Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 12, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 02:50:51

УДК 517.51

А. Н. Бахвалов

Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье

В работе рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм рядов Фурье функций многих переменных, имеющих ограниченную Λ -вариацию. Доказано, что если непрерывная функция непрерывна по гармонической вариации, то ее ряд Фурье равномерно сходится по Прингсхейму. С другой стороны, показано, что для размерности больше двух найдется непрерывная функция ограниченной гармонической вариации, ряд Фурье которой расходится по кубам в нуле.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Введем вначале необходимые обозначения. Для промежутка I через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\overline{I_n} \subset I$.

Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для функции $m - 1$ переменных уже определено $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m). \quad (1)$$

Величину $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ будем называть *смешанным приращением* функции f на I .

Если множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β , то через $f(I^\alpha, x^\beta)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \alpha$, при фиксированных значениях x^j , $j \in \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает *класс функций ограниченной Λ -вариации* (класс Ватермана), если $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

В дальнейшем рассматриваются только такие Λ . Последовательность $\{n\}$ обозначается через H . Множество последовательностей Λ , удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00042) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96143).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ *относительно переменных* $x^1, \dots, x^m$ *по параллелепипеду* $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ *называется величина*

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus \alpha$. Через

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$$

будем обозначать $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -*вариацию* f *как функции переменных* $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ *по p -мерному параллелепипеду* $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ *при фиксированных значениях* x^β *остальных переменных (если β непусто).*

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -*вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ *относительно переменных* x^α *по параллелепипеду* $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ *называется величина*

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x^\beta \in \Delta^\beta} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. (Полной) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ *по параллелепипеду* $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ *называется величина*

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\alpha \neq \emptyset} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta).$$

Множество функций, для которых она конечна, называется *классом* $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*ограниченной вариации* и обозначается через $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$. Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем писать $V_\Lambda^{x^\alpha}$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$. Величину V_H называют *гармонической вариацией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что точка $\mathbf{x}_0$ является *регулярной точкой* функции $f(\mathbf{x})$, если существуют и конечны 2^m пределов

$$f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0) = \lim_{t^1, \dots, t^m \rightarrow +0} f(x_0^1 \pm t^1, \dots, x_0^m \pm t^m)$$

для всевозможных комбинаций знаков.

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Д. Ватерманом [1], в двумерном – А. А. Саакяном [2], а для случая более высоких размерностей – А. И. Саблиным [3], [4]. Ими были установлены следующие результаты о сходимости рядов Фурье (здесь и далее ряды Фурье берутся по (кратной) тригонометрической системе).

ТЕОРЕМА А (Д. Ватерман). Пусть $f \in HBV([-\pi, \pi])$ – 2π -периодическая функция. Тогда в каждой точке ряд Фурье f сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.

ТЕОРЕМА В (А. А. Саакян). Пусть $m = 2$, f — 2π -периодическая по каждому переменному измеримая функция и $f \in HBV([-\pi, \pi]^m)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x}_0$ ряд Фурье $f(\mathbf{x})$ сходится по Прингсхейму к величине

$$f^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0).$$

Если функция непрерывна на открытом множестве E , то сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в E .

ТЕОРЕМА С (А. И. Саблин). Пусть $f(x) \in HBV([-\pi, \pi]^m)$ — непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция и

$$\lim_{\text{diam } I \rightarrow 0} V_H(f; I) = 0$$

равномерно по всем параллелепипедам I . Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

Если $f(x) \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV([-\pi, \pi]^m)$ — непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция, причем $\lambda_k^q \leq k$ и для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty, \quad (2)$$

то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

В работе О. Г. Саргсяна [5] утверждается без доказательства, что теорема В верна и для случая произвольной размерности $m \geq 3$. Однако из результатов настоящей работы следует, что это утверждение неверно (см. теорему 5). А именно в теореме 5 построены примеры функций трех и более переменных, удовлетворяющих условиям теоремы В, ряды Фурье которых расходятся в точке по кубам и тем более — по Прингсхейму.

В [6] Ватерманом было введено понятие функции, непрерывной по Λ -вариации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Скажем, что $f(x) \in \Lambda BV([a, b])$ непрерывна по Λ -вариации ($f \in \mathcal{CLV}([a, b])$), если для последовательностей $\Lambda_n = \{\lambda_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda_n}(f; [a, b]) = 0.$$

Свойства классов $\mathcal{CLV}([a, b])$ в одномерном случае изучались рядом авторов. В работе Форана и Флейсснера [7] был впервые построен пример последовательности $\Lambda \in \mathbb{L}$, для которой классы $\Lambda BV(I)$ и $\mathcal{CLV}(I)$ не совпадают.

В упоминавшихся работах А. И. Саблина были установлены достаточные условия совпадения или несовпадения этих двух классов.

Необходимое и достаточное условие их совпадения или несовпадения было установлено Ф. Прус-Вишневи [8] и состоит в следующем.

ТЕОРЕМА D. Пусть

$$A = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\sum_{k=1}^{2n} 1/\lambda_k}{\sum_{k=1}^n 1/\lambda_k}.$$

Классы $CLV(I)$ и $\Lambda BV(I)$ совпадают тогда и только тогда, когда $A < 2$.

В двумерном случае понятие непрерывности по Λ -вариации было рассмотрено О. С. Драгошанским [9]. Им доказано совпадение классов функций ограниченной Λ -вариации и функций, непрерывных по Λ -вариации, для $\lambda_n = n^\alpha$, $\alpha \in (0.5, 1]$.

В настоящей работе рассматривается обобщение понятия непрерывности по вариации на многомерный случай. В качестве многомерного аналога определения 5 мы рассмотрим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ называется *непрерывной по $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации*, если для любого непустого множества $\alpha = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, m\}$ и для любого $j_k \in \alpha$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = 0. \quad (3)$$

Множество таких функций будем обозначать через $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$.

Нетрудно видеть, что для функции из $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$ стремление к нулю в (3) является монотонным.

Введем также два вспомогательных класса функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Скажем, что $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C_1(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$, если найдутся такие последовательности $M^j = \{\mu_n^j\} \in \mathbb{L}$, что $\mu_n^j/\lambda_n^j \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $f \in (M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Скажем, что $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C_2(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$, если найдутся такие последовательности $M^j = \{\mu_n^j\} \in \mathbb{L}$, что $\mu_n^j/\lambda_n^j \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $f \in (M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$.

Пусть $\delta \in (0, \infty)^m$, а $\sigma \in \{-1, 1\}^m$. Будем обозначать через $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)$ параллелепипед $\bigotimes_{j=1}^m I^j$, где $I^j = (x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j)$ при $\sigma^j = -1$. В качестве нормы в $\mathbb{R}^m$ возьмем $\|\delta\| = \max |\delta^j|$.

В §2 установлены следующие свойства класса $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$.

ТЕОРЕМА 1 (о структуре класса функций, непрерывных по Λ -вариации). Для любых последовательностей $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ справедливо равенство

$$C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta) = C_1(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta) = C_2(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta).$$

Если все Λ^j совпадают, то

$$CLV(\Delta) = \bigcup_{M \in \mathbb{L}: \frac{\mu_n}{\lambda_n} \downarrow 0} MBV(\Delta).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Тогда для любой регулярной точки $\mathbf{x} \in \Delta$ и для любого $\sigma \in \{-1, 1\}^m$ справедливо

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0.$$

Если к тому же $f(\mathbf{x})$ непрерывна в окрестности компакта K , то стремление к нулю происходит равномерно по $\mathbf{x}$ на K .

Последняя теорема позволяет усилить результат А. И. Саблина (вторую часть теоремы С). Комбинируя первую часть теоремы С и теорему 2, получаем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in CHV([-\pi, \pi]^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсгейму на $[-\pi, \pi]^m$.

Чтобы сравнить теоремы С и 3, рассмотрим классы $\Lambda BV([-\pi, \pi]^m)$ для $\lambda_n = n^\gamma$. Такая последовательность удовлетворяет условию (2) при $0 < \gamma \leq 1/(m-1)$. В то же время $\Lambda BV([-\pi, \pi]^m) \subset CHV([-\pi, \pi]^m)$ для любого $\gamma \in (0, 1)$ независимо от размерности по теореме 1. Таким образом, при $m \geq 3$ теорема 3 оказывается сильнее второй части теоремы С.

В §3 мы устанавливаем условие принадлежности функций некоторого специального вида классам Ватермана.

На основе этого условия исследуется возможность усиления теорем 2 и 3. Получены следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k \neq p} \frac{1}{\lambda_j^k} < \infty. \quad (4)$$

Тогда существует непрерывная функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (0, \varepsilon)^m) \geq 1.$$

Таким образом, при условии (4) класс $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$ в теореме 2 нельзя заменить классом $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

Из теорем 2 и 4 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено условие (4). Тогда существует непрерывная функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$, не принадлежащая классу $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m \geq 3$ и последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV([-\pi, \pi]^m)$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится по кубам в точке $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Таким образом, для размерности $m \geq 3$ в теореме 3 класс $CHV([-\pi, \pi]^m)$ нельзя заменить, в частности, классом $H BV([-\pi, \pi]^m)$.

§ 2. Некоторые свойства класса функций, непрерывных по Λ -вариации

Вначале докажем три вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\Lambda \in \mathbb{L}$ и $\{N_s\}$ – произвольная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $N_1 = 1$ и $\lambda_{N_k} > k^2$. Определим последовательности $\{q_n\}$ и $\{\lambda_n^*\}$ формулами

$$q_n = \frac{\lambda_n}{k} \quad \text{при} \quad N_k \leq n < N_{k+1}, \quad \lambda_n^* = \max_{i \leq n} q_i. \quad (5)$$

Тогда выполнены условия $\Lambda^* \in \mathbb{L}$ и $\lambda_n^*/\lambda_n \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим q_n и λ_n^* согласно (5). Тогда λ_n^* есть монотонно неубывающая последовательность положительных чисел. Так как $\lambda_{N_k}^* \geq q_{N_k} > k$, то $\lambda_n^* \rightarrow \infty$. Обозначим через $j(n)$ наибольшее из чисел $j \leq n$, на которых достигается равенство

$$\lambda_n^* = \max_{i \leq n} q_i = q_j = \frac{\lambda_j}{k(j)}.$$

Тогда

$$\lambda_n^* = \frac{\lambda_{j(n)}}{k(j(n))} \leq \frac{\lambda_n}{k(j(n))}.$$

Поэтому, во-первых, $\lambda_n^* \leq \lambda_n$, откуда $\sum (1/\lambda_n^*) = \infty$, т.е. $\Lambda^* \in \mathbb{L}$, а во-вторых,

$$\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n} \leq \frac{1}{k(j(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку из условия $\lambda_{N_k}^* > k$ следует, что $j(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ и тем самым $k(j(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Тогда для любого $p = 1, \dots, m$ существует монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_s\}$, где $N_1 = 1$, такая, что для последовательности Λ^* , определенной по Λ^p согласно (5), выполнено условие

$$f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^{p-1}, \Lambda^*, \Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m)V(\Delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $p = 1$. Положим $N_1 = 1$ и выберем N_k , $k \geq 2$, так, чтобы $\lambda_{N_k}^1 > k^2$ и для любого непустого множества $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ такого, что $\alpha = \{1, j_2, \dots, j_p\}$, выполнено

$$V_{\Lambda_{N_k}^1, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) \leq \frac{1}{2^k}.$$

При этом можно считать, что $\{N_k\}$ строго возрастает.

Установим, что $f \in C(\Lambda^*, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Из соображений симметрии нам достаточно проверить два свойства.

(А) Если $1 \in \alpha$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda_n^*, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_{\Lambda_{N_s}^*, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = 0. \quad (6)$$

Действительно, рассмотрим наборы $\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)$ и точку $x^\beta \in \Delta^\beta$. Для упрощения записи будем считать, что $f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta) = 0$, если какое-то из чисел k_j превосходит число интервалов в соответствующем наборе. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_{j_2}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{N_s+k_1}^* \lambda_{k_{j_2}}^{j_2} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} &\leq \sum_{k_1, k_{j_2}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{q_{N_s+k_1} \lambda_{k_{j_2}}^{j_2} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \\ &\leq \sum_{t=s}^{\infty} \left(\sum_{k_1=N_t}^{N_{t+1}-1} \sum_{k_{j_2}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{q_{k_1+1} \lambda_{k_{j_2}}^{j_2} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) \\ &\leq \sum_{t=s}^{\infty} t \left(\sum_{k_1=N_t}^{N_{t+1}-1} \sum_{k_{j_2}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_1+1}^1 \lambda_{k_{j_2}}^{j_2} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) \\ &\leq \sum_{t=s}^{\infty} t V_{\Lambda_{N_t}^1, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) \leq \sum_{t=s}^{\infty} \frac{t}{2^t}. \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани, получаем, что

$$V_{\Lambda_{N_s}^*, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) \leq \sum_{t=s}^{\infty} \frac{t}{2^t} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

(Б) Если $1, 2 \in \alpha$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda_n^*, \Lambda_n^2, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = 0.$$

Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу (6) можно выбрать $s \geq 2$ из условия

$$V_{\Lambda_{N_s-1}^*, \Lambda^2, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем выберем n из условия

$$V_{\Lambda^1, \Lambda_n^2, \Lambda^{j_3}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(s-1)}.$$

Тогда для любых наборов $\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)$ и точки $x^\beta \in \Delta^\beta$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_{j_3}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_1}^* \lambda_{n+k_{j_2}}^{j_2} \lambda_{k_{j_3}}^{j_3} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} &\leq \sum_{k_1=1}^{N_s-1} \left(\sum_{k_2, k_{j_3}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{q_{k_1} \lambda_{n+k_2}^2 \lambda_{k_{j_3}}^{j_3} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) \\ &+ \sum_{k_1=N_s}^{\infty} \left(\sum_{k_2, k_{j_3}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_1}^* \lambda_{n+k_2}^2 \lambda_{k_{j_3}}^{j_3} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) \\ &\leq (s-1) \sum_{k_1=1}^{N_s-1} \left(\sum_{k_2, k_{j_3}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_1+1}^1 \lambda_{n+k_2}^2 \lambda_{k_{j_3}}^{j_3} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани, получаем, что

$$V_{\Lambda_n^*, \Lambda_n^2, \Lambda^{j_3}, \dots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть последовательности $\Lambda, M \in \mathbb{L}$ таковы, что $\mu_n/\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдется последовательность $M^* \in \mathbb{L}$ такая, что $\mu_n^* \geq \mu_n$ и $\mu_n^*/\lambda_n \downarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_n = \mu_n/\lambda_n \rightarrow 0$. Положим $s_n = \max_{k \geq n} t_k$ и $\mu_n^* = \lambda_n s_n$. Тогда $\mu_n^* \geq \lambda_n t_n = \mu_n$. В то же время $s_n \downarrow 0$, поэтому из условия $\sum (1/\lambda_n) = \infty$ следует, что $\sum (1/\mu_n^*) = \infty$.

Покажем, что M^* монотонно не убывает. Возможны два случая. Если $s_n = s_{n+1}$, то $\mu_n^* = \lambda_n s_n \leq \lambda_{n+1} s_{n+1} = \mu_{n+1}^*$. Если же $s_n > s_{n+1}$, то это означает, что $s_n = t_n$, а тогда

$$\mu_n^* = \mu_n \leq \mu_{n+1} = \lambda_{n+1} t_{n+1} \leq \lambda_{n+1} s_{n+1} = \mu_{n+1}^*.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Вложение

$$C_2(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta) \subset C_1(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$$

непосредственно следует из определений этих классов.

С другой стороны, если $\mu_k^q/\lambda_k^q \rightarrow 0$, а $(M^*)^q$ — последовательности, построенные по M^q на основании леммы 3, то

$$(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta) \subset ((M^*)^1, \dots, (M^*)^m)BV(\Delta) \subset (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta),$$

откуда следует справедливость обратного вложения.

Вложение $C_1(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta) \subset C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$ вытекает из того, что если $f \in (M_1, \dots, M_m)BV(\Delta)$, то, например, при $1 \in \alpha$ справедлива оценка

$$V_{\Lambda_n^1, \Lambda^{j_2}, \dots, \Lambda^{j_p}} x^\alpha(f; \Delta) \leq \left(\sup_{i \geq n} \frac{\mu_i^1}{\lambda_i^1} \right) V_{M^{j_1}, \dots, M^{j_p}} x^\alpha(f; \Delta).$$

Докажем, что $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta) \subset C_1(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Рассмотрим функцию $f \in C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. По лемме 2 существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_s^1\}$ такая, что для $M^1 = \{\mu_n^1\}$, где

$$q_n^1 = \frac{\lambda_n^1}{k} \quad \text{при} \quad N_k^1 \leq n < N_{k+1}^1 \quad \text{и} \quad \mu_n^1 = \max_{i \leq n} q_i^1,$$

выполнено $f \in C(M^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Пользуясь той же леммой, будем поочередно выбирать возрастающие последовательности натуральных чисел $\{N_s^j\}$ такие, что для $M^j = \{\mu_n^j\}$, где

$$q_n^j = \frac{\lambda_n^j}{k} \quad \text{при} \quad N_k^j \leq n < N_{k+1}^j \quad \text{и} \quad \mu_n^j = \max_{i \leq n} q_i^j,$$

выполнено $f \in C(M^1, \dots, M^j, \Lambda^{j+1}, \dots, \Lambda^m)V(\Delta)$. Тогда при $j = m$ получим, что $f \in C(M^1, \dots, M^m)V(\Delta) \subset (M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$, причем по лемме 1 выполнено $\mu_n^j/\lambda_n^j \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть функция $f \in C\Lambda V(\Delta)$ принадлежит классу $(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$. Заметим, что если $M^k \in \mathbb{L}$ и при $k = 1, \dots, m$ выполнено условие $\mu_j^k/\lambda_j^k \rightarrow 0$, то для последовательности M^0 , где $\mu_j^0 = \max_{k=1, \dots, m} \mu_j^k$, выполнены условия $M^0 \in \mathbb{L}$ и $\mu_j^0/\lambda_j^0 \rightarrow 0$. Но $(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta) \subset M^0 BV(\Delta)$. Применение леммы 3 к последовательности M^0 завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим любую компоненту вариации $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$, где $\alpha = \{j_1, \dots, j_p\}$. В силу непрерывности по вариации функции f можно выбрать число n столь большим, что для любого $j_k \in \alpha$

$$V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2p}.$$

Далее, заметим, что если I – параллелепипед в p -мерном пространстве, вложенный в параллелепипед Δ , то

$$|f(I)| \leq 2^{p-1} \text{osc}(f; \Delta),$$

где $\text{osc}(f; \Delta)$ – колебание функции на параллелепипеде Δ , т.е. разность ее точной верхней и точной нижней граней на Δ . Выберем $\delta_0 > 0$ столь малым, что для $\delta_0 = (\delta_0, \dots, \delta_0)$

$$\text{osc}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma \delta_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n p}.$$

Отметим, что в случае непрерывной в окрестности компакта K функции f число δ_0 не зависит от точки $x \in K$ в силу равномерной непрерывности функции.

Тогда при $\|\delta\| \leq \delta_0$ для любых систем интервалов из $\Omega(x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и из $\Omega(x^j - \delta^j, x^j)$ при $\sigma^j = -1$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{k_{j_1}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_{j_1}}^{j_1} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} &\leq \sum_{k_{j_1}=1}^n \dots \sum_{k_{j_p}=1}^n \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_{j_1}}^{j_1} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \\ &+ \sum_{s=1}^p \left(\sum_{k_{j_s} \geq n+1} \sum_{k_{j_1}, \dots, k_{j_{s-1}}, k_{j_{s+1}}, \dots, k_{j_p}} \frac{|f(I_{\mathbf{k}}^\alpha, x^\beta)|}{\lambda_{k_{j_1}}^{j_1} \lambda_{k_{j_2}}^{j_2} \dots \lambda_{k_{j_p}}^{j_p}} \right) \\ &\leq n^p 2^{p-1} \text{osc}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma \delta_0)) + \sum_{s=1}^p V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{s-1}}, \Lambda_n^{j_s}, \Lambda^{j_{s+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани, получаем, что

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma \delta_0)) \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 3. “Диагональные” функции

Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 4. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ на m -мерном параллелепипеде Δ удовлетворяет следующим условиям:

(А) $V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = W_m < \infty$;

(Б) для любого $j = 1, \dots, m$ найдется точка $x_0^j \in \Delta^j$ такая, что функция $f_j(x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^{j-1}, x_0^j, x^{j+1}, \dots, x^m)$ принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^{j-1}, \Lambda^{j+1}, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta^1 \times \dots \times \Delta^{j-1} \times \Delta^{j+1} \times \dots \times \Delta^m)$, т.е. полная вариация f как функции оставшихся $m-1$ аргументов конечна.

Тогда $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

Отметим, что при $m = 2$ лемма была доказана А. А. Саакяном [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W_0 – наибольшая из полных вариаций, указанных в (Б). Зафиксируем размерность m и предположим, что для некоторого n , $1 < n \leq m$, уже доказана ограниченность всех q -мерных компонент вариации, где $n \leq q \leq m$, величиной W_n . Докажем ограниченность всех $(n-1)$ -мерных компонент вариации.

Рассмотрим, например, вариацию по переменным $(x^1, \dots, x^{n-1})$. Зафиксируем значения остальных переменных $(z^n, \dots, z^m)$.

Если $z^n = x_0^n$, то в силу условия (Б)

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{n-1}}^{x^1, \dots, x^{n-1}}(f; (\Delta^{1, \dots, n-1}, x_0^n, z^{n+1}, \dots, z^m)) \leq W_0.$$

Пусть $z^n \neq x_0^n$. Рассмотрим произвольные системы $\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j)$, $j = 1, \dots, n-1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{n-1}}^{n-1}, z^n, z^{n+1}, \dots, z^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{n-1}}^{n-1}} \\ & \leq \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{n-1}}^{n-1}, x_0^n, z^{n+1}, \dots, z^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{n-1}}^{n-1}} \\ & \quad + \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{n-1}}^{n-1} \times I_0, z^{n+1}, \dots, z^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{n-1}}^{n-1}}, \end{aligned}$$

где I_0 – интервал с концами x_0^n и z^n . Переходя к верхней грани, получаем, что

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{n-1}}^{x^1, \dots, x^{n-1}}(f; (\Delta^{1, \dots, n-1}, z^n, z^{n+1}, \dots, z^m)) \leq W_0 + \lambda_1^n W_n.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^m\}$ – монотонно невозрастающие последовательности положительных чисел, а $\xi_2(n), \dots, \xi_m(n)$ – инъективные отображения $\mathbb{N}$ в себя. Тогда

$$\sum_{n=1}^N a_n^1 a_{\xi_2(n)}^2 \dots a_{\xi_m(n)}^m \leq \sum_{n=1}^N a_n^1 a_n^2 \dots a_n^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно доказать лемму для случая, когда $\xi_q(n)$ – перестановки множества $\{1, \dots, N\}$. В случае $m = 2$ утверждение леммы сразу вытекает из следующего наблюдения: если $A \geq a$ и $B \geq b$, то $AB + ab \geq Ab + aB$, так как $(AB + ab) - (Ab + aB) = (A - a)(B - b) \geq 0$. (Отметим, что случай $m = 2$ рассматривался и раньше, см., например, [10; гл. 10, п. 10.2].)

Пусть теперь $m = 3$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{n=1}^N a_n^1 a_{\xi_2(n)}^2 a_{\xi_3(n)}^3.$$

Применив уже рассмотренный случай к последовательностям $\{a_n^1\}, \{a_{\xi_2(n)}^2 a_{\xi_3(n)}^3\}$, заметим, что сумма S не уменьшится, если мы расставим вторую из них в порядке невозрастания.

Проведем теперь индукцию по N . При $N = 1$ утверждение тривиально. Пусть для трех последовательностей длины $N - 1$ утверждение уже доказано. Предположим, что $\xi_2(1) > 1$; тогда существует $j > 1$: $\xi_2(j) = 1$. Заметим, что $a_{\xi_2(1)}^2 \leq a_1^2$; но по построению $a_{\xi_2(1)}^2 a_{\xi_3(1)}^3 \geq a_1^2 a_{\xi_3(j)}^3$; поэтому заведомо $a_{\xi_3(1)}^3 \geq a_{\xi_3(j)}^3$. Тогда $a_1^1 a_{\xi_3(1)}^3 \geq a_j^1 a_{\xi_3(j)}^3$, откуда

$$(a_1^1 a_{\xi_3(1)}^3) a_1^2 + (a_j^1 a_{\xi_3(j)}^3) a_{\xi_2(1)}^2 \geq (a_1^1 a_{\xi_3(1)}^3) a_{\xi_2(1)}^2 + (a_j^1 a_{\xi_3(j)}^3) a_1^2,$$

т.е. S не уменьшится, если мы переставим местами значения $\xi_2(j) = 1$ и $\xi_2(1)$. После этой перестановки для любого n будет справедливо неравенство $a_1^1 a_1^2 \geq a_n^1 a_{\xi_2(n)}^2$, и аналогично показываем, что значение S не уменьшится, если переставить местами значения $\xi_3(k) = 1$ и $\xi_3(1)$. После этой перестановки первым слагаемым в сумме S будет $a_1^1 a_1^2 a_1^3$. К оставшейся сумме $N - 1$ слагаемых применим предположение индукции и получим, что она не превосходит $\sum_{n=2}^N a_n^1 a_n^2 a_n^3$. Это завершает рассмотрение случая $m = 3$.

Пусть теперь утверждение леммы уже доказано для размерности $m - 1$, где $m \geq 4$. Рассмотрим сумму для m последовательностей; тогда по предположению индукции

$$\sum_{n=1}^N a_n^1 a_{\xi_2(n)}^2 \cdots a_{\xi_m(n)}^m \leq \sum_{n=1}^N a_n^1 \cdots a_n^{m-2} (a_{\xi_{m-1}(n)}^{m-1} a_{\xi_m(n)}^m),$$

где величины $a_{\xi_{m-1}(n)}^{m-1} a_{\xi_m(n)}^m$ невозрастают. Но последовательность $\{a_n^1 \cdots a_n^{m-2}\}$ заведомо не возрастает; применяя уже разобранный случай $m = 3$ к последовательностям $\{a_n^1 \cdots a_n^{m-2}\}$, $\{a_n^{m-1}\}$ и $\{a_n^m\}$, получаем утверждение леммы для размерности m . Лемма доказана.

Обозначим $T = [-\pi, \pi)$. Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим систему вложенных в T интервалов $\{D_i^1\}_{i=1}^\infty$ и системы попарно непересекающихся интервалов $\{D_i^q\}_{i=1}^\infty$, $q = 2, \dots, m$, где $D_i^q = (a_i^q, b_i^q) \subset T$.

Пусть $f_i(x)$ — произвольные функции на T , удовлетворяющие условиям $f_i(t) = 0$ при $t \leq a_i^1$ и $f_i(t) = 0$ при $t \geq b_i^1$.

Обозначим через $h_i^q(t)$ произвольную функцию, равную нулю при $t \leq a_i^q$ и $t \geq b_i^q$, такую, что $h_i^q((a_i^q + b_i^q)/2) = \pm 1$, $|h_i^q(t)|$ не убывает на $[a_i^q, (a_i^q + b_i^q)/2]$ и не возрастает на $[(a_i^q + b_i^q)/2, b_i^q]$.

Назовем “диагональной” функцию на T^m , имеющую вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^\infty \left(f_i(x^1) \prod_{q=2}^m h_i^q(x^q) \right). \quad (7)$$

Ясно, что носитель этой функции содержится в объединении замыканий попарно непересекающихся параллелепипедов $D_i^1 \times \cdots \times D_i^q$.

ЛЕММА 6. Пусть последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) “диагональная” функция $f(\mathbf{x})$, определенная формулой (7), принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$;

(б) при всех натуральных i выполнено $f_i \in \Lambda^1 BV(T)$, и величины $V_{\Lambda^1}(f_i; T)$ ограничены в совокупности некоторым числом C_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_q^i = (a_i^q + b_i^q)/2$ – середина интервала D_i^q . Заметим, что

$$V_{\Lambda^1}^{x^1}(f; (T, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^m)) = V_{\Lambda^1}(f_i; T).$$

Поэтому из (а) следует (б).

Докажем обратное. Прежде всего, на гиперплоскостях $x^q = -\pi$, где $q = 1, \dots, m$, функция f тождественно равна нулю. Поэтому $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (Б) леммы 4. Таким образом, нам достаточно доказать ограниченность m -мерной компоненты вариации f .

Пусть Ω_1 – совокупность таких наборов систем $\{I_k^q\} \in \Omega(T)$, $q = 1, \dots, m$, что для любого I_k^q , $q \geq 2$, существует i : $I_k^q \subset D_i^q$.

Пусть Ω_2 – совокупность таких наборов систем $\{I_k^q\} \in \Omega(T)$, $q = 1, \dots, m$, что для любого I_k^q , $q \geq 2$, существует i : $I_k^q = (a_i^q, \alpha_i^q)$ или $I_k^q = (\alpha_i^q, b_i^q)$.

Для $n = 1, 2$ обозначим

$$W_n = \sup_{\Omega_n} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Докажем, что

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; T^m) \leq 2^{m-1} W_1, \quad (8)$$

$$W_1 = W_2. \quad (9)$$

Рассмотрим произвольные конечные системы $\{I_k^q\} \in \Omega(T)$, $q = 1, 2, \dots, m$. Пусть $I_k^q = (c_k^q, d_k^q)$. Положим

$$S = \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}. \quad (10)$$

Произведем следующие преобразования системы $\{I_k^m\}$.

(i) Удалим все интервалы, для которых $f(x^1, \dots, x^{m-1}, I_k^m) \equiv 0$. Сумма S не изменится, а у оставшихся интервалов хотя бы один из концов будет принадлежать некоторому D_i^m .

Затем каждый интервал I_k^m , для которого $c_k^m \in D_i^m$, а d_k^m не принадлежит замыканию ни одного D_j^m , заменим на вложенный в I_k^m и в D_i^m интервал (c_k^m, b_i^m) , при этом сумма S вновь не изменится, так как

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, d_k^m) \equiv f(x_1, \dots, x_{m-1}, b_i^m) \equiv 0.$$

Аналогично поступим с интервалами, у которых только правый конец лежит в одном из D_i^m .

(ii) Если точки c_k^m и d_k^m принадлежат D_i^m и D_j^m , где $i \neq j$, то заменим (c_k^m, d_k^m) на два интервала (c_k^m, b_i^m) и (a_j^m, d_k^m) . При этом S не уменьшится, так как с учетом (1) имеем

$$\begin{aligned} |f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{m-1}}^{m-1}, b_i^m)| &= |f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{m-1}}^{m-1}, a_j^m)| = 0, \\ |f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{m-1}}^{m-1} \times I_k^m)| &\leq |f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{m-1}}^{m-1}, c_k^m)| \\ &\quad + |f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_{m-1}}^{m-1}, d_k^m)|, \end{aligned}$$

а некоторые номера k_m станут встречаться в сумме (10) дважды.

Проведя аналогичное преобразование систем $\{J_k^q\}$, где $k = 2, \dots, m-1$, получим, что существуют системы $\{J_{k_q}^q(s)\} \in \Omega(T)$, $q = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, 2^{m-1}$, такие, что для $q = 2, \dots, m$ и любого s каждый $J_k^q(s)$ содержится в некотором D_i^q и при этом

$$S \leq \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(J_{k_1}^1(s) \times \dots \times J_{k_m}^m(s))|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Отсюда следует, что справедливо (8).

Пусть теперь $\{J_k^q\}$, $q = 1, \dots, m$, — набор систем из Ω_1 , и $J_k^q = (u_k^q, v_k^q)$. Введем обозначение

$$S' = \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times \dots \times J_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Проведем следующие преобразования системы $\{J_k^m\}$.

(iii) Если для некоторых i и k выполнено $\alpha_i^m \in J_k^m$, то согласно определению

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times \dots \times J_{k_{m-1}}^{m-1} \times J_k^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{m-1}}^{m-1}} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} \frac{|f_i(J_{k_1}^1)| \cdot \prod_{q=2}^{m-1} |h_i^q(J_{k_q}^q)| \cdot |h_i^m(J_k^q)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{m-1}}^{m-1}} \\ &= |h_i^m(v_k^m) - h_i^m(u_k^m)| \cdot \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times \dots \times J_{k_{m-1}}^{m-1}, \alpha_i^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_{m-1}}^{m-1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выберем большее по модулю из чисел $h_i^m(v_k^m)$ и $h_i^m(u_k^m)$, которые по построению либо оба содержатся в $[0, 1]$, либо в $[-1, 0]$, и заменим соответствующий ему конец интервала J_k^m на точку α_i^m ; при этом интервал может только уменьшиться.

Так как $|h_i^m(\alpha_i^m)| = 1$, то при этом сумма в левой части (11), а следовательно, и сумма S' не уменьшится.

(iv) Если есть один или несколько интервалов J_k^m , содержащихся в одном интервале (a_i^m, α_i^m) , то заменим их интервалом (a_i^m, α_i^m) , присвоив ему наименьший из номеров k содержащихся в нем интервалов; при этом, как видно из (11), сумма S' может только увеличиться. Так же поступим и с интервалами, содержащимися в (α_i^m, b_i^m) .

Проведя преобразования (iii) и (iv) для систем $\{J_k^q\}$, где $q = 2, \dots, m-1$, получим, что сумма для любого набора систем из Ω_1 оценивается через сумму для некоторого набора систем из Ω_2 . Поэтому $W_1 \leq W_2$. Обратное неравенство следует из того, что $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Таким образом, (9) доказано.

Пусть

$$W_3 = \sup_{\Omega_2} \sup_{\varkappa_3, \dots, \varkappa_m} \sum_k \left(\sum_{k_1} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times J_k^2 \times J_{\varkappa_3(k)}^3 \times \dots \times J_{\varkappa_m(k)}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \lambda_k^2 \lambda_{\varkappa_3(k)}^3 \dots \lambda_{\varkappa_m(k)}^m} \right), \quad (12)$$

где $\varkappa_q(k)$ — произвольные функции с натуральными значениями, а

$$W_4 = \sup_{\Omega_2} \sup_{\xi_3, \dots, \xi_m} \sum_k \left(\sum_{k_1} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times J_k^2 \times J_{\xi_3(k)}^3 \times \dots \times J_{\xi_m(k)}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \lambda_k^2 \lambda_{\xi_3(k)}^3 \dots \lambda_{\xi_m(k)}^m} \right),$$

где $\xi_q(k)$ — произвольные инъективные функции с натуральными значениями.

Заметим, что если $J_{k_2}^2, \dots, J_{k_m}^m$ суть половины $D_{i_2}^2, \dots, D_{i_m}^m$ соответственно, то

$$\begin{aligned} S(k_2, \dots, k_m) &= \sum_{k_1} \frac{|f(J_{k_1}^1 \times J_{k_2}^2 \times \dots \times J_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1} \\ &= \begin{cases} 0, & \exists i_p \neq i_q, \\ \sum_{k_1} \frac{|f_i(J_{k_1}^1)|}{\lambda_{k_1}^1}, & i_2 = \dots = i_m = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, далее, что для каждого k_2 найдется не более 2^{m-2} наборов $(k_3, \dots, k_m)$ таких, что $S(k_2, k_3, \dots, k_m) \neq 0$ (при $q \geq 3$ в качестве $J_{k_q}^q$ должны быть взяты половины тех D_i^q , для которых $J_{k_2}^2 \subset D_i^2$). Поэтому

$$W_2 \leq 2^{m-2} W_3.$$

Заметим, что для любого значения k_3 найдется не более двух k_2 , при которых справедливо равенство $\varkappa_3(k_2) = k_3$, т.е. среди значений $\varkappa_3(k)$ не может быть трех одинаковых. Поэтому сумму по k в правой части (12) можно разбить на две суммы, в каждой из которых значения $\varkappa_3(k)$ не повторяются. Повторяя это рассуждение для 4-й, $\dots$, m -й координат, получаем, что

$$W_3 \leq 2^{m-2} W_4.$$

Так как $0 \leq S(k_2, \dots, k_m) \leq C_0$, то

$$W_4 \leq C_0 \sup_{\xi_3, \dots, \xi_m} \left(\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \lambda_{\xi_3(k)}^3 \dots \lambda_{\xi_m(k)}^m} \right),$$

где $\xi_q(k)$ – по-прежнему произвольные инъективные функции с натуральными значениями. Применяя к последовательностям $\{1/\lambda_k^q\}$, где $q = 2, \dots, m$, лемму 5, получаем, что

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2 \lambda_{\xi_3(k)}^3 \dots \lambda_{\xi_m(k)}^m} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m}.$$

Окончательно

$$S \leq 2^{3m-5} C_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m}.$$

Переходя к верхней грани, получаем ограниченность m -мерной компоненты вариации. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Без ограничения общности можно считать, что $\Delta = [-\pi, \pi)^m$ и $p = 1$. Пусть $D_k^q = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$ для всех натуральных k и для $q = 1, \dots, m$.

Для $q \geq 2$ в качестве $h_k^q(t)$ возьмем функцию, равную нулю при $t \leq \frac{1}{k+1}$ и $t \geq \frac{1}{k}$, единице при $t = \frac{2k+1}{2k(k+1)}$ и продолженную по линейности в остальные точки.

Обозначим через $\Lambda^1(N)$ величину $\sum_{j=1}^N 1/\lambda_j^1$. Разделим D_k^1 на $2k$ равных частей точками $x_0 = \frac{1}{k+1} < x_1 < \dots < x_{2k} = \frac{1}{k}$ и определим функцию $f_k(x)$ следующим образом: $f_k(x_{2i}) = 0$, $f_k(x_{2i-1}) = \frac{1}{\Lambda^1(2k)}$, на (x_i, x_{i+1}) – по линейности, вне J_k^1 – нуль. Тогда нетрудно видеть, что $V_{\Lambda^1}(f_k; T) = 1$. По лемме 6 “диагональная” функция с указанными параметрами лежит в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$. Так как $\frac{1}{\Lambda^1(2k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то она непрерывна. В то же время для любого $\varepsilon > 0$

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (0, \varepsilon)^m) \geq V_{\Lambda^1}^{x^1}(f; (0, \varepsilon)^m) \geq 1.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Для доказательства мы используем элементы конструкции примера Лебега непрерывной функции на отрезке с расходящимся в точке рядом Фурье (см., например, [11; гл. 1, § 46]).

Пусть n_k – натуральные числа, причем $n_1 = 4$, $n_k \geq 3$, $N_0 = 1$, $N_k = n_1 n_2 \dots n_k = N_{k-1} n_k$. Введем для натуральных k интервалы $D_k^1 = (\pi/N_k, \pi/N_{k-1})$. Определим функции

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln n_k} \sin N_k t, & t \in D_k^1, \\ 0, & t \leq \frac{\pi}{N_k} \text{ или } t \geq \frac{\pi}{N_{k-1}}. \end{cases}$$

Заметим, что носитель функции $f_k(t)$ делится точками вида $\pi(j + 1/2)/N_k$, где $j = 1, \dots, n_k - 1$, на n_k интервалов монотонности, для $n_k - 2$ из которых модуль приращения равен $2/\ln n_k$, а для двух оставшихся $-1/\ln n_k$. Поэтому

$$V_H(f_k; T) = \frac{1}{\ln n_k} \left(\sum_{k=1}^{n_k-2} \frac{2}{k} + \frac{1}{n_k-1} + \frac{1}{n_k} \right) \leq 4.$$

Для $q = 2, \dots, m$ возьмем $D_k^q = (\pi/(N_k + 1/2), 2\pi/(N_k + 1/2))$ и $h_j(t) = h_k^q(t) = \sin(N_k + 1/2)t$ на D_k^q и нулю вне него.

Тогда “диагональная” функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^m h_{2j}(x^q) \right) \quad (13)$$

принадлежит классу $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(T^3)$ по лемме 6.

Поскольку функции f_j и h_j непрерывны на T , а $\max_t |f_j(t)|$ убывает с ростом j , то f непрерывна и $f(\mathbf{0}) = 0$. Покажем, что при надлежащем выборе последовательности $\{n_k\}$ найдется положительная величина δ такая, что

$$\begin{cases} R_k = S_{N_k, \dots, N_k}(f, \mathbf{0}) \geq 2\delta & \text{для четных } k, \\ |R_k| = |S_{N_k, \dots, N_k}(f, \mathbf{0})| \leq \delta & \text{для нечетных } k. \end{cases} \quad (14)$$

В силу равномерной сходимости ряда (13)

$$R_k = \sum_{j=1}^{\infty} S_{N_k}(f_{2j}, 0) (S_{N_k}(h_{2j}, 0))^{m-1} = \sum_{j=1}^{\infty} R_{k, 2j}.$$

Величины $S_{N_k}(f_i, 0)$ обладают следующими тремя свойствами (все $o(1)$ берутся при $k \rightarrow \infty$):

(а) для любого k

$$S_{N_k}(f_k, 0) = \frac{1}{\pi \ln n_k} \int_{\pi/N_k}^{\pi/N_{k-1}} \frac{\sin^2 N_k t}{t} dt + o(1) = \frac{1}{2\pi} + o(1) \quad (15)$$

(это свойство доказано в [11]);

(б) пусть $f_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ (по построению это непрерывная функция), тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{\infty} |S_{N_k}(f_i, 0)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/N_k} |f_0(t)| \frac{\sin(N_k + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt \\ &\leq \frac{N_k + 1/2}{N_k} \max_{(0, \pi/N_k)} |f_0(t)| = o(1); \end{aligned} \quad (16)$$

(в) если $n_1, \dots, n_{k-1}$ уже выбраны, то для любого $\varepsilon_k > 0$ можно выбрать n_k столь большим, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} |S_{N_k}(f_i, 0)| < \varepsilon_k. \quad (17)$$

Действительно, для любого i

$$S_{N_k}(f_i, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(t) \frac{\sin N_k t}{t} dt + o(1),$$

где первое слагаемое можно рассматривать как коэффициент Фурье непрерывной функции $f_i(t)/t$, поэтому оно стремится к нулю с увеличением n_k .

Далее, для любого k

$$S_{N_k}(h_k, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \frac{\sin^2(N_k + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt = c_0 + o(1), \quad (18)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{u} du$$

есть абсолютная постоянная. С другой стороны, для любых k и i справедлива оценка

$$|S_{N_k}(h_i, 0)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \frac{\sin(N_k + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} \sin(N_i + 1/2)t dt \right| \leq 1. \quad (19)$$

Пусть $\delta = c_0^{m-1}/(9\pi)$. Выберем последовательность $\{n_k\}$ так, чтобы (17) выполнялось для $\varepsilon_k = \delta/2$. Тогда с учетом (19) для любого k выполнено неравенство

$$\sum_{2j < k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (20)$$

На основании оценок (15) и (18) выберем k_0 так, чтобы при $k \geq k_0$ выполнялось неравенство

$$R_{k,k} \geq \frac{c_0^{m-1}}{3\pi} = 3\delta. \quad (21)$$

Кроме того, выберем k_0 столь большим, чтобы при $k \geq k_0$ сумма в левой части (16) не превосходила $\delta/2$. Тогда с учетом (19) справедливо

$$\sum_{2j > k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (22)$$

Объединяя оценки (20)–(22), получаем, что при четных $k \geq k_0$ справедливо неравенство

$$R_k \geq R_{k,k} - \sum_{2j < k} |R_{k,2j}| - \sum_{2j > k} |R_{k,2j}| \geq 3\delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 2\delta,$$

а при нечетных $k \geq k_0$ – неравенство

$$|R_k| \leq \sum_{2j < k} |R_{k,2j}| + \sum_{2j > k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Таким образом, выполнены неравенства (14), что и означает расходимость по кубам в нуле. Теорема доказана.

Автор благодарен М. И. Дьяченко за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. №1. P. 107–117.
2. *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // *Изв. АН Арм. ССР.* 1986. Т. 21. № 6. С. 517–529.
3. *Саблин А. И.* Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье // *Дисс. ... канд. физ.-матем. наук.* М.: МГУ, 1987.
4. *Саблин А. И.* Λ -вариация и ряды Фурье // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1987. №10. С. 66–68.
5. *Саргсян О. Г.* О сходимости и явлении Гиббса кратных рядов Фурье функции ограниченной гармонической вариации // *Изв. НАН Армении. Сер. матем.* 1993. Т. 28. №3. С. 3–20.
6. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of Λ -bounded variation // *Studia Math.* 1976. V. 55. №1. P. 87–95.
7. *Foran J., Fleissner R.* A note on Λ -bounded variation // *Real Anal. Exchange.* 1978/79. V. 4. P. 185–191.
8. *Prus-Wiśniowski F.* Bounded harmonic variation and the Garsia–Sawyer class // *Real Anal. Exchange.* 1994/95. V. 20. №1. P. 37–38.
9. *Драгошанский О. С.* О непрерывности двумерной Λ -вариации // *Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докл. 11-й Саратовской зимней школы.* Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002. С. 71–72.
10. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
11. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.04.2002