Общероссийский математический портал

К. Пилецкас, Об асимптотике решений стационарной системы уравнений Навье–Стокса в области типа слоя, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 12, 69–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 05:11:26

УДК 517.9

К. Пилецкас

Об асимптотике решений стационарной системы уравнений Навье–Стокса в области типа слоя

Рассматривается стационарная система уравнений Навье–Стокса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, совпадающей для больших $|x|$ со слоем $\Pi = \mathbb{R}^2 \times (0, 1)$. Доказывается теорема об асимптотическом поведении решений при $|x| \rightarrow \infty$. В частности, доказывается, что для произвольных данных задачи решения, имеющие ненулевой поток через цилиндрические сечения слоя, ведут себя на бесконечности так же, как решения линейной системы Стокса.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Вопросы существования, единственности и асимптотического поведения решений уравнений Стокса и Навье–Стокса в областях с некомпактными границами являлись предметом исследований многих авторов. В течение последних 20 лет особое внимание уделялось задачам в областях, имеющих цилиндрические, параболические или конические выходы на бесконечность. Существование обобщенных решений задач Стокса и Навье–Стокса в таких областях доказано в [1]–[12]. В [13]–[16] исследовались вопросы классической разрешимости и асимптотического поведения решений этих задач. Исчерпывающая библиография, относящаяся к этой тематике, содержится в [12], [16].

Значительно меньше исследованы вопросы существования решений и их поведения в областях с выходами на бесконечность в виде трехмерного слоя. Существование обобщенных решений стационарной системы Навье–Стокса, имеющих заданный поток через цилиндрические сечения слоя, доказано в [7] (см. также [11]). В недавней работе [17] исследовались задачи Стокса и Навье–Стокса в области, совпадающей при больших $|x|$ с бесконечным трехмерным слоем $\Pi = \mathbb{R}^2 \times (0, 1)$. В [17] построена последовательность точных решений однородной системы Стокса в Π и доказано существование решений этой задачи с заданной асимптотикой на бесконечности в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, совпадающей с Π при больших $|x|$. Для нелинейной стационарной задачи Навье–Стокса в [17] доказано (при малых данных задачи) существование решений, асимптотически стремящихся к направленным течениям Пуазейля или Куэтта. Существование решений задачи Навье–Стокса с заданным потоком через цилиндрические сечения слоя получено в [17] для сколь угодно больших потоков.

В дальнейшем в работах [18], [19] было показано, что задача Стокса является фредгольмовой в шкале весовых пространств $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$, $l \geq 1, 0 \leq \varkappa \leq l, \beta \in \mathbb{R}$, имеющих анизотропное распределение веса. Точное определение этих пространств

приведено ниже в § 2. Здесь лишь отметим, что при увеличении индекса β , указывающего на наличие веса, улучшаются свойства убывания на бесконечности элементов из $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$, индекс l определяет гладкость функций, входящих в $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$, а $\varkappa$ указывает на наличие “ступеньки” в графике функции распределения веса. В [18] также получены результаты об асимптотическом представлении на бесконечности решений задачи Стокса в слое Π .

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение решений нелинейной стационарной системы Навье–Стокса. Работа состоит из введения и трех параграфов. В § 2 вводятся основные обозначения и функциональные пространства, доказываются необходимые в дальнейшем теоремы вложения весовых пространств и формулируются используемые в работе вспомогательные результаты. В частности, в § 2 приводятся результаты работ [18], [19], относящиеся к системе Стокса. В § 3 доказывается теорема об асимптотическом поведении решения системы Навье–Стокса в предположении, что решение растет на бесконечности “не слишком быстро”. В § 4 получен основной результат работы: доказано, что решения, имеющие заданный поток через цилиндрические сечения слоя, ведут себя на бесконечности так же, как решения линейной системы Стокса, т.е. главные члены асимптотических представлений решений линейной и нелинейной задач совпадают. Такие решения существуют для произвольных потоков (см. [17]), и полученный результат не требует предположений о малости данных задачи.

Отметим, что для малых данных в работе [17] доказано существование решения системы Навье–Стокса, имеющего на бесконечности такую же асимптотику, что и решение линейной системы Стокса. В [7] для области с двумя выходами на бесконечность, один из которых совпадает с трехмерным слоем, доказано, что при достаточно малых данных обобщенное решение системы Навье–Стокса с неограниченным интегралом Дирихле и ненулевым потоком представимо в виде суммы решения линейной задачи Стокса и векторного поля с конечным интегралом Дирихле.

§ 2. Основные обозначения и вспомогательные утверждения

2.1. Область и функциональные пространства. Пусть G – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Как обычно, через $C_0^\infty(G)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в G ; $W^{l,q}(G)$, $l \geq 0$ целое, $q > 1$, – пространство Соболева; $W_{\text{loc}}^{l,q}(\overline{G})$ состоит из функций, содержащихся в $W^{l,q}(K)$ для любого компакта $K \subset \overline{G}$; $W^{l-1/q,q}(G)$ – пространство следов на ∂G функций из $W^{l,q}(G)$, $l \geq 1$; $W^{0,q}(G) = L^q(G)$; $C^{l+\alpha}(\overline{G})$, $l \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, – пространство Гёльдера, а $C^0(\overline{G})$ – пространство непрерывных в $\overline{G}$ функций. Норма элемента u в функциональном пространстве V обозначается через $\|u; V\|$. Пространства скалярных и векторных функций не различаются в обозначениях; из контекста будет ясно, о каком из них идет речь.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, совпадающую вне шара $B_{R_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R_0\}$ со слоем единичной толщины

$$\Pi = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < z < 1\}. \quad (2.1)$$

Обозначим через $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$, $l \geq 0$, $0 \leq \varkappa \leq l$, $\beta \in \mathbb{R}$, весовое пространство функций,

получаемое при замыкании $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\|^2 = \sum_{\alpha + |\gamma| \leq l} \int_{\Omega} (1 + r^2)^{\beta + |\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+} |\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u(y, z)|^2 dy dz, \quad (2.2)$$

где $r = |y| = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$, $\alpha \geq 0$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_i \geq 0$, $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2$, $\partial_z^\alpha = \partial^\alpha / \partial z^\alpha$, $\partial_y^\gamma = \partial^{|\gamma|} / (\partial y_1^{\gamma_1} \partial y_2^{\gamma_2})$, $(t)_+ = (t + |t|)/2$ – положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$.

Пространство $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$ является весовым пространством с анизотропным и ступенчатым распределением веса. Направление z выделено в слое Π как самой геометрией множества (2.1), так и построением весовой нормы (2.2): дифференцирование ∂_z^α не влияет на показатель степени весовой функции $(1 + r^2)$, в то время как дифференцирование ∂_y^γ до порядка $|\gamma| \leq \varkappa$ увеличивает этот показатель на $|\gamma|$. При $|\gamma| > \varkappa$ показатель степени весовой функции больше не меняется (так как $|\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+ = \varkappa$ при $|\gamma| > \varkappa$). Таким образом, в распределении веса возникает “ступенька”. Отметим, что при $\varkappa = l$ ступенька отсутствует, а при $\varkappa = 0$ для всех $|\gamma|$ имеем $|\gamma| - (|\gamma|)_+ = 0$ и, следовательно, весовой множитель при всех производных один и тот же. Наконец, заметим, что $\mathcal{V}_{0,0}^l(\Omega) = W^{l,2}(\Omega)$.

Положим $L_\beta^2(\Omega) = \mathcal{V}_{\beta,0}^0(\Omega)$. При $l \geq 1$ можно определить пространство следов $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^{l-1/2}(\partial\Omega)$ на $\partial\Omega$ функций v из $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$. Норма в $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^{l-1/2}(\partial\Omega)$ определяется формулой

$$\|w; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^{l-1/2}(\partial\Omega)\| = \inf \{ \|v; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\| : v = w \text{ на } \partial\Omega \}. \quad (2.3)$$

Пространства $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$ были введены в работе [18] для обоснования асимптотики решений системы Стокса в слое Π . В [18] исследованы также свойства пространств $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)$ и приведена эквивалентная нормировка в пространстве следов $\mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^{l-1/2}(\partial\Omega)$. Отметим, что похожие пространства вводились ранее в работе [20] при изучении задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка в Π .

Обозначим через $C_\beta^0(\bar{\Omega})$ пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций, для которых конечна норма

$$\|v; C_\beta^0(\bar{\Omega})\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} ((1 + r^2)^{\beta/2} |v(x)|), \quad (2.4)$$

а через $L_\beta^q(\Omega)$, $q > 1$, – пространство функций с нормой

$$\|v; L_\beta^q(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} (1 + r^2)^{q\beta/2} |v(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (2.5)$$

2.2. Теоремы вложения. Введем обозначения:

$$\Omega(R) = \{x \in \Omega : r = |y| < R\}, \quad \Omega_l = \Omega(2^l), \quad l = 0, 1, \dots;$$

$$\omega(R) = \{x \in \Omega : R < r < 2R\}, \quad \omega_l = \omega(2^l), \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$\omega_0 = \{x \in \Omega : r < 2\};$$

$$Q_{k,s} = \{x \in \Omega : |y_1 - s| < 1/2, |y_2 - k| < 1/2\}, \quad k, s \in \mathbb{Z},$$

$$Q_{k,s}^* = \bigcup_{i=k-1}^{k+1} \bigcup_{j=s-1}^{s+1} Q_{i,j} \supset Q_{k,s}.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $u \in W^{1,2}(\omega(R))$. Тогда $u \in L^q(\omega(R))$, $q \in [2, 6]$, u справедливо неравенство

$$\|u; L^q(\omega(R))\| \leq c \|u; W^{1,2}(\omega(R))\|, \quad (2.6)$$

где постоянная c не зависит от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цилиндрическое кольцо $\omega(R)$ покроем конечным числом областей D_j , $j = 1, 2, \dots, N(R)$, таких, что

$$c_0 \leq \text{mes } D_j \leq c_1, \quad D_j \subset \omega(R), \quad j = 1, 2, \dots, N(R), \quad \bigcup_{j=1}^{N(R)} D_j = \omega(R). \quad (2.7)$$

В (2.7) постоянные c_0 и c_1 не зависят от R . Кроме того, покрытие $\{D_j\}_{j=1}^{N(R)}$ можно выбрать так, чтобы его кратность не зависела от R . Отметим, что $N(R) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. В каждой D_j имеет место оценка

$$\|u; L^q(D_j)\|^q \leq c \|u; W^{1,2}(D_j)\|^q,$$

причем в силу (2.7) постоянная может быть выбрана не зависящей от $j = 1, \dots, N(R)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u; L^q(\omega(R))\|^q &\leq \sum_{j=1}^{N(R)} \|u; L^q(D_j)\|^q \leq c \sum_{j=1}^{N(R)} \|u; W^{1,2}(D_j)\|^q \\ &= c \sum_{j=1}^{N(R)} (\|u; W^{1,2}(D_j)\|^2)^{q/2} \leq c \left(\sum_{j=1}^{N(R)} \|u; W^{1,2}(D_j)\|^2 \right)^{q/2} \end{aligned}$$

(напомним, что $q/2 \geq 1$). Поскольку кратность покрытия не зависит от R , то имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{N(R)} \|u; W^{1,2}(D_j)\|^2 \leq c \|u; W^{1,2}(\omega(R))\|^2.$$

Следовательно,

$$\|u; L^q(\omega(R))\|^q \leq c \|u; W^{1,2}(\omega(R))\|^q.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $u \in W^{1,2}(\Omega(R_1) \setminus \Omega(R))$, $R_0 \leq R < R_1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\|(1+r^2)^{\beta/2} u; L^2(\Omega(R_1) \setminus \Omega(R))\| \leq \|(1+r^2)^{\beta/2} \partial_z u; L^2(\Omega(R_1) \setminus \Omega(R))\|. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из одномерного неравенства Фридрихса на интервале $(0, 1)$

$$\int_0^1 |u(y, z)|^2 dz \leq \int_0^1 |\partial_z u(y, z)|^2 dz$$

после умножения этого неравенства на $(1 + r^2)^\beta$ и интегрирования по кольцу $\{y \in R^2 : R < |y| < R_1\}$.

Перейдем к рассмотрению свойств весовых пространств $\mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)$. Непосредственно из определения нормы (2.2) вытекают следующие утверждения.

ЛЕММА 2.3. (i) *Вложения*

$$\mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^{l-1}(\Omega), \quad l \geq 1, \quad 0 \leq \kappa \leq l-1, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{V}_{\beta_1, \kappa}^l(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega), \quad l \geq 0, \quad 0 \leq \kappa \leq 1, \quad \beta_1 > \beta, \quad (2.10)$$

являются непрерывными.

(ii) Пусть $v \in \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)$, $l \geq 1$, $0 \leq \kappa \leq l$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\partial_y v \in \mathcal{V}_{\beta+1, \kappa-1}^{l-1}(\Omega)$, $\partial_z v \in \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^{l-1}(\Omega)$ и

$$\|\partial_y v; \mathcal{V}_{\beta+1, \kappa-1}^{l-1}(\Omega)\| + \|\partial_z v; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^{l-1}(\Omega)\| \leq c \|v; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.4. (i) Пусть $u \in \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)$, $l \geq 2$, $0 \leq \kappa \leq l$, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\alpha + |\gamma| \leq l-2$, $|\gamma| \leq \kappa-2$, то $\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u \in C_{\beta+1+|\gamma|}^0(\bar{\Omega})$ и имеет место неравенство

$$\|\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u; C_{\beta+1+|\gamma|}^0(\bar{\Omega})\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.12)$$

Если же $|\gamma| \geq \kappa-1$, то $\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u \in C_{\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+}^0(\bar{\Omega})$ и

$$\|u; C_{\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+}^0(\bar{\Omega})\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.13)$$

(ii) Пусть $u \in \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)$, $l \geq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $|\gamma| + \alpha = l-1$, $|\gamma| \leq \kappa-1$, то $\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u \in L_{\beta+|\gamma|+1-2/q}^q(\Omega)$, $q \in [2, 6]$, и справедлива оценка

$$\|\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u; L_{\beta+|\gamma|+1-2/q}^q(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.14)$$

Если же $|\gamma| \geq \kappa$, то $\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u \in L_{\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+}^q(\Omega)$ и

$$\|\partial_z^\alpha \partial_y^\gamma u; L_{\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+}^q(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha + |\gamma| \leq l - 2$, $|\gamma| \leq \varkappa - 2$. Рассмотрим в области ω_k функцию $v_{\alpha\gamma}(x) = \partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(x)$. Введем новые переменные $(\xi, \eta) = (2^{-k}y, z)$ и положим $\widehat{v}_{\alpha\gamma}(\xi, \eta) = v_{\alpha\gamma}(2^k\xi, \eta)$. При такой замене область ω_k , $2^k \geq R_0$, переходит в стандартную область $\widehat{\omega} = \{(\xi, \eta) : 1 < |\xi| < 2, 0 < \eta < 1\}$. Если $\alpha + |\gamma| \leq l - 2$, то $\widehat{v}_{\alpha\gamma} \in W^{l-\alpha-|\gamma|, 2}(\widehat{\omega}) \subset W^{2, 2}(\widehat{\omega})$ и по теореме вложения Соболева

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \widehat{\omega}} |\widehat{v}_{\alpha\gamma}(\xi, \eta)| \leq c \|\widehat{v}_{\alpha\gamma}; W^{2, 2}(\widehat{\omega})\|.$$

Возвращаясь к переменным (y, z) , отсюда выводим

$$\sup_{(y, z) \in \overline{\omega}_k} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)| \leq c \left(\sum_{j+|\mu| \leq 2} \int_{\omega_k} 2^{k(2|\mu|-2)} |\partial_y^\mu \partial_z^j v_{\alpha\gamma}(y, z)|^2 dy dz \right)^{1/2}.$$

Умножим последнее неравенство на $2^{k(\beta+1+|\gamma|)}$. Принимая во внимание, что $2^k \sim (1+r^2)^{1/2}$ при $(y, z) \in \omega_k$, получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{(y, z) \in \overline{\omega}_k} ((1+r^2)^{(\beta+1+|\gamma|)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|) \\ & \leq c \left(\sum_{j+|\mu| \leq 2} \int_{\omega_k} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|+|\mu|} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{j+\alpha} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку $|\gamma| + |\mu| \leq \varkappa$, величина, стоящая в правой части (2.16), не превосходит $c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\|$ и, следовательно,

$$\sup_{(y, z) \in \overline{\omega}_k} ((1+r^2)^{(\beta+1+|\gamma|)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|) \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.17)$$

В области $\Omega(R_0 + 1)$ по теореме вложения справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \Omega(R_0+1)} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)| \leq c \|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u; W^{2, 2}(\Omega(R_0 + 1))\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.18)$$

Постоянная в (2.17) не зависит от k . Поэтому, взяв супремум по всем k таким, что $2^k \geq R_0$, из (2.17), (2.18) получим (2.12).

Если $\alpha + |\gamma| = l - 1$, $|\gamma| \leq \varkappa - 1$, то из теоремы вложения следует, что $\widehat{v}_{\alpha\gamma} \in L^q(\widehat{\omega})$ $\forall q \in [2, 6]$ и

$$\int_{\widehat{\omega}} |\widehat{v}_{\alpha\gamma}|^q d\xi d\eta \leq c \left(\int_{\widehat{\omega}} (|\widehat{v}_{\alpha\gamma}|^2 + |\partial_\xi \widehat{v}_{\alpha\gamma}|^2 + |\partial_\eta \widehat{v}_{\alpha\gamma}|^2) d\xi d\eta \right)^{q/2}.$$

Переходя к координатам (y, z) и умножая полученное неравенство на $2^{kq(\beta+|\gamma|+1)}$, выводим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_k} (1+r^2)^{q(\beta+1+|\gamma|-2/q)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|^q dy dz \\ & \leq c \left(\sum_{|\mu|+j \leq 1} \int_{\omega_k} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|+|\mu|} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{j+\alpha} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{q/2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как $c_1 \leq (1+r^2) \leq c_2$ при $x \in \Omega(R_0+1)$, то в ограниченной области $\Omega(R_0+1)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(R_0+1)} (1+r^2)^{q(\beta+1+|\gamma|-2/q)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|^q dy dz \\ & \leq c \|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u; W^{1,2}(\Omega(R_0+1))\|^q \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|^q. \end{aligned}$$

Просуммируем соотношения (2.19) по k , $2^k \geq R_0$. Поскольку $q/2 \geq 1$, $|\gamma| \leq \kappa - 1$, в результате получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \Omega(R_0)} (1+r^2)^{q(\beta+1+|\gamma|-2/q)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|^q dy dz \\ & \leq c \sum_{k: 2^k \geq R_0}^\infty \left(\sum_{|\mu|+j \leq 1} \int_{\omega_k} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|+|\mu|} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{\alpha+j} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \left(\sum_{k: 2^k \geq R_0}^\infty \sum_{|\mu|+j \leq 1} \int_{\omega_k} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|+|\mu|} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{\alpha+j} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \left(\sum_{|\mu|+j \leq 1} \int_{\Omega \setminus \Omega(R_0)} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|+|\mu|} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{\alpha+j} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|^q, \end{aligned}$$

которая совместно с предыдущим неравенством дает (2.14).

Пусть теперь $\alpha + |\gamma| \leq l - 2$, $|\gamma| \geq \kappa - 1$. Для любой области $Q_{p,s}$ имеет место соотношение

$$\sup_{x \in \overline{Q}_{p,s}} |v_{\alpha\gamma}(y, z)| \leq c \|v_{\alpha\gamma}; W^{2,2}(Q_{p,s})\|,$$

причем постоянная c не зависит от p и s .

Умножим эти неравенства на $(1 + (p^2 + s^2))^{(\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+)/2}$. Поскольку $1 + (p^2 + s^2) \sim (1 + r^2)$ при $x \in Q_{p,s}$, отсюда выводим

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \overline{Q}_{p,s}} ((1+r^2)^{(\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|) \\ & \leq c \left(\sum_{|\mu|+j} \int_{Q_{p,s}} (1+r^2)^{\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{\alpha+j} u(y, z)|^2 dy dz \right)^{1/2}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Легко видеть, что $|\gamma| - (|\gamma| - \kappa)_+ \leq |\gamma| + |\mu| - (|\gamma| + |\mu| - \kappa)_+ \quad \forall |\mu| \geq 0$. Поэтому из (2.20) следует оценка

$$\sup_{x \in \overline{Q}_{p,s}} ((1+r^2)^{(\beta+|\gamma|-(|\gamma|-\kappa)_+)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|) \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \kappa}^l(\Omega)\|. \quad (2.21)$$

Взяв в (2.21) супремум по всем $p, s \in \mathbb{Z}$, приходим к (2.13).

Если $\alpha + |\gamma| = l$, $|\gamma| \geq \varkappa$, то по теореме вложения для любого $q \in [2, 6]$ имеет место неравенство

$$\int_{Q_{p,s}} |v_{\alpha\gamma}(y, z)|^q dy dz \leq c \left(\int_{Q_{p,s}} (|v_{\alpha\gamma}|^2 + |\partial_y v_{\alpha\gamma}|^2 + |\partial_z v_{\alpha\gamma}|^2) dy dz \right)^{q/2}, \quad (2.22)$$

в котором постоянная c не зависит от p и s .

Умножая (2.22) на $(1 + (p^2 + s^2))^{q(\beta + |\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+)/2}$ и суммируя полученные неравенства по всем $p, s \in \mathbb{Z}$, выводим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1 + r^2)^{q(\beta + |\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+)/2} |\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u(y, z)|^q dy dz \\ & \leq c \sum_{p,s \in \mathbb{Z}} \left(\int_{Q_{p,s}} (1 + r^2)^{\beta + |\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+} (|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u|^2 \right. \\ & \quad \left. + |\partial_y^{\gamma+1} \partial_z^\alpha u|^2 + |\partial_y^\gamma \partial_z^{\alpha+1} u|^2) dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \left(\sum_{p,s \in \mathbb{Z}} \int_{Q_{p,s}} (1 + r^2)^{\beta + |\gamma| - (|\gamma| - \varkappa)_+} (|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha u|^2 \right. \\ & \quad \left. + |\partial_y^{\gamma+1} \partial_z^\alpha u|^2 + |\partial_y^\gamma \partial_z^{\alpha+1} u|^2) dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \left(\sum_{|\mu|+j \leq 1} \int_{\Omega} (1 + r^2)^{\beta + |\gamma| + |\mu| - (|\gamma| + |\mu| - \varkappa)_+} |\partial_y^{\gamma+\mu} \partial_z^{\alpha+j} u|^2 dy dz \right)^{q/2} \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta, \varkappa}^l(\Omega)\|^q, \end{aligned}$$

которое и доказывает неравенство (2.15).

2.3. Задача Стокса. Рассмотрим в области Ω краевую задачу для системы Стокса

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{h}, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь $\mathbf{u} = (\mathbf{u}', u_3)$, $\mathbf{u}' = (u_1, u_2)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}', f_3)$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h}', h_3)$.

В область определения $\mathcal{D}_{\beta}^l(\Omega)$ оператора задачи (2.23) поместим все такие пары $(\mathbf{u}, p)$, что

$$(\mathbf{u}', u_3) \in \mathcal{V}_{\beta+1, l}^{l+1}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l+1}(\Omega), \quad p \in \mathcal{V}_{\beta, l}^l(\Omega), \quad \partial_z p \in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega).$$

Норма в $\mathcal{D}_{\beta}^l(\Omega)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}, p); \mathcal{D}_{\beta}^l(\Omega)\| &= \|\mathbf{u}'; \mathcal{V}_{\beta+1, l}^{l+1}(\Omega)\| + \|u_3; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l+1}(\Omega)\| \\ &\quad + \|p; \mathcal{V}_{\beta, l}^l(\Omega)\| + \|\partial_z p; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\|. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Обозначим через $\mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)$ множество, состоящее из вектор-функций $(\mathbf{f}, g, \mathbf{h})$ таких, что $\mathbf{f}$ допускает представление в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \partial_z \mathbf{f}_1 + \nabla \psi \quad (2.25)$$

и справедливы включения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &\in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega), \quad \mathbf{f}_1' \in \mathcal{V}_{\beta+1, l}^l(\Omega), \quad f_{13} \in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^l(\Omega), \quad \psi \in \mathcal{V}_{\beta, l}^l(\Omega), \\ \partial_z \psi &\in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega), \quad g \in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^l(\Omega), \quad \mathbf{h}' \in \mathcal{V}_{\beta+1, l}^{l+1/2}(\partial\Omega), \quad h_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l+1/2}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Норма в $\mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| &= \inf \{ \|\mathbf{f}_0; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\| + \|\mathbf{f}_1'; \mathcal{V}_{\beta+1, l}^l(\Omega)\| \\ &\quad + \|f_{13}; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^l(\Omega)\| + \|\psi; \mathcal{V}_{\beta, l}^l(\Omega)\| + \|\partial_z \psi; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\| \} \\ &\quad + \|g; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^l(\Omega)\| + \|\mathbf{h}'; \mathcal{V}_{\beta+1, l}^{l+1/2}(\partial\Omega)\| + \|h_3; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l+1/2}(\partial\Omega)\|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где инфимум вычисляется по всем представлениям функции $\mathbf{f}$ в виде (2.25).

В работах [18], [19] были доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [18]). (i) Пусть $(\mathbf{u}, p) \in L_\beta^2(\Omega) \times L_\beta^2(\Omega)$, $\beta \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, является решением задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^l(\Omega; \partial\Omega)$, $l \geq 1$, $\beta_1 \geq \beta$, $\beta_1 \in (k, k+1)$. Тогда $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$ и

$$\|(\mathbf{u}, p); \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)\| \leq c(\|(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}); \mathcal{R}_{\beta_1}^l(\Omega; \partial\Omega)\| + \|(\mathbf{u}, p); L_\beta^2(\Omega)\|). \quad (2.27)$$

(ii) Пусть $(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+k}^l(\Omega; \partial\Omega)$, $l \geq 1$, $\beta \neq 0, \pm 1, \dots$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Тогда решение $(\mathbf{u}, p) \in L_\beta^2(\Omega)$ задачи (2.23) допускает асимптотическое представление

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \chi(r) \sum_{-\beta-k-1 < m < -\beta-1} \begin{pmatrix} c_m^+ \mathbf{U}_m^+(y, z) + c_m^- \mathbf{U}_m^-(y, z) \\ c_m^+ P_m^+(y) + c_m^- P_m^-(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

где χ — гладкая срезающая функция, $\chi(r) = 1$ при $r \geq 2R_0$ и $\chi(r) = 0$ при $r \leq R_0$,

$$\mathbf{U}_m^\pm(y, z) = (2\nu)^{-1} z(z-1) \nabla P_m^\pm(y), \quad (2.29)$$

$$P_0^+(y) = 1, \quad P_0^-(y) = -(2\pi)^{-1} \ln r,$$

$$P_m^+(y) = (2\pi|m|)^{-1/2} r^m \cos(m\varphi), \quad (2.30)$$

$$P_m^-(y) = (2\pi|m|)^{-1/2} r^m \sin(|m|\varphi),$$

(r, φ) — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$, $c_m^\pm$, $m = 0, \pm 1, \dots$, — постоянные, $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta+k}^l(\Omega)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}); \mathcal{D}_{\beta+k}^l(\Omega)\| &+ \sum_{-\beta-k-1 < m < -\beta-1} (|c_m^+| + |c_m^-|) \\ &\leq c(\|(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}); \mathcal{R}_{\beta+k}^l(\Omega; \partial\Omega)\| + \|(\mathbf{u}, p); L_\beta^2(\Omega)\|). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Обозначим через $\mathcal{S}_\beta^l$ оператор задачи Стокса (2.23):

$$\mathcal{D}_\beta^l(\Omega) \ni (\mathbf{u}, p) \mapsto \mathcal{S}_\beta^l(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega).$$

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [19]). (i) Пусть $l \geq 1$. Если β не принадлежит множеству $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, то оператор $\mathcal{S}_\beta^l$ является фредгольмовым, т.е. множество $\mathcal{S}_\beta^l \mathcal{D}_\beta^l(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)$, и

$$\dim \ker \mathcal{S}_\beta^l < \infty, \quad \dim \operatorname{coker} \mathcal{S}_\beta^l < \infty.$$

Если же $\beta \in \mathbb{Z}$, то множество значений оператора $\mathcal{S}_\beta^l$ незамкнуто в $\mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)$.

(ii) При $\beta \geq -1$ оператор $\mathcal{S}_\beta^l$ является мономорфизмом, а при $\beta < -1$ $\mathcal{S}_\beta^l$ является эпиморфизмом. Кроме того, имеют место формулы

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{coker} \mathcal{S}_\beta^l &= 2k + 1, & \beta \in (k - 1, k), & \quad k \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \dim \ker \mathcal{S}_\beta^l &= -2q - 1, & \beta \in (q - 1, q), & \quad q \leq -1, \quad q \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{Ind} \mathcal{S}_\beta^l &= -2p - 1, & \beta \in (p, p + 1), & \quad p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [19]). (i) Пусть $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{D}_\beta^l(\Omega)$, $\beta \in (-2, -1)$, — решение задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+1}^l(\Omega; \partial\Omega)$. Тогда коэффициент c_0^- в асимптотической формуле (2.28) допускает интегральное представление

$$c_0^- = -12\nu \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} g \, dx \right).$$

(ii) Пусть $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{D}_\beta^l(\Omega)$, $\beta > -1$, — решение задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+k}^l(\Omega; \partial\Omega)$. Тогда коэффициенты $c_{-m}^\pm$ в асимптотической формуле (2.28) допускают интегральные представления

$$\begin{aligned} c_{-m}^\pm &= -12\nu \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\xi}_m^\pm \, dx - \int_{\Omega} g \eta_m^\pm \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot (\eta_m^\pm \mathbf{n} - \nu \partial_n \boldsymbol{\xi}_m^\pm) \, ds \right), \\ &\quad -\beta - k - 1 < -m < -\beta - 1, \end{aligned}$$

где $(\boldsymbol{\xi}_m^\pm, \eta_m^\pm)$ — решения однородной задачи Стокса, допускающие асимптотические разложения

$$(\boldsymbol{\xi}_m^\pm(x), \eta_m^\pm(x)) = (\mathbf{U}_m^\pm(y, z), P_m^\pm(y)) + (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m^\pm(x), \tilde{\eta}_m^\pm(x)), \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь функции $(\mathbf{U}_m^\pm(y, z), P_m^\pm(y))$ заданы формулами (2.29), (2.30), а $(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m^\pm, \tilde{\eta}_m^\pm) \in \mathcal{D}_\gamma^l(\Omega)$ с произвольным γ , удовлетворяющим условию

$$-1 < \gamma < 0.$$

(Существование решений однородной задачи Стокса, обладающих упомянутыми выше свойствами, доказано в работе [19].)

2.4. Оператор div . В области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим задачу: найти вектор-функцию $\mathbf{u}(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g, \quad x \in G, \quad (2.32)$$

и краевому условию

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial G. \quad (2.33)$$

Имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 2.5 (см. [3]). Пусть $g \in L^2(G)$ и

$$\int_G g(x) dx = 0. \quad (2.34)$$

Если G – ограниченная область с липшицевой границей, то существует решение $\mathbf{u}$ задачи (2.32), (2.33) такое, что

$$\|\nabla \mathbf{u}; L^2(G)\| \leq c \|g; L^2(G)\|. \quad (2.35)$$

Постоянная c в (2.35) зависит от области G , но не зависит от g и $\mathbf{u}$.

ЛЕММА 2.6 (см. [21]). Пусть G – произвольная область с границей $\partial G \in C^{l+2}$. Предположим, что функция $g \in W^{l,2}(G)$ и удовлетворяет условию (2.34). Если $\operatorname{supp} g \subset \overline{G_1}$, где G_1 – ограниченная подобласть области G , $G_1 \neq G$, то существует решение $\mathbf{u} \in W^{l+1,2}(G)$ задачи (2.32), (2.33) такое, что $\operatorname{supp} \mathbf{u} \subset \overline{G_2}$, где G_2 – ограниченная подобласть G , $G_2 \neq G$, $G_2 \neq G_1$ и $G_1 \subset G_2 \subset G$. Имеет место оценка

$$\|\mathbf{u}; W^{l+1,2}(G)\| \leq c \|g; W^{l,2}(G)\|. \quad (2.36)$$

Постоянная c в (2.36) зависит от G_1, G_2 , но не зависит от G, g и $\mathbf{u}$.

Рассмотрим теперь задачу (2.32), (2.33) в области ω_k .

ЛЕММА 2.7 (см. [7]). Пусть $g \in L^2(\omega_k)$,

$$\int_{\omega_k} g(x) dx = 0.$$

Тогда существует решение $\mathbf{u}$ задачи (2.32), (2.33), удовлетворяющее неравенству

$$\|\nabla \mathbf{u}; L^2(\omega_k)\| \leq c 2^k \|g; L^2(\omega_k)\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

Постоянная c в (2.37) не зависит от k .

В завершение параграфа сформулируем результаты о решениях задачи (2.32), (2.33) в области типа слоя.

Пусть

$$\mathcal{B}_\beta^1(\Omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}', \eta_3) : \boldsymbol{\eta}' \in \mathcal{V}_{\beta,1}^1(\Omega), \eta_3 \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^1(\Omega), \boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Определим пространство $M_\beta^2(\Omega)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме

$$\|g; M_\beta^2(\Omega)\| = \left(\|g; L_{\beta+1}^2(\Omega)\|^2 + \int_1^\infty r^{2\beta-1} |G(r)|^2 dr \right)^{1/2},$$

где

$$G(r) = \int_1^r \int_{S_t} g(x) d\varphi dz dt, \quad \beta < 0,$$

и

$$G(r) = - \int_r^\infty \int_{S_t} g(x) d\varphi dz dt, \quad \beta \geq 0,$$

$$S_t = \{x \in \Omega : |y| = t\}.$$

Пространство $M_\beta^2(\Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle_\beta = \int_\Omega (1 + r^2)^{\beta+1} g(x) h(x) dx + \int_1^\infty r^{2\beta-1} G(r) H(r) dr.$$

Заметим, что при $\beta > 0$ нормы $\|g; M_\beta^2(\Omega)\|$ и $\|g; L_{\beta+1}^2(\Omega)\|$ эквивалентны (см. [17]).

Обозначим через $\widehat{L}_\beta^2(\Omega)$ подпространство функций из $L_\beta^2(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\int_\Omega g(x) dx = 0,$$

и положим

$$\begin{aligned} \widehat{M}_\beta^2(\Omega) &= M_\beta^2(\Omega), \quad \beta < 0, \\ \widehat{M}_\beta^2(\Omega) &= M_\beta^2(\Omega) \cap \widehat{L}_\beta^2(\Omega), \quad \beta = 0, \\ \widehat{M}_\beta^2(\Omega) &= \widehat{L}_{\beta+1}^2(\Omega), \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.8 (см. [17]). (i) Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_\beta^{1,2}(\Omega)$, тогда $g = \operatorname{div} \mathbf{u} \in \widehat{M}_\beta^2(\Omega)$ и

$$\|g; \widehat{M}_\beta^2(\Omega)\| \leq c \|\mathbf{u}; \mathcal{B}_\beta^{1,2}(\Omega)\|.$$

(ii) Для любой функции $g \in \widehat{M}_\beta^2(\Omega)$ найдется вектор-функция $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_\beta^{1,2}(\Omega)$ такая, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ и

$$\|\mathbf{u}; \mathcal{B}_\beta^{1,2}(\Omega)\| \leq c \|g; \widehat{M}_\beta^2(\Omega)\|.$$

ЛЕММА 2.9 (см. [17]). Пусть $l(\boldsymbol{\eta})$ – непрерывный линейный функционал, заданный на пространстве $\mathcal{B}_{-\mu}^1(\Omega)$, $\mu < 0$, и удовлетворяющий условию

$$l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \widehat{\mathcal{B}}_{-\mu}^1(\Omega) = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_{-\mu}^1(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0\}.$$

Тогда существует функция $p \in L_{\mu-1}^2(\Omega)$ такая, что

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}_{-\mu}^1(\Omega). \quad (2.38)$$

При этом норма $\|p; L_{\mu-1}^2(\Omega)\|$ эквивалентна норме функционала l .

§3. Асимптотика решений системы уравнений Навье–Стокса

Рассмотрим в области Ω стационарную систему Навье–Стокса

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{h}, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1. Обобщенное решение. Под *обобщенным решением задачи* (3.1) будем понимать вектор-функцию $\mathbf{v} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h} \quad (3.2)$$

и интегральному тождеству

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad (3.3)$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ такой, что $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0$, $\boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega} = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $-2 < \beta < -1$, $\mathbf{f} \in L_{\beta+1}^2(\Omega)$, а $\mathbf{v}$ является обобщенным решением задачи (3.1). Предположим, что

$$\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^1(\Omega), \quad v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,0}^1(\Omega). \quad (3.4)$$

Тогда существует функция $p \in L_{\beta}^2(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad (3.5)$$

для любой $\boldsymbol{\eta}$ с $\nabla \boldsymbol{\eta} \in L_{-\beta-1}^2(\Omega)$ и $\boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.4) и леммы 2.4 следует, что

$$\nabla \mathbf{v} \in L_{\beta+1}^2(\Omega), \quad \mathbf{v}' \in L_{\beta+3/2}^4(\Omega), \quad v_3 \in L_{\beta+2}^4(\Omega) \subset L_{\beta+3/2}^4(\Omega).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx \right| &\leq \|\nabla \mathbf{v}; L_{\beta+1}^2(\Omega)\| \|\nabla \boldsymbol{\eta}; L_{-\beta-1}^2(\Omega)\|, \\ \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \right| &\leq \|\mathbf{f}; L_{\beta+1}^2(\Omega)\| \|\boldsymbol{\eta}; L_{-\beta-1}^2(\Omega)\|, \\ \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} \, dx \right| &\leq \|\mathbf{v}; L_{\beta+3/2}^4(\Omega)\|^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}; L_{-2\beta-3}^2(\Omega)\| \\ &\leq c \|\mathbf{v}; L_{\beta+3/2}^4(\Omega)\|^2 \|\nabla \boldsymbol{\eta}; L_{-\beta-1}^2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства воспользовались тем, что $-2\beta - 3 < -\beta - 1$ при $\beta \in (-2, -1)$.

Таким образом, интегральное тождество (3.3) по непрерывности можно распространить на функции $\boldsymbol{\eta}$, удовлетворяющие условиям

$$\nabla \boldsymbol{\eta} \in L^2_{-\beta-1}(\Omega), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.6)$$

Очевидно, что множество функций, удовлетворяющих условиям (3.6), содержит пространство $\widehat{\mathcal{B}}^1_{-\beta-1}(\Omega)$. Рассмотрим функционал

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx,$$

заданный на $\boldsymbol{\eta} \in \widehat{\mathcal{B}}^1_{-\beta-1}(\Omega)$. Поскольку $\mathbf{v}$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.3) $\forall \boldsymbol{\eta} \in \widehat{\mathcal{B}}^1_{-\beta-1}(\Omega)$, то

$$l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \widehat{\mathcal{B}}^1_{-\beta-1}(\Omega).$$

В силу леммы 2.9 существует функция $p \in L^2_{\beta}(\Omega)$ такая, что

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \widehat{\mathcal{B}}^1_{-\beta-1}(\Omega).$$

Теорема доказана.

3.2. Оценка нелинейного члена. Для доказательства теоремы об асимптотическом поведении решений задачи (3.1) нам потребуются вспомогательные неравенства, позволяющие оценить слагаемое $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $u \in \mathcal{V}^{l+1}_{\beta_1+1,l}(\Omega)$, $v \in \mathcal{V}^l_{\beta_2+2,l-1}(\Omega)$, $l \geq 1$.

Тогда при $l = 1$: $w = u \cdot v \in L^2_{\beta_1+\beta_2+11/3}(\Omega)$ и

$$\|w; L^2_{\beta_1+\beta_2+11/3}(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}^2_{\beta_1+1,1}(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}^1_{\beta_2+2,0}(\Omega)\|; \quad (3.7)$$

при $l \geq 2$: $w \in \mathcal{V}^{l-1}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}(\Omega)$ и

$$\|w; \mathcal{V}^{l-1}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}^{l+1}_{\beta_1+1,l}(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}^l_{\beta_2+2,l-1}(\Omega)\|. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathcal{V}^2_{\beta_1+1,1}(\Omega)$, $v \in \mathcal{V}^1_{\beta_2+2,0}(\Omega)$. В силу леммы 2.4 (ii) (см. (2.14), (2.15)) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+11/3} |u|^2 |v|^2 \, dx \\ & \leq c \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{3(\beta_1+5/3)} |u|^6 \, dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{3(\beta_2+2)/2} |v|^3 \, dx \right)^{2/3} \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}^2_{\beta_1+1,1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}^1_{\beta_2+2,0}(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $l \geq 2$. Надо оценить норму

$$\|w; \mathcal{V}^{l-1}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}(\Omega)\| = \left(\sum_{r=0}^{l-1} \sum_{k=0}^r \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+4+(r-k)} |\partial_y^{r-k} \partial_z^k w|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где $\partial_y^s = \sum_{|\gamma|=s} \partial_y^\gamma$. Имеем

$$|\partial_y^{r-k} \partial_z^k (u \cdot v)| \leq c \left| \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{r-k} \partial_y^j \partial_z^p u \partial_y^{r-k-j} \partial_z^{k-p} v \right|, \quad r = 0, 1, \dots, l-1.$$

Пусть $j \leq l-2$. Тогда в силу (2.12)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+4+(r-k)} |\partial_y^j \partial_z^p u|^2 |\partial_y^{r-k-j} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|\partial_y^j \partial_z^p u; C_{\beta_1+2+j}^0(\overline{\Omega})\|^2 \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_2+2+(r-j-k)} |\partial_y^{r-j-k} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть $r = l-1, k = 0, j = l-1$. При $l \geq 2$ из включения $v \in \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\beta_2+2,1}^2(\Omega)$ следует, что $v \in L_{\beta_2+5/2}^4(\Omega)$ (см. (2.14)). Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+4+(l-1)} |\partial_y^{l-1} u|^2 |v|^2 dx \\ & \leq \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{2(\beta_1+3/2+l-1)} |\partial_y^{l-1} u|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{2\beta_2+5} |v|^4 dx \right)^{1/2} \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{k=0}^r \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+4+(r-k)} |\partial_y^{r-k} \partial_z^k w|^2 dx \\ & \leq c \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{k=0}^r \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{r-k} \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+4+(r-k)} |\partial_y^j \partial_z^p u|^2 |\partial_y^{r-k-j} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $u \in \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)$, $v \in \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)$, $l \geq 1$. Тогда $w = u \cdot v \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)$ и

$$\|w; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|w; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)\|^2 &= \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{k=0}^r \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+3+(r-k)} |\partial_y^{r-k} \partial_z^k w|^2 dx \\ &+ \sum_{k=0}^l \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+3+(l-k)} |\partial_y^{l-k} \partial_z^k w|^2 dx. \quad (3.10) \end{aligned}$$

В силу леммы 3.1 первое слагаемое в правой части (3.10) оценивается через

$$c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2.$$

Рассмотрим второе слагаемое. Поскольку

$$|\partial_y^{l-k} \partial_z^k w| \leq c \left| \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{l-k} \partial_y^j \partial_z^p u \partial_y^{l-k-j} \partial_z^{k-p} v \right|,$$

то согласно (2.12) при $j + p \leq l - 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+3+(l-k)} |\partial_y^j \partial_z^p u|^2 |\partial_y^{l-k-j} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|\partial_y^j \partial_z^p u; C_{\beta_1+2+j}^0(\overline{\Omega})\|^2 \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_2+1+(l-j-k)} |\partial_y^{l-j-k} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_2+2+l-j-k-(l-j-k-(l-1))_+} |\partial_y^{l-j-k} \partial_z^{k-p} v|^2 dx \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2 \end{aligned}$$

(здесь воспользовались тем, что $\beta_2 + 1 + l - j - k \leq \beta_2 + 2 + l - j - k - (l - j - k - (l - 1))_+$).

При $j + p = l$ имеем $k = p, l - k - j = 0$ и

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+\beta_2+3+(l-p)} |\partial_y^{l-p} \partial_z^p u|^2 |v|^2 dx \\ & \leq \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{2(\beta_1+1+(l-p))} |\partial_y^{l-p} \partial_z^p u|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (1+r^2)^{2(\beta_2+2)} |v|^4 dx \right)^{1/2} \\ & \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega)\|^2 \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства воспользовались (2.15) для оценки интеграла, содержащего $|v|^4$; для оценки интеграла от $|\partial_y^{l-p} \partial_z^p u|^4$ воспользовались (2.15) при $p = 0$ и (2.14) при $p \geq 1$.

Аналогично леммам 3.1, 3.2 доказывается

ЛЕММА 3.3. Пусть $u \in \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)$, $v \in \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^l(\Omega)$. Тогда

(i) при $l = 1$: $w = u \cdot v \in L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega)$ и

$$\|w; L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+2,0}^2(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}_{\beta_1+1,1}^1(\Omega)\|; \quad (3.11)$$

при $l \geq 2$: $w \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega)$ и

$$\|w; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^l(\Omega)\|; \quad (3.12)$$

(ii) для всех $l \geq 1$: $w \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)$ и

$$\|w; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)\| \leq c \|u; \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)\| \|v; \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^l(\Omega)\|. \quad (3.13)$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathbf{u} = (\mathbf{u}', u_3) \in \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}', v_3) \in \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^{l+1}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^{l+1}(\Omega)$.

Тогда при $l \geq 2$: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega)$ и

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega)\| &\leq c \|\mathbf{u}; \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)\| \\ &\times \|\mathbf{v}; \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^{l+1}(\Omega) \times \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^{l+1}(\Omega)\| \equiv cA(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $l = 1$: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega)$ и

$$\|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}; L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega)\| \leq cA(\mathbf{u}; \mathbf{v}); \quad (3.15)$$

наконец, при всех $l \geq 1$: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)$ и

$$\|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}; \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega)\| \leq cA(\mathbf{u}; \mathbf{v}). \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор-функцию $\mathbf{M} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ можно представить в виде

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 \\ M_{31} + M_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' + u_3 \partial_z \mathbf{v}' \\ (\mathbf{u}' \cdot \nabla') v_3 + u_3 \partial_z v_3 \end{pmatrix}.$$

Из включения $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^{l+1}(\Omega)$ следует, что $\nabla' \mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega)$. Поэтому в силу лемм 3.1, 3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_1 &= (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega), \quad l \geq 2; \\ \mathbf{M}'_1 &\in L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega), \quad l = 1; \\ \mathbf{M}'_1 &\in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega), \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Далее, $u_3 \in \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega)$, $\partial_z \mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta_2+1,l}^l(\Omega)$ и согласно лемме 3.3

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_2 &= u_3 \partial_z \mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega), \quad l \geq 2; \\ \mathbf{M}'_2 &\in L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega), \quad l = 1; \\ \mathbf{M}'_2 &\in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega), \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} \nabla' v_3 &\in \mathcal{V}_{\beta_2+3,l-2}^l(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega), \\ \partial_z v_3 &\in \mathcal{V}_{\beta_2+2,l-1}^l(\Omega), \\ u_3 &\in \mathcal{V}_{\beta_1+2,l-1}^{l+1}(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\beta_1+1,l}^{l+1}(\Omega), \end{aligned}$$

из лемм 3.1–3.3 заключаем, что

$$\begin{aligned} M_3 &= M_{13} + M_{23} = (\mathbf{u}' \cdot \nabla') v_3 + u_3 \partial_z v_3 \in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+4,l-1}^{l-1}(\Omega), \quad l \geq 2; \\ M_3 &\in L_{\beta_1+\beta_2+11/3}^2(\Omega), \quad l = 1; \\ M_3 &\in \mathcal{V}_{\beta_1+\beta_2+3,l}^l(\Omega), \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Все упомянутые включения сопровождаются соответствующими неравенствами, из которых и вытекают утверждения леммы.

3.3. Асимптотика решений. Докажем теперь теорему об асимптотике и дифференциальных свойствах решений задачи (3.1), растущих на бесконечности “не слишком быстро”.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathbf{v}$ – обобщенное решение задачи (3.1) с правой частью

$$(\mathbf{f}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^l(\Omega; \partial\Omega), \quad l \geq 2, \quad \beta_1 \in (-1, 0). \quad (3.17)$$

Предположим, что

$$\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,2}^3(\Omega), \quad v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,1}^3(\Omega), \quad \beta \in (-2, -1). \quad (3.18)$$

Тогда существует функция $p \in L_\beta^2(\Omega)$ такая, что пара $(\mathbf{v}, p)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.5). Кроме того, имеют место асимптотические представления

$$\mathbf{v}(y, z) = \chi(r) c_0^- \mathbf{U}_0^-(y, z) + \tilde{\mathbf{v}}(y, z), \quad (3.19)$$

$$p(y, z) = c_0^+ + \chi(r) c_0^- P_0^-(y) + \tilde{p}(y, z), \quad (3.20)$$

где χ – гладкая срезающая функция, $\chi(r) = 0$ при $r \leq R_0$, $\chi(r) = 1$ при $r \geq 2R_0$, $P_0^-(y) = -(2\pi)^{-1} \ln r$, $\mathbf{U}_0^-(y, z) = (2\nu)^{-1} z(z-1) \nabla P_0^-(y)$, $c_0^\pm$ – постоянные, причем

$$c_0^- = 12\nu \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, ds = -12\nu \int_{S_t} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}' \, ds$$

определяет поток вектора скорости $\mathbf{v}$ через цилиндрические сечения $S_t = \{x \in \Omega : |y| = t\}$ слоя Π ($\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\mathbf{n}'$ – единичный вектор нормали к S_t), $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование функции $p \in L_\beta^2(\Omega)$, удовлетворяющей тождеству (3.5), следует из теоремы 3.1. Кроме того, обобщенное решение $(\mathbf{v}, p) \in W_{\text{loc}}^{l+1,2}(\overline{\Omega}) \times W_{\text{loc}}^{l,2}(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет системе (3.1) почти всюду в Ω .

Положим $\beta = -2 + \delta_0$, $\delta_0 \in (0, 1)$. Возможны три случая:

$$\text{а) } \beta + \delta_0 > \beta_1, \quad \text{б) } -1 < \beta + \delta_0 < \beta_1, \quad \text{в) } -2 < \beta + \delta_0 \leq -1.$$

В силу леммы 3.4 из (3.18) следует, что $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{2\delta_0,1}^1(\Omega) = \mathcal{V}_{(\beta+\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$. В случае а) рассмотрим $(\mathbf{v}, p) \in L_{\beta+1}^2(\Omega) \times L_\beta^2(\Omega) \subset L_\beta^2(\Omega) \times L_\beta^2(\Omega)$ как решение линейной задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^2(\Omega; \partial\Omega)$. Применяя теорему 2.1 (ii), заключаем, что $(\mathbf{v}, p)$ допускает асимптотические представления (3.19), (3.20) с $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^2(\Omega)$.

В случае б) $(\mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+\delta_0}^2(\Omega; \partial\Omega)$, $\beta + \delta_0 \in (-1, \beta_1)$. Поэтому согласно теореме 2.1 (ii) $(\mathbf{v}, p)$ удовлетворяет (3.19), (3.20) с $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta+\delta_0}^2(\Omega)$. Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{v}}' \in \mathcal{V}_{\beta+\delta_0+1,2}^3(\Omega), \quad \tilde{v}_3 \in \mathcal{V}_{\beta+\delta_0+2,1}^3(\Omega) \quad (3.21)$$

и из леммы 3.4 следует, что $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{(\beta+\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$. Подставляя представления (3.19), (3.20) в систему (3.1), получаем задачу

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{p} &= \mathbf{f} + \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{v}}) - (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{F}, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} &= g_0, \quad x \in \Omega, \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{h}, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= c_0^- [\nu \Delta(\chi \mathbf{U}_0^-) - \nabla(\chi P_0^-)] - (c_0^-)^2 (\chi \mathbf{U}_0^- \cdot \nabla)(\chi \mathbf{U}_0^-), \\ g_0 &= -c_0 \operatorname{div}(\chi \mathbf{U}_0^-), \\ \mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{v}}) &= c_0^- [(\chi \mathbf{U}_0^- \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)(\chi \mathbf{U}_0^-)]. \end{aligned}$$

Поскольку пара $(\mathbf{U}_0^-, P_0^-)$ удовлетворяет однородной системе Стокса (2.23) в слое Π , то

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}[\nu \Delta(\chi \mathbf{U}_0^-) - \nabla(\chi P_0^-)] &\subset \operatorname{supp} \chi \subset \{x \in \Omega : 1 < r < 2\}, \\ \operatorname{supp} g_0 &\subset \{x \in \Omega : 1 < r < 2\}. \end{aligned}$$

Кроме того, используя соотношения

$$|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha \mathbf{U}_0^{-'}(y, z)|^2 \sim \frac{1}{(1+r^2)^{1+|\gamma|}} \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad U_{03}^-(y, z) \equiv 0$$

и включения (3.21), находим, что $(\chi \mathbf{U}_0^- \cdot \nabla)(\chi \mathbf{U}_0^-) \in \mathcal{V}_{\beta_1+2,l}^l(\Omega)$ для любого $\beta_1 < 0$, $\mathbf{f}_1(\tilde{\mathbf{v}}) \in \mathcal{V}_{(\beta+\delta_0+1)+2,1}^2(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\beta_1+2,1}^1(\Omega)$ (напомним, что $\beta + \delta_0 \in (-1, \beta_1)$, $\beta_1 \in (-1, 0)$).

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}, g_0, \mathbf{h}) &\in \mathcal{R}_{\beta_1}^2(\Omega; \partial\Omega), \quad \text{если } \beta + 3\delta_0 \geq \beta_1, \\ (\mathbf{F}, g_0, \mathbf{h}) &\in \mathcal{R}_{\beta+3\delta_0}^2(\Omega; \partial\Omega), \quad \text{если } \beta + 3\delta_0 < \beta_1. \end{aligned}$$

По теореме 2.1 (i) решение $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$ задачи (3.22) в первом случае попадает в пространство $\mathcal{D}_{\beta_1}^2(\Omega)$, а во втором — в пространство $\mathcal{D}_{\beta+3\delta_0}^2(\Omega)$. Если $\beta + 3\delta_0 < \beta_1$, то продолжаем итерации. В силу леммы 3.4 имеем $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{(\beta+7\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$. Если $\beta + 7\delta_0 \geq \beta_1$, то отсюда заключаем, что $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^2(\Omega)$. Если же $\beta + 7\delta_0 < \beta_1$, то, продолжая этот процесс, за конечное число шагов получим включение $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{(\beta+2^k\delta_0-\delta_0)+2,1}^2(\Omega)$ с $\beta + (2^k - 1)\delta_0 \geq \beta_1$ и, следовательно, $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^2(\Omega)$.

Повысим теперь гладкость решения $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p})$. Так как $\beta_1 \in (-1, 0)$, то, применяя лемму 3.4 (см. (3.16)), получаем включение $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{2\beta_1+3,2}^2(\Omega) \subset \mathcal{V}_{\beta_1+2,2}^2(\Omega)$. Тогда $(\mathbf{F}, g_0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^3(\Omega; \partial\Omega)$ и из теоремы 2.1 (i) выводим $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^3(\Omega)$. Продолжая эти рассуждения, за конечное число шагов получим $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$.

Рассмотрим последний случай: $\beta + \delta_0 \in (-2, -1)$. Поскольку $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{(\beta+\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$, то $(\mathbf{v}, p)$ можно рассматривать как решение задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+\delta_0}^2(\Omega; \partial\Omega)$. В силу теоремы 2.1 (i) $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{D}_{\beta+\delta_0}^2(\Omega)$. Отсюда следует, что $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{(\beta+3\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$. Если $\beta + 3\delta_0 < -1$, то продолжим этот процесс, пока не получим включение $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{(\beta+2^m\delta_0-\delta_0)+2,1}^1(\Omega)$ с $\beta + (2^m - 1)\delta_0 \geq -1$. Если это неравенство строгое, то по доказанному $\mathbf{v}$ и p допускают асимптотические представления (3.19), (3.20) с $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$. Если же $\beta + (2^m - 1)\delta_0 = -1$, то $(\mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+(2^m-1)\delta_0-\varepsilon}^2(\Omega; \partial\Omega)$ и $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{D}_{\beta+(2^m-1)\delta_0-\varepsilon}^2(\Omega)$ с любым $\varepsilon > 0$. Отсюда заключаем, что $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\beta+(2^{m+1}-1)\delta_0+2\varepsilon}^1(\Omega)$. Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство $\beta + (2^{m+1} - 1)\delta_0 + 2\varepsilon > -1$. Тогда опять приходим к случаю б) и, следовательно, справедливы представления (3.19), (3.20) с $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из доказательства теоремы 3.2 следует, что если $(\mathbf{f}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^l(\Omega; \partial\Omega)$, $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,2}^3(\Omega)$, $v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,1}^3(\Omega)$ с $-2 < \beta \leq \beta_1 < -1$, $l \geq 2$, то $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Утверждение теоремы остается в силе, если $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^2(\Omega)$, $v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,0}^2(\Omega)$ с $\beta \in (-5/3, -1)$. При доказательстве этого факта надо лишь вместо неравенства (3.14) воспользоваться неравенством (3.15).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Теорема 3.2 носит условный характер. В § 4 будет показано, что условия теоремы 3.2 выполнены для обобщенных решений задачи (3.1), имеющих ненулевой поток через сечения слоя Π .

§ 4. Решения с ненулевым потоком

Существование обобщенных решений системы уравнений Навье–Стокса (3.1), имеющих ненулевой поток через сечения S_t слоя Π , было доказано в [17] (см. также [7], [11], где аналогичные результаты получены для областей Ω , имеющих несколько выходов на бесконечность, один из которых совпадает со слоем Π). Сформулируем результат, доказанный в [17].

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что $\mathbf{f} \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ и*

$$\sup_{k \geq 0} \|\mathbf{f}; L^2(\omega_k)\| < \infty, \quad \mathbf{h} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega), \quad (4.1)$$

$$\text{supp } \mathbf{h} \subset \partial\Omega \cap \overline{B}_{R_0}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, ds = F \neq 0.$$

Тогда существует обобщенное решение $\mathbf{v}$ задачи (3.1), удовлетворяющее условию

$$\int_{S_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' \, ds = -F \quad (4.2)$$

и неравенствам

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx &\leq ck \left(\sup_{l \geq 0} (l^{-1} \|\mathbf{f}; L^2(\Omega_l)\|^2) + \|\mathbf{h}; W^{1/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}; W^{1/2,2}(\partial\Omega)\|^4 \right) \equiv c_1(d)k, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx &\leq c \left(\sup_{l \geq 0} \|\mathbf{f}; L^2(\omega_l)\|^2 + \|\mathbf{h}; W^{1/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}; W^{1/2,2}(\partial\Omega)\|^4 \right) \equiv c_2(d), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Постоянные в (4.3), (4.4) не зависят от k .

Отметим, что в теореме 4.1 не предполагается малость данных задачи и потока F . В дальнейшем все постоянные, зависящие от данных задачи, будем обозначать через $c_i(d)$, не указывая их зависимость от различных норм $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ и от $|F|$.

В этом параграфе будет доказано, что решение $\mathbf{v}$, гарантированное теоремой 4.1, ведет себя на бесконечности так же, как решение линейной задачи Стокса (2.23), т. е. что главные члены асимптотических представлений линейной и нелинейной задач совпадают. Для малых данных этот результат получен в [17] (см. также [7]). Доказательство основано на применении техники оценок типа Сент-Венана, развитой в [5], [10]–[12], и результатов § 3. Нам потребуется следующая

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что*

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\geq y_k > 0 \quad \forall k \geq 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-3} y_k &= 0. \end{aligned}$$

Если элементы последовательности $\{y_k\}$ удовлетворяют неравенству

$$y_k \leq b(y_{k+1} - y_k) + a(y_{k+1} - y_k)^{3/2} + c_0, \quad (4.5)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c_0 > 0$, то справедлива оценка

$$y_k \leq c_0 \quad \forall k \geq 1. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение, содержащее как частный случай лемму 4.1, доказано в работе [10]. Однако для удобства читателя докажем лемму 4.1 непосредственно. Положим $z_k = y_k - c_0$ и перепишем (4.5) в виде

$$z_k \leq b(z_{k+1} - z_k) + a(z_{k+1} - z_k)^{3/2}. \quad (4.7)$$

Предположим, что оценка (4.6) неверна. Тогда найдется k_0 такое, что $z_{k_0} > 0$. Из неравенства (4.7) при $k = k_0$ следует, что $z_{k_0+1} - z_{k_0} \geq \alpha_0 > 0$ для некоторого α_0 . Так как $z_{k+1} \geq z_k$, то

$$z_{k+1} \geq z_k + \alpha_0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Отсюда по индукции выводим неравенство

$$z_{k_0+l} \geq l\alpha_0 + z_{k_0}$$

и, следовательно, $\lim_{l \rightarrow \infty} z_{k_0+l} = \infty$. Теперь из (4.7) вытекает соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (z_{k_0+l+1} - z_{k_0+l}) = \infty.$$

Поэтому для достаточно больших l

$$z_{k_0+l+1} - z_{k_0+l} > 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что последнее неравенство верно для всех $l \geq 0$. Из (4.7) следует неравенство

$$z_{k_0+l} \leq (a+b)(z_{k_0+l+1} - z_{k_0+l})^{3/2}.$$

Отсюда выводим

$$z_{k_0+l+1} \geq z_{k_0+l} + \nu_0 z_{k_0+l}^{2/3}, \quad \nu_0 = (a+b)^{-2/3}. \quad (4.8)$$

При помощи индукции легко показать, что (4.8) влечет оценку

$$z_{k_0+l+1} \geq \nu_1 l^3, \quad \nu_1 = \left(\frac{\nu_0}{9}\right)^3,$$

которая противоречит условию $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-3} z_l = 0$. Таким образом, $z_k \leq 0 \quad \forall k \geq 1$ и справедлива оценка (4.6).

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathbf{v}$ – обобщенное решение задачи (3.1), удовлетворяющее неравенству (4.4). Тогда $\nabla \mathbf{v} \in L^2_{-\varepsilon}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} (1 + r^2)^{-\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \leq c_3(d) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см. (4.4))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} (1 + r^2)^{-\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx &\leq c \sum_{j=0}^l \int_{\omega_j} (1 + r^2)^{-\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \\ &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2j\varepsilon} \int_{\omega_j} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \leq c_2(d) \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-2\varepsilon})^j \leq c_3(d). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{h} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)$. Тогда обобщенное решение $\mathbf{v}$ задачи (3.1) удовлетворяет включению $\mathbf{v} \in C^{1/2}(\overline{\Omega})$ и неравенству

$$\|\mathbf{v}; C^{1/2}(\overline{\Omega})\| \leq c_4(d). \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решение $\mathbf{v}$ в области $Q_{k,s}^*$, $k, s \in \mathbb{Z}$ (см. обозначения п. 2.2). Так как $Q_{k,s}$ – ограниченная область и $Q_{k,s} \subset Q_{k,s}^*$, то имеет место оценка (см. [22; гл. V, оценка (3.6)])

$$\|\mathbf{v}; C^{1/2}(\overline{Q}_{k,s})\| \leq c \|\mathbf{v}; W^{2,2}(Q_{k,s})\| \leq c(\|\mathbf{v}; W^{1,2}(Q_{k,s}^*)\|^4 + \|\mathbf{f}; L^2(Q_{k,s}^*)\|). \quad (4.11)$$

Поскольку для достаточно больших k и s области $Q_{k,s}$ отличаются лишь расположением в пространстве, то постоянная c в последнем неравенстве может быть выбрана не зависящей от $k, s \in \mathbb{Z}$. Пусть число $l = l(k, s)$ таково, что $\omega_l^* \supset Q_{k,s}^*$, где $\omega_l^* = \omega_{l-1} \cup \omega_l \cup \omega_{l+1}$. Тогда в силу (4.4) получим оценку

$$\|\mathbf{v}; C^{1/2}(\overline{Q}_{k,s})\| \leq c(\|\mathbf{v}; W^{1,2}(\omega_l^*)\|^4 + \|\mathbf{f}; L^2(\omega_l^*)\|) \leq c(c_2(d)^4 + c_5(d)) \equiv c_4(d),$$

где $c_5(d)$ зависит от норм $\|\mathbf{f}; L^2(\Omega)\|$ и $\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|$. Взяв в последнем неравенстве супремум по всем $k, s \in \mathbb{Z}$, выводим (4.10).

ЛЕММА 4.4. Пусть $\mathbf{h} \in W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)$, $\text{supp } \mathbf{h} \subset \partial\Omega \cup \overline{B}_{R_0}$, $\int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds = F \neq 0$. Тогда в области Ω существует вектор-функция $\mathbf{A}$, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \int_{S_t} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}' ds = -F, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{A}(x) = -12\nu F \mathbf{U}_0^-(y, z) = \frac{3F}{\pi} z(z-1) \left(\frac{y}{r^2}, 0 \right) \quad \text{при } r \geq 3R_0. \quad (4.13)$$

Кроме того, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{-\varepsilon, l+1}^{l+1}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0$ и

$$\|\mathbf{A}; \mathcal{V}_{-\varepsilon, l+1}^{l+1}(\Omega)\| \leq c \|\mathbf{h}; W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)\|. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{A}_1 \in W^{l+1,2}(\Omega)$ – продолжение функции $\mathbf{h} \in W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)$ в Ω . Поскольку $\text{supp } \mathbf{h} \subset \partial\Omega \cap B_{R_0}$, то $\mathbf{A}_1$ можно выбрать так, что $\text{supp } \mathbf{A}_1 \subset \overline{\Omega}(2R_0)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\|\mathbf{A}_1; W^{l+1,2}(\Omega)\| \leq c\|\mathbf{h}; W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)\|. \quad (4.15)$$

Рассмотрим в Ω задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}_2 &= -\operatorname{div} \mathbf{A}_1 + 12\nu F \nabla \chi \cdot \mathbf{U}_0^- \equiv g_F, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{A}_2 &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где χ – срезающая функция из теоремы 3.2. Так как $\text{supp } g_F \subset \Omega(2R_0)$ и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(2R_0)} g_F dx &= \int_{\Omega(2R_0)} [-\operatorname{div} \mathbf{A}_1 + 12\nu F \nabla \chi \cdot \mathbf{U}_0^-] dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds + 12\nu F \int_{S_{2R_0}} \mathbf{U}_0^- \cdot \mathbf{n}' ds = -F + F = 0, \end{aligned}$$

то согласно лемме 2.6 существует решение $\mathbf{A}_2 \in W^{l+1,2}(\Omega)$ задачи (4.16) такое, что $\text{supp } \mathbf{A}_2 \subset \Omega(3R_0)$ и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_2; W^{l+1,2}(\Omega)\| &\leq c\|g_F; W^{l,2}(\Omega)\| \leq c(\|\mathbf{h}; W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)\| + |F|) \\ &\leq c\|\mathbf{h}; W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)\|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Положим $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 12\nu F \chi \mathbf{U}_0^-$. Очевидно, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}|_{\partial\Omega} = \mathbf{h}$ и выполнено представление (4.13). Следовательно,

$$\int_{S_t} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}' ds = -12\nu F \int_{S_t} \mathbf{U}_0^- \cdot \mathbf{n}' ds = -F.$$

Из явной формулы для $\mathbf{U}_0^-$ легко получить оценку

$$\|12\nu F \chi \mathbf{U}_0^-; \mathcal{V}_{-\varepsilon, l+1}^{l+1}(\Omega)\| \leq c|F| \leq c\|\mathbf{h}; W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)\|. \quad (4.18)$$

Так как функции $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ финитны, то нормы $\|\mathbf{A}_i; W^{l+1,2}(\Omega)\|$ и $\|\mathbf{A}_i; \mathcal{V}_{-\varepsilon, l+1}^{l+1}(\Omega)\|$, $i = 1, 2$, эквивалентны, и требуемое неравенство (4.14) следует из (4.15), (4.17), (4.18).

Вернемся к рассмотрению задачи (3.1). Пусть $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)$, $l \geq 1$, $\beta_1 \in (-1, 0)$, $\mathbf{h} \in W^{l+1/2,2}(\partial\Omega)$. Тогда обобщенное решение $\mathbf{v} \in W_{\text{loc}}^{l+1,2}(\Omega)$ и существует функция $p \in W_{\text{loc}}^{l,2}(\Omega)$ такая, что $(\mathbf{v}, p)$ удовлетворяет системе (3.1) почти всюду в Ω . Сделаем в (3.1) замену

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{A}, \quad q = p + 12\nu F \chi(r) P_0^-(y). \quad (4.19)$$

Для $(\mathbf{u}, q)$ получим задачу

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla q &= \mathbf{f}_1 - [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}], \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \int_{S_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' ds &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} + (\nu \Delta \mathbf{A} + 12\nu F \nabla(\chi P_0^-)) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$. Поскольку $(\mathbf{U}_0^-, P_0^-)$ удовлетворяет системе Стокса, то функция $\nu \Delta \mathbf{A} + 12\nu F \nabla(\chi P_0^-)$ имеет компактный носитель, содержащийся в $\Omega(3R_0)$. Кроме того, используя структуру $\mathbf{U}_0^-$, легко показать, что при $r \geq 3R_0$ третья компонента вектор-функции $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ тождественно равна нулю и

$$|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha \mathbf{A}(x)| \leq c|F|(1+r^2)^{-(1+|\gamma|)/2} \quad \text{при } r \geq 3R_0.$$

Поэтому $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega) \quad \forall \beta < 0$ и

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}; \mathcal{V}_{\beta+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\| &\leq c(\|\mathbf{h}; W^{l+1/2, 2}(\partial\Omega)\|^2 + |F|) \\ &\leq c\|\mathbf{h}; W^{l+1/2, 2}(\partial\Omega)\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_1; \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\| &\leq c(\|\mathbf{h}; W^{l+1/2, 2}(\partial\Omega)\| + \|\mathbf{h}; W^{l+1/2, 2}(\partial\Omega)\|^2 \\ &\quad + \|\mathbf{f}; \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)\|). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathbf{f} \in L_{\beta_1+2}^2(\Omega)$, $\beta_1 \in (-1, 0)$, $\mathbf{h} \in W^{3/2, 2}(\partial\Omega)$. Тогда $\nabla \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ и имеет место оценка

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_6(d). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_1 \cdot \boldsymbol{\eta} dx - \int_{\Omega} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} dx \quad (4.22)$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\eta} \in W_{\text{loc}}^{1, 2}(\Omega)$ такой, что $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0$, $\boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\boldsymbol{\eta}(x) = 0$ при $r \gg 1$.

В области Ω определим функцию

$$\mathbf{U}_k = \begin{cases} \mathbf{u}, & x \in \Omega_k, \\ \xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k, & x \in \omega_k, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{k+1}, \end{cases}$$

где $\mathbf{w}_k$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w}_k &= -\operatorname{div}(\xi_k \mathbf{u}) = -\nabla \xi_k \cdot \mathbf{u}, \quad x \in \omega_k, \\ \mathbf{w}_k &= 0, \quad x \in \partial\omega_k, \end{aligned} \quad (4.23)$$

а ξ_k – гладкая срезающая функция, $\xi_k(r) = 1$ при $x \in \Omega_k$, $\xi_k(r) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_{k+1}$ и

$$|\nabla \xi_k| \leq c 2^{-k}. \quad (4.24)$$

Так как

$$\int_{\omega_k} \operatorname{div}(\xi_k \mathbf{u}) dx = - \int_{S_{2^k}} \xi_k(r) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' ds = - \int_{S_{2^k}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' ds = 0,$$

то в силу леммы 2.7 существует решение задачи (4.23), удовлетворяющее неравенству

$$\|\nabla \mathbf{w}_k; L^2(\omega_k)\| \leq c 2^k \|\nabla \xi_k \cdot \mathbf{u}; L^2(\omega_k)\| \leq c \|\mathbf{u}; L^2(\omega_k)\| \leq c \|\nabla \mathbf{u}; L^2(\omega_k)\|, \quad (4.25)$$

в котором постоянная c не зависит от k .

Легко видеть, что $\operatorname{div} \mathbf{U}_k = 0$, $\mathbf{U}_k|_{\partial\Omega} = 0$ и $\operatorname{supp} \mathbf{U}_k \subset \Omega_{k+1}$. Взяв в интегральном тождестве (4.22) $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U}_k$, получим соотношение

$$\nu \int_{\Omega_{k+1}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}_k dx = \int_{\Omega_{k+1}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{U}_k dx - \int_{\Omega_{k+1}} [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{U}_k dx.$$

Так как

$$\int_{\Omega_{k+1}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}_k dx = \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \int_{\omega_k} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k) dx,$$

то последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx &= -\nu \int_{\omega_k} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_{k+1}} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{U}_k dx \\ &\quad + \int_{\Omega_{k+1}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{U}_k dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Оценим правую часть (4.26). Рассмотрим слагаемое J_1 . В силу неравенств Гёльдера, Фридрихса и (4.24), (4.25) имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \nu \left| \int_{\omega_k} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k) dx \right| \leq \nu \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\omega_k} (|\nabla \xi_k|^2 |\mathbf{u}|^2 + |\xi_k|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{w}_k|^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_k} (2^{-2k} |\mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{w}_k|^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Второе слагаемое в правой части (4.26) представим в виде суммы

$$J_2 = \int_{\Omega_{k+1}} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}_k dx + \int_{\Omega_{k+1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_k dx \equiv J_{21} + J_{22}.$$

Для оценки J_{21} заметим, что

$$\int_{\Omega_{k+1}} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}_k dx = - \int_{\Omega_{k+1}} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{U}_k \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_k \cdot \mathbf{A}) dx,$$

и воспользуемся неравенствами Юнга и Фридрихса:

$$|J_{21}| \leq c_\delta \int_{\Omega_{k+1}} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{u}|^2 dx + \delta \int_{\Omega_{k+1}} |\nabla \mathbf{U}_k|^2 dx.$$

Поскольку $\mathbf{A} \in W^{2,2}(\Omega(3R_0))$ (см. доказательство леммы 4.4), то

$$\sup_{x \in \Omega(3R_0)} |\mathbf{A}(x)|^2 \leq c \|\mathbf{A}; W^{2,2}(\Omega(3R_0))\|^2 \leq c \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|^2.$$

Далее, так как $\mathbf{A}(x) = -12\nu F \mathbf{U}_0^-(y, z)$ при $r \geq 3R_0$, то

$$|\mathbf{A}(x)|^2 \leq c|F|^2(1+r^2)^{-1} \leq c(1+r^2)^{-1} \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \quad \text{при } r \geq 3R_0.$$

Используя оценки (4.9), (4.14), отсюда выводим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{k+1}} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{u}|^2 dx &\leq c \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \int_{\Omega_{k+1}} (1+r^2)^{-1} |\mathbf{u}|^2 dx \\ &\leq c \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \int_{\Omega_{k+1}} (1+r^2)^{-1} (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{A}|^2) dx \\ &\leq c \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\|^2 \int_{\Omega} (1+r^2)^{-1} (|\nabla \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{A}|^2) dx \leq c_7(d). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_{21} &\leq c_\delta c_7(d) + \delta \int_{\Omega_{k+1}} |\nabla \mathbf{U}_k|^2 dx \\ &\leq c_\delta c_7(d) + \delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \delta \int_{\omega_k} |\nabla(\xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k)|^2 dx \\ &\leq c_\delta c_7(d) + \delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c\delta \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Рассмотрим слагаемое J_{22} . Так как $\text{supp } \mathbf{w}_k \subset \omega_k$, то

$$J_{22} = \int_{\Omega_{k+1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_k dx = \int_{\Omega_{k+1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \xi_k \mathbf{u} dx + \int_{\omega_k} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_k dx.$$

Используя соотношения $\xi_k(r) = 0$ при $r \geq 2^{k+1}$, $\text{supp } \nabla \xi_k \subset \omega_k$, и интегрируя по частям, находим

$$\int_{\Omega_{k+1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \xi_k \mathbf{u} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\omega_k} \mathbf{u} \cdot \nabla \xi_k |\mathbf{u}|^2 \, dx.$$

Далее, поскольку $\mathbf{w}_k|_{\partial\omega_k} = 0$, то

$$\int_{\omega_k} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_k \, dx = - \int_{\omega_k} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u} \, dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |J_{22}| &\leq \frac{1}{2} \int_{\omega_k} |\nabla \xi_k| |\mathbf{u}|^3 \, dx + \left(\int_{\omega_k} |\mathbf{u}|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{w}_k|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \int_{\omega_k} |\mathbf{u}|^3 \, dx + c \left(\int_{\omega_k} |\mathbf{u}|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу леммы 2.1 справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}; L^3(\omega_k)\| + \|\mathbf{u}; L^4(\omega_k)\| \leq c \|\mathbf{u}; W^{1,2}(\omega_k)\| \leq c \|\nabla \mathbf{u}; L^2(\omega_k)\|,$$

где постоянная не зависит от k . Это дает

$$|J_{22}| \leq c \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \right)^{3/2}, \quad (4.29)$$

и из (4.28), (4.29) следует, что

$$|J_2| \leq c_\delta c_7(d) + c_\delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + c_\delta \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + c \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \right)^{3/2}. \quad (4.30)$$

Наконец, для слагаемого J_3 справедлива оценка

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \int_{\Omega_{k+1}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{U}_k \, dx \right| \leq c_\delta \int_{\Omega_{k+1}} |\mathbf{f}_1|^2 \, dx + \delta \int_{\Omega_{k+1}} |\mathbf{U}_k|^2 \, dx \\ &\leq c_\delta \int_{\Omega} |\mathbf{f}_1|^2 \, dx + \delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + \delta \int_{\omega_k} |\nabla(\xi_k \mathbf{u} + \mathbf{w}_k)|^2 \, dx \\ &\leq c_8(d) + \delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + c_\delta \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Собирая неравенства (4.27), (4.30), (4.31), из (4.26) выводим соотношение

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx &\leq c_1 \delta \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + c_2 \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \\ &\quad + c_3 \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \right)^{3/2} + c_9(d). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Выберем и зафиксируем δ так, чтобы выполнялось неравенство $c_1\delta < \nu/2$. Тогда из (4.32) следует, что

$$\int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_4 \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_5 \left(\int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{3/2} + 2\nu^{-1} c_9(d). \quad (4.33)$$

Положим $y_k = \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx$. Так как

$$y_{k+1} = \int_{\Omega_{k+1}} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = y_k + \int_{\omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx,$$

то неравенство (4.33) можно переписать в виде

$$y_k \leq c_4(y_{k+1} - y_k) + c_5(y_{k+1} - y_k)^{3/2} + 2\nu^{-1} c_9(d). \quad (4.34)$$

В силу оценки (4.3)

$$y_k \leq c_1(d)k.$$

Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-3} y_k = 0$ и согласно лемме 4.1 из (4.34) следует, что

$$y_k = \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq 2\nu^{-1} c_9(d). \quad (4.35)$$

Переходя в (4.35) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq 2\nu^{-1} c_9(d).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. Пусть выполнены условия леммы 4.5. Тогда существует такое число $\beta_* = \beta_*(d) \in (0, 1/2)$, что $\nabla \mathbf{u} \in L_\mu^2(\Omega) \quad \forall \mu \in (0, \beta_*)$ и

$$\int_{\Omega} (1 + r^2)^\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{10}(d). \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из мультипликативного неравенства (см., например, [22])

$$\|\mathbf{u}; L^q(\Omega)\| \leq (48)^{\alpha/6} \|\nabla \mathbf{u}; L^2(\Omega)\|^\alpha \|\mathbf{u}; L^2(\Omega)\|^{1-\alpha} \leq c \|\nabla \mathbf{u}; L^2(\Omega)\|,$$

справедливого для $q \in [2, 6]$ и $\alpha = 3/2 - 3/q$, находим, что $\mathbf{u} \in L^4(\Omega)$. Поэтому интегральное тождество (4.22) можно распространить по непрерывности на соленоидальные вектор-функции $\boldsymbol{\eta}$ с конечным интегралом Дирихле $\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{\eta}|^2 dx$.

Пусть $k \geq 1$. Определим в области Ω непрерывную функцию

$$R_\mu(x, k) = \begin{cases} 5^\mu, & r \leq 2, \\ (1 + r^2)^\mu, & 2 \leq r \leq 2^k, \\ (1 + 2^{2k})^\mu, & r \geq 2^k. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\text{supp}(\nabla R_\mu(x, k)) \subset \Omega_k \setminus \omega_0$ и

$$R_\mu(x, k) \leq c(1 + r^2), \quad |\nabla R_\mu(x, k)| \leq c\mu(1 + r^2)^{\mu-1/2} \quad \forall x \in \Omega, \quad k \geq 1, \quad (4.37)$$

причем постоянные в (4.37) не зависят от x и k . Положим в интегральном тождестве (4.22)

$$\eta(x) = \begin{cases} R_\mu(x, k)\mathbf{u}(x), & x \in \omega_0, \\ R_\mu(x, k)\mathbf{u} + \mathbf{W}_j(x), & x \in \omega_j, \quad j = 1, \dots, k-1, \\ R_\mu(x, k)\mathbf{u}(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_k, \end{cases}$$

где функции $\mathbf{W}_j$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{W}_j &= -\text{div}(R_\mu(x, k)\mathbf{u}) = -\nabla R_\mu \cdot \mathbf{u}, \quad x \in \omega_j, \\ \mathbf{W}_j &= 0, \quad x \in \partial\omega_j. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Так как

$$\int_{\omega_j} \text{div}(R_\mu \mathbf{u}) dx = (1 + 2^{2j+2})^\mu \int_{S_{2j+1}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' ds - (1 + 2^{2j})^\mu \int_{S_{2j}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' ds = 0$$

и $(1 + r^2) \sim 2^{2j}$ при $x \in \omega_j$, то существуют решения $\mathbf{W}_j$ задач (4.38), удовлетворяющие неравенствам (см. лемму 2.7)

$$\begin{aligned} \|(1 + r^2)^{-\mu/2} \nabla \mathbf{W}_j; L^2(\omega_j)\| &\leq c2^{-j\mu} \|\nabla \mathbf{W}_j; L^2(\omega_j)\| \\ &\leq c2^{-j\mu+j} \|\nabla R_\mu \cdot \mathbf{u}; L^2(\omega_j)\| \leq c\mu 2^{-j\mu+j} \|(1 + r^2)^{\mu-1/2} \mathbf{u}; L^2(\omega_j)\| \\ &\leq c\mu \|(1 + r^2)^{\mu/2} \mathbf{u}; L^2(\omega_j)\| \leq c\mu \|(1 + r^2)^{\mu/2} \nabla \mathbf{u}; L^2(\omega_j)\|. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Далее считаем функции $\mathbf{W}_j$ продолженными нулем в $\Omega \setminus \omega_j$, $j = 1, \dots, k-1$.

В результате такой подстановки тождество (4.22) принимает вид

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} R_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx &= -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla R_\mu dx - \nu \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{W}_j dx \\ &\quad - \int_{\Omega} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot R_\mu \mathbf{u} dx \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{W}_j dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{f}_1 \cdot R_\mu \mathbf{u} dx + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{W}_j dx. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Оценим правую часть (4.40). В силу неравенств Гёльдера, Фридрихса и (4.37), (4.39) получим

$$\begin{aligned}
& \nu \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla R_{\mu} dx \right| \\
& \leq c\mu \left(\int_{\Omega_k \setminus \omega_0} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_k \setminus \omega_0} (1+r^2)^{\mu} |\mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\
& \leq c\mu \int_{\Omega_k \setminus \omega_0} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c\mu \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx, \\
& \nu \left| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{W}_j dx \right| \leq \nu \sum_{j=1}^{k-1} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{-\mu} |\nabla \mathbf{W}_j|^2 dx \right)^{1/2} \leq c\mu \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \\
& = c\mu \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Кроме того, если $\mu \leq 1/2$, то, рассуждая так же, как при оценке слагаемого J_{21} в доказательстве леммы 4.5, и используя неравенство (4.39), находим, что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}) \cdot R_{\mu} \mathbf{u} dx \right| = \left| \int_{\Omega} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot R_{\mu} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)(R_{\mu} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{A}) dx \right| \\
& \leq c\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \int_{\Omega} (1+r^2)^{-1/2} (R_{\mu} |\mathbf{u}|^2 + R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}| |\nabla(R_{\mu} \mathbf{u})|) dx \\
& \leq c\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \int_{\Omega} (1+r^2)^{\mu-1/2} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \\
& \leq c\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{11}(d), \\
& \left| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} ((\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}_j - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{A}) dx \right| \\
& \leq c\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \sum_{j=1}^{k-1} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu-1} (|\mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2) dx \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{-\mu} (|\nabla \mathbf{W}_j|^2 + |\mathbf{W}_j|^2) dx \right)^{1/2} \\
& \leq c\mu\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \sum_{j=1}^{k-1} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu-1} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c\mu\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-j} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu-1/2} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\quad \times 2^j \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu-1/2} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq c\|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| \int_{\Omega} (1+r^2)^{\mu-1/2} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{12}(d).
 \end{aligned}$$

Наконец, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{f}_1 \cdot R_{\mu} \mathbf{u} dx &\leq c\delta \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_{\delta} \int_{\Omega} R_{\mu} |\mathbf{f}_1|^2 dx \\
 &\leq c\delta \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_{\delta} \int_{\Omega} (1+r^2)^{\mu} |\mathbf{f}_1|^2 dx \\
 &\leq c\delta \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_{\delta} \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+2} |\mathbf{f}_1|^2 dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{W}_j dx &\leq c \sum_{j=1}^{k-1} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu} |\mathbf{f}_1|^2 dx + \int_{\omega_j} (1+r^2)^{-\mu} |\nabla \mathbf{W}_j|^2 dx \right) \\
 &\leq c \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+2} |\mathbf{f}_1|^2 dx + c\mu^2 \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} (1+r^2)^{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \\
 &\leq c \int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta_1+2} |\mathbf{f}_1|^2 dx + c\mu^2 \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Подставим полученные неравенства в (4.40). Это дает

$$\begin{aligned}
 \nu \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx &\leq c(\delta + \mu) \int_{\Omega} R_{\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_{13}(d) \\
 &\quad + \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot R_{\mu} \mathbf{u} dx \right| + \left| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}_j dx \right|. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Оценим два последних слагаемых в правой части (4.41). Поскольку

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot R_{\mu} \mathbf{u} dx = - \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \nabla R_{\mu} dx,$$

то

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot R_{\mu} \mathbf{u} dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^3 |\nabla R_{\mu}| dx \leq c \int_{\Omega} (1+r^2)^{\mu-1/2} |\mathbf{u}|^3 dx \\
 &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{3/2} \leq c_{14}(d).
 \end{aligned}$$

Далее, в силу (4.39) и (4.40) имеет место оценка

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}_j dx \right| \\
& \leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^\mu |\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_j} (1+r^2)^{-\mu} |\mathbf{W}_j|^2 dx \right)^{1/2} \\
& \leq c \mu \sup_{x \in \bar{\Omega}} (|\mathbf{u}(x)|^2) \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\omega_j} (1+r^2)^\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \\
& \leq c c_4(d) \mu \int_{\Omega_k \setminus \omega_0} (1+r^2)^\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{15}(d) \mu \int_{\Omega} R_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, из (4.41) следует, что

$$\nu \int_{\Omega} R_\mu(x, k) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq (c_*(\delta + \mu) + c_{15}(d) \mu) \int_{\Omega} R_\mu(x, k) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + c_{16}(d), \quad (4.42)$$

причем постоянные не зависят от k . Выберем δ и $\widehat{\beta}$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$c_* \widehat{\beta} + c_{15}(d) \widehat{\beta} = \nu/4, \quad c_* \delta = \nu/4.$$

Тогда для любого $\mu \in (0, \beta_*)$, $\beta_* = \min(1/2, \widehat{\beta})$, из (4.42) следует оценка

$$\int_{\Omega_k} (1+r^2)^\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c \int_{\Omega} R_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{17}(d). \quad (4.43)$$

Переходя в (4.43) к пределу при $k \rightarrow \infty$, находим, что

$$\int_{\Omega} (1+r^2)^\mu |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq c_{17}(d) \quad \forall \mu \in (0, \beta_*).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из доказательства леммы 4.6 следует, что величина β_* зависит от норм правых частей $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$, причем

$$\beta_* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{h}; W^{3/2,2}(\partial\Omega)\| + \|\mathbf{f}; L^2_{\beta_1+2}(\Omega)\| \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 4.7. Пусть выполнены условия леммы 4.5. Тогда для обобщенного решения задачи (4.20) имеет место оценка

$$\|\mathbf{u}; C^0_\mu(\bar{\Omega})\| \leq c_{18}(d). \quad (4.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathbf{u}$ как обобщенное решение системы Навье–Стокса (3.1) с правой частью $(\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A}, 0, 0)$. Из (4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}; C^0(\overline{Q}_{k,s})\| &\leq c(\|\mathbf{u}; W^{1,2}(Q_{k,s}^*)\|^4 + \|\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A}; L^2(Q_{k,s}^*)\|) \\ &\leq c(\|\nabla\mathbf{u}; L^2(Q_{k,s}^*)\|^4 + \|\mathbf{f}_1; L^2(Q_{k,s}^*)\| + c_{19}(d)\|\nabla\mathbf{u}; L^2(Q_{k,s}^*)\|). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Умножим (4.45) на $(1 + (k^2 + s^2))^\mu$ и воспользуемся тем, что $(1 + (k^2 + s^2)) \sim (1 + r^2)$ при $x \in Q_{k,s}^*$. В силу (4.36) это дает

$$\begin{aligned} \|(1 + r^2)^{\mu/2}\mathbf{u}; C^0(\overline{Q}_{k,s})\| &\leq c(\|(1 + r^2)^{\mu/8}\nabla\mathbf{u}; L^2(Q_{k,s}^*)\|^4 \\ &\quad + \|(1 + r^2)^{\mu/2}\mathbf{f}_1; L^2(Q_{k,s}^*)\| + c_{19}(d)\|(1 + r^2)^{\mu/2}\nabla\mathbf{u}; L^2(Q_{k,s}^*)\|) \\ &\leq c(\|\nabla\mathbf{u}; L_\mu^2(\Omega)\|^4 + c_{19}(d)\|\nabla\mathbf{u}; L_\mu^2(\Omega)\| + \|\mathbf{f}_1; L_\mu^2(\Omega)\|) \leq c_{20}(d). \end{aligned}$$

Взяв в последнем неравенстве супремум по всем $k, s \in \mathbb{Z}$, выводим (4.44). Лемма доказана.

Докажем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)$, $l \geq 1$, $\beta_1 \in (-1, 0)$, $\mathbf{h} \in W^{l+3/2, 2}(\partial\Omega)$

и

$$\text{supp } \mathbf{h} \subset \partial\Omega \cap B_{R_0}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, ds = F \neq 0.$$

Тогда существует решение $(\mathbf{v}, p)$ задачи (3.1), для которого справедливо асимптотическое представление

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(r)3F\pi^{-1}z(z-1)(y/r^2, 0) \\ \text{const} + \chi(r)6\nu F\pi^{-1} \ln r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ q \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

где $(\mathbf{u}, q) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$ и

$$\|(\mathbf{u}, q); \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)\| \leq c_{21}(d). \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{v}$ – обобщенное решение задачи (3.1) (см. теорему 4.1). Представим $\mathbf{v}$ в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} + \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ – решение задачи (4.20). В силу лемм 4.6, 4.7

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1 + r^2)^\mu |\nabla\mathbf{u}|^2 \, dx &< \infty, \\ \sup_{x \in \overline{\Omega}} ((1 + r^2)^{\mu/2} |\mathbf{u}(x)|) &< \infty \quad \forall \mu \in (0, \beta_*), \quad \beta_* \in (0, 1/2). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Рассмотрим нелинейное слагаемое

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

Используя соотношения (см. лемму 4.4)

$$|\partial_y^\gamma \partial_z^\alpha \mathbf{A}(x)| \leq c|F|(1+r^2)^{-(1+|\gamma|)/2}, \quad A_3(x) = 0,$$

справедливые при $r \geq 3R_0$, находим, что $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{\beta_1+2, l-1}^{l-1}(\Omega)$. Далее, при $r \geq 3R_0$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A}| &\leq (|\mathbf{A}| + |\nabla\mathbf{A}|)(|\mathbf{u}| + |\nabla\mathbf{u}|) \\ &\leq c|F|(1+r^2)^{-1/2}(|\mathbf{u}| + |\nabla\mathbf{u}|) \end{aligned}$$

и, следовательно, $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} \in L_{\mu+1}^2(\Omega)$.

Кроме того, в силу (4.44)

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| &\leq c \sup_{x \in \overline{\Omega}} ((1+r^2)^{\mu/2} |\mathbf{u}(x)|) (1+r^2)^{-\mu/2} |\nabla\mathbf{u}(x)| \\ &\leq c_{22}(d) (1+r^2)^{-\mu/2} |\nabla\mathbf{u}(x)| \in L_{2\mu}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in L_{2\mu}^2(\Omega)$. Из (4.48) следует, что

$$\mathbf{u}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^1(\Omega), \quad u_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,0}^1(\Omega), \quad \beta = \mu - 2 \in (-2, -3/2).$$

Отметим, что здесь мы загнули показатель весового множителя в слагаемом $\int_{\Omega} (1+r^2)^{\beta+1} (|\mathbf{u}'|^2 + |\partial_z \mathbf{u}'|^2) dx$ для того, чтобы погрузить $\mathbf{u}'$ в пространство $\mathcal{V}_{\beta+1,1}^1(\Omega)$ с анизотропным распределением веса (на самом деле, $\mathbf{u}', \partial_z \mathbf{u}' \in L_{\beta+2}^2(\Omega)$).

В лемме 4.4 доказано включение $\mathbf{A}' \in \mathcal{V}_{-\varepsilon, l+1}^{l+1}(\Omega) \quad \forall \varepsilon > 0$. Взяв $\varepsilon = 1 - \mu > 0$, получим $\mathbf{A}' \in \mathcal{V}_{\beta+1, l+1}^{l+1}(\Omega)$. Так как $A_3(x) = 0$ при $r \geq 3R_0$, то отсюда выводим, что

$$\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^1(\Omega), \quad v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,0}^1(\Omega).$$

По теореме 3.1 существует функция $p \in L_{\beta}^2(\Omega)$ такая, что пара $(\mathbf{v}, p)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.5). Представим p в виде

$$p(x) = q(x) + \chi(r) \frac{6\nu F}{\pi} \ln r.$$

Легко видеть, что $q(x) = p(x) - \chi(r) 6\nu F \pi^{-1} \ln r \in L_{\beta}^2(\Omega)$.

Возможны два случая:

$$\text{а) } \beta = \mu - 2 \in \left(-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right), \quad \text{б) } \beta \in \left(-2, -\frac{5}{3}\right).$$

В случае а) рассмотрим $(\mathbf{v}, p) \in L_{\beta+1}^2(\Omega) \times L_{\beta}^2(\Omega)$ как решение линейной задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{D}_{\beta}^1(\Omega; \partial\Omega)$. По теореме 2.1 (i) $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{D}_{\beta}^1(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_{\beta+1,1}^2(\Omega), \quad v_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2,0}^2(\Omega).$$

Поскольку $\beta > -5/3$, то в силу замечания 3.2 этих включений достаточно для справедливости теоремы 3.2 и, следовательно, $(\mathbf{v}, p)$ допускает асимптотическое представление (4.46) с $(\mathbf{u}, q) \in \mathcal{D}_{\beta_1}^l(\Omega)$.

Рассмотрим случай b) и сведем его к случаю а). Функции $\mathbf{u}$ и q , удовлетворяющие системе (4.20), будем интерпретировать как решение задачи Стокса (2.23) с правой частью $(\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, 0, \mathbf{h})$. По доказанному $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \in L_{2\mu}^2(\Omega)$. Следовательно,

$$(\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+\mu}^1(\Omega; \partial\Omega)$$

и согласно теореме 2.1 (i) $(\mathbf{u}, q) \in \mathcal{D}_{\beta+\mu}^1(\Omega)$. Это дает

$$\mathbf{u}' \in \mathcal{V}_{\beta+1+\mu,1}^2(\Omega), \quad u_3 \in \mathcal{V}_{\beta+2+\mu,0}^2(\Omega).$$

Если $2\mu - 2 > -5/3$, то выполнены условия случая а) и теорема доказана. Если же $2\mu - 2 < -5/3$, то упомянутые включения влекут конечность интеграла $\int_{\Omega} (1+r^2)^{2\mu} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx$ и из леммы 4.7 находим, что $\mathbf{u} \in C_{2\mu}^0(\overline{\Omega})$. Повторяя вышеизложенные рассуждения, заключаем, что $\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in L_{\beta+2\mu}^2(\Omega)$. То есть

$$(\mathbf{f}_1 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, 0, \mathbf{h}) \in \mathcal{R}_{\beta+2\mu}^1(\Omega; \partial\Omega)$$

и теорема 2.1 (i) дает включение $(\mathbf{u}, q) \in \mathcal{D}_{\beta+2\mu}^1(\Omega)$. Таким образом, за конечное число шагов случай b) сводится к случаю а). Теорема доказана.

Список литературы

1. Heywood J. G. On uniqueness question in the theory of viscous flow // Acta Math. 1976. V. 136. P. 61–102.
2. Капитанский Л. В., Пилецкас К. И. О пространствах соленоидальных векторных полей и краевых задачах для уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Труды МИАН. 1983. Т. 159. С. 5–36.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 81–116.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Вестн. ЛГУ. 1977. № 13. С. 39–47.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 117–160.
6. Nazarov S. A., Pileckas K. Asymptotics of solutions to Stokes and Navier–Stokes equations in domains with paraboloidal outlets to infinity // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1998. V. 99. P. 1–43.
7. Пилецкас К. И. О существовании решений уравнений Навье–Стокса, имеющих бесконечную диссипацию энергии, в одном классе областей с некомпактной границей // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1981. Т. 110. С. 180–202.
8. Солонников В. А., Пилецкас К. И. О некоторых пространствах соленоидальных векторов и о разрешимости краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 136–151.
9. Solonnikov V. A. On the solvability of boundary and initial-boundary value problems for the Navier–Stokes system in domains with noncompact boundaries // Pacific J. Math. 1981. V. 93. № 2. P. 443–458.

10. *Солонников В. А.* О решениях стационарных уравнений Навье–Стокса с бесконечным интегралом Дирихле // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 257–263.
11. *Solonnikov V. A.* Stokes and Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // Nonlinear partial differential equations and their applications. Coll. France Semin. 1983. V. 4. Res. Notes Math. V. 84. P. 240–349.
12. *Solonnikov V. A.* Boundary and initial-boundary value problems for the Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // Mathematical topics in fluid mechanics. Proc. of the summer course. Lisbon, Portugal, September 9–13, 1991 / ed. J.F. Rodrigues et al. Harlow, Essex: Longman, 1993. P. 117–162.
13. *Pileckas K.* Weighted L^q -solvability for the steady Stokes system in domains with noncompact boundaries // Math. Models Methods Appl. Sci. 1996. V. 6. № 1. P. 97–136.
14. *Pileckas K.* Classical solvability and uniform estimates for the steady Stokes system in domains with noncompact boundaries // Math. Models Methods Appl. Sci. 1996. V. 6. № 2. P. 149–167.
15. *Pileckas K.* Strong solutions of the steady nonlinear Navier–Stokes system in domains with exits to infinity // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1997. V. 97. P. 236–267.
16. *Pileckas K.* Recent advances in the theory of Stokes and Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // Mathematical theory in fluid mechanics. Lectures of the 4th winter school. Paseky, Czech Republic, December 3–9, 1995 / ed. G.P. Galdi et al. Harlow, Essex: Longman, 1996. P. 30–85.
17. *Nazarov S. A., Pileckas K.* On the solvability of the Stokes and Navier–Stokes problems in the domains that are layer-like at infinity // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 1. P. 78–116.
18. *Nazarov S. A., Pileckas K.* The asymptotic properties of the solutions to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 2. P. 131–167.
19. *Nazarov S. A., Pileckas K.* On the Fredholm property of the Stokes operator in a layer-like domain // Z. Anal. Anwendungen. 2001. V. 20. № 1. P. 155–182.
20. *Назаров С. А., Пилецкас К. И.* Фредгольмовость оператора задачи Неймана в областях с выходом на бесконечность в виде слоя // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 6. С. 57–104.
21. *Капитанский Л. В., Пилецкас К. И.* О некоторых задачах векторного анализа // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1984. Т. 138. С. 65–85.
22. *Ладъженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Институт математики и информатики,
г. Вильнюс, Литва
E-mail: pileckas@ktl.mii.lt

Поступила в редакцию
10.08.2000 и 11.03.2002