 = \theta - \pi/2$ и $r = 1/|z|$.

Сходимость интеграла при всех $z \in \Omega_{0, \delta}$, $\delta \in (0, \delta_0)$, в равномерной операторной топологии следует из леммы 5.1.

Далее считается, что $\delta_0 = \theta - \pi/2$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ – секториальное линейное отношение (выполнено условие (5.1) из предположения 5.1). Тогда равенство (5.4) задает аналитическую в секторе $\Omega_{0,\delta_0} \subset \rho(\mathcal{A})$ и ограниченную при $t > 0$ полугруппу операторов из алгебры $\text{End } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обычным образом (см. [21], [22; гл. 1, §3, п. 4]) непосредственно из определения устанавливаются аналитичность функции T в открытом секторе $\Omega_{0,\delta} \in \rho(\mathcal{A})$ при $t > 0$, свойство

$$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \quad z_1, z_2 \in \overline{\Omega}_{0,\delta_0}, \quad (5.5)$$

и сильная непрерывность полугруппы $\{T(t); t > 0\}$.

Проинтегрируем $T(z)$, $z \in \Omega_{0,\delta}$, из (5.4) по частям m раз. В результате получим при $t > 0$ следующее представление:

$$T(t) = \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\pi i t^{m-1}} \int_{\gamma(1/t,\varepsilon)} e^{\lambda t} (R(\lambda, \mathcal{A}))^m d\lambda. \quad (5.6)$$

После замены $\mu = \lambda t$ в (5.6) придем к формуле

$$T(t) = \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\pi i t^m} \int_{\gamma(1,\varepsilon)} \left(R\left(\frac{\mu}{t}, \mathcal{A}\right) \right)^m e^\mu d\mu.$$

Отсюда и из (5.1) вытекает оценка

$$\|T(t)\| \leq \frac{(m-1)!}{2\pi} \int_{\gamma(1,\varepsilon)} \frac{M_\delta |e^\mu|}{|\mu|^m} |d\mu|, \quad (5.7)$$

обеспечивающая ограниченность полугруппы при $t > 0$.

Исследование полугруппы $\{T(t); t > 0\}$ проведем с помощью двух операторно-значных функций

$$A(\lambda) = I - ((-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}))^m), \quad \lambda > 0, \quad B(t) = I - T(t), \quad t > 0. \quad (5.8)$$

В дальнейшем рассматриваются две произвольные последовательности (λ_n) , (t_n) , $n \geq 1$, из $\mathbb{R}_+$ со свойствами

$$\lambda_n \in \Omega \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$$

и соответствующие ограниченные последовательности операторов $A_n = A(\lambda_n)$, $B_n = B(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$, из банаховой алгебры $\text{End } X$.

ЛЕММА 5.2. В условиях предположения 5.1 при любом фиксированном $\lambda_0 \in \Omega_{0,\theta} \subset \rho(\mathcal{A})$ справедливы следующие свойства:

- 1) $\text{Im}(I - A_n) \subset \overline{\text{Im}(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m}$, $\text{Im}(I - B_n) \subset \overline{\text{Im}(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы для последовательности (A_n) были установлены в лемме 4.2. Второе включение из п. 1) для последовательности (B_n) непосредственно следует из формулы (5.6) при $t > 0$. Осталось доказать, что при любом фиксированном $\lambda_0 \in \Omega_{0,\theta}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = 0. \quad (5.9)$$

В самом деле, из (5.4) и равенства

$$1 = -\frac{(m-1)!}{2\pi i t^{m-1}} \int_{\gamma(1/t, \varepsilon)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^m} d\lambda \quad (5.10)$$

находим, что

$$B(t) = I - T(t) = -\frac{(m-1)!}{2\pi i t^{m-1}} \int_{\gamma(1/t, \varepsilon)} A(\lambda) \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^m} d\lambda. \quad (5.11)$$

Считая $t > 0$ фиксированным, проведем в (5.11) замену $\mu = \lambda t$ и получим

$$B(t) = -\frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma(1, \varepsilon)} A\left(\frac{\mu}{t}\right) \frac{e^\mu}{\mu^m} d\mu. \quad (5.12)$$

Поскольку $T(t)$ коммутирует с $R(\lambda, \mathcal{A})$, то (5.12) при $t = t_n$ примет вид

$$B(t_n)(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = -\frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma(1, \varepsilon)} A\left(\frac{\mu}{t_n}\right) (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m \frac{e^\mu}{\mu^m} d\mu. \quad (5.13)$$

Используя (4.9) и (5.13), приходим к оценкам

$$\|B(t_n)(R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m\| \leq ct_n \int_{\gamma(1, \varepsilon)} \frac{|e^\mu|}{|\mu|^{m+1}} |d\mu|, \quad n \geq 1,$$

откуда следует предельное соотношение (5.9).

Таким образом, согласно терминологии § 4 (определение 4.3) обе последовательности (A_n) и (B_n) являются $\mathcal{J}$ -последовательностями для рассматриваемого в § 4 идеала $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 5.2. В условиях предположения 5.1 справедливы равенства

$$\text{Erg}(X, (A_n)) = \text{Erg}(X, (B_n)) = \tilde{X} = X_0 \oplus X_\infty, \quad (5.14)$$

причем подпространства X_0, X_∞ являются замкнутыми. Равенства

$$P_\infty x = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n x, \quad x \in \tilde{X},$$

определяют ограниченный проектор $P_\infty \in \text{End } \tilde{X}$ со следующими свойствами:

- 1) $\|P_\infty\| \leq \min\{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|, \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|B_n\|\}$;
- 2) $\text{Im } P_\infty = X_\infty, \text{Ker } P_\infty = X_0$.

Все утверждения теоремы 5.2 следуют из леммы 1 [20], для применения которой используется лемма 5.2.

Обозначим $P_0 = I - P_\infty$ и заметим, что

$$P_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n) x, \quad x \in \tilde{X}.$$

Указанные пределы существуют и равны вне зависимости от конкретного вида последовательностей (λ_n) , (t_n) , $n \in \mathbb{N}$, с указанными ранее свойствами. Тем самым обеспечивается представление подпространств X_0 и X_∞ из $\tilde{X}$ в виде

$$X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +0} T(t)x = x\}, \quad X_\infty = \bigcap_{t > 0} \text{Ker } T(t). \quad (5.15)$$

Из этого представления следует, что сужение $\{T_0(t); t \geq 0\}$ полугруппы $T(t)$ на подпространство X_0 является сильно непрерывной в нуле и аналитической в секторе Ω_{0, δ_0} полугруппой. Аналитической на нем будет и сужение $\{\tilde{T}(z); z \in \Omega_{0, \delta_0}\}$ функции $T: \Omega_{0, \delta_0} \rightarrow \text{End } X$ на подпространство $\tilde{X}$.

Обозначим отношение, обратное к нулевому оператору на X_∞ , через $\theta_\infty = 0_\infty^{-1}$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ – секториальное отношение. Тогда $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\} \subset \text{End } \tilde{X}$ – аналитическая в секторе Ω_{0, δ_0} полугруппа операторов, причем она является вырожденной полугруппой с генератором $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \oplus \theta_\infty \in LR(\tilde{X})$, где $\theta_\infty \in LR(X_\infty)$, $D(\theta_\infty) = \{0\}$, $\theta_\infty 0 = X_\infty$, оператор $\mathcal{A}_0 = \tilde{\mathcal{A}} \upharpoonright X_0 \in LO(X_0)$ является генератором сильно непрерывной и аналитической в секторе Ω_{0, δ_0} полугруппы операторов $\{T_0(t); t \geq 0\}$ и $\Phi(\mathcal{A}) \cap \tilde{X} = X_0$. Любое решение задачи (4.1), (4.2) с $x_0 \in D(\mathcal{A}_0)$ имеет вид $x(t) = T_0(t)x_0$, $t \geq 0$.

Если векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$ (в частности, если выполнено одно из трех условий теоремы 4.3), то $\tilde{X} = X$, и тогда $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что генератором вырожденной полугруппы $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ является отношение $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \oplus \theta_\infty$. Для этого достаточно установить (см. теорему 4.1), что линейный замкнутый оператор $\mathcal{A}_0 \in LO(X_0)$ является генератором полугруппы операторов $\{\tilde{T}_0(t); t \geq 0\}$. Ясно, что для $\mathcal{A}_0$ выполнено предположение 5.1 (с теми же постоянными из определения 5.1). Предположим, что $B_0: D(B_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ – генератор полугруппы $\{T_0(t); t \geq 0\}$ класса C_0 . Для доказательства равенства $\mathcal{A}_0 = B_0$ достаточно установить, что $R(\lambda, \mathcal{A}_0) = R(\lambda, B_0)$ при $\lambda = |\omega_0| + 2$, где ω_0 – число, удовлетворяющее условию $\|T_0(t)\| \leq \text{const exp}(\omega_0 t)$, $t \geq 0$.

Рассмотрим последовательность кривых $\gamma_n = \gamma(r_n, \varepsilon)$, каждая из которых является объединением трех кривых $\gamma_k(r_n, \varepsilon)$, $k = 1, 2, 3$, как в определении 5.2, причем радиусы r_n окружностей с центром в точке 0 стремятся к бесконечности. Тогда в силу формул

$$\int_{\gamma_n} \frac{R(\mu, \mathcal{A}_0)}{\mu - \lambda} d\mu = 2\pi i R(\lambda, \mathcal{A}_0), \quad \int_{\gamma_n} e^{\mu t} R(\mu, \mathcal{A}_0) x d\mu = -2\pi i T_0(t)x$$

и теоремы Фубини получаем, что для всех $x \in X_0$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-\lambda t} T_0(t)x \, dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1 - e^{\tau(\mu-\lambda)}}{\mu - \lambda} R(\mu, \mathcal{A}_0)x \, d\mu \\ &= R(\lambda, \mathcal{A}_0)x - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{e^{\tau(\mu-\lambda)}}{\mu - \lambda} R(\mu, \mathcal{A}_0)x \, d\mu. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\mu - \lambda) \leq -1$ для $\mu \in \gamma_n$, $\varepsilon = (\delta_0 - \delta)/2$ и

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} e^{-|\tau|} \mu^{m-2} d|\mu| = 0,$$

то из леммы 5.1 следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{\tau(\mu-\lambda)}}{\mu - \lambda} R(\mu, \mathcal{A}_0) \, d\mu = 0$$

и, значит,

$$R(\lambda, B_0)x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} T_0(t)x \, dt = R(\lambda, \mathcal{A}_0)x, \quad x \in X_0.$$

Отметим, что все остальные утверждения теоремы 5.3 получены ранее в §4.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Поскольку построенная в условиях предположения 5.1 полугруппа $\{T_0(t); t \geq 0\}$ является аналитической, то из известных результатов следует (см. [21], [22]), что для оператора $\mathcal{A}_0 \in LO(X)$ условия предположения 5.1 выполнены при $m = 1$ (быть может, с другой постоянной M_δ).

§6. Приложения к спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов

В этом параграфе получены приложения спектральной теории линейных отношений к спектральной теории упорядоченных пар (G, F) линейных замкнутых операторов $F: D(F) \subset X \rightarrow Y$, $G: D(G) \subset X \rightarrow Y$, действующих из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y .

Будем считать, что области определения $D(F)$, $D(G)$ удовлетворяют одному из следующих условий:

- (i) $D(F) = X$, $D(G) \neq X$;
- (ii) $D(F) \neq X$, $D(G) = X$;
- (iii) $D(F) = X$, $D(G) = X$.

Через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G, F)$ обозначим подпространство $D(F) \cap D(G)$ и назовем его *областью определения упорядоченной пары операторов (G, F)* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. К резольвентному множеству $\rho(G, F)$ упорядоченной пары операторов (G, F) отнесем все числа $\lambda \neq 0$ из $\mathbb{C}$, для которых оператор $G - \lambda F: \mathcal{D} \subset X \rightarrow Y$ непрерывно обратим, а также точку $\lambda = 0$, если $G: \mathcal{D} \rightarrow Y$ непрерывно обратимый оператор и $D(F) = X$. Множество $\sigma(G, F) = \mathbb{C} \setminus \rho(G, F)$ назовем *спектром этой пары*.

Операторнозначную функцию

$$\begin{aligned} R(\cdot; G, F) &: \rho(G, F) \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}(Y, X), \\ R(\lambda; G, F) &= (G - \lambda F)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(G, F), \end{aligned}$$

назовем *резольвентой упорядоченной пары* (G, F) . Она определена на открытом множестве $\rho(G, F)$ и аналитична на нем.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если условие $0 \in \rho(G, F)$ понимать лишь формально как непрерывную обратимость оператора G , то в случае (ii) точка 0 является изолированной в $\rho(G, F)$, и, значит, множество $\rho(G, F)$ не является открытым. Возникает также ряд других проблем.

Так же, как в случае линейных отношений, здесь чрезвычайно полезным оказывается введение понятия расширенного спектра упорядоченной пары операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Подмножество $\tilde{\sigma}(G, F)$ из $\tilde{\mathbb{C}}$, совпадающее с $\sigma(G, F)$, когда функция $R(\cdot; G, F)$ допускает аналитическое продолжение в точку ∞ , причем $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda; G, F) = 0$, и $\tilde{\sigma}(G, F) = \sigma(G, F) \cup \{\infty\}$ в противном случае, назовем *расширенным спектром упорядоченной пары* (G, F) . Множество $\tilde{\rho}(G, F) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(G, F)$ назовем *расширенным резольвентным множеством пары* (G, F) .

При сведении задачи (1.2), (1.3) к задаче (4.1), (4.2) естественным образом возникают два линейных отношения $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \subset X \times X$, $\mathcal{A}_r = GF^{-1} \subset Y \times Y$, которые назовем соответственно *левым* и *правым линейными отношениями для упорядоченной пары* (G, F) .

Приведем несколько простых *свойств* линейных отношений (см. [1; гл. I]), которые будут часто использоваться далее без специального упоминания.

Пусть X, Y, Z, W – банаховы пространства и $\mathcal{A} \in LR(X, Y)$, $\mathcal{B} \in LR(Y, Z)$. Тогда имеют место следующие свойства:

- 1) $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$;
- 2) $D(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}D(\mathcal{B}) = \mathcal{A}^{-1}(\text{Im } \mathcal{B}^{-1})$, $\text{Im } \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}(\text{Im } \mathcal{A})$;
- 3) $\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A} \quad \forall \mathcal{C} \in LR(Z, W)$.

Кроме того, отметим еще два свойства: $\forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in LR(X, Y)$, $\mathcal{C} \in LR(Y, Z)$ и $\mathcal{T} \in LR(W, X)$ справедливы равенства

- 4) $\mathcal{C}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{C}\mathcal{A}_1 + \mathcal{C}\mathcal{A}_2$, если $D(\mathcal{C}) \supset \text{Im } \mathcal{A}_1 \cap \text{Im } \mathcal{A}_2$;
- 5) $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{T} = \mathcal{A}_1\mathcal{T} + \mathcal{A}_2\mathcal{T}$, если $\text{Im } \mathcal{T} \subset D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

Из приведенных свойств 1) и 2) следует, что для левого $\mathcal{A}_l$ и правого $\mathcal{A}_r$ линейных отношений, построенных по упорядоченной паре (G, F) , верны следующие представления:

$$D(\mathcal{A}_l) = G^{-1}(\text{Im } F), \quad \text{Im } \mathcal{A}_l = F^{-1}(\text{Im } G), \quad (6.1)$$

$$D(\mathcal{A}_r) = F(D(G)), \quad \text{Im } \mathcal{A}_r = G(D(F)), \quad (6.2)$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_l) = (G - \lambda F)^{-1}F, \quad \lambda \in \rho(G, F), \quad (6.3)$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_r) = F(G - \lambda F)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(G, F). \quad (6.4)$$

При этом формула (6.3) справедлива лишь тогда, когда $D(G)$, $D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Если же выполнено условие (ii), то формула (6.3) неверна, так как $D(F) \neq X$. Отметим, что в этом случае к $G^{-1}F$ можно применить формулу (2.7) при $0 \neq \lambda \in \rho(G, F)$, в результате придем к соотношению

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mathcal{A}_l) &= -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}(\mathcal{A}_l^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} \\ &= -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}(G^{-1}F - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - (G - \lambda F)^{-1}G). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из представлений (6.3)–(6.5) следует, что если $\infty \in \tilde{\rho}(G, F)$, то $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, и, значит, $\mathcal{A}_l \in \text{End } X$, $\mathcal{A}_r \in \text{End } Y$. Таким образом, доказана следующая

ЛЕММА 6.1. *Имеют место включения*

$$\tilde{\rho}(G, F) \subset \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r), \quad \tilde{\sigma}(G, F) \supset \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r). \quad (6.6)$$

Резольвенты отношений $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}_r$ назовем *левой* и *правой резольвентами упорядоченной пары операторов* (G, F) и обозначим символами $R_l(\cdot; G, F)$ и $R_r(\cdot; G, F)$ соответственно. Эти функции по определению принимают значения соответственно в алгебрах $\text{End } X$ и $\text{End } Y$.

В дальнейшем считается выполненным следующее (условие *несингулярности* пары (G, F))

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6.1. Для упорядоченной пары (G, F) множество $\rho(G, F)$ непусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В монографии [2] предполагались выполненными условия: $D(F) \subset D(G) \subset X = Y$. В статьях [11], [12] рассматривались операторы F, G со свойствами: $F \in \text{Hom}(X, Y)$, $\overline{D(G)} = X$. Наиболее общий случай рассматривался в работе [23], где $D(F)$, $D(G)$ одновременно могли не совпадать с X . Однако исследование проводилось при предположении, что $\mathcal{D} = D(F) \cap D(G) \neq \{0\}$ и, более того, в условиях сделанного нами предположения 6.1. Это позволяет ввести на $\mathcal{D}$ норму $\|x\|_* = \|(G - \lambda_0 F)x\|$, $x \in \mathcal{D}$, где λ_0 – некоторое число из $\rho(G, F)$. Относительно этой нормы $\mathcal{D}$ становится банаховым пространством, изоморфным Y . Рассматривая $\mathcal{D}$ вместо X , можно считать выполненным условие (iii). При этом в качестве содержащего $\mathcal{D}$ банахова пространства можно принять одно из подпространств $D(F)$, $D(G)$ с соответствующей нормой графика (выбор подпространства обычно обусловлен конкретными обстоятельствами; при этом неучтенное подпространство из X не принимается в расчет).

Наряду с условиями (i)–(iii) выделим следующие условия:

- (iv) $D(F) \subset D(G) \neq X$;
- (v) $D(G) \subset D(F) \neq X$.

Тогда если выполнено условие (iv), то на $D(G)$ вводится норма графика оператора G : $\|x\|_* = \|x\| + \|Gx\|$, $x \in D(G)$, и, рассматривая $D(G)$ вместо X , можно считать выполненным условие (ii). Если же выполнено условие (v), то на $D(F)$ вводится норма графика оператора F , и мы оказываемся в условиях выполнения (i).

ТЕОРЕМА 6.1. *Для упорядоченной пары операторов (G, F) имеют место следующие свойства:*

- 1) $\tilde{\sigma}(G, F) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$;
- 2) $\tilde{\sigma}(G, F) \setminus \{0, \infty\} = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \setminus \{0, \infty\}$;

- 3) $\tilde{\sigma}(G, F) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, если $\mathcal{D} = X$;
- 4) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow G^{-1}F \in \text{End } X$;
- 5) $0 \in \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow FG^{-1} \in \text{End } Y$;
- 6) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \cap \rho(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow 0 \in \rho(G, F)$;
- 7) $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \Leftrightarrow \mathcal{A}_l = F^{-1}G \in \text{End } X$;
- 8) $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \mathcal{A}_r = GF^{-1} \in \text{End } Y$;
- 9) $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \tilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \infty \in \tilde{\rho}(G, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение

$$(\rho(\mathcal{A}_l) \cup \rho(\mathcal{A}_r)) \setminus \{0\} \subset \rho(G, F). \quad (6.7)$$

Пусть $0 \neq \lambda \in \rho(\mathcal{A}_l)$ и $\lambda_0 \neq \lambda$ – некоторое фиксированное число из $\rho(G, F)$, существующее в силу предположения 6.1. Представим оператор $G - \lambda F$ в виде

$$\begin{aligned} G - \lambda F &= (G - \lambda_0 F)(I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, \mathcal{A}_l)) \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, \mathcal{A}_r))(G - \lambda_0 F). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из следствия 2.1 вытекает, что $1/(\lambda - \lambda_0) \notin \sigma(R(\lambda_0, \mathcal{A}_l))$, и поэтому оператор $G - \lambda F: \mathcal{D} \subset X \rightarrow Y$ непрерывно обратим как произведение двух непрерывно обратимых операторов. Следовательно, $\lambda \in \rho(G, F)$ и, значит, $\rho(\mathcal{A}_l) \subset \rho(G, F)$. Аналогично доказывается, что $\rho(\mathcal{A}_r) \subset \rho(G, F)$. Тем самым установлено включение (6.7).

Свойства 4) и 5) являются следствиями определения непрерывно обратимого отношения. Если $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \cap \rho(\mathcal{A}_r)$, то $G^{-1}F \in \text{End } X$, $FG^{-1} \in \text{End } Y$. Из ограниченности этих операторов следует, что $D(F) = X$, $\text{Ker } G = \{0\}$, $\text{Im } G = Y$. Поэтому $0 \in \rho(G, F)$. Таким образом, доказано свойство 6).

Свойства 7)–9) следуют из свойств 5)–7) и теоремы 2.4. Теперь свойство 2) вытекает из (6.7), (6.8) и свойств 4)–9).

Установим справедливость свойства 1) для значений $0, \infty$.

Соотношения $0 \in \rho(\mathcal{A}_l)$ и $\mathcal{A}_l^{-1} \in \text{End } X$ эквивалентны по определению. Условие $\mathcal{A}_l^{-1} = G^{-1}F \in \text{End } X$ означает, что $D(F) = X$, $\text{Ker } G = \{0\}$ и $\text{Im } F \subset \text{Im } G$. Предположение 6.1 влечет равенство $\text{Im } F = Y$, откуда $F: D(F) \subset X \rightarrow Y$ – непрерывно обратимый оператор и, значит, $0 \in \rho(G, F)$.

Аналогично устанавливается, что соотношения $\infty \in \tilde{\rho}(\mathcal{A}_l)$ и $\mathcal{A}_l \in \text{End } X$ эквивалентны, а условие $F^{-1}G \in \text{End } X$ означает, что $D(G) = X$, $\text{Ker } F = \{0\}$ и $\text{Im } G \subset \text{Im } F$. Предположение 6.1 влечет равенство $\text{Im } G = Y$, следовательно, $G: D(G) \subset X \rightarrow Y$ – непрерывно обратимый оператор и, значит, $\infty \in \tilde{\rho}(G, F)$.

Если $\mathcal{D} = X$, то для $\lambda_0 \in \rho(G, F)$ оператор $G - \lambda_0 F$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств X и Y и имеет место равенство

$$R_r(\lambda; G, F)(G - \lambda_0 F) = (G - \lambda_0 F)R_l(\lambda; G, F), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (6.9)$$

означающее, что левая и правая резольвенты пары (G, F) подобны и, следовательно, $\sigma(\mathcal{A}_l) = \sigma(\mathcal{A}_r)$. Тогда из свойств 1) и 2) получаем, что выполнено свойство 3).

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если точки $0, \infty$ одновременно входят в $\tilde{\rho}(G, F)$, то $\mathcal{D} = X$ и операторы $G, F \in \text{Hom}(X, Y)$ непрерывно обратимы.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Упорядоченная пара (G, F) обладает следующими свойствами:

- а) $\tilde{\sigma}(G, F) = \{0\} \Leftrightarrow$ оператор $F: \mathcal{D} \rightarrow Y$ непрерывно обратим, $D(G) = X$ и операторы $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \in \text{End } X$, $\mathcal{A}_r = GF^{-1} \in \text{End } Y$ квазинильпотентны;
- б) $\tilde{\sigma}(G, F) = \{\infty\} \Leftrightarrow$ оператор $G: \mathcal{D} \rightarrow Y$ непрерывно обратим, $D(F) = X$ и операторы $\mathcal{A}_l^{-1} = G^{-1}F \in \text{End } X$, $\mathcal{A}_r^{-1} = FG^{-1} \in \text{End } Y$ квазинильпотентны.

Обозначим $S_0(\delta) = \{0 \neq \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta, \delta > 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Следующие два условия эквивалентны:

- а) $D(F) = X$ и $G: D(G) \subset X \rightarrow Y$ — непрерывно обратимый оператор;
- б) $\exists \delta > 0$ такое, что $S_0(\delta) \subset \rho(G, F)$ и $\sup_{\lambda \in S_0(\delta)} \|(G - \lambda F)^{-1}\| < \infty$.

Доказательство эквивалентности этих условий может быть сведено к лемме 2.2 с помощью теоремы 6.2.

Отметим, что множества $\tilde{\sigma}(G, F) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$ и $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$ могут отличаться друг от друга.

ПРИМЕР 6.1. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, и пусть $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — необратимая изометрия. Тогда оператор T^* имеет ненулевое ядро, причем $TT^* \neq I$, $T^*T = I$.

Вначале рассмотрим упорядоченную пару (G, F) , где $G = T^* \in \text{End } \mathcal{H}$, $F = T^{-1}: \text{Im } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Тогда $0 \in \sigma(G, F)$. В то же время $\mathcal{A}_l = TT^* \neq I$ и $\mathcal{A}_r = T^*T = I$, следовательно, $0 \in \sigma(\mathcal{A}_l)$, но $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_r) = \{1\}$.

Рассмотрим далее упорядоченную пару (F, G) . Поскольку левое и правое отношения для нее совпадают соответственно с $\mathcal{A}_l^{-1}$ и $\mathcal{A}_r^{-1}$, то в силу теорем 2.4 и 6.1 получаем, что $\infty \in \tilde{\sigma}(F, G) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l^{-1})$, но $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r^{-1})$.

Наконец, оба случая объединяются рассмотрением подходящей пары операторов в произведении $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 6.2. Расширенные спектры упорядоченных пар (G, F) и (F, G) связаны соотношением

$$\tilde{\sigma}(F, G) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \tilde{\sigma}(G, F) \right\}. \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку левое и правое линейные отношения для пары (F, G) являются обратными соответственно для $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}_r$, то (6.10) является следствием теоремы 2.4 и свойства 1) теоремы 6.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Упорядоченная пара подпространств (X_1, Y_1) , где $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, называется *инвариантной для пары (G, F)* , если $GX_1 \subset Y_1$ и $FY_1 \subset X_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Пусть

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad Y = Y_0 \oplus Y_1 \quad (6.11)$$

– прямые суммы замкнутых подпространств, причем (X_0, Y_0) , (X_1, Y_1) – инвариантные пары подпространств для (G, F) . Пусть $G_i, F_i: \mathcal{D}(G, F) \cap X_i = \mathcal{D}_i \rightarrow Y_i$, $i = 0, 1$, – сужения операторов G, F на X_i , $i = 0, 1$. Тогда будем использовать запись

$$(G, F) = (G_0, F_0) \oplus (G_1, F_1) \quad (6.12)$$

и говорить, что упорядоченная пара операторов (G, F) допускает представление (6.12) относительно разложений (6.11) пространств и является *прямой суммой пар* (G_0, F_0) и (G_1, F_1) .

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть расширенный спектр $\tilde{\sigma}(G, F)$ упорядоченной пары (G, F) представим в виде

$$\tilde{\sigma}(G, F) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad (6.13)$$

где множество σ_0 компактно, σ_1 замкнуто и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$.

Тогда существуют инвариантные для (G, F) пары подпространств (X_0, Y_0) , (X_1, Y_1) такие, что имеют место разложения (6.11), (6.12) и, кроме того,

- 1) проекторы $P_i \in \text{End } X$, $Q_i \in \text{End } Y$, $i = 0, 1$, осуществляющие разложения (6.11) (т.е. $\text{Im } P_i = X_i$, $\text{Im } Q_i = Y_i$, $i = 0, 1$), определяются формулами

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R(\lambda, \mathcal{A}_l) d\lambda, \quad Q_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} R(\lambda, \mathcal{A}_r) d\lambda, \quad (6.14)$$

$$P_1 = I - P_0, \quad Q_1 = I - Q_0, \quad (6.15)$$

где γ_0 – замкнутая жорданова кривая (или конечное число таких кривых), расположенная в $\rho(\mathcal{A})$ так, что внутри нее лежит σ_0 , а вне – σ_1 ;

- 2) $\tilde{\sigma}(G_0, F_0) = \sigma(G_0, F_0) = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}(G_1, F_1) = \sigma_1$;
- 3) $D(G_0) = X_0$, $F_0: D(F_0) = D(F) \cap X_0 \subset X_0 \rightarrow Y_0$ – непрерывно обратимый оператор и $\mathcal{A}_l^{(0)} = F_0^{-1}G_0 \in \text{End } X_0$, $\mathcal{A}_r^{(0)} = G_0F_0^{-1} \in \text{End } Y_0$;
- 4) левая $R_l(\cdot; G_0, F_0) = R(\cdot, \mathcal{A}_l^{(0)})$ и правая $R_r(\cdot; G_0, F_0) = R(\cdot, \mathcal{A}_r^{(0)})$ резольвенты пары (G_0, F_0) подобны, причем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l^{(0)}) = \sigma(\mathcal{A}_l^{(0)}) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r^{(0)}) = \sigma(\mathcal{A}_r^{(0)}) = \tilde{\sigma}(G_0, F_0)$;
- 5) $D(F_1) = X_1$, $G_1: D(G_1) = D(G) \cap X_1 \subset X_1 \rightarrow Y_1$ – непрерывно обратимый оператор, если $0 \notin \sigma_1$, и тогда $R_l(0; G_1, F_1) = G_1^{-1}F_1 \in \text{End } X_1$, $R_r(0; G_1, F_1) = F_1G_1^{-1} \in \text{End } Y_1$, причем $R_l(\cdot; G_1, F_1) = 0$, $R_r(\cdot; G_1, F_1) = 0$, если $X_1 = \mathcal{A}_l 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия (6.13) из теоремы 6.1 вытекает равенство

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad (6.16)$$

которое в соответствии с теоремой 2.3 позволяет определить формулами (6.14), (6.15) проекторы P_i , Q_i , $i = 0, 1$, и рассмотреть соответствующие разложения пространств. Из легко проверяемых равенств

$$GR(\lambda, \mathcal{A}_l) = R(\lambda, \mathcal{A}_r)G, \quad FR(\lambda, \mathcal{A}_l) = R(\lambda, \mathcal{A}_r)F, \quad \lambda \in \rho(G, F),$$

и из (6.14), (6.15) следует, что

$$GP_i = Q_iG, \quad FP_i = Q_iF, \quad i = 0, 1. \quad (6.17)$$

Из этих равенств получаем инвариантность пар (X_i, Y_i) , $i = 0, 1$, относительно (G, F) , и тогда $(G, F) = (G_0, F_0) \oplus (G_1, F_1)$, причем ясно, что $R(\lambda; G, F) = R(\lambda; G_0, F_0) \oplus R(\lambda; G_1, F_1)$, $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_l^{(0)} \oplus \mathcal{A}_l^{(1)}$, $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r^{(0)} \oplus \mathcal{A}_r^{(1)}$, где $\mathcal{A}_l^{(0)} = F_0^{-1}G_0 \in \text{End } X_0$, $R(0, \mathcal{A}_l^{(1)}) = G_1^{-1}F_1 \in \text{End } X_1$, $\mathcal{A}_l^{(0)} = G_0F_0^{-1} \in \text{End } Y_0$, $R(0, \mathcal{A}_r^{(1)}) = F_1G_1^{-1} \in \text{End } Y_1$. Осталось воспользоваться теоремами 2.3 и 6.1, из которых вытекают равенства $\tilde{\sigma}(G_i, F_i) = \sigma_i$, $i = 0, 1$, и все остальные утверждения данной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Если согласно замечанию 6.2 в качестве X выбирается подпространство $D(F)$ или $D(G)$ с соответствующей нормой графика, то в теореме 6.3 вместо (6.11) осуществляется разложение подпространства $D(F)$ или $D(G)$.

В столь общей формулировке теорема 6.3 нам не была известна. Многие из ее утверждений получены ранее при определенных условиях на область определения $D(G, F)$ пары (G, F) . Так, в статье А.Г. Руткаса [24] без доказательства приводится часть утверждений 1)–3) теоремы 6.3 в случае, когда $D(G, F) = X$. Случай $\sigma_0 = \{0\}$, $D(G, F) = D(F)$ был подробно рассмотрен в [25] и позже в [26]. В статье В.В. Диткина [27] был получен результат, содержащийся в утверждениях 1)–3) теоремы 6.3, при условии $D(F) \subset D(G) \subset X$ и при $X = Y$ (см. замечания 6.2 и 6.4). Наиболее общий результат для пары (G, F) замкнутых операторов рассматривался Н.И. Радбель в [23] (см. замечание 6.4). Однако в ней использовались формулы вида (6.15), где резольвента отношения $\mathcal{A}_l$ заменялась правой частью формулы (6.3), что не позволяло рассматривать случай $D(F) \neq X$.

В указанных работах, по сути дела, не использовались возможности и преимущества, предоставляемые привлечением расширенного спектра пары, для более подробного исследования разложения пары.

В примере 6.1 было отмечено, что множества $\tilde{\sigma}(G, F)$ и $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$ могут отличаться лишь наличием или отсутствием точек $0, \infty$. Более точно их различие характеризует

ТЕОРЕМА 6.4. *Имеют место следующие два утверждения:*

- 1) $0 \in \sigma(G, F) \setminus \sigma(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \text{Ker } G \neq \{0\}, Y = \text{Im } G, \overline{D(F)} = D(F) \text{ и } X = \text{Ker } G \oplus D(F);$
- 2) $\infty \in \tilde{\sigma}(G, F) \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \Leftrightarrow \text{Ker } F \neq \{0\}, Y = \text{Im } F, \overline{D(G)} = D(G) \text{ и } X = \text{Ker } F \oplus D(G).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6.2 достаточно установить лишь одно из двух утверждений, поскольку они получаются друг из друга изменением порядка операторов.

Докажем 1). Предположим, что $0 \in \sigma(G, F) \setminus \sigma(\mathcal{A}_r)$. Тогда из теоремы 6.1 следует, что 0 – изолированная точка множества $\sigma(G, F) = \sigma(\mathcal{A}_l)$. Используя теорему 6.3 при $\sigma_0 = \{0\}$ и $\sigma_1 = \tilde{\sigma}(G, F) \setminus \{0\}$, получаем разложения вида (6.11), (6.12), причем $\tilde{\sigma}(G_0, F_0) = \sigma(G_0, F_0) = \{0\}$, $0 \notin \tilde{\sigma}(G_1, F_1) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_l^{(1)}) \supset \tilde{\sigma}(\mathcal{A}_r^{(1)})$, где $\mathcal{A}_l^{(1)} = F_1^{-1}G_1$, $\mathcal{A}_r^{(1)} = G_1F_1^{-1}$. Поскольку $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_r)$, то из формулы (6.14) для проектора Q_0 следует, что $Q_0 = 0$, т.е. $Y_0 = \{0\}$. Из вышеизложенного и из теорем 6.1 и 6.3 следует, что $D(G_0) = X_0$, $G_0 = 0$, $D(F_0) \cap X_0 = \{0\}$ (если $D(F_0) \cap X_0 \neq \{0\}$, то не выполнялось бы предположение 6.1), $D(F_1) = D(F) = X_1$ и G_1 – обратимый оператор. Следовательно, $X = \text{Ker } G \oplus D(F)$. Поскольку $G_0 = 0$, то $\text{Im } G_1 = \text{Im } G = Y_1 = Y$.

Обратно, если выполнены указанные в 1) условия, то ясно, что $0 \in \sigma(G, F) \setminus \sigma(\mathcal{A}_r)$.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $B_1 \in \text{Hom}(X, Y)$, $B_2 \in \text{Hom}(Y, X)$, причем $\text{Ker } B_2 = \{0\}$. Тогда $\sigma(B_1B_2) \setminus \{0\} = \sigma(B_2B_1) \setminus \{0\}$. Более того, $0 \in \sigma(B_2B_1) \setminus \sigma(B_1B_2) \Leftrightarrow \text{Ker } B_1 \neq \{0\}$, $\text{Im } B_1 = Y$, $\overline{\text{Im } B_2} = \text{Im } B_2$ и $X = \text{Ker } B_1 \oplus \text{Im } B_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим упорядоченную пару (G, F) с $\mathcal{D} = D(G, F) = \text{Im } B_2 \subset X$, где $G = B_1 \in \text{Hom}(X, Y)$ и $F = B_2^{-1}: \text{Im } B_2 \subset X \rightarrow Y$. Так как $G - \lambda F = B_2^{-1}(B_2B_1 - \lambda I)$, то $\lambda \in \rho(G, F)$, если только $|\lambda| > \|B_2B_1\|$. Отсюда следует, что $\rho(G, F) \neq \emptyset$ и $\infty \in \tilde{\rho}(G, F)$. Так как $\mathcal{A}_l = B_2B_1$, $\mathcal{A}_r = B_1B_2$, утверждение теоремы вытекает из свойства 3) теоремы 6.1 и утверждения 1) теоремы 6.4.

Отметим, что утверждение теоремы 6.5 для элементов банаховых алгебр имеется во многих монографиях (см., например, [16; гл. 1, § 1]). Подробный анализ спектральных свойств, отвечающий второй части теоремы 6.5, там не проводился.

В оставшейся части этого параграфа приводятся результаты, тесно связанные с результатами § 3 и являющиеся их непосредственным следствием.

По левому $\mathcal{A}_l$ и правому $\mathcal{A}_r$ отношениям пары (G, F) введем в рассмотрение последовательности линейных подпространств

$$\mathcal{X}_k = \mathcal{A}_l^k 0, \quad \mathcal{X}^{(k)} = D(\mathcal{A}_l^k), \quad \mathcal{Y}_k = \mathcal{A}_r^k 0, \quad \mathcal{Y}^{(k)} = D(\mathcal{A}_r^k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.18)$$

Из свойств 1)–3) линейных отношений, отмеченных в начале этого параграфа, получаем их представление в терминах образов и прообразов операторов F и G :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \{0\}, & \mathcal{X}_1 &= \text{Ker } F, & \dots, & \mathcal{X}_n &= F^{-1}(G \mathcal{X}_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, & \dots, \\ \mathcal{X}^{(0)} &= X, & \mathcal{X}^{(1)} &= G^{-1}(\text{Im } F), & \dots, & \mathcal{X}^{(n)} &= G^{-1}(F \mathcal{X}^{(n-1)}), \quad n \in \mathbb{N}, & \dots, \\ \mathcal{Y}_0 &= \{0\}, & \mathcal{Y}_1 &= G(\text{Ker } F), & \dots, & \mathcal{Y}_n &= G(F^{-1}\mathcal{Y}_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, & \dots, \\ \mathcal{Y}^{(0)} &= Y, & \mathcal{Y}^{(1)} &= F(D(G)), & \dots, & \mathcal{Y}^{(n)} &= F(G^{-1}\mathcal{Y}^{(n-1)}), \quad n \in \mathbb{N}, & \dots \end{aligned}$$

Ясно, что пары $(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)$, $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{Y}^{(n)})$ подпространств являются инвариантными для пары операторов (G, F) .

В условиях следующей теоремы $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, и отмеченные в ней включения являются строгими.

ТЕОРЕМА 6.6. Если $\text{Ker } F \neq \{0\}$, то для упорядоченной пары (G, F) следующие условия эквивалентны:

- 1) точка ∞ является полюсом порядка $m-1$ резольвенты левого отношения $\mathcal{A}_l$ пары (G, F) при $m \geq 2$; ∞ — ее устранимая особая точка при $m = 1$;
- 2) существуют инвариантные пары (X_0, Y_0) , (X_1, Y_1) подпространств, для которых верны представления (6.11), (6.12), причем
 - а) $\tilde{\sigma}(G_0, F_0) = \sigma(G, F)$, $\tilde{\sigma}(G_1, F_1) = \{\infty\}$;
 - б) $D(G_0) = X_0$, $F_0^{-1} \in \text{Hom}(Y_0, X_0)$, $D(F_1) = X_1$, $G_1^{-1} \in \text{Hom}(Y_1, X_1)$;
 - в) $(G_1^{-1}F_1)^{m-1} \neq 0$, $(G_1^{-1}F_1)^m = 0$;
- 3) имеет место стабилизация подпространств: $\mathcal{X}_{m-1} \subset \mathcal{X}_m = \mathcal{X}_{m+1}$, $\mathcal{X}^{(m-1)} \supset \mathcal{X}^m = \mathcal{X}^{(m+1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема следует из теоремы 3.1, примененной к левому отношению $\mathcal{A}_l$ пары (G, F) . При этом следует учесть теорему 6.3 (являющуюся эквивалентом теоремы 2.3, используемой при доказательстве теоремы 3.1), а также формулы (6.18) для подпространств $\mathcal{X}_k$, $k \geq 1$.

§ 7. Линейное дифференциальное уравнение с необратимым оператором при производной

В этом заключительном параграфе статьи рассмотрим задачу Коши

$$F\dot{x}(t) = Gx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad (7.1)$$

$$x(0) = x_0 \in X, \quad (7.2)$$

где операторы F и G удовлетворяют одному из условий (i)–(iii) предыдущего параграфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Решением задачи (7.1), (7.2) называется дифференцируемая функция $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ такая, что

$$x(t) \in \mathcal{D} = D(G) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ когда выполнено условие (i) или (iii),}$$

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{D} = D(F) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ когда выполнено условие (ii),}$$

и, кроме того, справедливо равенство (7.2) и $F\dot{x}(t) = Gx(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Замыкание множества векторов $x_0 \in X$, для которых существует решение задачи (7.1), (7.2), назовем *фазовым пространством уравнения* (7.1) и обозначим через $\Phi(G, F)$.

По вопросам разрешимости задачи (7.1), (7.2) имеется немало работ, многие из которых упомянуты в монографии [2]. Здесь мы привлечем теорию линейных отношений и линейных дифференциальных включений и получим большинство из анонсированных в [10] результатов.

Наряду с задачей (7.1), (7.2) рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}_l x(t) = F^{-1}Gx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (7.3)$$

$$x(0) = x_0 \in X. \quad (7.4)$$

ЛЕММА 7.1. Задача (7.1), (7.2) эквивалентна задаче (7.3), (7.4), причем $\Phi(G, F) = \Phi(\mathcal{A}_l) \subset \overline{D(\mathcal{A}_l)} = \overline{G^{-1}(\text{Im } F)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале для пары (G, F) выполнено одно из условий (i), (iii). Если $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – решение задачи (7.1), (7.2), то из равенств $F\dot{x}(t) = Gx(t)$ при $t \geq 0$ следует, что $x(t) \in G^{-1}(\text{Im } F) = D(\mathcal{A}_l) \forall t \geq 0$. В частности, $x(0) \in D(\mathcal{A}_l)$. Таким образом, x – решение задачи (7.3), (7.4). Если $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – решение задачи (7.3), (7.4), то $x(t) \in D(\mathcal{A}_l) \forall t \geq 0$. Следовательно, $x(t) \in D(G) \forall t \geq 0$ и $F\dot{x}(t) = Gx(t)$, т.е. $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – решение задачи (7.1), (7.2).

Пусть теперь для пары (G, F) выполнено условие (ii) и $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – дифференцируемая функция. Ясно, что следующие условия эквивалентны:

- 1) $\dot{x}(t) \in D(F) \forall t \geq 0, F\dot{x}(t) = Gx(t) \forall t \geq 0$;
- 2) $x(t) \in D(\mathcal{A}_l) = G^{-1}(\text{Im } F) \forall t \geq 0$ и $\dot{x}(t) \in \mathcal{A}_l x(t) \forall t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. В монографии [2], одним из замечательных качеств которой является наличие в ней большого числа примеров конкретных классов дифференциальных уравнений, рассматривалась задача Коши вида

$$\frac{dFx(t)}{dt} = Gx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (7.5)$$

$$Fx(0) = u_0 \in X. \quad (7.6)$$

Если положить $y(t) = Fx(t)$, то данная задача сводится к задаче Коши для дифференциального включения с линейным отношением $\mathcal{A}_r = GF^{-1}$. Приводимые ниже результаты для задачи (7.1), (7.2) могут быть сформулированы и для задачи (7.5), (7.6) в терминах правого отношения $\mathcal{A}_r$. В то же время результаты предыдущего параграфа дают веские основания для заключения о том, что по своим свойствам дифференциальное включение (7.3) с левым линейным отношением $\mathcal{A}_l = F^{-1}G$ гораздо полнее отражает свойства рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Будем далее считать, что m -я степень левой резольвенты $\mathcal{A}_l \in LR(X)$ упорядоченной пары (G, F) для некоторого $m \in \mathbb{N}$ обладает свойством минимального роста на бесконечности, т.е. выполнено предположение 4.1.

Введем в рассмотрение подпространство $\tilde{X} = \text{Erg}(X, (A_n))$ по ограниченной последовательности $A_n = I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_l))^m \in \text{End } X, n \in \mathbb{N}$. Сопряженное к $\mathcal{A}_l$ отношение имеет вид $\mathcal{A}_l^* = G^*(F^*)^{-1}$, т.е. является правым отношением для пары (G^*, F^*) . В условиях следующей теоремы будут использоваться подпространства $\mathcal{X}_m^* = (\mathcal{X}^*)_m = (\mathcal{A}_l^*)^m 0 \subset X^*$. Действуя по аналогии с описанием такого типа подпространств, осуществленным в конце §6, приходим к последовательности

$$\mathcal{X}_0^* = \{0\}, \mathcal{X}_1^* = G^*(\text{Ker } F^*), \dots, \mathcal{X}_n^* = G^*((F^*)^{-1} \mathcal{X}_{n-1}^*), n \in \mathbb{N}, \dots \quad (7.7)$$

Непосредственно из теоремы 4.3 с учетом сделанного в §6 описания подпространств $\mathcal{A}_l^m 0$ и $D(\mathcal{A}_l^m)$ получаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнено предположение 4.1. Для того чтобы $\tilde{X} = X$, необходимо и достаточно, чтобы векторы из подпространства $\mathcal{X}_m = \mathcal{A}_l^m 0$ разделяли функционалы из подпространства $(\mathcal{X}^*)_m = (\mathcal{A}_l^*)^m 0 \subset X^*$. В частности, $\tilde{X} = X$ при выполнении одного из следующих условий:

- 1) X – рефлексивное банахово пространство;
- 2) $R(\lambda_0, \mathcal{A}_l) \in \text{End } X$ – слабо компактный оператор при некотором $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}_l)$;
- 3) $\dim \mathcal{X}_m = \dim (\mathcal{X}^*)_m < \infty$.

Аналогичное утверждение имеет место для банахова пространства Y , если использовать правое отношение $\mathcal{A}_r$ и соответствующие условия на $R(\cdot, \mathcal{A}_r)$. Такое утверждение необходимо при рассмотрении задачи (7.5), (7.6).

В условиях следующей теоремы считается, что для линейного отношения $\mathcal{A} = \mathcal{A}_l \in LR(X)$ пары (G, F) выполнено предположение 4.2 и условие $\text{Ker } F \neq \{0\}$, т.е. $\mathcal{A}_l \notin LO(X)$. Следовательно, для $\mathcal{A}_l$ верно утверждение теоремы 4.2 о разложении (4.6) пространства $\tilde{X}$ и разложении (4.7) сужения $\tilde{\mathcal{A}}_l$ отношения $\mathcal{A}_l$ на $\tilde{X}$. В дальнейшем мы сохраним обозначения теоремы 4.2. При этом, например, формулу (4.7) следует понимать следующим образом: $\tilde{\mathcal{A}}_l = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\infty$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть для линейного отношения $\mathcal{A}_l \in LR(X)$ выполнено предположение 4.2 и $\text{Ker } F \neq \{0\}$. Тогда справедливы равенства

$$\Phi(G, F) \cap \tilde{X} = \overline{D(\mathcal{A}_l^m)} = \overline{X^{(m)}} = X_0$$

и существует единственная вырожденная полугруппа операторов $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\} \subset \text{End } \tilde{X}$, генератором которой служит отношение $\tilde{\mathcal{A}} \in LR(\tilde{X})$, определяемое равенствами $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_l^0$ – сужение $\mathcal{A}_l$ на X_0 , $D(\tilde{\mathcal{A}}) = X_0$, $\tilde{\mathcal{A}}0 = X_\infty$. Полугруппа $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) ее сужение $\{T_0(t); t \geq 0\} \subset \text{End } X_0$ на X_0 является полугруппой класса C_0 , и любое решение $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ задачи (7.1), (7.2) с $x_0 \in D(\mathcal{A}_l^0) \subset G^{-1}(\text{Im } F)$ имеет вид $x(t) = T_0(t)x_0$, $t \geq 0$;
- 2) $\tilde{T}(0)$ – проектор на подпространство X_0 параллельно X_∞ .

Если векторы из подпространства $X_\infty = \mathcal{A}_l^m 0 \subset X$ разделяют векторы из подпространства $(\mathcal{A}_l^*)^m 0 \subset X^*$ (или выполнено одно из трех условий теоремы 7.1), то $\tilde{X} = X$ и $\Phi(G, F) = X_0$.

Все утверждения теоремы 7.2 следуют из леммы 7.1 и теоремы 4.2 с учетом описания подпространств $D(\mathcal{A}^m)$, $\mathcal{A}^m 0$, сделанного в конце §6 (см. также формулы (7.7)).

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Если вместо предположения 4.2 для $\mathcal{A}_l$ выполнено условие 3) теоремы 6.6, то имеют место все утверждения теоремы 7.2, причем $\mathcal{A}_0 \in \text{End } X_0$.

Таким же образом формулируется аналог теоремы 7.2, где вместо левого отношения $\mathcal{A}_l$ участвует правое отношение $\mathcal{A}_r$ упорядоченной пары (G, F) ; по нему строится вырожденная полугруппа операторов, с помощью которой определяются решения задачи (7.5), (7.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Аналог теоремы 7.2 был получен в статьях Г.А. Свиридюка [28] и В.Е. Федорова [12] при следующих условиях на упорядоченную пару (G, F) (поскольку терминология в [28] и [12] в значительной степени отличается от общепринятой, то формулировку условий проведем в обозначениях настоящей статьи):

- 1) $D(F) = X$, $\overline{D(G)} = X$;
- 2) $(a, \infty) \subset \rho(G, F)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$;
- 3) $\exists M > 0 \forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (a, \infty)^m \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max \left\{ \left\| \left(\prod_{k=1}^m R(\lambda_k; \mathcal{A}_l) \right)^n \right\|, \left\| \left(\prod_{k=1}^m R(\lambda_k; \mathcal{A}_r) \right)^n \right\| \right\} \leq \frac{M}{\prod_{k=1}^m |\lambda_k - a|^n}.$$

Все эти условия служат заменой предположения 4.2. Очевидно, что при выполнении указанных условий предположение 4.2 для $\mathcal{A}_l$ также выполнено. Равенство $\tilde{X} = X$ было получено В. Е. Федоровым [12] для рефлексивного банахова пространства X при (более жестких, чем в предположении 4.1) только что сформулированных условиях 1)–3), где $n = 1$. В той же статье [12] получены лишь достаточные (громоздкие) условия совпадения подпространства $\tilde{X}$ с X при $n > 1$.

Отметим, что одной из первых работ, в которой с помощью полугрупп операторов представлялись решения задачи (7.1), (7.2), была статья А. Г. Руткаса [24]. В ней рассматривалась пара операторов (G, F) с условиями на резольвенту, отвечающими случаю $m = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Упорядоченную пару операторов (G, F) назовем *левосекториальной* (правосекториальной) с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$, если секториальным с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$ является левое отношение $\mathcal{A}_l$ (соответственно правое отношение $\mathcal{A}_r$).

Непосредственно из определения 7.1 следует, что если пара операторов (G, F) левосекториальна (правосекториальна), то секториальными (с тем же углом) будет левое $\mathcal{A}_l$ (правое $\mathcal{A}_r$) отношение этой пары. Таким образом, из леммы 7.1 и теоремы 5.1 вытекает

ТЕОРЕМА 7.3. Если пара операторов (G, F) является левосекториальной с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$ (для $\mathcal{A}_l$ выполнено условие (5.1) из предположения 5.1), то равенство

$$T(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, \mathcal{A}_l) d\lambda$$

задает аналитическую в секторе $\Omega_{0, \delta_0} \subset \rho(\mathcal{A}_l)$, $\delta_0 = \theta - \pi/2$, и ограниченную при $t > 0$ полугруппу операторов из алгебры $\text{End } X$. Кроме того, для отношения $\mathcal{A} = \mathcal{A}_l$ верны все утверждения теоремы 5.3 и имеет место свойство 1) теоремы 7.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Аналогичный результат верен для правосекториальной пары (G, F) .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Наиболее близкий к теореме 7.3 результат содержится в статье [11]. При определении секториальной пары операторов (G, F) в ней требуется выполнение оценок в соответствующем секторе норм произведения операторов, являющихся значениями левой и правой резольвент пары (G, F) такого же характера, как условия 1)–3) в замечании 7.2.

Список литературы

1. Cross R. Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.
2. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: M. Dekker, 1998. (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. V. 215.)
3. Рунцер В. С. Теория линейных отношений // Деп. в ВИНТИ. 1982. №846–82.
4. Хилле Е., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Ч. I: Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
6. Neumann J. von. Über adjungierte Funktionaloperatoren // Ann. of Math. (2). 1932. V. 33. P. 294–310.
7. Arendt W. Approximation of degenerate semigroups // Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis. 1999/2000. V. 9. P. 33–46.

8. Функциональный анализ, сер. СМБ (под общей редакцией С.Г. Крейна). М.: Наука, 1972.
9. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Упорядоченные пары операторов и полугруппы // Изв. РАЕН. МММИУ. 1998. Т. 2. №3. С. 39–69.
10. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Построение фазового пространства и решений линейных уравнений, не разрешенных относительно производной // Докл. РАН. 2000. Т. 371. №3. С. 295–298.
11. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. №3. С. 604–616.
12. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. №3. С. 173–200.
13. Мельникова И. В., Гладченко А. В. Корректность задачи Коши для включений в банаховых пространствах // Докл. РАН. 1998. Т. 361. №6. С. 736–739.
14. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer-Verlag, 2000. (Grad. Texts in Math. V. 194.)
15. Råbiger F., Wolff M. P. H. Spectral and asymptotic properties of resolvent-dominated operators // Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis. 1997/1998. V. 7. P. 217–235.
16. Бурбаки Н. Спектральная теория. М.: Мир, 1972.
17. Favini A., Yagi A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1993. V. 163. P. 353–384.
18. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Об условиях компактности спектра упорядоченных пар линейных операторов // Изв. РАЕН. МММИУ. 1999. Т. 3. №3. С. 5–24.
19. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
20. Баскаков А. Г. Операторные эргодические теоремы и дополняемость подпространств банаховых пространств // Изв. вузов. Сер. матем. 1988. Т. 11(318). С. 3–11.
21. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
22. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
23. Радбель Н. И. Упорядоченные пары линейных операторов и задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0$ в банаховом пространстве // Дисс. . . канд. физ.-мат. наук. Донецк: ИПМиМ, 1984.
24. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. №11. С. 1996–2010.
25. Чернышов К. И. Об операторных дифференциальных уравнениях, не разрешенных относительно производной // Дисс. . . канд. физ.-мат. наук. Киев: ИМ АН УССР, 1979.
26. Крейн С. Г., Чернышов К. И. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // IX Международная конф. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Наук. думка, 1984. С. 193–197.
27. Диткин В. В. О некоторых спектральных свойствах пучка линейных ограниченных операторов // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №1. С. 75–79.
28. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. №4. С. 47–74.
29. Baskakov A. G., Chernyshov K. I. Ergodic subspaces and analytic semigroups // Spectral and evolutionary problems (Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Math. School). V. 11. Simferopol: National Taurida V. Vernadsky Univ., 2001. P. 136–143.