Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, Р. М. Тригуб, Положительно определенные сплайны специального вида, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 12, 41–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:09:01

УДК 517.5

В. П. Заставный, Р. М. Тригуб

Положительно определенные сплайны специального вида

Изучаются четные финитные с носителем на $[-1, 1]$ положительно определенные сплайны, совпадающие на $[0, 1]$ с алгебраическим вещественным полиномом. Приведены примеры таких сплайнов. Исследуются e -сплайны, которые обладают рядом экстремальных свойств, и положительно определенные A -сплайны максимальной гладкости на $\mathbb{R}$. Указана оценка приближения линейной комбинацией сдвигов A -сплайна. Найдены новые соотношения для гипергеометрической функции ${}_1F_2$.

Библиография: 27 названий.

Введение

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *положительно определенной* на $\mathbb{R}$, если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\forall \{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0.$$

Для таких функций непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности на $\mathbb{R}$. Множество всех положительно определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций обозначим через Φ . По теореме Бохнера–Хинчина $f \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(t)$, где μ — неотрицательная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$ (см. [1; теорема 4.2.2]). Если $f \in \Phi$ и $f(0) = 1$, то f является характеристической функцией.

Пусть $f \in \Phi$ и $f(0) > 0$. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$, $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ и различных $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$

$$\sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{ix_k u} \right|^2 d\mu(u) \geq 0$$

и интеграл равен нулю лишь в том случае, когда или $c_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$), или мера μ сосредоточена в вещественных нулях суммы $\sum_{k=1}^n c_k e^{ix_k u}$, которых (если не все c_k равны нулю и $n \geq 2$) счетное число. Так что если дополнительно $f(x) \neq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{iu_k x}$, где $u_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = f(0) > 0$ (из теоремы единственности для почти периодических функций следует, что это условие

Работа выполнена при поддержке FFUY (грант № 01.07/00241).

выполнено, если, например, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(t)| dt = 0$), то квадратичная форма $\sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j)$ положительно определенная. По критерию Сильвестра главные миноры ее матрицы положительны. Поэтому задача интерполяции

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x - x_k) \Big|_{x=x_m} = y_m, \quad 1 \leq m \leq n,$$

при любом наборе $\{y_m\}_{m=1}^n \subset \mathbb{C}$ однозначно разрешима.

Преобразование Фурье и свертка определяются соответственно по формулам:

$$\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx, \quad (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u) du.$$

Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, то положительная определенность функции f эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье, т.е. $\hat{f}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, и в этом случае $\hat{f} \in L(\mathbb{R})$ (см. [1; теоремы 3.2.2 и 4.2.2], [2; гл. I, § 1, следствие 1.26]). Если $f \in L(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, то по теореме Винера линейные комбинации сдвигов функции f плотны в $L(\mathbb{R})$.

Положительно определенные функции появляются в разных экстремальных задачах. Например, классическое неравенство Бернштейна для производной тригонометрического полинома сразу следует из того, что функция $x \mapsto 1 - |x|$ при $|x| \leq 2$ может быть продолжена до положительно определенной на $\mathbb{R}$.

Сплайном называют функцию, “склеенную” из “кусков” (алгебраических) полиномов. Ее характеризуют максимальной степенью полиномов и гладкостью в целом. Обозначим через S_n множество всех четных заданных на $\mathbb{R}$ сплайнов, равных нулю при $x > 1$, являющихся на $[0, 1]$ вещественным алгебраическим полиномом степени не выше n . Это в некотором смысле простейшие финитные сплайны, которые “склеены” всего из двух полиномов. В настоящей работе изучаются положительно определенные сплайны из класса $\Phi \cap S_n$.

В § 1 приводится серия таких сплайнов разных нечетных степеней, порожденных полиномами Лежандра (см. теорему 1 и лемму 2). В § 2 введены и изучены e -и A -сплайны с положительным преобразованием Фурье. При этом A -сплайны, и это главное, имеют максимальную гладкость в этом классе (см. теорему 4). В § 3 исследована возможность представления любого полинома в виде линейной комбинации сдвигов A -сплайна (теорема 5) и найдена скорость приближения в пространстве $C(\mathbb{R})$ функций из класса H_1^λ линейными комбинациями сдвигов A -сплайна (теорема 6). (О скорости приближения B -сплайнами Шёнберга см. [3].) В § 4 начато изучение общих свойств выпуклого множества всех четных с носителем на $[-1, 1]$ характеристических функций (множество Φ_0). Найдены критерии граничной точки в $\Phi_0 \cap S_n$ (лемма 5) и крайней точки в Φ_0 (теорема 8). Приведены примеры крайних точек (теорема 9). В § 5 выписаны рекуррентные соотношения и другие формулы для A -сплайна, рассмотрены их обобщения, получено новое соотношение для гипергеометрической функции ${}_1F_2$.

Сделаем еще несколько библиографических замечаний. Положительная определенность e -сплайнов получена из нового критерия характеристической функции [4] (см. также [5]), по которому положительная определенность функции сводится к полной монотонности другой. Положительно определенные A -сплайны максимальной гладкости и сразу в кратном случае (на единичном шаре в $\mathbb{R}^m$ равны

полиному от евклидовой нормы) введены вторым из авторов в 1986 г. (см. [6; $m = 1$] и [7]–[9]). Строгая положительность $\hat{A}$, а не только неотрицательность, установлена первым из авторов [6], [10]. Содержание §§ 1 и 2 в основном взято из депонированной работы [6]. В настоящей статье критерий из [5] не используется. Результаты § 3 принадлежат второму из авторов, а §§ 4 и 5 – первому. После доклада второго из авторов в июне 2001 г. в Петербурге [11] О. Давыдов обратил внимание на статью [12], в которой ее автор, видно, не зная упомянутых выше работ, пришел к A -сплайнам другим путем (см. замечание 10).

§ 1. Примеры сплайнов из $\Phi \cap S_n$ нечетной степени

ТЕОРЕМА 1. 1) При любом $n \in \mathbb{N}$ существует сплайн $s \in \Phi \cap S_{2n+1}$ такой, что

$$s(x) = 1 + \sum_{k=0}^n a_k |x|^{2k+1}, \quad |x| \leq 1, \quad s(1) = 0, \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 x^p s(x) dx = 0, \quad 0 \leq p \leq 2n-1, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

2) Если обозначить сплайн, введенный в 1), через $\tilde{e}_{2n+1}$, то $\tilde{e}_{2n+1} = (-1)^n p_n * p_n$, где p_n – полином Лежандра степени n для отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, нормированный в $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и продолженный нулем на $\mathbb{R}$. При этом можно считать, что $n \geq 0$, если положить $\tilde{e}_1 = (1 - |x|)_+$.

3) Сплайн $s \in S_{2n+1}$, удовлетворяющий условиям (1), определяется однозначно.

ЛЕММА 1. 1) Если сплайн $s \in S_n$, то

$$\frac{1}{2} \hat{s}(t) = \int_0^1 s(x) \cos tx dx = \frac{1}{t^{n+1}} (p_{n-1}(t) \cos t + q_n(t) \sin t + r_{n-1}(t)), \quad (2)$$

где q_n – полином степени не выше n той же четности, что и n , а p_{n-1} и r_{n-1} – полиномы степени не выше $n-1$ и противоположной четности. В нуле – устранимая особенность.

2) Для любых p, q и r с указанными свойствами существует сплайн $s \in S_n$ такой, что имеет место тождество (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{s}(t) &= \operatorname{Re} \int_0^1 s(u) e^{itu} du = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{Re} \left[\frac{s^{(k)}(u) e^{itu}}{(it)^{k+1}} \right] \Big|_{u=0}^1 \\ &= \cos t \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^\nu \frac{s^{(2\nu+1)}(1)}{t^{2\nu+2}} + \sin t \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^\nu \frac{s^{(2\nu)}(1)}{t^{2\nu+1}} + \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\nu+1} \frac{s^{(2\nu+1)}(0)}{t^{2\nu+2}} \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь в точке 0 – правая производная, а в точке 1 – левая).

Для доказательства 2) по коэффициентам полиномов p и q , т.е. фактически по $s^{(\nu)}(1)$, $0 \leq \nu \leq n$, строим полином на $[0, 1]$ и сплайн $s \in S_n$. Для него

$$\frac{1}{2} \hat{s}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} (p_{n-1}(t) \cos t + q_n(t) \sin t + r_{n-1}(t)) + \frac{\tilde{r}_{n-1} - r_{n-1}}{t^{n+1}},$$

где остаток должен иметь устранимую особенность в нуле и, значит, $\tilde{r}_{n-1} \equiv r_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $s \in S_n$ и $s(1) = 0$, то из (3) получаем: $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \hat{s}(t)/2 = -s'(0) - |s'(1)|$ и $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^2 \hat{s}(t)/2 = -s'(0) + |s'(1)|$. Если $s \in \Phi \cap S_n$, то $s(1) = 0$ и, значит, $-s'(0) - |s'(1)| \geq 0$, а если еще $\hat{s}$ имеет бесконечное число вещественных нулей, то $-s'(0) - |s'(1)| = 0$.

ЛЕММА 2. Если s_n – вещественный полином той же четности, что и n , продолженный с отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ на всю прямую нулем, то $\tilde{s}_{2n+1} := (-1)^n s_n * s_n \in \Phi \cap S_{2n+1}$ и $\hat{\tilde{s}}_{2n+1}(t)$ имеет бесконечное число вещественных нулей. Кроме того, при любом целом $p \in (\frac{n}{2}, n]$ $\tilde{s}_{2n+1}^{(2p)}(0) = 0$, $\tilde{s}_{2n+1}'(0) = (-1)^n \tilde{s}_{2n+1}'(1)$ (в точке 0 – правая производная, а в точке 1 – левая).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как в лемме 1, получаем

$$\hat{s}_n(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s_n(x) e^{itx} dx = i \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \frac{1}{t^{n+1}} \left(p_n(t) \cos \frac{t}{2} + q_n(t) \sin \frac{t}{2} \right),$$

где p и q – вещественные полиномы разной четности. Очевидно, что $\hat{s}_n(t)$ имеет бесконечно много вещественных нулей, $\hat{\tilde{s}}_{2n+1}(t) \equiv |\hat{s}_n(t)|^2$ и

$$\tilde{s}_{2n+1}(x) = (-1)^n \int_{|x|-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s_n(u) s_n(|x| - u) du \in S_{2n+1}. \quad (4)$$

Поэтому $\tilde{s}_{2n+1} \in \Phi \cap S_{2n+1}$. Из (4) следует, что при $x \in [0, 1]$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{2n+1}^{(k)}(x) &= (-1)^n \left(\int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s_n^{(k)}(x-u) s_n(u) du \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{k-1} s_n^{(j)} \left(x - \frac{1}{2} \right) s_n^{(k-1-j)} \left(\frac{1}{2} \right) \right), \quad 1 \leq k \leq n, \\ \tilde{s}_{2n+1}^{(n+1+m)}(x) &= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n-m} s_n^{(j+m)} \left(x - \frac{1}{2} \right) s_n^{(n-j)} \left(\frac{1}{2} \right), \quad 0 \leq m \leq n. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $s_n^{(k)}(-x) = (-1)^{n+k} s_n^{(k)}(x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то из (5) сразу получаем приведенные в лемме 2 равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применяем лемму 2 к полиному Лежандра p_n для отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, нормированному в $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, и положим $\tilde{e}_{2n+1} := (-1)^n p_n * p_n$. Отсюда получаем $\tilde{e}_{2n+1}(0) = 1$. Учитывая ортогональность полиномов p_n на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ к полиномам меньшей степени и используя равенства (5), заключаем, что $\tilde{e}_{2n+1}^{(2p)}(0) = 0$ при целых $p \in [1, n]$. В силу той же ортогональности и равенства $\hat{\tilde{e}}_{2n+1}(t) = (-1)^n [\hat{p}_n(t)]^2$ заключаем, что число $t = 0$ является для $\hat{\tilde{e}}_{2n+1}$ нулем кратности не меньше чем $2n$ и, значит, $0 = \hat{\tilde{e}}_{2n+1}^{(p)}(0) = i^p \int_{-1}^1 x^p \tilde{e}_{2n+1}(x) dx$ при $0 \leq p \leq 2n-1$. Таким образом, утверждения 1) и 2) в теореме 1 доказаны.

Докажем утверждение 3). Нетрудно показать, что

$$\hat{\tilde{e}}_{2n+1}^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_{-1}^1 x^{2n} \tilde{e}_{2n+1}(x) dx \neq 0$$

(в противном случае p_n ортогонален x^n , а это не так). Пусть сплайн $s \in S_{2n+1}$ имеет вид $s(x) = 1 + \sum_{k=0}^n a_k |x|^{2k+1}$ на $[-1, 1]$ и для него выполнены условия: $s(1) = 0$, $\int_{-1}^1 x^p s(x) dx = 0$, $0 \leq p \leq 2n-1$, $p \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $s(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \tilde{e}_{2k+1}(x)$ при некоторых значениях $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Умножая последнее равенство на x^{2p} , $0 \leq p \leq n-1$, $p \in \mathbb{Z}$, и интегрируя полученное тождество от 0 до 1, с учетом интегральных условий получаем, что $\lambda_p = 0$, $0 \leq p \leq n-1$. Поэтому $s = \lambda_n \tilde{e}_{2n+1}$. А так как еще $s(0) = 1$, то $\lambda_n = 1$.

Из интегральных условий (1) следует, что

$$\min_{a_k \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 \left| \tilde{e}_{2n+1}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k \right|^2 dx = \|\tilde{e}_{2n+1}\|_2^2.$$

§ 2. e - и A -сплайны

Сплайны $e_n \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, определим следующим образом (см. [4], [5], а также ниже лемму 3):

$$\begin{aligned} e_n(x) &:= 2^{n-1} \frac{(2n-1)}{(2n-1)!!} \sqrt{u} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left\{ u^{n-\frac{3}{2}} (1 - \sqrt{u})^n \right\} \Big|_{u=x^2} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-1)}{(2n-1)!!} \frac{(2n+k-1)!!}{(2n+k-1)!} \frac{(k+1)}{(k+1)!!} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Примеры: $e_1(x) = \tilde{e}_1(x) = (1 - |x|)_+$, $e_2(x) = (1 - 3|x|)e_1(x)$, $e_3(x) = (1 - 7|x| + 8x^2)e_1(x)$ и $e_2 - \frac{1}{5}e_3 = \frac{4}{5}\tilde{e}_3 \in \Phi$.

ТЕОРЕМА 2. 1) $e_n \in \Phi \cap S_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

2) При $n \geq 2$ существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, зависящие только от n , такие, что

$$c_1 \frac{t^{2n-2}}{(1+t^2)^n} \leq \hat{e}_n(t) \leq c_2 \frac{t^{2n-2}}{(1+t^2)^n}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

ЛЕММА 3. 1) Для сплайнов e_n , $n \in \mathbb{N}$, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} e_n(0) &= 1, \quad e_n(1) = 0, \\ \int_0^1 x^{2k} e_n(x) dx &= 0, \quad 0 \leq k \leq n-2, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (если } n \geq 2), \\ e'_n(0) &= -\frac{2^{n-1}n!(2n-1)}{(2n-1)!!}, \quad e'''_n(0) = -\frac{2^{n-1}n!n(n-1)(n-2)(2n-1)}{(2n-1)!!}, \\ e'_n(1) &= \frac{(-1)^n n!(2n-1)}{(2n-1)!!}, \quad e''_n(1) = \frac{3}{2} \frac{(-1)^n n!n(n-1)(2n-1)}{(2n-1)!!}, \\ e'''_n(1) &= \frac{1}{8} \frac{(-1)^n n!n(n-1)(n-2)(9n+5)(2n-1)}{(2n-1)!!}, \\ \int_0^1 x^{2n-2} e_n(x) dx &= (-1)^{n-1} \frac{2^{n-2}[(n-1)!]^2 (2n)!!}{(3n-1)!} \end{aligned} \quad (8)$$

(здесь в точке 0 – правая производная, а в точке 1 – левая).

2) Сплайн $s \in S_n$, удовлетворяющий условиям (8), определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Краевые условия в (8) и (9) в нуле очевидны. Из (6) вытекает равенство $e_n(x) = cx f(x^2)$, $x \in [0, 1]$, где

$$f(x) := \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \frac{x^{n-\frac{3}{2}}}{(1+\sqrt{x})^n} (1-x)^n \right\}, \quad c = \frac{2^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)!!}.$$

Тогда краевые условия в (8) и (9) в единице вытекают из следующих равенств:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \quad f^{(k)}(1) = \binom{n+k-1}{k-1} (-1)^n n! \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left\{ \frac{x^{n-\frac{3}{2}}}{(1+\sqrt{x})^n} \right\} \Big|_{x=1}, \quad k \geq 1, \\ f'(1) &= \frac{(-1)^n n!}{2^n}, \quad f''(1) = \frac{3(-1)^n (n+1)!(n-2)}{2^{n+2}}, \\ f'''(1) &= \frac{(-1)^n (n+2)!(9n^2 - 49n + 60)}{2^{n+5}}, \\ e'_n(1) &= 2cf'(1), \quad e''_n(1) = c(6f'(1) + 4f''(1)), \\ e'''_n(1) &= c(6f'(1) + 24f''(1) + 8f'''(1)). \end{aligned}$$

Проверим интегральные условия. При $2m > -1$

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{2^{n-2}(2n-1)} \int_0^1 x^{2m} e_n(x) dx &= \int_0^1 u^m \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \{ u^{n-\frac{3}{2}} (1-\sqrt{u})^n \} du \\ &= (-1)^{n-1} m(m-1) \cdots (m-n+2) \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-\sqrt{u})^n du \\ &= \frac{2(-1)^{n-1} \Gamma(m+1) \Gamma(2m+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m-n+2) \Gamma(2m+n+2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

При целых $m \in [0, n-2]$ правая часть в (10) равна нулю, а при $m = n-1$ получаем (9).

Докажем утверждение 2). Если сплайн $s \in S_n$ удовлетворяет соотношениям (8), то $s(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x)$ при некоторых значениях $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Умножая последнее равенство на x^{2p} , $0 \leq p \leq n-2$, $p \in \mathbb{Z}$, и интегрируя полученное тождество от 0 до 1, с учетом интегральных условий (8) получаем, что $\lambda_p = 0$, $1 \leq p \leq n-1$. Поэтому $s = \lambda_n e_n$. А так как еще $s(0) = 1$, то $\lambda_n = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть $s \in S_n$, $s(1) = 0$ и $t = 0$ — нуль функции $\hat{s}(t)$ кратности $2p$. Тогда существует четный алгебраический полином $p(x)$ степени $2(n-p-1)$ с коэффициентом при старшей степени $\frac{(n+2p+1)!}{(2p)!} \hat{s}^{(2p)}(0) \neq 0$ такой, что при $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{n+1} \hat{s}(t) dt = \frac{p(x)}{x^n (x^2 + 1)^n}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3) и учитывая равенство $s(1) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{n+1} \hat{s}(t) dt &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{Re} \left[\frac{(n-k)! s^{(k)}(u)}{i^{k+1} (x-iu)^{n+1-k}} \right] \Big|_{u=0}^1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left[\frac{(-1)^k (n-k)! s^{(k)}(1)}{i^{k+1} (x-i)^{n+1-k}} \right] + \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2(-1)^{p+1} (n-2p-1)! s^{(2p+1)}(0)}{x^{n-2p}} \\ &= \frac{p(x)}{x^n (x^2 + 1)^n}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $p(x)$ – четный алгебраический полином. Заметим, что $\hat{s}(t) = t^{2p}h(t)$, где h непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$ и $h(0) = \frac{\hat{s}^{(2p)}(0)}{(2p)!} \neq 0$. Умножая левую и правую части равенства (12) на x^{n+2p+2} , переходим к пределу при $x \rightarrow +\infty$. Учитывая последнее замечание, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{x^{2(n-p-1)}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n+2p+1} h\left(\frac{u}{x}\right) du \\ &= h(0) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n+2p+1} du = h(0)(n+2p+1)!. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Функция f называется *вполне монотонной* на $(0, +\infty)$ ($f \in M$), если $f \in C_{(0, +\infty)}^\infty$ и для всех $x > 0$ и целых $k \geq 0$ выполняется неравенство $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$.

ТЕОРЕМА (Бернштейн, см. [13; гл. V, § 5]).

$$f \in M \iff f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\mu(t), \quad x > 0, \quad (13)$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на $[0, +\infty)$ такая, что интеграл (13) сходится при всех $x > 0$. При этом мера μ конечна на $[0, +\infty) \iff f(+0) < +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из этой теоремы вытекает, что если $g \in C_{(0, +\infty)}$ и ее преобразование Лапласа $Lg(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t) dt$ сходится для всех $x > 0$, то $g(t) \geq 0 \forall t > 0 \iff Lg \in M$. Например, $L(1 - \cos t)(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)} \in M$, а поэтому $\frac{1}{x^n(x^2 + 1)^n} \in M$ при любом $n \in \mathbb{N}$, так как произведение вполне монотонных функций есть вполне монотонная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Первое утверждение вытекает из попарной эквивалентности следующих условий:

- (a) $e_n \in \Phi$;
- (b) $\hat{e}_n(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$;
- (c) $f_n(t) := t^{n+1}\hat{e}_n(t) \geq 0 \forall t > 0$;
- (d) $Lf_n \in M$.

Эквивалентность условий (a) и (b) вытекает из теоремы Бохнера–Хинчина (см. введение). Эквивалентность (b) и (c) вытекает из непрерывности и четности $\hat{e}_n(t)$. Эквивалентность (c) и (d) вытекает из теоремы Бернштейна (см. замечание 2). Осталось найти преобразование Лапласа Lf_n . Применяя лемму 4 при $s = e_n$ и $p = n - 1$ (см. (8) и (9)), сразу получаем:

$$\begin{aligned} Lf_n(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{n+1} \hat{e}_n(t) dt = \frac{d_n}{x^n(x^2 + 1)^n} \in M, \\ d_n &= \frac{2^n(n-1)!n!(2n-1)}{(2n-1)!!} > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Докажем утверждение 2). Справедливость соотношения (7) в окрестности нуля вытекает из интегральных условий (8) и (9), а в окрестности бесконечности – из равенств

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \hat{e}_n(t)}{2} = \frac{(2^{n-1} - 1)(2n - 1)n!}{(2n - 1)!!}, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \hat{e}_n(t)}{2} = \frac{(2^{n-1} + 1)(2n - 1)n!}{(2n - 1)!!},$$

которые непосредственно следуют из (3) (см. замечание 1) и краевых условий (9). Осталось показать, что $\hat{e}_n(t) > 0$ при всех $t \neq 0$ и $n \geq 2$. По доказанному $Lf_n =$

$$\frac{d_n}{d_{n-s}d_s} Lf_{n-s} Lf_s \text{ при } n \geq 2, 1 \leq s \leq n-1 \text{ и } f_n(t) \geq 0 \text{ при } t \geq 0, n \in \mathbb{N}. \text{ Поэтому}$$

$$f_n(t) = \frac{d_n}{d_{n-s}d_s} \int_0^t f_{n-s}(t-u) f_s(u) du > 0, \quad t > 0, n \geq 2, 1 \leq s \leq n-1. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь следующие величины:

$$\begin{aligned} \lambda_n &:= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : e_n - \lambda e_{n+1} \in \Phi \}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ a_n &:= \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + a}{x^n(x^2 + 1)^n} \in M \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} e_n - \lambda e_{n+1} \in \Phi &\iff \lambda \leq \lambda_n, \\ \frac{x^2 + a}{x^n(x^2 + 1)^n} \in M &\iff a \geq a_n. \end{aligned}$$

Из равенства (14) получаем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{n+2} (\hat{e}_n(t) - \lambda \hat{e}_{n+1}(t)) dt = 3n d_n \cdot \frac{x^2 + \frac{1}{3} - \lambda \frac{2(n+1)}{3(2n-1)}}{x^{n+1}(x^2 + 1)^{n+1}}.$$

Отсюда, учитывая замечание 2, получаем связь между a_n и λ_n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} - \lambda_n \frac{2(n+1)}{3(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Очевидно, что при $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \inf_{t \neq 0} \frac{\hat{e}_n(t)}{\hat{e}_{n+1}(t)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{e}_n(t)}{\hat{e}_{n+1}(t)} \\ &= \inf_{u \in [-1, 1]} \frac{-e'_n(0) + u e'_n(1)}{-e'_{n+1}(0) + u e'_{n+1}(1)} = \frac{2n-1}{n+1} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) получаем, что $\lambda_1 = 0$ и, значит, $a_2 = \frac{1}{3}$. Из (18) также следует, что $\lambda_2 \leq \frac{1}{5}$, а так как $e_2 - \frac{1}{5}e_3 = \frac{4}{5}\hat{e}_3 \in \Phi$ (см. примеры перед теоремой 2), то $\lambda_2 = \frac{1}{5}$ и, значит, $a_3 = \frac{1}{5}$. Учитывая замечание 2, получаем

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + a}{x(x^2 + 1)} &= L(a(1 - \cos t) + \cos t)(x) \in M \\ &\iff a(1 - \cos t) + \cos t \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \iff a \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому $a_1 = \frac{1}{2}$. С учетом этого получаем (см. (17) и (18))

$$a_n \geq \frac{1}{2^{n-1} + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Полученные значения λ_n при $n = 1, 2$ и a_n при $n = 1, 2, 3$ позволяют выдвинуть две эквивалентные гипотезы:

ГИПОТЕЗА 1. Неравенство (18) обращается в равенство при всех $n \in \mathbb{N}$.

ГИПОТЕЗА 2. Неравенство (19) обращается в равенство при всех $n \in \mathbb{N}$.

В пользу этих гипотез приведем теорему 3, доказательство которой будет дано в конце § 4.

ТЕОРЕМА 3. Если при некотором $n \in \mathbb{N}$ число λ_n является алгебраическим, то при этом значении n неравенство (18) обращается в равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как в (16) при переходе от n к $n+1$ добавляется вполне монотонный множитель $\frac{1}{x(x^2+1)}$, то последовательность $\{a_n\}$ убывает, а поэтому (см. (17)) последовательность $\{\lambda_n\}$ возрастает. Следовательно, при всех $n \geq 2$ $\lambda_n \geq \frac{1}{5}$ и $e_n - \frac{1}{5}e_{n+1} \in \Phi$.

Сплайны $A_{3n-2} \in S_{3n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, определим следующим образом: $A_1 := e_1$, а при $n \geq 2$

$$A_{3n-2}(x) := \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!}{n!(2n-3)!} \int_1^{|x|} (|x| - u)^{2n-3} e_n(u) du, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 4. 1) При $n \in \mathbb{N}$ $A_{3n-2} \in S_{3n-2} \cap C^{2n-2}(\mathbb{R})$, $A_{3n-2}(0) = 1$ и этими условиями сплайн определяется однозначно.

2) При $n \geq 2$ $A_{3n-2} \in \Phi$ и существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, зависящие только от n , такие, что

$$\frac{c_1}{(1+t^2)^n} \leq \hat{A}_{3n-2}(t) \leq \frac{c_2}{(1+t^2)^n}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

3) При $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq k \leq 2n-2$ число различных нулей $A_{3n-2}^{(k)}$ на интервале $(0, 1)$ равно $\left[\frac{k}{2}\right]$ и все они простые.

4)¹ При $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$

$$|xA_{3n-2}(x)| < \frac{2n-1}{2n(3n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $m, n \in \mathbb{N}$ условие $s \in S_m \cap C^{2n-2}(\mathbb{R})$, очевидно, эквивалентно условиям $s^{(k)}(1) = 0$, $0 \leq k \leq 2n-2$, и (если $n \geq 2$) $s^{(2p+1)}(0) = 0$, $0 \leq p \leq n-2$ (в точке 0 – правая производная, а в точке 1 – левая).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из (20) получаем, что $A_{3n-2} \in S_{3n-2}$ и при $x \in [0, 1]$

$$A_{3n-2}^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!}{n!(2n-3-k)!} \int_1^x (x-u)^{2n-3-k} e_n(u) du \quad (0 \leq k \leq 2n-3), \quad (22)$$

$$A_{3n-2}^{(2n-2)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!}{n!} e_n(x).$$

¹Это свойство дает ответ на вопрос Н. И. Черныха (о поведении А-сплайна с ростом n) во время доклада второго из авторов на международной конференции OFEA'2001 в Санкт-Петербурге в июне 2001 г.

Из (22) получаем, что $A_{3n-2}^{(k)}(1) = 0$, $0 \leq k \leq 2n-2$, а также с учетом (10) $A_{3n-2}^{(2p+1)}(0) = 0$, $0 \leq p \leq n-2$. Поэтому $A_{3n-2} \in S_{3n-2} \cap C^{2n-2}(\mathbb{R})$. При $n \geq 2$ из (20) и (10) (при $m = n - \frac{3}{2}$) получаем, что

$$\begin{aligned} A_{3n-2}(0) &= \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(3n-1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(2n-2)} \cdot \frac{2^{n-2} (2n-1)}{(2n-1)!!} \\ &\times \frac{2(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \Gamma(2n-2) \Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(3n-1)} = 1. \end{aligned}$$

Равенство $A_1(0) = 1$ очевидно. Если $s \in S_{3n-2} \cap C^{2n-2}(\mathbb{R})$, то $s^{(2n-2)} \in S_n \cap C(\mathbb{R})$ и с учетом замечания 4

$$\int_0^1 s^{(2n-2)}(x) \cos tx \, dx = (-1)^{n-1} t^{2n-2} \int_0^1 s(x) \cos tx \, dx.$$

Из последнего равенства и леммы 3 (см. доказательство утверждения 2)) заключаем, что $s^{(2n-2)} = \lambda e_n$ при некоторой константе $\lambda \in \mathbb{R}$ и, значит,

$$\hat{s}(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{t^{2n-2}} \lambda \hat{e}_n(t).$$

В частности,

$$\hat{A}_{3n-2}(t) = \frac{(3n-2)!}{n!} \cdot \frac{\hat{e}_n(t)}{t^{2n-2}}. \quad (23)$$

Поэтому $s = cA_{3n-2}$, $c = s(0)$. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) сразу получается из равенства (23) и теоремы 2.

Утверждение 3) при $n = 1$ очевидно, а при $n \geq 2$ следует из теоремы Ролля. Так как $A'_{3n-2}(0) = A'_{3n-2}(1) = 0$, то на $(0, 1)$ существует нуль у A''_{3n-2} . Но и $A''_{3n-2}(1) = 0$. Поэтому на $(0, 1)$ есть нуль и у A'''_{3n-2} . При $n \geq 3$ $A'''_{3n-2}(0) = A'''_{3n-2}(1) = 0$. Поэтому на $(0, 1)$ есть два различных нуля у $A^{(iv)}_{3n-2}$. И так далее. Приходим к выводу, что $A_{3n-2}^{(2n-2)}$ на $(0, 1)$ имеет не менее $n-1$ различных нулей. Так что при любом целом $k \in [0, 2n-2]$ число различных нулей у $A_{3n-2}^{(k)}$ на $(0, 1)$ не менее $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. А если хотя бы при одном $k \in [0, 2n-2]$ число нулей с учетом кратности было бы больше $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, то у $A_{3n-2}^{(2n-2)}$ и, значит, у e_n (см. (22)) было бы на $(0, 1)$ не менее n нулей с учетом кратности. Но $e_n(1) = 0$, а степень полинома e_n равна n .

Утверждение 4) является частным случаем предложения 7 (см. §5).

Свойства 3) и 4) сплайна A_{3n-2} показывают, что его график при $n \geq 2$ имеет вид колокола и с ростом n приближается к осям координат.

§ 3. Линейные комбинации сдвигов A -сплайнов

Пусть $g \in L(\mathbb{R})$. По классической теореме Винера для того чтобы линейные комбинации сдвигов g были плотны в $L(\mathbb{R})$, т.е. $\overline{\{\sum_{k=-N}^N g(\cdot + h_k) c_k\}} = L(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{g}(x) \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$. A -сплайн удовлетворяет этому условию, и поэтому естественно рассмотреть вопрос о порядке приближения функций того или иного класса линейными комбинациями сдвигов A . Начнем с полиномов.

ТЕОРЕМА 5. 1) Для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, различных чисел $\{h_k\}_0^{3n-2}$ из $[0, \varepsilon]$ и любого полинома p степени не выше $3n-2$ существует единственное представление вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3n-2} c_k A_{3n-2}(x + h_k), \quad x \in [0, 1 - \varepsilon].$$

2) Если $n \geq 3$ и $b - a > 1$, то из того, что конечная сумма

$$\sum c_k A_{3n-2}(x + h_k) \in C^{2n+1}[a, b],$$

следует, что эта сумма равна нулю на $[a, b]$. При этом условие C^{2n+1} нельзя заменить на условие C^{2n} .

3) При $n = 2$ для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, различных чисел $\{h_k\}_0^4$ из $[0, \varepsilon]$ и любого полинома p степени не выше 4 существует единственное представление вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^4 c_k (A_4(x + h_k) - 2A_4(x + 1 + h_k) - 2A_4(x - 1 + h_k)), \quad x \in [-1, 1 - \varepsilon].$$

При $\varepsilon = 0$ это не так: если при некоторых различных $\{h_k\}_1^m$ из $(-2, 2)$ и не равных нулю $\{c_k\}_1^m$ сумма $p(x) = \sum_{k=1}^m c_k A_4(x + h_k)$ на $[-1, 1]$ является полиномом, то $m = 3$ и $h_1 = 0$, $h_2 = 1$, $h_3 = -1$, $c_2 = c_3 = -2c_1$, $p(x) = c_1(3x^4 - 6x^2 + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из следующего простого факта: каков бы ни был полином q степени точно $n \geq 1$, для любого полинома p степени не выше n и любых различных чисел $\{h_k\}_0^n$ существует единственное представление вида $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k q(x + h_k)$.

Докажем утверждение 2). Сплайн $A_{3n-2} \in C^{2n-2}(\mathbb{R})$, и есть всего три точки $-1, 0, 1$, где его гладкость равна $2n-2$ (односторонние производные $A_{3n-2}^{(2n-1)} = \gamma e'_n$ не совпадают). Тогда в некоторой окрестности некоторой точки из (a, b) некоторые слагаемые суммы имеют гладкость $2n-2$, а остальные — из C^∞ . Возьмем одну такую точку, которую после сдвига можно считать нулем. Нужно доказать, что если $S(x) = aA(x) + bA(x+1) + cA(x-1) \in C^{2n+1}$ в окрестности нуля, то $a = b = c = 0$. Из условия $S \in C^{2n-1}$ в окрестности нуля следует, что $ae'_n(+0) - ce'_n(1-0) = -ae'_n(+0) + be'_n(1-0)$ и, значит (см. (9)), $a = (b + c) \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}$. Из условия $S \in C^{2n}$ в окрестности нуля следует еще одно равенство: $ce''_n(1-0) = be''_n(1-0)$. При $n \geq 2$ $e''_n(1-0) \neq 0$ (см. (9)), поэтому $b = c$ и $a = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}c$. Из условия $S \in C^{2n+1}$ в окрестности нуля следует последнее равенство: $ae'''_n(+0) - ce'''_n(1-0) = -ae'''_n(+0) + be'''_n(1-0)$, которое эквивалентно условию

$$c \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} e'''_n(+0) - e'''_n(1-0) \right) = 0.$$

Но при $n \geq 3$ (см. (9))

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} e'''_n(+0) - e'''_n(1-0) = (-1)^n n! n(n-1)(n-2)(2n-1)(3-9n) \cdot \frac{1}{8(2n-1)!!} \neq 0.$$

Поэтому $c = 0$ и $a = b = 0$. То, что условие C^{2n+1} нельзя заменить на условие C^{2n} , следует из доказанного соотношения

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} A_{3n-2}(x) + A_{3n-2}(x+1) + A_{3n-2}(x-1) \in C^{2n}[-1, 1].$$

Для доказательства утверждения 3) заметим, что для сплайна $A_4(x) = (1 + 3|x|)(1 - |x|)_+^3$ справедливо равенство: $A_4(x) - 2A_4(x+1) - 2A_4(x-1) = 3x^4 - 6x^2 + 1, x \in [-1, 1]$. А далее — как и в первом утверждении.

Докажем вторую часть утверждения 3). Если $aA_4(x) + bA_4(x+1) + cA_4(x-1)$ является полиномом в окрестности нуля, то $b = c = -2a$ (см. доказательство утверждения 2) при $n = 2$). Предположим, что среди $\{h_k\}_1^m$ есть некоторое $h \in (0, 1)$. Так как $p(x)$ является полиномом в окрестности точки $-h$, то $(\pm 1 + h) \in \{h_k\}_1^m$. Но $p(x)$ является полиномом и в окрестности точки $1 - h$. Поэтому $(-2 + h) \in \{h_k\}_1^m$. Таким образом, полином $p(x)$ должен содержать сумму $a_1A_4(x-2+h) + a_2A_4(x-1+h) + a_3A_4(x+h) + a_4A_4(x+1+h)$, причем должны выполняться равенства: $a_1 = a_3 = -2a_2, a_2 = a_4 = -2a_3$ и, значит, все $a_k = 0$, что противоречит условию. Поэтому $\{h_k\}_1^m \cap (0, 1) = \emptyset$. Аналогично доказывается, что среди $\{h_k\}_1^m$ нет чисел из $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$ и, значит, $\{h_k\}_1^m = \{0; \pm 1\}$.

Разности $\Delta_\delta^p, p \in \mathbb{N}$, при $p = 1$ определяются по формуле $\Delta_\delta^1 f(\cdot) := f(\cdot + \delta) - f(\cdot)$, а при $p \geq 2$ — по индукции $\Delta_\delta^p := \Delta_\delta^1(\Delta_\delta^{p-1})$. Через $H_1^\lambda, \lambda > 0$, обозначают множество функций $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H_1^\lambda} := \|f\|_1 + \sup_{0 < \delta \leq 1} \delta^{-\lambda} \|\Delta_\delta^{[\lambda]+1} f(\cdot)\|_1.$$

ТЕОРЕМА 6. *Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 1$ $f(x), x^r f(x) \in C(\mathbb{R}) \cap H_1^\lambda$, то $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall h \in (0, \pi]$ и для натурального $N = [(2\pi/h)^{1+2n/r}]$ существуют числа $\{c_k\}_{-N}^N$ такие, что*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N c_k A_{3n-2}(x - kh) \right| \leq \begin{cases} Kh^{\lambda-1}, & \lambda < 2n+1, \\ Kh^{2n} \ln\left(\frac{\pi}{h} + 1\right), & \lambda = 2n+1, \\ Kh^{2n}, & \lambda > 2n+1, \end{cases}$$

где константа K зависит только от λ, n, r и норм в пространстве H_1^λ функций $f(x)$ и $x^r f(x)$.

Доказательство этой теоремы основано на следующем предложении, представляющем и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть при некоторых $\lambda_0 > 1, \lambda > 1$ и $r \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} |g_0(x)| &\asymp \frac{1}{(1 + |x|)^{\lambda_0}}, & |g_0^{(r)}(x)| &= O\left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^{\lambda_0}, \\ |g(x)| + |g^{(r)}(x)| &= O\left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^\lambda. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда $\forall h \in (0, \pi]$ существует полином $\tau_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikhx}$ такой, что

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = \begin{cases} O(h^{\lambda-1}), & \lambda < \lambda_0 + 1, \\ O\left(h^{\lambda_0} \ln\left(\frac{\pi}{h} + 1\right)\right), & \lambda = \lambda_0 + 1, \\ O(h^{\lambda_0}), & \lambda > \lambda_0 + 1. \end{cases}$$

При этом константа в этом неравенстве зависит лишь от λ , λ_0 , r и величин, входящих в условия (24), а $N = [(2\pi/h)^{1+\lambda_0/r}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть $M \geq 1$. Положим $G := g/g_0$ и $G_M := G\varphi_M$, где $\varphi_M(x) = \varphi(x/M)$, а φ — гладкая на $\mathbb{R}$ функция, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 0$ вне $[-1, 1]$, $\varphi = 1$ на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Учитывая, что $|g(x) - g_0(x)G_M(x)| = |g(x)(1 - \varphi_M(x))| \leq |g(x)|$, получаем

$$\|g - g_0 G_M\|_1 = \int_{|x| \geq M/2} |g(x)(1 - \varphi_M(x))| dx \leq \int_{|x| \geq M/2} |g(x)| dx. \quad (25)$$

Теперь функцию G_M заменим функцией G_M^T , имеющей период $T = 2l$, где $l \geq M$, и совпадающей с G_M на периоде $[-l, l]$. Период T выберем позже. Получаем последовательно

$$\begin{aligned} \|g_0(G_M - G_M^T)\|_1 &= \sum_{p \neq 0} \int_{(2p-1)l}^{(2p+1)l} |g_0(x)G_M^T(x)| dx \\ &= \sum_{p \neq 0} \int_{-l}^l |g_0(x + pT)| \cdot |G_M^T(x)| dx \\ &= \int_{-M}^M |G_M(x)| \sum_{p \neq 0} |g_0(x + pT)| dx \\ &\leq \int_{-M}^M |G_M(x)| dx \max_{|x| \leq M} \sum_{p \neq 0} |g_0(x + pT)| \\ &= O\left(\max_{|x| \leq l} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{(1 + |x + pT|)^{\lambda_0}}\right) \int_{-M}^M |G_M(x)| dx \\ &= O\left(\frac{1}{T^{\lambda_0}}\right) \int_{-M}^M |G_M(x)| dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь мы учли первое условие в (24). Теперь аппроксимируем периодическую функцию G_M^T полиномом τ_N , где $h = \pi/l$, используя теорему Джексона в L_1 :

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l |G_M^T(x) - \tau_N(x)| dx &\leq C_r \left(\frac{T}{N}\right)^r \int_{-l}^l \left|\frac{d^r}{dx^r} G_M^T(x)\right| dx \\ &= C_r \left(\frac{T}{N}\right)^r \int_{-M}^M \left|\frac{d^r}{dx^r} G_M^T(x)\right| dx, \end{aligned}$$

где $G_M = G\varphi_M = \frac{g}{g_0}\varphi_M$. Из условий (24) следует, что при $p \in [0, r]$

$$\begin{aligned} |g_0^{(p)}(x)| &= O\left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^{\lambda_0}, \quad |g^{(p)}(x)| = O\left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^{\lambda}, \\ |g_0(x)| &\geq \frac{C}{(1 + |x|)^{\lambda_0}} \quad (C > 0). \end{aligned}$$

Поэтому при $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{g}{g_0} \varphi_M \right) (x) \right| = O \left(\sum_{p_1+p_2+p_3=r} \left| g^{(p_1)} \left(\frac{1}{g_0} \right)^{(p_2)} \varphi_M^{(p_3)} \right| \right) = O \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\lambda-\lambda_0}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l |G_M^T(x) - \tau_N(x)| dx \\ &= O \left(\left(\frac{T}{N} \right)^r M^{\lambda_0-\lambda+1} \right), O \left(\left(\frac{T}{N} \right)^r \ln(M+1) \right), O \left(\left(\frac{T}{N} \right)^r \right) \end{aligned} \quad (27)$$

соответственно при $\lambda < \lambda_0 + 1$, $\lambda = \lambda_0 + 1$ и $\lambda > \lambda_0 + 1$. Учитывая (25) и (26), имеем

$$\begin{aligned} \|g - g_0 \tau_N\|_1 &\leq \|g - g_0 G_M\|_1 + \|g_0(G_M - G_M^T)\|_1 + \|g_0(G_M^T - \tau_N)\|_1 \\ &= O \left(\int_{|x| \geq M/2} |g(x)| dx + \frac{1}{T^{\lambda_0}} \int_{-M}^M |G(x)| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-l}^l |G_M^T(x) - \tau_N(x)| dx \max_{|x| \leq l} \sum_p |g_0(x + pT)| \right) \\ &= O \left(\int_{|x| \geq M/2} |g(x)| dx + \frac{1}{T^{\lambda_0}} \int_{-M}^M |G(x)| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-l}^l |G_M^T(x) - \tau_N(x)| dx \right). \end{aligned}$$

В силу условий (24)

$$|g(x)| = O \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^\lambda, \quad |G(x)| = \left| \frac{g(x)}{g_0(x)} \right| = O \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\lambda-\lambda_0}.$$

Пусть сначала $\lambda > \lambda_0 + 1$. Тогда, учитывая еще (27), имеем

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = O \left(\frac{1}{M^{\lambda-1}} + \frac{1}{T^{\lambda_0}} + \left(\frac{T}{N} \right)^r \right).$$

При этом $M \geq 1$ — произвольное, $T \geq 2M$, $h = 2\pi/T$ и N произвольно. Выберем эти параметры так, чтобы все три слагаемых были одного порядка. Полагаем

$$T = 2M^{\frac{\lambda-1}{\lambda_0}}, \quad N = [T^{1+\lambda_0/r}], \quad h = \frac{2\pi}{T}. \quad (28)$$

Получаем окончательно

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = O \left(\frac{1}{T^{\lambda_0}} \right) = O \left(h^{\lambda_0} \right).$$

Пусть теперь $\lambda = \lambda_0 + 1$. Тогда

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = O \left(\frac{1}{M^{\lambda-1}} + \frac{1}{T^{\lambda_0}} \ln(M+1) + \left(\frac{T}{N} \right)^r \ln(M+1) \right).$$

Искомую оценку получим при том же выборе T и N (см. (28)).

И наконец, $\lambda < \lambda_0 + 1$. Тогда

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = O\left(\frac{1}{M^{\lambda-1}} + \frac{1}{T^{\lambda_0}} M^{\lambda_0-\lambda+1} + \left(\frac{T}{N}\right)^r M^{\lambda_0-\lambda+1}\right).$$

Полагая $T = 2M$, $N = [T^{1+\lambda_0/r}]$, $h = 2\pi/T$, получаем

$$\|g - g_0 \tau_N\|_1 = O\left(\frac{1}{M^{\lambda-1}}\right) = O(h^{\lambda-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Положим $g_0 := \widehat{A}_{3n-2}$ и $g := \widehat{f}$. В силу теоремы 4 условие (24) для g_0 выполняется при $\lambda_0 = 2n$ и для любого $r \in \mathbb{N}$, так как (см. (3) и замечание 4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widehat{A}_{3n-2}(t) &= \cos t \sum_{\nu=n-1}^{\frac{3n-3}{2}} (-1)^\nu \frac{A_{3n-2}^{(2\nu+1)}(1)}{t^{2\nu+2}} \\ &\quad + \sin t \sum_{\nu=n}^{\frac{3n-2}{2}} (-1)^\nu \frac{A_{3n-2}^{(2\nu)}(1)}{t^{2\nu+1}} + \sum_{\nu=n-1}^{\frac{3n-3}{2}} (-1)^{\nu+1} \frac{A_{3n-2}^{(2\nu+1)}(0)}{t^{2\nu+2}}. \end{aligned}$$

Известно, что для $f \in H_1^\lambda$ $\widehat{f}(x) = O\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^\lambda$. Следовательно, и для g условие (24) выполняется. Применяем формулу обращения $f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(-x)$, $A_{3n-2}(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}_0(-x)$, неравенство $\max_{\mathbb{R}} |f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_1$ и теорему 7. Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как видно из доказательства, в теореме 7 можно вместо $L_1(\mathbb{R})$ рассмотреть $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty]$, а следовательно, можно обобщить соответствующим образом и теорему 6.

§ 4. Некоторые общие свойства множества $\Phi_0 \cap S_n$

Будем рассматривать $\Phi_0 := \{f \in \Phi : f(-x) \equiv f(x), \text{supp } f \subset [-1, 1], f(0) = 1\}$ — множество всех четных с носителем на $[-1, 1]$ характеристических функций. Какова граница замкнутого выпуклого множества $\Phi_0 \cap S_n$ в $(n-1)$ -мерном пространстве? Можно считать $n \geq 2$ (при $n = 1$ это множество состоит из одной точки e_1).

ЛЕММА 5. Сплайн $p \in \Phi_0 \cap S_n$, $n \geq 2$, является граничной точкой этого множества в том и только том случае, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:

- 1) $|p'(1)| + p'(0) = 0$ или
- 2) $\exists \xi \in \mathbb{R} : \widehat{p}(\xi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Если $\widehat{p}(\xi) = 0$ и $\xi \neq 0$, то $(1+\delta)^{-1}(p+\delta e_2) \in \Phi_0 \cap S_n$ при любом $\delta > 0$, а при $\delta \in (-1, 0)$ – нет, так как $\widehat{p}(\xi) + \delta \widehat{e}_2(\xi) = \delta \widehat{e}_2(\xi) < 0$. Так что в этом случае $p \in \partial(\Phi_0 \cap S_n)$. Если $\widehat{p}(0) = 0$, то e_2 заменяем на e_1 ($\widehat{e}_1(0) > 0$).

Если $|p'(1)| + p'(0) = 0$, то $s := (1+\delta)^{-1}(p+\delta e_2) \in \Phi_0 \cap S_n$ при $\delta > 0$, а при $\delta \in (-1, 0)$ – нет, так как $|s'(1)| + s'(0) \geq -2\delta(1+\delta)^{-1} > 0$ – нарушено необходимое условие (см. замечание 1).

Необходимость. Пусть $p(0) = 1$, $\widehat{p}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, и $|p'(1)| + p'(0) < 0$. Докажем, что p – внутренняя. Из этих условий и (3) следует, что $m := \inf_{|t| \leq 1} \widehat{p}(t) > 0$ и при некоторой константе $c > 0$ выполняется неравенство: $\widehat{p}(t) \geq c/t^2$, $|t| \geq 1$. Очевидно, что $|\widehat{s}(t)| \leq 2\|s\| \forall s \in S_n$, где $\|s\| = \sup_{[0,1]} |s(t)|$. В силу неравенства Маркова для производной полинома существует константа $c_n > 0$, зависящая только от n , такая, что для $s \in S_n \cap C(\mathbb{R})$

$$|\widehat{s}(t)| = \frac{2}{t^2} \left| s'(x) \cos tx \Big|_{x=0} - \int_0^1 s''(x) \cos tx dx \right| \leq \frac{c_n \|s\|}{t^2}, \quad t \neq 0.$$

Поэтому если $s \in S_n \cap C(\mathbb{R})$ и $\|s\| < \min\{c/c_n, m/2\}$, то $\widehat{p}(t) + \widehat{s}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, а если еще $s(0) = 0$, то $(p+s) \in \Phi_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. То, что указанные в лемме условия независимы, видно на примере сплайнов e_n , $n \geq 2$, и A_{3n-2} , $n \geq 2$ (для каждого из них выполняется лишь одно условие). Для сплайнов $\check{e}_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, выполняются оба условия.

Граница выпуклого множества (и, значит, все множество) будет описана, если удастся найти все его крайние точки, т.е. точки, которые нельзя представить в виде линейной комбинации двух различных точек множества с положительными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 8. Функция $f \in \Phi_0$ является крайней точкой множества Φ_0 в том и только том случае, когда $\widehat{f}$ – целая функция экспоненциального типа 1 и имеет только вещественные нули.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $f \in L(\mathbb{R})$ и $f(x) = 0$ при $|x| > \sigma$, то ее преобразование Фурье является целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma$ и $\widehat{f}(z)$ имеет бесконечное число нулей в $\mathbb{C}$ (см. [14; лекция 4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Необходимость. Пусть $f \in \Phi_0$ и является крайней точкой этого множества. Предположим, что при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ $\widehat{f}$ имеет тип $\leq (1-\varepsilon)$. Тогда по теореме Винера–Пэли $\text{supp } f \subset [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Пусть $g(x) := e_1(x/\varepsilon)$. Тогда $f = f*g + (f-f*g)$. Функции $\lambda_1 f_1 := f*g$, $\lambda_2 f_2 := f-f*g$, где $f_k(0) = 1$, положительно определены на $\mathbb{R}$, четные и их носители содержатся в $[-1, 1]$. Тогда $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $\lambda_k > 0$, $f_k \in \Phi_0$ и f_k отличны от f . Получили противоречие с тем, что f крайняя.

Предположим, что $\widehat{f}$ имеет невещественный нуль $\xi = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$. Тогда числа $-\xi$, $\pm \bar{\xi}$ также являются нулями для $\widehat{f}$ (f – четная и вещественная на $\mathbb{R}$ функция). Рассмотрим функции

$$h_1(z) := \begin{cases} z^2, & \alpha = 0, \\ \left(z^2 - \frac{\xi^2 + \bar{\xi}^2}{2}\right)^2, & \alpha \neq 0, \end{cases} \quad h_2(z) := \begin{cases} \beta^2, & \alpha = 0, \\ \left(\frac{\xi^2 - \bar{\xi}^2}{2i}\right)^2, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$h(z) := h_1(z) + h_2(z) = \begin{cases} z^2 + \beta^2, & \alpha = 0, \\ (z^2 - \xi^2)(z^2 - \bar{\xi}^2), & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Так как $f \in \Phi \cap L(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$, а так как еще $f \in L_2(\mathbb{R})$, то и $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R})$. По теореме Винера–Пэли $\widehat{f} h_k / h = \lambda_k \widehat{f}_k$, где $\text{supp } f_k \subset [-1, 1]$ и можно считать $f_k \in C(\mathbb{R})$, $f_k(0) = 1$. Тогда $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $\lambda_k > 0$, $f_k \in \Phi_0$ и f_k отличны от f . Получили противоречие с тем, что f крайняя.

Достаточность основана на теореме Б. Я. Левина о σ -мажорантах (см. [15; дополнения, п. 56]): пусть $|f(x)| \leq |\omega_0(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$, где f – целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, а ω_0 – еще дополнительно вещественная целая функция, имеющая только вещественные нули, и ее тип в точности равен σ . Тогда $f \equiv c\omega_0$, где c – константа и $|c| \leq 1$.

Пусть $f \in \Phi_0$ и $\widehat{f}$ имеет только вещественные нули и ее тип в точности равен 1. Предположим, что $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $f_k \in \Phi_0$ и константы $\lambda_k > 0$. Так как $\widehat{f}_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, то $\lambda_k \widehat{f}_k(t) \leq \widehat{f}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и, значит, $\lambda_k \widehat{f}_k \equiv c_k \widehat{f}$ и $\lambda_k f_k \equiv c_k f$. А так как $f(0) = 1$ и $f_k(0) = 1$, то $f_k = f$, т.е. f – крайняя в Φ_0 .

ТЕОРЕМА 9. 1) При любом $n \geq 0$ сплайн $\tilde{e}_{2n+1}$ является крайней точкой в Φ_0 .

2) При $n \geq 2$ точка e_n крайняя в $\Phi_0 \cap S_n$ и не является крайней в $\Phi_0 \cap S_{n+1}$.

3) При $n \geq 2$ точка A_{3n-2} крайняя в $\Phi_0 \cap S_{3n-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть p_n – полином Лежандра степени n для отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, нормированный в $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и продолженный нулем на $\mathbb{R}$. Так как тип $\tilde{e}_{2n+1}$ равен 1 и $\widehat{\tilde{e}_{2n+1}} = (-1)^n (\widehat{p}_n)^2$ (см. теорему 1), то в силу теоремы 8 достаточно проверить, что $\widehat{p}_n$ имеет лишь вещественные нули. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{2}} p_n(x/2)$ – полином Лежандра для отрезка $[-1, 1]$, нормированный в $L_2[-1, 1]$. Применяя формулу Родрига (см. [16; гл. IV, §1]) и представление Пуассона для функций Бесселя первого рода J_λ (см. [2; гл. IV, §3]), получаем

$$\begin{aligned} 2\widehat{p}_n(2t) &= \int_{-1}^1 p_n\left(\frac{u}{2}\right) e^{itu} du = \frac{\sqrt{2n+1}}{n! 2^n} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{du^n} \{(u^2 - 1)^n\} e^{itu} du \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}}{n! 2^n} (it)^n \int_{-1}^1 (1 - u^2)^n e^{itu} du = i^n \sqrt{2\pi(2n+1)} t^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(t). \end{aligned}$$

А функция J_λ при $\lambda > -1$ имеет лишь вещественные нули (см. [17; п. 8.6.3]).

2) Пусть $n \geq 2$ и $e_n = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $f_k \in \Phi_0 \cap S_n$ и $\lambda_k > 0$. Так как $\widehat{f}_k(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, а $\widehat{e}_n^{(p)}(0) = 0$ при $0 \leq p \leq 2n - 3$ (см. (8)), то и $\widehat{f}_k^{(p)}(0) = 0$ при $0 \leq p \leq 2n - 3$. По лемме 3, п. 2) $f_k = e_n$ и, значит, e_n – крайняя в $\Phi_0 \cap S_n$. То, что e_n не является крайней в $\Phi_0 \cap S_{n+1}$, следует из замечания 3: $f_n := \frac{5}{4}e_n - \frac{1}{4}e_{n+1} \in \Phi_0 \cap S_{n+1}$ и, значит, $e_n = \frac{4}{5}f_n + \frac{1}{5}e_{n+1}$.

3) Пусть $n \geq 2$ и $A_{3n-2} = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, где $f_k \in \Phi_0 \cap S_{3n-2}$ и $\lambda_k > 0$. Так как $\widehat{f}_k(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, а $\widehat{A_{3n-2}}(t) = O(t^{-2n})$ при $t \rightarrow \infty$ (см. (21)), то и $\widehat{f}_k(t) = O(t^{-2n})$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому $f_k \in C^{2n-2}(\mathbb{R})$. По теореме 4, п. 1) $f_k = A_{3n-2}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Пусть $m \neq n$. Тогда $\lambda \tilde{e}_{2n+1} + \mu \tilde{e}_{2m+1} \in \Phi_0 \iff \lambda \geq 0, \mu \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$.

2) Пусть $m \geq 2n + 1, m \geq 2$. Тогда $\lambda \tilde{e}_{2n+1} + \mu e_m \in \Phi_0 \iff \lambda \geq 0, \mu \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$.

Рассмотрим теперь вопрос о бесконечности числа вещественных нулей преобразования Фурье сплайнов $s \in \Phi \cap S_n$. Если r, p и q – полиномы из представления (2)

для $s \in S_n$, то положим

$$T := (p^2 + q^2 + p'q - pq')^2 - (rp + r'q - rq')^2 - (rq - r'p + rp')^2. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 10. 1) Если $s \in \Phi \cap S_n$, то следующие условия эквивалентны:

- (a) $\widehat{s}$ имеет бесконечно много вещественных нулей;
- (b) $T \equiv 0$;
- (c) $r^2 \equiv p^2 + q^2$.

2) Если $\tilde{s}_{2n+1} \in \Phi \cap S_{2n+1}$ и $\widehat{\tilde{s}_{2n+1}}$ имеет бесконечное число вещественных нулей, а в его представлении (2) полиномы p , q и r не имеют общих нулей, то сплайн $\tilde{s}_{2n+1}$ представим в виде свертки, как в лемме 2.

ЛЕММА 6. Если $s \in \Phi \cap S_n$ и $\widehat{s}(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$, то $T(\xi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\widehat{s}(\xi) = 0$, то и $\widehat{s}'(\xi) = 0$. Поэтому (см. (2))

$$\begin{cases} q(\xi) \sin \xi + p(\xi) \cos \xi = -r(\xi), \\ (q'(\xi) - p(\xi)) \sin \xi + (p'(\xi) + q(\xi)) \cos \xi = -r'(\xi). \end{cases} \quad (30)$$

Введем определители системы (30), от которых зависит ее решение

$$\begin{aligned} \Delta &:= p^2(\xi) + q^2(\xi) + p'(\xi)q(\xi) - p(\xi)q'(\xi), \\ \Delta_s &:= -r(\xi)q(\xi) + r'(\xi)p(\xi) - r(\xi)p'(\xi), \\ \Delta_c &:= -r(\xi)p(\xi) - r'(\xi)q(\xi) + r(\xi)q'(\xi). \end{aligned}$$

Если $\Delta = 0$, то и $\Delta_s = \Delta_c = 0$ (система (30) имеет решение). Если $\Delta \neq 0$, то $\sin \xi = \Delta_s/\Delta$, $\cos \xi = \Delta_c/\Delta$ и, значит, $\Delta^2 = \Delta_s^2 + \Delta_c^2$. В любом случае $T(\xi) = 0$.

ЛЕММА 7. Если для полиномов с вещественными коэффициентами r , p и q выполняется тождество $r^2 \equiv p^2 + q^2$, то существуют полиномы u , v , w с вещественными коэффициентами такие, что $r = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)w$, $p = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)w$, $q = uvw$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $r \neq 0$. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^m$ — все общие нули (если такие есть) полиномов $(r+p)$, $(r-p)$, q . Очевидно, что если ξ — один из таких общих нулей, то и ξ — общий нуль. Положим $w(x) := \prod_{k=1}^m (x - \xi_k)$. Если общих нулей нет, то полагаем $w(x) := 1$. Понятно, что w — полином с вещественными коэффициентами. Тогда $r+p = q_1w$, $r-p = q_2w$, $q = q_3w$, где q_i — также полиномы с вещественными коэффициентами. Поэтому $q_1q_2 = q_3^2$. Так как полиномы $\{q_i\}_{i=1}^3$ не имеют общих нулей, то существуют вещественные полиномы u и v такие, что $q_3 = uv$, $q_1 = \pm u^2$, $q_2 = \pm v^2$. Значит, $r+p = \pm u^2w$, $r-p = \pm v^2w$, откуда получаем: $r = \pm \frac{1}{2}(u^2 + v^2)w$, $p = \pm \frac{1}{2}(u^2 - v^2)w$. Осталось еще учесть, что $q = uvw$.

ЛЕММА 8. Пусть функции h_1 , h_2 вещественны, непрерывны и $h_1^2 + h_2^2 \equiv 1$ на $[t_0, +\infty)$. Если одна из этих функций сохраняет знак на $[t_0, +\infty)$, то существует вещественная ограниченная функция $\varphi \in C_{[t_0, +\infty)}$ такая, что $h_1 \equiv \sin \varphi$, $h_2 \equiv \cos \varphi$ на $[t_0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h_2 \geq 0$ на $[t_0, +\infty)$, то $\varphi(t) := \arcsin h_1(t)$. Если $h_2 \leq 0$, то $\varphi(t) := \pi - \arcsin h_1(t)$. Если $h_1 \geq 0$, то $\varphi(t) := \frac{\pi}{2} - \arcsin h_2(t)$. Если $h_1 \leq 0$, то $\varphi(t) := -\frac{\pi}{2} + \arcsin h_2(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если функция h монотонна на $[t_1, +\infty)$ и неравенство $h(t) \geq a$ выполняется в бесконечном числе точек, уходящих на $+\infty$, то при некотором $t_0 \geq t_1$ указанное неравенство выполняется при всех $t \geq t_0$ (в противном случае в бесконечном числе точек, уходящих на $+\infty$, выполняется неравенство $h(t) < a$, что противоречит монотонности h).

ЛЕММА 9. Если $s \in S_n$ и $s \not\equiv 0$, то при некотором $t_0 > 0$ функция $\frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ определена и монотонна на $[t_0, +\infty)$ и справедливо представление

$$\hat{s}(t)t^{n+1} = 2\sqrt{p^2(t) + q^2(t)} \left(\sin(t + \varphi(t)) + \frac{r(t)}{\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}} \right), \quad t \geq t_0, \quad (31)$$

где p , q и r – полиномы из представления (2), а функция φ вещественна, ограничена и непрерывна на $[t_0, +\infty)$. Если дополнительно $s \in \Phi$, то

$$0 < \sqrt{p^2(t) + q^2(t)} \leq r(t), \quad t \geq t_0. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $s \not\equiv 0$, то при некотором $t_0 > 0$ выполняется неравенство $\sqrt{p^2(t) + q^2(t)} > 0$, $t \geq t_0$. Так как p и q – вещественные полиномы, то можно считать, что они сохраняют знак при $t \geq t_0$, и (31) сразу получается из (2) и леммы 8. Поскольку r – также вещественный полином, то можно считать, что функция $h := \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ монотонна при $t \geq t_0$. Пусть дополнительно $s \in \Phi$.

Очевидно, что в бесконечном числе точек $t \geq t_0$, уходящих на $+\infty$, выполняется равенство $\sin(t + \varphi(t)) = -1$. Тогда в этих точках $-1 + h(t) \geq 0$. Поэтому можно считать (см. замечание 8), что $h(t) \geq 1$ при всех $t \geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. 1) Докажем утверждение (a) $\Rightarrow$ (b). По лемме 6 полином T равен нулю в бесконечном числе точек. Поэтому $T \equiv 0$.

Докажем утверждение (c) $\Rightarrow$ (a). Если $s \equiv 0$, то утверждение очевидно. Поэтому считаем $s \not\equiv 0$. Тогда по лемме 9 при некотором $t_0 > 0$ справедливо представление (31). Очевидно, что существует бесконечно много точек $t \geq t_0$, в которых $\sin(t + \varphi(t)) + 1 = 0$, и в этих точках $\hat{s}(t) = 0$ (надо учесть, что $\frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2}} \equiv 1$ при $t \geq t_0$).

Докажем утверждение (b) $\Rightarrow$ (c). Пусть $T \equiv 0$. Если $s \equiv 0$, то утверждение очевидно. Поэтому считаем $s \not\equiv 0$. По лемме 7 существуют алгебраические полиномы u , v и w такие, что

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + p'q - pq' \equiv (u^2 + v^2)w, \\ rp + r'q - rq' \equiv (u^2 - v^2)w, \\ rq - r'p + rp' \equiv 2uvw. \end{cases} \quad (33)$$

Предположим, что $p^2 + q^2 + p'q - pq' \equiv 0$. Если при этом $q \not\equiv 0$, то $1 + (p/q)^2 + (p/q)' \equiv 0$, откуда $p(t) = q(t) \operatorname{tg}(c - t)$, чего не может быть. Поэтому $q \equiv 0$ и, значит, $p \equiv 0$ и $s \equiv 0$. Противоречие. Поэтому в (33) $w \not\equiv 0$ и $u^2 + v^2 \not\equiv 0$. Умножим второе равенство в (33) на p , а третье на q и сложим их. Учитывая первое равенство и сокращая на $w \not\equiv 0$, получаем $u^2(r - p) - 2uvq + v^2(r + p) \equiv 0$. А так как $u^2 + v^2 \not\equiv 0$, то $q^2(t) - (r^2(t) - p^2(t)) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Поэтому (см. (32)) получаем, что $r^2(t) = p^2(t) + q^2(t)$ при $t \geq t_0$ и, значит, всюду.

Докажем утверждение 2). Если $\hat{s}_{2n+1} \in \Phi \cap S_{2n+1}$ и $\hat{s}_{2n+1}$ имеет бесконечное число вещественных нулей, то по доказанному $r^2 \equiv p^2 + q^2$, где r, p и q — из представления (2) для $\hat{s}_{2n+1}$. По лемме 7 при некоторых вещественных полиномах u, v и w имеют место равенства: $r = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)w$, $p = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)w$, $q = uvw$. Поэтому $\hat{s}_{2n+1}(t) = 2w \left[(u(t) \cos \frac{t}{2} + v(t) \sin \frac{t}{2}) / t^{n+1} \right]^2$, где u и v разной четности. Так как r, p и q не имеют общих нулей, то можно считать $2w \equiv 1$, т.е. $\hat{s}_{2n+1}$ представим в виде свертки.

ЛЕММА 10. Пусть сплайн $s \in \Phi \cap S_n$ и на $[0, 1]$ является полиномом с алгебраическими коэффициентами. Если число вещественных нулей $\hat{s}$ конечно, то из условия $\hat{s}(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$, следует, что $p(\xi) = p'(\xi) = q(\xi) = q'(\xi) = r(\xi) = r'(\xi) = 0$, где p, q и r из (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 10 и леммы 6 следует, что $T \neq 0$ и $T(\xi) = 0$. Так как коэффициенты p, q, r и, значит, T алгебраические, то и ξ — алгебраическое число. Из условия $\hat{s}(\xi) = 0$ следует, что $(p^2(\xi) + q^2(\xi)) \cos^2 \xi + 2p(\xi)r(\xi) \cos \xi + r^2(\xi) - q^2(\xi) = 0$. Если бы $p^2(\xi) + q^2(\xi) \neq 0$, то и число $\cos \xi$ было бы алгебраическим. Но по классической теореме Линдемана (см. [18]) числа ξ и $\cos \xi$ являются алгебраическими только при $\xi = 0$. Следовательно, $p(\xi) = q(\xi) = r(\xi) = 0$. Но кратность нуля должна быть четной. Поэтому $\hat{s}'(\xi) = 0$, откуда $(p'^2(\xi) + q'^2(\xi)) \cos^2 \xi + 2p'(\xi)r'(\xi) \cos \xi + r'^2(\xi) - q'^2(\xi) = 0$. Аналогично $p'(\xi) = q'(\xi) = r'(\xi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть при некотором $n \geq 3$ число λ_n является алгебраическим. Предположим, что при этом значении n неравенство (18) строгое. Тогда точная нижняя грань в (18) достигается при некотором $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Рассмотрим сплайн $s := e_n - \lambda_n e_{n+1} \in \Phi \cap S_{n+1}$, который на $[0, 1]$ является полиномом с алгебраическими коэффициентами и $\hat{s}(\pm\xi) = 0$. Так как

$$-s'(0) - |s'(1)| = \frac{(2^n + 1)(n + 1)n!}{(2n - 1)!!} \left(\frac{2n - 1}{n + 1} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^n + 1} - \lambda_n \right) > 0,$$

то $\hat{s}$ имеет конечное число вещественных нулей (см. замечание 1). По лемме 10 имеем: $p(\pm\xi) = p'(\pm\xi) = q(\pm\xi) = q'(\pm\xi) = r(\pm\xi) = r'(\pm\xi) = 0$, где p, q и r из (2). Тогда по лемме 1 $\hat{s}(t) \frac{t^4}{(t^2 - \xi^2)^2} = \hat{p}(t)$, где $p \in \Phi \cap S_{n+1}$. По лемме 3 число $t = 0$ является нулем для $\hat{s}$ кратности $2n - 2$. Тогда $t = 0$ является нулем для $\hat{p}$ кратности $2n + 2$, а это возможно (см. лемму 3), если $p = \lambda e_{n+2}$, что, очевидно, не так.

§5. Некоторые соотношения для e - и A -сплайнов.

Свойства функций $h_{\mu, \nu}$

ТЕОРЕМА 11. Для e -сплайнов имеют место следующие тождества:

$$e_{n+1}(x) = -\frac{n+1}{2n-1}e_n(x) - \frac{3n(n+1)}{2n-1}|x|^{n+1} \int_1^{|x|} \frac{e_n(u)}{u^{n+2}} du, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

$$\frac{1}{n+1}xe'_{n+1}(x) - e_{n+1}(x) + \frac{1}{2n-1}xe'_n(x) + e_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
|t|^{n+2}\widehat{e}_{n+1}(t) &= \frac{3n(n+1)}{2n-1} \int_0^{|t|} u^{n+1}\widehat{e}_n(u) du - \frac{n+1}{2n-1}|t|^{n+2}\widehat{e}_n(t) \\
&= \frac{(n+1)n}{2n-1} \int_0^{|t|} (|t|-u)^{n+1}\widehat{e}_n(|t|-u)u^2\widehat{e}_1(u) du, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{36}$$

$$(1-x)^n = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-2}(n-2)!} \int_0^1 (1-u^2)^{n-2} e_n(xu) du, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad x \in [0, 1]. \tag{37}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (34) достаточно проверить для $x \in [0, 1]$, а для этого можно воспользоваться явным выражением (6) для e_n . Если при $x \in [0, 1]$ тождество (34) разделить на x^{n+1} и продифференцировать, то получим эквивалентное ему тождество (35). Умножая (35) на $\cos tx$ и интегрируя по $x \in [0, 1]$, а также учитывая, что для e -сплайнов

$$\int_0^1 (xe'(x) + e(x)) \cos tx dx = -t \frac{d}{dt} \int_0^1 e(x) \cos tx dx,$$

получаем тождество, эквивалентное первому равенству в (36). Второе равенство в (36) сразу получается из (15) заменой n на $n+1$. Для доказательства (37) надо воспользоваться выражением (6).

Далее в этом параграфе рассматриваются функции $h_{\mu, \nu}$, которые являются обобщением на нецелые параметры сплайнов A_{3n-2} (см. предложение 3). С их помощью получены новые интегральные представления для A -сплайнов (см. (38)–(40)), изучено поведение A -сплайнов с ростом параметра (предложения 6, 7), доказано несколько представлений для преобразования Фурье (41), из которых получается, по-видимому, новое соотношение для гипергеометрической функции (42). Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 11. Пусть $g \in L[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, $G(t) := \int_0^\sigma g(x) \cos tx dx$, $H(t) := \int_0^\sigma g(x) \sin tx dx$, а h – четная функция, равная нулю при $|x| \geq \sigma$ и

$$\begin{aligned}
h(x) &:= \int_0^{\sigma-x} ug(u)g(u+x) du + \int_x^\sigma ug(u)g(u-x) du \\
&= \int_x^\sigma (2u-x)g(u)g(u-x) du, \quad x \in [0, \sigma].
\end{aligned}$$

Тогда $h \in L(\mathbb{R})$ и $\frac{1}{2}\widehat{h}(t) = G(t)H'(t) - G'(t)H(t)$ при $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $g(x) := 0$ при $x > \sigma$ и используя связь между преобразованием Фурье и сверткой [2; гл. I, § 1], получаем: $G(t)H'(t) - G'(t)H(t) = \frac{1}{4}\widehat{h}_0(t)$, где

$$h_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|u|) g(|x-u|) (x-u) (\operatorname{sign}(x-u) - \operatorname{sign} u) du.$$

Нетрудно показать, что $h_0(x) = 2h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Осталось учесть, что свертка двух функций из $L(\mathbb{R})$ есть функция из $L(\mathbb{R})$ [2; гл. I, § 1].

Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, и $g_{\mu, \nu}(u) := u^{\mu-1}(1-u^2)^{\nu-1}$, $u \in (0, 1)$. Четные функции $h_{\mu, \nu}$ определим следующим образом: $h_{\mu, \nu}(x) := 0$ при $|x| \geq 1$, а при $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h_{\mu, \nu}(x) &:= \int_0^{1-x} u g_{\mu, \nu}(u) g_{\mu, \nu}(u+x) du + \int_x^1 u g_{\mu, \nu}(u) g_{\mu, \nu}(u-x) du \\ &= \int_x^1 (2u-x) g_{\mu, \nu}(u) g_{\mu, \nu}(u-x) du. \end{aligned} \quad (38)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Очевидно, интеграл (38) при указанных μ и ν сходится абсолютно при всех $x \in (0, 1)$ и $h_{\mu, \nu} \in C(0, 1)$, а по лемме 11 $h_{\mu, \nu} \in L(0, 1)$. При $x = 0$ интеграл (38) сходится только при $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$, и в этом случае $h_{\mu, \nu} \in C(-1, 1)$, а $h_{\mu, \nu}(0) = B(\mu, 2\nu - 1)$, где

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Если при $x \in (0, 1)$ в интеграле, стоящем в правой части равенства (38), сначала сделать замену $u = \sqrt{1-s+x^2/4} + x/2$, а потом замену $s = 1 - (1-x)t$, то получим еще два представления для $h_{\mu, \nu}$:

$$h_{\mu, \nu}(x) = \int_x^1 (1-s)^{\mu-1} (s^2 - x^2)^{\nu-1} ds, \quad x \in (0, 1), \quad (39)$$

$$h_{\mu, \nu}(x) = (1-x)^{\mu+\nu-1} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} (1-t+(1+t)x)^{\nu-1} dt, \quad x \in (0, 1). \quad (40)$$

Гипергеометрическая функция ${}_pF_q$ определяется следующим образом [19; формула 6.47]:

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_q)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(a)_0 := 1, (a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \text{ и } \beta_i \notin \mathbb{Z}_- := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 12. Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, $C_{\mu, \nu} := \frac{2^{2\nu-2} \Gamma^2(\nu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(2\nu + \mu)}$, $t > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &C_{\mu, \nu} {}_1F_2\left(\nu; \frac{2\nu + \mu}{2}, \frac{2\nu + \mu + 1}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) \\ &= \frac{2^{\nu-\frac{3}{2}} \Gamma(\nu) \sqrt{\pi}}{t^{2\nu+\mu-1}} \int_0^t (t-u)^{\mu-1} J_{\nu-\frac{1}{2}}(u) u^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{2\nu-1} (1-s^2)^{\nu-1} \cos(xst) ds dx = \frac{1}{2} \widehat{h}_{\mu, \nu}(t) \\ &= C_{\mu, \nu} \left[{}_1F_2\left(\frac{\mu}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2\nu + \mu}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{\mu+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2\nu + \mu + 1}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^2}{4} \frac{4\mu}{2\nu + \mu} {}_1F_2\left(\frac{\mu+1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{2\nu + \mu + 1}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) {}_1F_2\left(\frac{\mu+2}{2}; \frac{3}{2}, \frac{2\nu + \mu + 2}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство в (41) получается из [20; гл. 13.1(56)]. Если в интеграле, содержащем функцию Бесселя $J_{\nu-\frac{1}{2}}$, сделать замену $u = tx$ ($x \in [0, 1]$) и воспользоваться представлением Пуассона [20; гл. 1.3(8)], то получим второе равенство в (41). Следующее равенство получается, если в двойном интеграле сделать замену $s = u/v$, $x = v$ ($0 \leq u \leq 1$, $u \leq v \leq 1$) и воспользоваться представлением (39). Последнее равенство в (41) следует из леммы 11, если учесть равенства [19; формулы 7.41 и 8.48]

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\mu (1-x^2)^\nu \cos tx \, dx &= \frac{1}{2} B\left(\nu+1, \frac{\mu+1}{2}\right) {}_1F_2\left(\frac{\mu+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2\nu+\mu+3}{2}, -\frac{t^2}{4}\right), \\ \int_0^1 x^\mu (1-x^2)^\nu \sin tx \, dx &= \frac{t}{2} B\left(\nu+1, \frac{\mu+2}{2}\right) {}_1F_2\left(\frac{\mu+2}{2}; \frac{3}{2}, \frac{2\nu+\mu+4}{2}, -\frac{t^2}{4}\right) \end{aligned}$$

и соотношения

$$B\left(\nu, \frac{\mu}{2}\right) B\left(\nu, \frac{\mu+1}{2}\right) = \frac{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(2\nu+\mu)} = \frac{2\nu+\mu}{\mu} B\left(\nu, \frac{\mu+1}{2}\right) B\left(\nu, \frac{\mu+2}{2}\right)$$

(они вытекают из формулы удвоения $\sqrt{\pi} \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2})$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\nu + \beta, \nu + \beta + \frac{1}{2}, \nu + \beta + 1 \notin \mathbb{Z}_-$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$\begin{aligned} &{}_1F_2\left(\nu; \nu + \beta, \nu + \beta + \frac{1}{2}; z\right) \\ &= {}_1F_2\left(\beta; \frac{1}{2}, \nu + \beta; z\right) {}_1F_2\left(\beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \nu + \beta + \frac{1}{2}; z\right) \\ &\quad - \frac{4\beta z}{\nu + \beta} {}_1F_2\left(\beta + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \nu + \beta + \frac{1}{2}; z\right) {}_1F_2\left(\beta + 1; \frac{3}{2}, \nu + \beta + 1; z\right). \end{aligned} \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (41) следует, что равенство (42) справедливо при всех $\beta, \nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$ ($\mu = 2\beta$), и при $z < 0$ ($z = -t^2/4$), а в силу теоремы единственности для аналитических функций – и при всех $z \in \mathbb{C}$.

Докажем справедливость равенства (42) при $\beta, \nu \in \mathbb{C}$, $\nu + \beta, \nu + \beta + \frac{1}{2}, \nu + \beta + 1 \notin \mathbb{Z}_-$. Обозначим через $L_k(\beta, \nu)$ и $R_k(\beta, \nu)$ коэффициенты при z^k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, соответственно в левой и правой частях равенства (42). Очевидно, что это рациональные функции переменных β и ν . По доказанному $L_k(\beta, \nu) = R_k(\beta, \nu)$ при всех $\beta > 0$, $\nu > 0$ и, значит, они совпадают при всех допустимых $\beta, \nu \in \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, то $h_{\mu, \nu} \in C(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При указанных μ и ν $h_{\mu, \nu} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\})$. Непрерывность в нуле эквивалентна условию $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$ (см. замечание 9). Непрерывность при $x = \pm 1$ эквивалентна условию $\lim_{x \rightarrow 1-0} h_{\mu, \nu}(x) = 0$, которое выполняется (см. (40)) только при $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $n \in \mathbb{N}$, то $h_{n, n}(x) = B(n, 2n-1) A_{3n-2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (40) следует, что $h_{n,n}$ на $[0, 1]$ является полиномом степени $3n - 2$ и $h_{n,n}^{(k)}(1 - 0) = 0$ при $0 \leq k \leq 2n - 2$. Из первого равенства в (38) следует, что при $j, m \in [0, n - 1] \cap \mathbb{Z}$ и $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h_{n,n}^{(j+m)}(x) &= (-1)^j \int_0^{1-x} (ug_{n,n}(u))^{(j)} g_{n,n}^{(m)}(u+x) du \\ &\quad + (-1)^m \int_x^1 (ug_{n,n}(u))^{(j)} g_{n,n}^{(m)}(u-x) du \end{aligned}$$

и, значит, $h_{n,n}^{(2p+1)}(+0) = 0$ при $0 \leq p \leq n - 2$ (если $n \geq 2$). Учитывая замечание 4 и первое утверждение теоремы 4, получаем, что $h_{n,n}(x) = \lambda A_{3n-2}(x)$, $\lambda = h_{n,n}(0) = B(n, 2n - 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Вендланд [12] при $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрел сплайны $\psi_{l,k} \in S_{l+2k}$:

$$\psi_{l,0}(x) := \psi_l(x) := (1-|x|)_+^l, \quad \psi_{l,k} := I^k \psi_l \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \text{где } I(f)(x) := \int_{|x|}^{+\infty} s f(s) ds.$$

В этой же работе доказано, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\psi}_{l,k}(t) = t^{-1-2k-l} \int_0^t (t-u)^l u^{k+\frac{1}{2}} J_{k-\frac{1}{2}}(u) du, \quad t > 0.$$

Если воспользоваться равенством $\frac{d}{dt} \{t^\nu J_\nu(t)\} = t^\nu J_{\nu-1}(t)$, то интегрированием по частям получим (см. (41) при $\mu = l$, $\nu = k + 1$), что

$$\psi_{l,k}(x) = \frac{l}{2^k \Gamma(k+1)} h_{l,k+1}(x).$$

В частности, $\psi_{n,n-1}(x) = \frac{nB(n, 2n-1)}{2^{n-1}\Gamma(n)} A_{3n-2}(x)$. Отметим, что явные формулы и простые свойства введенных здесь функций $h_{\mu,\nu}$ являются новыми и для сплайнов $\psi_{l,k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Если $\mu > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то

$$h_{\mu,n}(x) = (1-x)^{\mu+n-1} P_{\mu,n-1}(x), \quad x \in [0, 1],$$

где $P_{\mu,n-1}$ — алгебраический полином степени $n-1$ с положительными коэффициентами.

2) Если $\mu > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, то $P_{\mu,2m-2}^{(2k-2)}(x) > 0$, $P_{\mu,2m-1}^{(2k-1)}(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $1 \leq k \leq m$.

3) Если $m \in \mathbb{N}$, то $P_{2m,2m-1}(-\frac{1}{3}) = 0$.

²Этот факт иным путем доказал студент IV курса ДонНУ Ю.С. Коломойцев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (40) следует, что

$$P_{\mu, n-1}(x) = \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{n-1} (1-t + (1+t)x)^{n-1} dt,$$

откуда сразу получаются утверждения 1) и 2). Утверждение 3) получается, если в этом интеграле сделать замену $t = \frac{1}{2} + s$, $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\mu > 0$ и $\nu > 0$, то $h_{\mu, \nu}$ убывает (строго) на $(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\mu + \nu \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $h_{\mu, \nu}$ убывает на $(0, 1)$, при $\mu > 0$, $\nu \geq 1$ вытекает из (39), а при $0 < \nu < 1$, $\mu + \nu \geq 1$ — из (40) (в этом случае $h_{\mu, \nu}$ является произведением двух положительных убывающих функций). При $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\mu + \nu < 1$ функция $h_{\mu, \nu}$ не может убывать на $(0, 1)$, так как в этом случае (см. (40)) $\lim_{x \rightarrow 1-0} h_{\mu, \nu}(x) = +\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\mu + \nu \geq 1$ и $x \in (0, 1)$, то

$$0 < x h_{\mu, \nu}(x) < \frac{2^{2\nu-2} \Gamma^2(\nu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(2\nu + \mu)}.$$

Если дополнительно $\nu > \frac{1}{2}$, то

$$0 < \frac{x h_{\mu, \nu}(x)}{h_{\mu, \nu}(0)} < \frac{2\nu - 1}{2\nu(2\nu + \mu - 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2\nu + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае $h_{\mu, \nu}$ положительна и строго убывает на $(0, 1)$. Поэтому при $x \in (0, 1)$

$$0 < x h_{\mu, \nu}(x) < \int_0^x h_{\mu, \nu}(t) dt < \int_0^1 h_{\mu, \nu}(t) dt = \frac{1}{2} \hat{h}_{\mu, \nu}(0) = \frac{2^{2\nu-2} \Gamma^2(\nu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(2\nu + \mu)}.$$

Последнее равенство вытекает из леммы 12.

Если еще $\nu > \frac{1}{2}$, то $h_{\mu, \nu}(0) = B(\mu, 2\nu - 1)$. Используя формулу удвоения для Γ -функции, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\hat{h}_{\mu, \nu}(0)}{h_{\mu, \nu}(0)} = \frac{(2\nu - 1) \sqrt{\pi}}{2(2\nu + \mu - 1)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}.$$

Осталось воспользоваться неравенством

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} < \frac{\sqrt{\nu + \frac{1}{2}}}{\nu},$$

которое эквивалентно очевидному неравенству $B(\frac{1}{2}, \nu + 1) < B(\frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2})$.

При $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$ определим аналог A -сплайна по формуле

$$A_{3\nu-2}(x) := \frac{h_{\nu, \nu}(x)}{h_{\nu, \nu}(0)} = \frac{h_{\nu, \nu}(x)}{B(\nu, 2\nu - 1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}. \quad (43)$$

При $\nu \in \mathbb{N}$ имеем A -сплайны из §2 (см. предложение 3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. 1) Если $\mu \geq \nu > \frac{1}{2}$ и $x \in \mathbb{R}$, то

$$A_{3\mu-2}(x) \leq D(\nu, \mu) A_{3\nu-2}(x),$$

где

$$D(\nu, \mu) := \frac{B(\nu, 2\nu-1)}{B(\mu, 2\mu-1)} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{2(\mu-\nu)} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}, \quad \mu, \nu \rightarrow +\infty.$$

2) Если $\nu > \frac{1}{2}$ и $x \in \mathbb{R}$, то

$$A_{3\nu+1}(x) \leq \left(1 + \frac{1}{2\nu-1} \right) A_{3\nu-2}(x).$$

3) Если $\nu \geq 1$ и $x \in [-1, 1]$, то

$$\begin{aligned} A_{3\nu-2}(x) &\leq \frac{1}{B(\nu, 2\nu-1)} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{\nu-1} \frac{(1-x^2)^\nu}{\nu} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^\nu (1-x^2)^\nu, \quad \nu \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

4) Если $\nu > \frac{1}{2}$ и $x \in \mathbb{R}$, то

$$|x A_{3\nu-2}(x)| \leq \frac{2\nu-1}{2\nu(3\nu-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2\nu+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) достаточно доказать при $0 < x < 1$, а при таких x оно сразу получается из (38): следует учесть, что $\max_{[0,1]} u(1-u^2) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Указанная асимптотика получается из формулы Стирлинга: $\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi} e^{-t} t^{t-\frac{1}{2}}$, $t \rightarrow +\infty$. Утверждение 2) получается из 1) при $\mu = \nu + 1$. В этом случае

$$D(\nu, \nu+1) = \frac{\nu^2 - \frac{1}{9}}{\nu(\nu - \frac{1}{2})} < 1 + \frac{1}{2\nu-1}.$$

Утверждение 3) при $\nu \geq 1$ получается следующим образом. Из (38) следует, что при $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h_{\nu,\nu}(x) &\leq \int_x^1 2u g_{\nu,\nu}(u) g_{\nu,\nu}(u-x) du \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{\nu-1} \int_x^1 2u(1-u^2)^{\nu-1} du \\ &= \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{\nu-1} \frac{(1-x^2)^\nu}{\nu}, \end{aligned}$$

и применяем формулу Стирлинга. Утверждение 4) следует из предложения 6 ($\mu = \nu$).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В 2000 г. Бухман [21] рассмотрел новый класс базисных радиальных функций

$$\varphi_{\delta,\mu,\nu,\alpha}(x) := \int_0^{+\infty} (1-s^\delta)_+^{\mu-1} (s^2-x^2)_+^{\nu-1} s^{\alpha-2\nu+1} ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из представления (39) следует, что $\varphi_{1,\mu,\nu,2\nu-1}(x) = h_{\mu,\nu}(x)$. Доказанные предложения 4–7 являются новыми и для функций φ .

Из (41) при $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$ получаем явное выражение для преобразования Лапласа

$$L(t^{2\nu+\mu-1} \hat{h}_{\mu,\nu}(t))(x) = \frac{\Gamma^2(\nu)\Gamma(\mu)2^{2\nu-1}}{x^\mu(1+x^2)^\nu}, \quad x > 0. \quad (44)$$

Из последнего равенства и замечания 2 вытекает, что при $\mu > 0$, $\nu > 0$ вполне монотонность функции $x^{-\mu}(1+x^2)^{-\nu}$ на $(0, +\infty)$ эквивалентна неравенству $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) \geq 0$, $t > 0$, которое (см. (41)) эквивалентно неравенству

$$\int_0^t (t-u)^{\mu-1} J_{\nu-\frac{1}{2}}(u) u^{\nu-\frac{1}{2}} du \geq 0, \quad t > 0.$$

Поэтому известные в этом направлении результаты мы сформулируем в терминах преобразования Фурье $\hat{h}_{\mu,\nu}$, которое является четной и непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией:

- 1) если $\gamma \geq 2$ и $\varepsilon > 0$, то $\hat{h}_{\gamma\varepsilon,\varepsilon}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$ [22], а если $0 < \gamma < 2$, то существует $\varepsilon_\gamma > 0$: $\forall \delta \in (0, \varepsilon_\gamma)$ существует $t = t_{\gamma,\delta} > 0$ такое, что $\hat{h}_{\gamma\delta,\delta}(t) < 0$ [23];
- 2) если $\mu \geq \nu \geq 1$, то $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, а если дополнительно $\mu > \nu$ или $\nu > 1$, то $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$ [24], [25];
- 3) если $0 < \mu < \nu$, то существует $t > 0$ такое, что $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) < 0$ [26], [27];
- 4) если $0 < \mu = \nu < 1$, то существует $t > 0$ такое, что $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) < 0$ [26];
- 5) если $\mu \geq 1$, $0 < \nu \leq 1$, то $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ [26], а если дополнительно $\mu > 1$ или $\nu < 1$, то $\hat{h}_{\mu,\nu}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$ (доказательство более общего факта содержится в статье первого из авторов, находящейся в печати).

Отметим также, что при $\mu > 0$, $\nu > 0$ (см. введение и предложение 2)

$$h_{\mu,\nu} \in \Phi \iff \nu > \frac{1}{2}, \quad \mu + \nu > 1 \quad \text{и} \quad \hat{h}_{\mu,\nu}(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Список литературы

1. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Наука, 1974.
3. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974.
4. Тригуб Р. М. Некоторые свойства преобразования Фурье меры и их применение // Теория приближения функций. Труды международной конференции по теории приближения функций. Киев, 1983. М.: Наука, 1987. С. 439–443.
5. Тригуб Р. М. Критерий характеристической функции и признак типа Пойа для радиальных функций нескольких переменных // Теория вероятностей и ее прим. 1989. Т. 34. С. 805–810.

6. *Заставный В. П., Тригуб Р. М.* Положительно определенные сплайны // Деп. в Укр. НИИНТИ. № 593-Ук.87.
7. *Тригуб Р. М.* Положительно определенные радиальные функции и сплайны // Международная конференция по конструктивной теории функций. Варна, 25–31 мая 1987. Тезисы докладов. София, 1987. С. 123.
8. *Тригуб Р. М.* Положительно определенные функции и сплайны // Теория функций и приближений. Труды 5-й Саратовской зимней школы, 25 января – 4 февраля 1990. Часть I. Саратов, 1992. С. 68–75.
9. *Trigub R. M.* Some topics in Fourier analysis and approximation theory // Preprint. Donetsk, 1995; funct-an/9612008.
10. *Заставный В. П.* Преобразование Фурье меры и некоторые вопросы теории приближений // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Донецк, 1987.
11. *Тригуб Р. М.* О положительно определенных радиальных сплайнах специального вида // Международная конференция OFEA'2001 (Optimization of finite element approximation & splines and wavelets). Санкт-Петербург, 25–29 июня 2001. Тезисы докладов. С. 174.
12. *Wendland H.* Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // Adv. Comput. Math. 1995. V. 4. P. 389–396.
13. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматлит, 1961.
14. *Левин Б. Я.* Целые функции. (Курс лекций.) М.: МГУ, 1971.
15. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
16. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
17. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
18. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
19. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит, 1974.
20. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I, II. М.: Физматлит, 1970.
21. *Buhmann M. D.* A new class of radial basis functions with compact support // Math. Comp. 2000. V. 70. № 233. P. 307–318.
22. *Askey R., Pollard H.* Some absolutely monotonic and completely monotonic functions // SIAM J. Math. Anal. 1974. V. 5. P. 58–63.
23. *Заставный В. П.* Положительно определенные функции, зависящие от нормы. Решение проблемы Шёнберга // Препринт Ин-та прикл. матем. и мех. АН Украины. 09.91. Донецк, 1991.
24. *Fields J. L., Ismail M. E.* On the positivity of some ${}_1F_2$'s // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6. P. 551–559.
25. *Gasper G.* Positive integrals of Bessel functions // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6. № 5. P. 868–881.
26. *Moak D. S.* Completely monotonic functions of the form $s^{-b}(s^2+1)^{-a}$ // Rocky Mountain J. Math. 1987. V. 17. № 4. P. 719–725.
27. *Заставный В. П.* О положительной определенности некоторых функций // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 2. С. 159–161.

Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина

Поступила в редакцию
04.01.2002 и 18.09.2002