Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 12, 105–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:05:50

УДК 517.538+517.587

С. П. Суетин

Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций

В работе получена нелинейная система дифференциальных уравнений (“обобщенная система Дубровина”), с помощью которой описывается поведение тех нулей полиномов, ортогональных на нескольких отрезках, которые располагаются в лакунах между этими отрезками. Показано, что та же самая система описывает динамику подобных нулей и для ортогональных полиномов более общего вида – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций, мероморфных на вещественной гиперэллиптической римановой поверхности.

На основе такого подхода получены некоторые уточнения результатов Е. А. Рахманова о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для рациональных возмущений марковских функций.

Библиография: 41 название.

§ 1. Введение

1. В классической теореме Маркова утверждается сходимость последовательности подходящих дробей для чебышёвской непрерывной дроби

$$\frac{1}{A_1 z + B_1} + \frac{1}{A_2 z + B_2} + \cdots + \frac{1}{A_n z + B_n} + \cdots, \quad (1)$$

построенной непосредственно по лорановским коэффициентам $s_k, k = 0, 1, \dots$, разложения в ряд в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ функции вида

$$\hat{\mu}(z) := \int_E \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad (2)$$

где μ – положительная мера с носителем $E \subseteq \mathbb{R}$, s_k – ее моменты (для таких функций все $A_n \neq 0$). Функции вида (2) были введены П. Л. Чебышёвым [1] при изучении им свойств формальных разложений лорановских рядов в непрерывные дроби. Именно на этом пути Чебышёв открыл *общие ортогональные многочлены*, соответствующие произвольной положительной мере μ : такие многочлены естественным образом возникают как знаменатели Q_n для n -х подходящих дробей P_n/Q_n непрерывной дроби (1). В теореме Маркова [2] речь идет о *сходимости последовательности подходящих дробей* $\{P_n/Q_n\}$ к функции $\hat{\mu}$ равномерно внутри

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564), Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № 00-15-96132) и фонда INTAS (грант № 2000-272).

(т.е. на компактных подмножествах) области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, где $[a, b] = \widehat{E}$ – выпуклая оболочка E . Хорошо известно, что $\widehat{E}$ нельзя заменить на E : еще Марков [3] отмечал, что в случае, когда E состоит из двух отрезков, в лакуне между ними может располагаться нуль ортогонального полинома Q_n , т.е. полюс n -й подходящей дроби. В “типичном” же случае множество предельных точек последовательности нулей полиномов Q_n совпадает со всем отрезком $[a, b] = \widehat{E}$ (подробнее см. [4], [5]).

Подходящая дробь P_n/Q_n обладает следующим замечательным свойством максимально возможного (по числу $2n$ параметров) “касания” функции $\widehat{\mu}$ в точке $z = \infty$:

$$\left(\widehat{\mu} - \frac{P_n}{Q_n}\right)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty;$$

тем самым, эта дробь есть в точности n -я диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_{\widehat{\mu}}$ функции $\widehat{\mu}$ в точке $z = \infty$. Полиномы P_n и Q_n , $\deg P_n = n - 1$, $\deg Q_n = n$, полностью характеризуются (в классах полиномов степеней соответственно $\leq n - 1$ и $\leq n$ и при подходящей нормировке, например $Q_n(0) = 1$) соотношением

$$R_n(z) := (Q_n \widehat{\mu} - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Функция $R_n = R_n(z; \widehat{\mu})$ в теории ортогональных полиномов называется функцией второго рода; в теории аппроксимаций Паде R_n – это *функция остатка*.

В настоящей работе изучаются диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ для функций вида

$$f = \widehat{\mu} + r, \quad (3)$$

где $\widehat{\mu}$ – функция вида (2), μ – абсолютно непрерывная (вообще говоря, комплексная) мера из определенного класса (см. (5)), $r \in \mathbb{C}(z)$ – комплексная рациональная функция, голоморфная на E , $r(\infty) = 0$. Тем самым, f – “рациональное возмущение” $\widehat{\mu}$. Соответствующие полиномы $Q_n(z; f)$ – знаменатели рациональной дроби $[n/n]_f$ – оказываются ортогональными относительно дискретного возмущения меры μ , которое в случае, когда все полюсы b_j функции r простые, имеет вид $\mu + \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta_{b_j}$, $b_j, \lambda_j \in \mathbb{C}$.

Первый результат о сходимости диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f$ для функций вида (3) был получен А. А. Гончаром [6].

ТЕОРЕМА А. Пусть μ – положительная мера с носителем $E = [a, b]$ и $\mu' = d\mu/dx > 0$ почти всюду на E , r – комплексная рациональная функция, голоморфная на E (т.е. $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(E)$), $r(\infty) = 0$. Тогда диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ равномерно сходятся¹ к $f = \widehat{\mu} + r$ внутри области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$.

Тем самым, каждый полюс f в D притягивает *ровно* столько полюсов² $[n/n]_f$, какова его кратность.

Этот результат А. А. Гончара носит принципиальный характер: из него вытекает, что диагональные аппроксимации Паде, которые строятся непосредственно

¹Здесь и всюду в дальнейшем, когда речь идет о мероморфных функциях, имеется в виду равномерная сходимость в сферической метрике.

²Как обычно, полюсы и нули функций считаются с учетом их кратностей.

по лорановским коэффициентам ряда, в классе функций вида $f = \hat{\mu} + r$ при указанных условиях *эффективно решают задачу мероморфного продолжения* функции, заданной своим разложением в ряд: полюсы этих аппроксимаций локализуют отрезок $[a, b]$ и особые точки (полюсы и их кратности) функции f в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, а сами аппроксимации представляют собой конструкцию, реализующую продолжение ряда в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$. В частности, эти рациональные дроби *восстанавливают дивизор полюсов* функции f вида (3) в области D . Как хорошо известно, это замечательное свойство аппроксимаций Паде основано на том, что *все их полюсы “свободны”* и определяются только условием максимального касания в бесконечно удаленной точке.

Естественным продолжением исследований А.А. Гончара стала работа Е.А. Рахманова [7], где был рассмотрен случай, когда носитель меры имеет *лакуны*. Точнее, в [7] получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА В. Пусть носитель E меры μ состоит из нескольких отрезков, а сама мера имеет вид $d\mu(x) = s(x) dx$, где весовая функция $s(x) \geq 0$ на E и удовлетворяет условию Сегё; $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(E)$, $r(\infty) = 0$. Тогда диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ сходятся по (логарифмической) емкости к $f = \hat{\mu} + r$ внутри $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$.

Из этого результата вытекает, что каждый полюс f в $\mathbb{C} \setminus E$ притягивает *по крайней мере* столько полюсов $[n/n]_f$, какова его кратность. Метод же доказательства позволяет сделать следующий важный вывод: *единственным препятствием к равномерной сходимости всей последовательности $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ является “неопределенное” поведение некоторых из полюсов $[n/n]_f$ (нулей $Q_n(z; f)$)*; число таких полюсов с неопределенным поведением не превышает числа лакун. В терминах гармонических мер, соответствующих отрезкам носителя меры, Рахманов получил в [7] систему уравнений, описывающих динамику таких нулей полиномов $Q_n(z; f)$ в зависимости от n .

В случае *одной* лакуны единственное уравнение задает некоторую кривую γ , соединяющую оба отрезка. В этом случае возможен лишь один нуль $\tilde{z}_n$ полинома $Q_n(z; f)$ с неопределенным поведением, который фактически “блуждает” около этой кривой: все предельные точки последовательности $\{\tilde{z}_n\}$ лежат на γ . В “типичной” ситуации *каждая точка γ – предельная точка последовательности $\{\tilde{z}_n\}$* .

ТЕОРЕМА С. Пусть E есть объединение двух непересекающихся отрезков вещественной оси, $E = E_1 \cup E_2$, мера $d\mu(x) = s(x) dx$, где весовая функция $s(x) \geq 0$ на E и удовлетворяет условию Сегё; $f = \hat{\mu} + r$, где $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(E)$, $r(\infty) = 0$. Тогда существует открытая аналитическая дуга $\gamma \subset D$, концы которой принадлежат отрезкам E_1 и E_2 , такая, что

$$[n/n]_f \rightrightarrows f \quad \text{внутри} \quad D \setminus \gamma. \quad (4)$$

Если гармоническая мера $\omega_1(\infty) = \omega(E_1, \infty; D)$ – иррациональное число, то полюсы $[n/n]_f$ всюду плотны на γ ; в противном случае существует конечное множество точек $Z \subset \gamma$ такое, что

$$[n/n]_f \rightrightarrows f \quad \text{внутри} \quad D \setminus Z.$$

Дуга γ зависит только от множества $E = E_1 \cup E_2$ и полюсов функции r (и не зависит от меры μ и вычетов функции r в полюсах).

Дуга γ , вообще говоря, лежит в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \hat{E}$ и есть не что иное, как “половина” ортогональной траектории квадратичного дифференциала на двулистной эллиптической римановой поверхности (подробнее см. § 4). Отметим, что если в условиях этой теоремы $r \equiv 0$, то дуга γ – (конечная) лагуна между отрезками E_1 и E_2 . Как хорошо известно, если в (3) $d\mu > 0$, а $r \equiv 0$, то в случае произвольного числа лагун “блуждающие”³ нули ортогональных полиномов могут располагаться только в лагунах между отрезками. Полученные в [4] (см. также [5; § 4, п. 4.2]) в терминах гармонических мер $\omega_j(\infty) = \omega(E_j, \infty; D)$ составляющих E отрезков E_j ($j = 1, \dots, g+1$, где $g \in \mathbb{N}$ – число лагун) уравнения в совокупности с развитым там же методом, основанным на решении специальной краевой задачи Римана и сингулярного интегрального уравнения, фактически означают, что в типичном случае блуждающие нули всюду плотны в лагунах (см. также [8], где близкие результаты доказаны с помощью классического аппроксимационного метода Бернштейна–Сегё). Тем самым, в этом частном случае аналог теоремы С справедлив для произвольного $g \in \mathbb{N}$, а кривые γ_j – лагуны между отрезками.

В общем случае для произвольного числа лагун непосредственно из уравнений Рахманова не удалось извлечь явного описания динамики блуждающих нулей полиномов $Q_n(z; f)$. В частности, оставался открытым вопрос о том, как устроено множество предельных точек полюсов аппроксимаций Паде, возможно ли в общем случае такое же простое геометрическое описание этого множества, как полученное Рахмановым при $g = 1$.

Оказалось, что в общем случае множество предельных точек нулей ортогональных полиномов $Q_n(z; f)$ устроено довольно сложно и не имеет такого прозрачного геометрического описания, как при $g = 1$. Соответствующий результат отрицательного характера установлен в настоящей работе для случая $g = 2$ (см. § 5): показано, что множество предельных точек, вообще говоря, “двумерно”. Однако при некоторых дополнительных условиях это множество допускает аналитическое описание в терминах некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений (“обобщенной системы Дубровина”). Точнее, в настоящей работе получены интегрируемые дифференциальные уравнения (эквивалентные уравнениям Рахманова), описывающие (см. теоремы 1 и 3) динамику блуждающих нулей полиномов $Q_n(z; f)$ в случае произвольного (конечного) числа лагун, а также динамику “свободных” (т.е. дополнительных к $(n+1)$ -му нулю в бесконечно удаленной точке) нулей функций остатка $R_n(z; f)$. В частности, для случая одной лагуны (т.е. при $g = 1$) показано, что результат Рахманова сохраняется, если положить $r \equiv 0$, но зато допустить комплексные меры μ и, тем самым, ограничиться голоморфными функциями. При этом и в том и в другом случае соответствующая кривая γ – часть ортогональной траектории некоторого квадратичного дифференциала. В случае же произвольного числа лагун естественным образом возникают некоторые “семейства” кривых – обобщения траекторий квадратичных дифференциалов на римановых поверхностях, – которые содержат интересные нас траектории. Структуру таких множеств удастся пока изучить лишь при некоторых дополнительных ограничениях на “начальные условия”, а также для случая $g = 2$. Но уже полученных результатов оказывается достаточным для того, что-

³По поводу этого термина см. ниже п. 2.

бы сделать принципиальный вывод: множество предельных точек, вообще говоря, двумерно, т.е. аналог теоремы С не имеет места.

Отметим, что подобные исследования тесно связаны с результатами *обратного* характера, в которых на основании той или иной информации об асимптотическом поведении полюсов диагональных аппроксимаций Паде требуется сделать определенные выводы о свойствах аналитического продолжения заданной функции. Первым результатом в этом направлении для диагональных аппроксимаций Паде является теорема Гончара [9]. Наиболее общий *прямой* результат о сходимости таких аппроксимаций – это теорема Шталя [10], из которой, в частности, вытекает сходимость по емкости диагональных аппроксимаций Паде для произвольной *алгебраической* функции вне некоторой “симметричной” системы разрезов S , в дополнении к которой выделяется однозначная ветвь исходного лорановского разложения. Непосредственно из этого результата Шталя вытекает, что каждый полюс f в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ притягивает *по крайней мере* столько полюсов $[n/n]_f$, какова его кратность. Вопрос о том, справедлив ли в этом утверждении “знак равенства”, т.е. восстанавливает ли диагональ Паде алгебраической функции дивизор ее полюсов в D , и составляет фактически задачу обратного характера, в общем случае до сих пор нерешенную. Некоторые результаты в этом направлении получены недавно Шталем [11] и автором [4] для гиперэллиптических функций и их естественных обобщений в ситуации “общего положения”. При этом и в [11], и в [4] эти результаты получены как следствие доказательства (в “общем положении”) хорошо известной гипотезы Бейкера–Гаммеля–Уиллса (см. [12], а также [11] и [13]). После того как Буслаев [14], [15] предъявил гиперэллиптическую функцию рода $g = 2$, опровергающую эту гипотезу (для случая, когда $S \not\subset \mathbb{R}$ и состоит из трех компонент равной гармонической меры), стало ясно, что для исследования задач обратного характера в общем случае надо искать новые подходы. Возможно, предложенные в настоящей работе идеи окажутся в дальнейшем полезными именно с такой точки зрения. В наибольшей степени здесь удалось исследовать случай $g = 2$, хотя даже и в этом случае обратную задачу решить пока не удастся (эллиптическому случаю $g = 1$ предполагается посвятить отдельную работу).

2. Всюду в дальнейшем предполагается, что множество $E \subseteq \mathbb{R}$ состоит из конечного числа (непересекающихся) отрезков, $g \in \mathbb{N}$ – число лакун в E . Пусть $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$, – составляющие множество E отрезки, $h(z) = z^{2g+2} + \dots \in \mathbb{R}[z]$ – полином степени $2g+2$ с нулями в точках e_j – концах составляющих отрезков. Через $E'_j = (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, обозначим разделяющие E (открытые) лакуны, E'_{g+1} – “внешняя” лакуна, содержащая бесконечно удаленную точку.

Предполагается, что μ – абсолютно непрерывная комплексная мера на E следующего вида: $d\mu(x) = \rho(x) dx / (\pi \sqrt{-h(x+i0)})$, где под $\sqrt{-h(x+i0)}$, $x \in E$, понимаются “верхние” граничные значения на E той однозначной в D ветви корня, которая определяется условием $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in D$; комплекснозначная функция $\rho(x) \neq 0$ и вещественно аналитична на E (как функция вещественной переменной $x \in E$). Тем самым, $\hat{\mu}$ допускает следующее представление:

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_E \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x+i0)}} \frac{dx}{z-x} = \frac{1}{\pi i} \int_E \frac{\rho(x)}{\sqrt{h(x+i0)}} \frac{dx}{x-z} =: \hat{\rho}(z; h). \quad (5)$$

Функцию ρ в дальнейшем будем называть *допустимым весом*; в частном случае, когда $\rho(x)$ – рациональная функция переменной x ($\rho \in \mathbb{C}(x)$), не имеющая на E ни

нулей, ни полюсов, $\widehat{\rho}(\cdot; h)$ – гиперэллиптическая функция, определенная на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рода g , заданной уравнением $w^2 = h(z)$:

$$\widehat{\rho}(z; h) = r_1(z) + r_2(z)w,$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$; тем самым, $\widehat{\rho}(\cdot; h) \in \mathbb{C}(z, w)$. В дальнейшем, допуская некоторую вольность в обозначениях, при записи функции вида (5) ссылку на h будем, как правило, опускать и писать $\widehat{\rho}(z)$ или просто $\widehat{\rho}$. Наконец, отметим, что в соответствии с выбранной нами ветвью корня марковскому случаю положительной меры μ соответствует такой допустимый вес ρ , для которого $i\rho/\sqrt{h} > 0$ на E . Такой вес ρ будем называть *марковским*. В классическом случае $g = 0$ и $E = [-1, 1]$ полиномы Q_n ортогональны на E относительно веса $\rho(x)/\sqrt{1-x^2}$, где $\rho > 0$ – так называемый тригонометрический вес [16], а $d\mu(x) = \rho(x) dx/(\pi\sqrt{1-x^2})$ и

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{z-x}.$$

Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно неупорядоченного набора точек $\mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{z}_g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (т.е. относительно дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$):

$$\dot{z}_k = - \frac{w(\mathbf{z}_k)}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)} \int_{e_{2g+2}}^{\infty} \frac{\prod_{j \neq k} (x - z_j)}{w(x)} dx, \quad k = 1, \dots, g, \quad (*)$$

где $\dot{z}_k = dz_k/dt$, $\mathbf{z} = (z, \pm\sqrt{h(z)})$, $w(\mathbf{z}) = \pm\sqrt{h(z)}$, e_{2g+2} – крайняя правая точка множества E (предполагается, что путь интегрирования в $(*)$ – часть вещественной оси $[e_{2g+2}, +\infty)$; подробнее по поводу обозначений см. § 2).

Подмножество поверхности $\mathfrak{R}$, которое заполняют точки $\mathbf{z}_j(t)$, составляющие дивизор $d(t)$ и удовлетворяющие $(*)$, зависит, вообще говоря, от начальных условий $\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{z}_j(0)$. В частности, если все $\mathbf{z}_j(0)$ лежат в лакунах между отрезками, то и все $\mathbf{z}_j(t)$ принадлежат этим же лакунам. Начальные условия всегда можно задать так, что соответствующий дивизор $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$ неспециальный. В дальнейшем мы будем фактически предполагать, что дивизор начальных условий d^0 таков, что и при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ дивизор

$$d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t) \text{ – неспециальный, где } d(0) = d^0; \quad (6)$$

здесь $\mathbf{z}_j(t)$ – решения $(*)$. Такие начальные условия будем называть *правильными* (соответственно, дивизор d^0 – *правильным*; см. § 2, п. 3).

Обсудим это ограничение: при $g = 1$ (6) выполнено всегда; при $g = 2$, как будет показано ниже в § 5, условие (6) почти всегда выполняется и может быть задано явно в терминах x -координат дивизора начальных условий d^0 . Наконец, при произвольном $g \geq 3$ выбор таких начальных условий, что $\mathbf{z}_j^0 \in E'_j$, приводит к тому, что и при всех $t \in \mathbb{R}_+$ точки $\mathbf{z}_j(t) \in E'_j$. Следовательно, соответствующий дивизор $d(t)$ всегда неспециальный. Пока не удастся выяснить, сохраняется ли для $g \geq 3$ свойство (6) при каких-то еще начальных условиях, кроме указанных (подробнее см. § 2).

Обозначим через $D^{(1)}$ “первый” (открытый) лист римановой поверхности $\mathfrak{R}$, состоящий из точек $\mathbf{z} = (z, \sqrt{h(z)})$, $z \notin E$, а через $D^{(2)}$ – “второй” лист: $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, если $\mathbf{z} = (z, -\sqrt{h(z)})$; в соответствии с таким определением для точек $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$ мы будем использовать обозначения $z^{(1)}, z^{(2)}$ с явным указанием листа или обозначение $\mathbf{z} = (z, \pm)$. Имеем $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$, где $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, а pr – каноническая проекция $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$: $\text{pr}(z, \pm) = z$. Тем самым, $\mathfrak{R} = D^{(1)} \cup L \cup D^{(2)}$, где $L = E^+ \cup E^-$.

Пусть Γ_j – траектория, которую описывает на $\mathfrak{R}$ j -я точка $\mathbf{z}_j(t)$ с начальными условиями $\mathbf{z}_j(0) = \mathbf{z}_j^0$ под “действием” динамической системы (*). Тогда Γ_j – (необязательно замкнутая) аналитическая кривая на $\mathfrak{R}$, одна часть $\Gamma_j^{(1)}$ которой лежит на первом листе, а другая $\Gamma_j^{(2)}$ – на втором листе. Проекция Γ_j кривой Γ_j на $\overline{\mathbb{C}}$ – вообще говоря, незамкнутая кривая. Расположение Γ_j на $\mathfrak{R}$ зависит от начальных условий $\mathbf{z}_j^0$; в частности, если все $\mathbf{z}_j(0)$ лежат в лакунах между отрезками, то Γ_j совпадают с замыканиями этих лакун, т.е. $\Gamma_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

Одним из основных результатов настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть допустимый комплекснозначный вес $\rho(x) \neq 0$ имеет вид $\rho = 1/p$, где $p \in \mathbb{C}[z]$ ($p(x) \neq 0$ на E), $f = \hat{\rho}$, d^0 – начальные условия, соответствующие функции ρ , и дивизор d^0 правильный.

1) Если для некоторой последовательности $\Lambda_1 \subset \mathbb{N}$ и некоторого $j \in \{1, \dots, g\}$ все точки $\mathbf{z}_j(n) = z_j^{(1)}(n) \in D^{(1)}$ при $n \in \Lambda_1$, то для $n \in \Lambda_1$ функция остатка $R_n(z; \hat{\rho})$ имеет нуль в точке $z_j(n) \in D$.

2) Если для некоторой последовательности $\Lambda_2 \subset \mathbb{N}$ и некоторого $j \in \{1, \dots, g\}$ все точки $\mathbf{z}_j(n) = z_j^{(2)}(n) \in D^{(2)}$ при $n \in \Lambda_2$, то для $n \in \Lambda_2$ полином $Q_n(z; \hat{\rho})$ имеет нуль $\tilde{z}_n$, который бесконечно близок к точке $z_j(n) \in D$ при $n \rightarrow \infty$.

Указанным закономерностям подчиняется асимптотическое поведение всех нулей функций R_n и Q_n , имеющих предельные точки в $D \setminus \{\infty\}$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 поведение всех блуждающих нулей пары (Q_n, R_n) подчиняется динамической системе (*). Как уже отмечалось, при $\rho = 1/p$ функция $f = \hat{\rho}$ гиперэллиптическая на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Тем самым, в условиях теоремы 1 удастся свести вопрос о сходимости последовательности $[n/n]_f$ для гиперэллиптических функций вида $f = \widehat{1/p}$ к вопросу о строении множества предельных точек тех решений системы (*), которые соответствуют дискретным значениям $t = n$.

В следующей теореме устанавливаются некоторые свойства системы (*).

ТЕОРЕМА 2. Динамическая система (*):

1) интегрируется в явном виде преобразованием Абеля; решения системы – условно периодические функции переменнй t с периодами $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$;

2) приводит к системе⁴ уравнений Рахманова

$$\sum_{j=1}^g \varepsilon_j \omega_k(z_j) = (g - 2t) \omega_k(\infty) - 2\rho_k \pmod{2}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (7)$$

описывающей движение дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$ по $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_g$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от $\mathbf{z}_j = (z_j, \pm 1)$ (подробнее см. §3, п. 4);

⁴Приводимые ниже уравнения составляют лишь часть уравнений Рахманова.

3) в пределе при $e_{2g+2} \rightarrow \infty$ переходит в систему уравнений Дубровина

$$\dot{z}_k = \pm \frac{2\sqrt{-h(z_k)}}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad k = 1, \dots, g,$$

описывающую динамику нулей конечнозонных решений уравнения Шрёдингера.

В “типичном” случае (а именно если $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы) множество $(z_1(n), \dots, z_g(n))$ всюду плотно на $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_g$. Тем самым, множество блуждающих нулей $R_n(z; f)$ всюду плотно на $\text{pr } \Gamma^{(1)}$, а множество блуждающих нулей $Q_n(z; f)$ — на $\text{pr } \Gamma^{(2)}$, где $\Gamma = \bigcup_{j=1}^g \Gamma_j$.

Таким образом, переход от вещественнозначных весов к комплекснозначным приводит к тому же принципиально новому эффекту, который в эллиптическом случае $g = 1$ был обнаружен Рахмановым при рациональном возмущении марковской функции: блуждающие нули ортогональных многочленов сходят с лакун и располагаются около некоторого множества в комплексной плоскости. Вполне вероятно, что изучение строения этого множества позволит в дальнейшем приблизиться к решению задач обратного характера.

Как хорошо известно [17], гармоническая мера $\omega(\ell, z; G)$ дуги $\ell \subset \partial G$ в точке z области $G \subset \mathbb{C}$ относительно границы ∂G имеет следующий геометрический смысл: $\omega(\ell, z; G)$ равна деленному на 2π углу, под которым из точки $z \in G$ “видна” дуга ℓ . Тем самым, уравнения Рахманова (7) означают, что совокупность точек $(z_1(n), \dots, z_g(n))$ (т.е. дивизор $d(t) = z_1(n) + \dots + z_g(n)$) движется по $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_g$ с постоянной “угловой скоростью” (подробнее см. § 3).

Система (*) доставляет некоторую информацию о динамике блуждающих нулей полиномов Q_n и функций остатка R_n и в общем случае, т.е. для функций вида (3), в следующем смысле. Заданной паре ρ, r соответствуют некоторые начальные условия d^0 (см. § 2, п. 5); как и ранее, если дивизор d^0 правильный, то такое соответствие однозначно. Так будет, например, в случае, если вес ρ марковский, а $r \in \mathbb{R}(z) \cap \mathcal{H}(E)$: тогда все $z_j(0)$ лежат в лакунах между отрезками.

Положим $\Gamma_j^\circ = \Gamma_j \setminus L$, где $L = E^+ \cup E^-$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho(x) \neq 0$ — допустимый (комплекснозначный вещественно аналитический) вес на E , функция $f = \hat{\rho} + r$, где $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(E)$, $r(\infty) = 0$, d^0 — начальные условия, соответствующие паре функций (ρ, r) , и дивизор d^0 правильный. Рассмотрим последовательность $\{(z_1(n), \dots, z_g(n))\} \subset \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_g$, $n \in \mathbb{N}$.

1°. Если для некоторой последовательности $\Lambda_1 \subset \mathbb{N}$ и некоторого $j \in \{1, \dots, g\}$ множество $\{(z_1(n), \dots, z_j(n), \dots, z_g(n)), n \in \Lambda_1\} \Subset \Gamma_1^\circ \times \dots \times \Gamma_j^{(1)} \times \dots \times \Gamma_g^\circ$, то для $n \in \Lambda_1$ функция остатка R_n имеет блуждающий нуль $\hat{z}_n$, который бесконечно близок к $z_j(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

2°. Если для некоторой последовательности $\Lambda_2 \subset \mathbb{N}$ и некоторого $j \in \{1, \dots, g\}$ множество $\{(z_1(n), \dots, z_j(n), \dots, z_g(n)), n \in \Lambda_2\} \Subset \Gamma_1^\circ \times \dots \times \Gamma_j^{(2)} \times \dots \times \Gamma_g^\circ$, то для $n \in \Lambda_2$ полином Q_n имеет блуждающий нуль $\tilde{z}_n$, который бесконечно близок к $z_j(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, при изучении явления блуждающих нулей естественно рассматривать пару функций (Q_n, R_n) , $n \in \mathbb{N}$.

Следствия к теоремам 1 и 3 приведены соответственно в § 3 и § 4.

Подчеркнем, что описание асимптотического поведения нулей Q_n и R_n с помощью системы (*) оказалось возможным благодаря развитому в [4] (см. также [5]) подходу, в рамках которого асимптотические формулы для Q_n и R_n даются в терминах пары функций (φ_n, ψ_n) , решающих краевую задачу Римана на $L = E^+ \cup E^-$ с заданной граничной функцией ρ , дивизоры (нулей и полюсов) которых удовлетворяют определенным требованиям. Точнее, при подходящей нормировке имеем: $Q_n \sim \varphi_n$, $R_n \sim \psi_n/w$ равномерно внутри D .

Наконец, обсудим терминологию. В теории аппроксимаций Паде те полюсы рациональных функций $[n/n]_f$ (а тем самым, и нули ортогональных полиномов $Q_n(z; f)$), которые “не соответствуют” особенностям функции f , принято называть “spurious”⁵ (см. [13] и имеющиеся там дальнейшие ссылки). Однако фактически это лишь качественная характеристика *ситуации*, возникающей по некоторой подпоследовательности, а вовсе не конкретного объекта. Действительно, говорят [13], что *по подпоследовательности* Λ *имеется “spurious”-полюс* (иначе говоря, “блуждающий” полюс) *аппроксимаций Паде* $[n/n]_f$, *если при* $n \in \Lambda$ *по крайней мере* k *полюсов рациональных функций* $[n/n]_f$ *стремятся к некоторой точке* $a \in D$, *в то время как кратность полюса* f *в этой точке* $\leq k - 1$. При этом нет никакой возможности отличить “spurious”-полюсы от остальных. Введение нового термина не решает проблемы характеристики таких полюсов, но в отличие от “spurious” этот термин не носит негативного характера, а наоборот, подчеркивает некоторую закономерность в поведении этих “лишних” полюсов. Кроме того, установленная здесь при некоторых ограничениях тесная связь таких полюсов с решениями уравнения (*) позволяет надеяться на то, что в будущем будет найдено их полное описание.

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [18].

3. Как хорошо известно, впервые вопрос об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на нескольких отрезках вещественной прямой, был поставлен Н. И. Ахиезером в [19]. В этой работе, а также в [20] им фактически были получены явные (в терминах абелевых дифференциалов на гиперэллиптической римановой поверхности) выражения для функций второго рода R_n и формулы асимптотики отношения таких функций, соответствующих двум различным весам вида “единица делить на полином” (ср. с условиями теоремы 1). Явные формулы для полиномов, ортогональных относительно таких специальных весов на отрезке $[-1, 1]$, лежат в основе классического аппроксимационного метода Бернштейна–Сегё, используемого при доказательстве формулы сильной асимптотики ортогональных полиномов (в классическом случае $g = 0$, а мера μ имеет вид $d\mu(x) = \rho(x) dx / (\pi \sqrt{1 - x^2})$). В [21] Н. И. Ахиезер фактически указал и метод изучения асимптотики при $n \rightarrow \infty$ тех нулей ортогональных многочленов, которые располагаются в лакунах между отрезками, — это проблема Якоби обращения абелевых интегралов. Хотя в [19]–[21] рассматривается ортогональность на отрезках вещественной оси относительно марковских весов, предложенная Ахиезером методика оказалась по существу *комплексной*. Это наблюдение позволило Дж. Наттоллу [22], [23] существенно развить подход Ахиезера при изучении вопросов сходимости диагональных аппроксимаций Паде для произвольных гиперэллиптических функций и их естественных обобщений: знаменатели таких аппроксимаций —

⁵ Общепринятого русского термина пока не существует.

полиномы, *неэрмитово* ортогональные на некоторых дугах комплексной плоскости, обладающих определенным свойством “симметрии”.

Наиболее общие результаты о сильной асимптотике многочленов, *эрмитово* ортогональных на системе кривых и дуг в $\mathbb{C}$ относительно вещественного веса $\rho \geq 0$, удовлетворяющего условию Сегё, были получены Видомом [24]. Ответ дан им *явно* в терминах многозначных функций, определяемых геометрией заданной многосвязной области (это – гармонические меры, комплексные функции Грина, функции Неймана). Кроме того, в качестве параметров в ответе фигурируют решения проблемы обращения Якоби. Эти параметры, как отметил Видом (см. [24; § 6, с. 172]), могут быть стандартным образом описаны как нули θ -функции Римана. В дальнейшем такая идеология, состоящая в редукции проблемы обращения Якоби, соответствующей задаче об асимптотике ортогональных многочленов, к алгебраическим уравнениям, порождаемым θ -функцией, была существенно развита А. И. Аптекаревым [25], а также, в случае полиномов, ортогональных на нескольких отрезках, в [26] и [27]. Вместе с тем, насколько нам известно, из полученных на этом пути асимптотических формул (см. [25; теорема 1], [26; теорема 1.34]) так и не было извлечено какого-либо конкретного описания динамики нулей ортогональных полиномов Q_n , расположенных в лакунах между отрезками.

В настоящей работе мы придерживаемся подхода Ахиезера–Наттолла к изучению динамики блуждающих нулей ортогональных полиномов, в основе которого – непосредственное исследование проблемы Якоби обращения абелевых интегралов.

Отметим, что именно на таком пути в [4] (см. также [5]) доказано, что в *типичной ситуации* (точнее, если гармонические меры $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ отрезков носителя рационально независимы) множество всех предельных точек нулей Q_n совпадает с $\hat{E}$. С другой стороны, по некоторой подпоследовательности Λ нули ортогональных многочленов Q_n не имеют предельных точек в лакунах между отрезками; тем самым, по этой подпоследовательности диагональные аппроксимации Паде $\{[n/n]_{\hat{\rho}}\}_{n \in \Lambda}$ сходятся к функции $\hat{\rho}$ равномерно внутри $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, а не только внутри $\overline{\mathbb{C}} \setminus \hat{E}$ (как в теореме Маркова). Аналогичный результат о существовании (в типичной ситуации) равномерно сходящейся в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ подпоследовательности аппроксимаций Паде получен в [4] и для функций вида $f = \hat{\rho} + r$. Тем самым, показано, что в такой ситуации *обратная задача имеет положительное решение*. Наконец, хорошо известная работа Дюма [28] (см. также [29]) целиком основана на исследовании проблемы Якоби обращения эллиптических интегралов, притом что в этом случае функция остатка R_n – это эллиптическая функция, которая стандартным образом представляется в виде отношения (четырех) θ -функций Якоби.

§ 2. Основные определения и вспомогательные результаты

1. Напомним, что множество $E \in \mathbb{R}$ состоит из конечного числа отрезков $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$, $e_1 < \dots < e_{2g+2}$; $h(z) = z^{2g+2} + \dots$ – полином с нулями в точках $\{e_k\}$. Ветвь корня $\sqrt{h(z)}$ выбрана так, что $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Комплексная мера μ абсолютно непрерывна на E и имеет вид $d\mu = \rho(x) dx / (\pi \sqrt{-h(x+i0)})$, где под $\sqrt{-h(x+i0)}$, $x \in E$, понимаются “верхние” граничные значения на E выбранной ветви корня, комплекснозначная функция $\rho(x) \neq 0$ и вещественно аналитична на E . Тем самым, $\hat{\mu}$ допускает представление (5).

Рассмотрим (вещественную) гиперэллиптическую риманову поверхность $\mathfrak{R}$: $w^2 = h(z)$ рода g , которая реализована как двулистное разветвленное накрытие римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему E_j^+ и нижнему E_j^- берегам отрезков E_j . Таким образом, отрезкам E_j соответствуют на $\mathfrak{R}$ замкнутые аналитические (в комплексной структуре $\mathfrak{R}$) жордановы кривые L_j , $j = 1, \dots, g+1$, — циклы на $\mathfrak{R}$; положим $L = \bigcup_{j=1}^{g+1} L_j$.

Приведем некоторые сведения о гиперэллиптических поверхностях, которые понадобятся нам в дальнейшем. В обозначениях и терминологии мы здесь придерживаемся в основном [30] (см. также [31]–[33]).

Каждой точке $z \neq e_k$ на $\overline{\mathbb{C}}$ соответствуют две точки $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$ и $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$ на $\mathfrak{R}$. Пусть $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ — два (открытых) листа поверхности, склеенные по L , $\mathfrak{R} = D^{(1)} \cup L \cup D^{(2)}$; аналитическая функция $w = w(\mathbf{z})$, где $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $z^{(2)}$, однозначна на $\mathfrak{R}$: $w(\mathbf{z}) = \sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(1)}$ и $w(\mathbf{z}) = -\sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(2)}$. Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем часто писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^+(x) = \sqrt{h(x+i0)}$, $x \in E$. Каноническая проекция $\text{pr}: \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\text{pr}(\mathbf{z}) = z$, в частности $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$, $\text{pr } L = E$. Точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ на $\mathfrak{R}$ будем называть (взаимно) *сопряженными*; иногда мы будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, \pm)$.

Выберем ориентацию кривых $L_j = E_j^+ \cup E_j^-$ так, что при обходе по L_j область $D^{(1)}$ остается слева, а $D^{(2)}$ — справа. Примем ориентированные кривые L_j , $j = 1, \dots, g$, за a -циклы $\mathbf{a}_j$ на $\mathfrak{R}$ и стандартным образом [30] дополним их b -циклами $\mathbf{b}_j$ до базиса гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1, \dots, g}$ на $\mathfrak{R}$. Пусть $\{d\Omega_k\}$ — соответствующий a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов: $\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, g$. Матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1, \dots, g}$, $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$ — b -периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\text{Im } B_{jk}\| > 0$ (отметим, что в нашем случае все $B_{jk} \in i\mathbb{R}$). Функции $\Omega_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+2}}^{\mathbf{z}} d\Omega_k$ определены на $\mathfrak{R}$ однозначно по модулю их a - и b -периодов; функции $\Omega'_k(\mathbf{z}) = p_k(z)/w(\mathbf{z})$ — однозначные мероморфные функции на $\mathfrak{R}$, $p_k \in i\mathbb{R}[z]$, $\deg p_k = g$.

Если в $D^{(1)}$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F^+(\zeta)$ понимаются ее предельные значения при $\mathbf{z} \rightarrow \zeta \in L$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F^-(\zeta)$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$ в $\mathbb{R}^g$: $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и образуют базис в $\mathbb{C}^g$. Факторпространство $\mathbb{C}^g / \{\mathbf{N} + \mathbf{B}\mathbf{M}\}$ по целочисленной решетке, $\mathbf{N}, \mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$ -мерным вещественным тором $\mathbb{T}^{2g}$ и называется многообразием Якоби $\mathfrak{J}\mathfrak{a}\mathfrak{c} \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{N} + \mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $\mathbf{N}, \mathbf{M} \in \mathbb{Z}^g$; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать просто $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$. Вещественные числа $x_j = (\mathbf{x})_j, y_j = (\mathbf{y})_j \in [0, 1)$, $j = 1, \dots, g$, будем называть соответственно x - и y -координатами вектора $\mathbf{v}$ в многообразии Якоби (точнее, класса $[\mathbf{v}]$ всех эквивалентных $\mathbf{v}$ векторов).

Пусть $\mathbf{z}_0$ – некоторая фиксированная точка⁶ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\mathbf{z}) = (\Omega_1(\mathbf{z}), \dots, \Omega_g(\mathbf{z}))$ с координатами

$$\Omega_j(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}} d\Omega_j \pmod{\text{периодов}}, \quad j = 1, \dots, g,$$

определяет отображение Абеля $A: \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$ (подразумевается, что путь интегрирования – один и тот же для всех j). Неупорядоченные наборы точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$, $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g -ю симметрическую степень $S^g \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (A_1, \dots, A_g)$ с координатами

$$A_k = A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

также называется отображением Абеля $A: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$. Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Jac } \mathfrak{R}$, то задача нахождения неупорядоченного набора точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$, $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, для которого

$$A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g,$$

называется проблемой Якоби обращения абелевых интегралов или просто *проблемой обращения Якоби*. Хорошо известно, что проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом.

2. Для любых двух различных точек $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и -1 ; такой дифференциал называется *нормальным*. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал *a -нормированным* абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$; для a -нормированного дифференциала $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ будем иногда для краткости использовать обозначение $d\Omega(\mathbf{z})$ или просто $d\Omega$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение $dG(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$, предполагая при этом, что вычеты в точках $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ равны соответственно -1 и 1 . К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i\tilde{g}_D(z, \infty)$ (здесь $\tilde{g}_D(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$), соответствующей области D . Функция $G_D(z, \infty)$ многозначна в D и

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_{2g+2}}^z \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D,$$

где $P_g(z) = P_g(z; h) = z^g + \dots \in \mathbb{R}[z]$ – полином, нули которого лежат в лакунах E'_j , $j = 1, \dots, g$. Дифференциал $dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = P_g(z) dz/w(\mathbf{z})$ определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и 1 .

⁶ В дальнейшем мы, как правило, выбираем $\mathbf{z}_0 = e_{2g+2}$.

Следовательно, функция $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \int_{e_{2g+2}}^{\mathbf{z}} dG$ — однозначная гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}\}$, линия уровня которой $\{\mathbf{z} : u(\mathbf{z}) = 0\}$ совпадает с L , а $g_D(z, \infty) = u(z^{(1)})$, $z \in D$. Как известно, a -периоды дифференциала комплексной функции Грина связаны с гармоническими мерами $\omega_j(\infty) = \omega(E_j, \infty; D)$ следующим образом: $\oint_{\mathbf{a}_k} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = -2\pi i \omega_k(\infty)$. Кроме того, из вещественности гиперповерхности $\mathfrak{R}$ вытекает, что $\oint_{\mathbf{b}_k} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0$. В дальнейшем нам понадобится следующее соотношение [4; (26)] между дифференциалом dG и a -нормированным дифференциалом $d\Omega$:

$$dG + 2\pi i \sum_{j=1}^g \omega_j(\infty) d\Omega_j + d\Omega = 0. \quad (8)$$

Справедливость (8) следует непосредственно из того, что слева в этой формуле стоит голоморфный абелев дифференциал с нулевыми a -периодами.

Рассеченная риманова поверхность $\tilde{\mathfrak{R}}$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением сечений по базисным циклам $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, k = 1, \dots, g$, поверхности: $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \setminus (\bigcup_{k=1}^g \mathbf{a}_k \cup \bigcup_{k=1}^g \mathbf{b}_k)$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ связна (переход с одного листа на другой осуществляется через L_{g+1}) и односвязна. Для b -периодов a -нормированного абелева дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ справедливо следующее соотношение Римана [32]:

$$\int_{\mathbf{b}_k} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_k(\zeta) = -2\pi i (\Omega_k(\mathbf{z}_2) - \Omega_k(\mathbf{z}_1)), \quad j = 1, \dots, g, \quad (9)$$

где интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ и лежащему в $\mathfrak{R}$. Используя (9), вычислим b -периоды левой части (8). Получим следующее соотношение:

$$2\Omega_k(\infty^{(2)}) = \sum_{j=1}^g \omega_j(\infty) B_{kj} \quad (10)$$

(напомним, что $\Omega_k(e_{2g+2}) = 0$ в $\tilde{\mathfrak{R}}$).

3. Дивизором d на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть формальный символ $d = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \nu_2 \mathbf{z}_2 + \dots + \nu_m \mathbf{z}_m$, где $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, $\nu_j \in \mathbb{Z}$; $|d| = \nu_1 + \dots + \nu_m$ — степень дивизора d ; если точки $\mathbf{z}_j$ попарно различны и все $\nu_j > 0$, то дивизор d *целый*. Произвольной функции F , мероморфной на $\mathfrak{R}$ (тем самым, $F \in \mathbb{C}(z, w)$), т.е. $F = r_1 + r_2 w$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$, сопоставим дивизор (F) ее нулей и полюсов: $(F) = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \nu_\ell \mathbf{z}_\ell - \mu_1 \zeta_1 - \dots - \mu_m \zeta_m$, где $\mathbf{z}_j, \zeta_j \in \mathfrak{R}$ — соответственно нули и полюсы F , а $\nu_j, \mu_j \geq 0$ — их кратности; такие дивизоры называются *главными*. По теореме Абеля дивизор $d = \nu_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \nu_\ell \mathbf{z}_\ell - \mu_1 \zeta_1 - \dots - \mu_m \zeta_m$ главный тогда и только тогда, когда $|d| = 0$ и для всех $k = 1, \dots, g$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \nu_j \Omega_k(\mathbf{z}_j) - \sum_{j=1}^m \mu_j \Omega_k(\zeta_j) = 0 \quad (\text{mod периодов})$$

(здесь пути интегрирования — одни и те же для всех k). Два дивизора d_1 и d_2 *эквивалентны*, если их разность $d_1 - d_2$ — главный дивизор. Эквивалентные дивизоры

и только они являются решением проблемы обращения Якоби для одного и того же вектора из $\text{Jac } \mathfrak{R}$. Дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ *специальный*, если соответствующая проблема обращения Якоби имеет неединственное решение; тем самым, он имеет нетривиальные эквивалентные дивизоры.

Как известно (см., например, [34] и [22]), два целых дивизора степени g , $d_1 = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ и $d_2 = \zeta_1 + \dots + \zeta_g$, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности рода g , эквивалентны тогда и только тогда, когда $d_1 = t_1^{(1)} + t_1^{(2)} + \dots + t_{2m}^{(1)} + t_{2m}^{(2)} + \mathbf{z}_{2m+1} + \dots + \mathbf{z}_g$, $d_2 = \tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)} + \dots + \tau_{2m}^{(1)} + \tau_{2m}^{(2)} + \mathbf{z}_{2m+1} + \dots + \mathbf{z}_g$, $m \leq g/2$. Тем самым, имеется полное описание специальных дивизоров степени g . Непосредственно отсюда вытекает следующее свойство отображения Абеля $A: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$. Пусть $\mathcal{U} \subset S^g \mathfrak{R}$ — множество, устроенное таким образом: $\mathcal{U}$ представляет собой (неупорядоченное) произведение g непересекающихся компактов $\mathcal{U}_j$ в $D^{(1)}$, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$ при $j \neq k$. Тогда $A^{-1}(A(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ и ограничение A на $\mathcal{U}$ — биекция.

Будем говорить, что дивизор $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$ *x -правильный* или просто *правильный*, если выполняется следующее условие: *всякий дивизор с такими же x -координатами неспециальный*. Иначе говоря, множество

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = \mathbb{D}(x^0) &= \left\{ d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g : \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \right. \\ &\quad \left. \equiv x_k^0 + \sum_{j=1}^g \tau_j B_{kj}, \tau_j \in [0, 1), k = 1, \dots, g \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

состоит из неспециальных дивизоров. Существование таких x -координат для произвольного $g \in \mathbb{N}$ вытекает из полученного выше общего вида специальных дивизоров степени g и следующих соображений. Если $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ таков, что все $z_j \in E'_j$, то соответствующие x -координаты вычисляются по формулам $x_k = (g - k + 1)/2 \pmod{1}$ (см. [4], [5]). Все такие дивизоры неспециальные и лишь они имеют указанные x -координаты. Для случая $g = 2$ этот анализ можно существенно уточнить. Действительно, при $g = 2$ все специальные дивизоры имеют вид $d = z^{(1)} + z^{(2)}$. Следовательно, $\Omega_k(z^{(1)}) + \Omega_k(z^{(2)}) \equiv 0$, $k = 1, 2$, т.е. для специального дивизора x -координаты соответствующего вектора в $\text{Jac } \mathfrak{R}$ всегда равны нулю. Тем самым, если при $g = 2$ в (11) какая-либо из величин $x_k^0 \neq 0$, то это множество состоит только из неспециальных дивизоров. В таком случае для каждого $d \in \mathbb{D}$ имеем $d = d(\tau_1, \tau_2)$, а соответствующие $z_j = \psi_j(\tau_1, \tau_2)$, где ψ_j — вещественно аналитические функции переменных τ_1, τ_2 .

4. Предположим, что на $\mathfrak{R} \setminus L$ задана (кусочно) мероморфная функция $F(\mathbf{z})$, имеющая полюсы только в бесконечно удаленных точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ каждый порядка $\leq g$, предельные значения которой на L существуют и удовлетворяют условию:

$$F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = \chi(\zeta), \quad \zeta \in L, \quad (12)$$

где функция χ голоморфна на L . Тогда с помощью мероморфного абелева дифференциала

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - \mathbf{z}} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (13)$$

функция $F(\mathbf{z})$ восстанавливается по граничным условиям (12) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \chi(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p(z), \quad \mathbf{z} \notin L, \quad (14)$$

где $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p \leq g$, а контур L^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру.

Отметим, что при $\zeta = \zeta^{(1)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $\zeta = \zeta^{(2)}$, $\mathbf{z} = z^{(2)}$ для дифференциала (13) имеем

$$d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)}) = d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} + \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}};$$

а при $\zeta = \zeta^{(2)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$

$$d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} - \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}, \quad (15)$$

т. е. в этом случае при $\zeta = z$ дифференциал особенности не имеет.

5. Поясним теперь, что мы понимаем под “начальными условиями, задаваемыми допустимым весом $\rho \neq 0$ и рациональной функцией $r \in \mathbb{C}(z)$ ”.

1) Рассмотрим сначала случай, когда $r \equiv 0$, а $\rho = 1/p$, где $p \in \mathbb{C}[z]$. Пусть $p(z) = \prod_{s=1}^l (z - a_s)$, $a_s \in D$. Пусть $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_g^0)$ – вектор с компонентами

$$\xi_k^0 \equiv \sum_{s=1}^l (\Omega_k(a_s^{(2)}) - \Omega_k(\infty^{(2)})) - g\Omega_k(\infty^{(2)}).$$

Соответствующий дивизор $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$, удовлетворяющий проблеме обращения Якоби $\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j^0) \equiv \xi_k^0$, $k = 1, \dots, g$, представляет собой начальные условия: $d(0) = d^0$. Таким образом, x -координаты вектора начальных условий ξ^0 зависят только от величин a_s .

2) Пусть теперь $r \equiv 0$, а $\rho \neq 0$ – произвольный допустимый вес. Определим компоненты ξ_k^0 вектора ξ^0 соотношением:

$$\xi_k^0 \equiv \frac{i}{\pi} \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+ - g\Omega_k(\infty^{(2)}).$$

Дивизор d^0 определяется как решение проблемы обращения Якоби для вектора ξ^0 . Отметим, что для координат этого вектора в многообразии Якоби имеем:

$$x_k^0 = -\frac{1}{\pi} \int_E \arg \rho(x) d\Omega_k^+ \pmod{1}, \quad y_k^0 = -\frac{g}{2} \omega_k(\infty) + \rho_k \pmod{1},$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^g \rho_k B_{jk} = \frac{i}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| d\Omega_j^+(\zeta), \quad j = 1, \dots, g.$$

Эти формулы, разумеется, пригодны и в случае 1).

3) Рассмотрим, наконец, общий случай $f = \hat{\rho} + r$. Тогда (см. [4], [5; §§ 3, 4]) необходимо положить

$$\xi_k^0 \equiv \frac{i}{\pi} \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+ - g\Omega_k(\infty^{(2)}) + \sum_{s=1}^m \int_{b_s^{(2)}}^{b_s^{(1)}} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

где $b_1, \dots, b_m$ — полюсы рациональной функции r . Так как $\Omega_k(b_s^{(1)}) - \Omega_k(b_s^{(2)}) = 2\Omega_k(b_s^{(1)})$, то

$$\xi_k^0 = \frac{i}{\pi} \int_E \log \rho(x) d\Omega_k^+ - g\Omega_k(\infty^{(2)}) + 2 \sum_{s=1}^m \Omega_k(b_s^{(1)}) \pmod{\text{периодов}}.$$

Таким образом, если допустимый вес ρ марковский, то x -координаты вектора начальных условий ξ^0 зависят только от величин b_s .

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

1. Нетрудно видеть, что если полином $p \in \mathbb{C}[z]$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а рациональная дробь $r_0 \in \mathbb{C}(z)$ равна сумме главных частей функции $1/(wp)$ в нулях полинома p , то мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция

$$f(z) = \frac{1}{w(z)p(z)} - r_0(z) \quad (16)$$

имеет вид $f = \hat{\rho}$ при $\rho = 1/p$. Функция остатка $R_n = R_n(z; \hat{\rho})$ (см. § 1) также мероморфна на $\mathfrak{R}$, т.е. $R_n \in \mathbb{C}(z, w)$. Как известно, таблица Паде произвольной функции состоит из блоков [12], внутри которых рациональные аппроксимации совпадают друг с другом. В соответствии с таким устройством порядок нуля функции остатка R_n в бесконечно удаленной точке может быть больше чем $n + 1$. Предположим пока, что этот порядок нуля в точности равен $n + 1$, а $\deg Q_n = n$. Как будет видно в дальнейшем, общий случай вполне укладывается в приводимую ниже схему доказательства.

Итак, функция $R_n = R_n(z)$ мероморфна на $\mathfrak{R}$ и имеет нуль порядка $n + 1$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty^{(1)}$ на первом листе. Тем самым, мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция wR_n имеет в бесконечно удаленной точке $z = \infty^{(1)}$ на первом листе нуль порядка $n - g$ (здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что $n > l = \deg p$, $n > g$). Из представления (16) для функции $f = \hat{\rho}$ получаем следующее соотношение для значений этой функции в сопряженных точках $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ на $\mathfrak{R}$:

$$f(z^{(2)}) = \frac{1}{w(z^{(2)})p(z)} - r_0(z) = -\frac{1}{w(z^{(1)})p(z)} - r_0(z) = f(z^{(1)}) - \frac{2}{w(z^{(1)})p(z)},$$

откуда вытекает, что

$$R_n(z^{(2)}) = R_n(z^{(1)}) - \frac{2}{w(z^{(1)})p(z)} Q_n(z)$$

и

$$(wR_n)(z^{(2)}) = -(wR_n)(z^{(1)}) + \frac{2}{p(z)} Q_n(z), \quad z \in D. \quad (17)$$

Функция f , а тем самым и R_n голоморфны в D . Следовательно, функция $F_n(\mathbf{z}) = (wR_n)(\mathbf{z})$ голоморфна на первом листе $D^{(1)}$, где она имеет нуль порядка $n - g$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$, и на кривой L . Из (17) вытекает, что F_n имеет полюсы на втором листе $D^{(2)}$ в точках $a_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, l$, соответствующих нулям полинома p (здесь мы предполагаем, также без ограничения общности, что $Q_n(a_j) \neq 0$), и полюс кратности $n - l$ в точке $\infty^{(2)}$. По теореме Абеля число нулей произвольной функции класса $\mathbb{C}(z, w)$ в точности равно числу ее полюсов. Следовательно, функция F_n имеет еще ровно g свободных нулей на $\mathfrak{R}$ и для дивизора (F_n) справедлива формула:

$$(F_n) = (n - g)\infty^{(1)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g - (n - l)\infty^{(2)} - a_1^{(2)} - \dots - a_l^{(2)},$$

где $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$ — некоторые точки на $\mathfrak{R}$, которые, разумеется, зависят от n . Нетрудно видеть, что полученная формула охватывает и общий случай. Действительно, тот факт, что функция остатка имеет дополнительный нуль в бесконечно удаленной точке, соответствует тому, что $\mathbf{z}_j = \infty^{(1)}$ при некотором $j \in \{1, \dots, g\}$. Аналогично трактуется и ситуация, когда $\deg Q_n < n$ или $Q_n(a_j) = 0$. Заметим наконец, что если обе точки вида $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(2)}$ являются нулями функции F_n , то из (17) немедленно вытекает, что R_n и Q_n имеют общий нуль $z = \zeta$, чего не может быть в случае нормального индекса n .

Из теоремы Абеля вытекает, что для точек $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$ должны выполняться следующие соотношения (ср. §2, п. 3):

$$(n - g)\Omega_k(\infty^{(1)}) + \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) - (n - l)\Omega_k(\infty^{(2)}) - \sum_{s=1}^l \Omega_k(a_s^{(2)}) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

где пути интегрирования — одни и те же для всех k . Непосредственно отсюда получаем систему из g уравнений на g точек $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g$

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv 2n\Omega_k(\infty^{(2)}) + \sum_{s=1}^l (\Omega_k(a_s^{(2)}) - \Omega_k(\infty^{(2)})) - g\Omega_k(\infty^{(2)}), \quad k = 1, \dots, g. \quad (18)$$

К этой системе мы вернемся чуть позже, а сейчас получим явное представление для функции F_n в терминах абелевых дифференциалов. Рассмотрим следующий дифференциал третьего рода на $\mathfrak{R}$ с чисто мнимыми периодами:

$$dU_n(\mathbf{z}) = n dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^g dG(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + \sum_{s=1}^l dG(\infty^{(2)}, a_s^{(2)}; \mathbf{z}).$$

Нетрудно видеть, что абелев дифференциал $d \log F_n + dU_n$ голоморфен на $\mathfrak{R}$, а все его периоды чисто мнимые. Как хорошо известно, такой дифференциал тождественно равен нулю. Итак, получаем следующее представление для функции F_n (ср. [20]):

$$F_n(\mathbf{z}) = \Phi^{-n}(\mathbf{z}) \exp \left\{ - \sum_{j=1}^g G(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) - \sum_{s=1}^l G(\infty^{(2)}, a_s^{(2)}; \mathbf{z}) \right\},$$

где $\Phi(\mathbf{z}) = \exp\{G(\mathbf{z})\}$ — так называемая (многозначная) отображающая функция: $|\Phi^\pm(x)| = 1$ при $x \in E$, $|\Phi(z)| > 1$ при $z \in D$. Поясним: предполагается, что при переходе от дифференциала $d \log F_n + dU_n$ к функции $\log F_n + U_n$ интегрирование происходит по произвольному пути, соединяющему точки e_{2g+2} и $\mathbf{z}$, не проходящему через особенности этих дифференциалов и целиком лежащему в рассеченной римановой поверхности $\tilde{\mathfrak{R}}$. Тем самым, многозначная функция U_n нормирована условием $U_n(e_{2g+2}) = 0 \pmod{2\pi i}$, а функция $F_n = e^{-U_n}$ — условием $F_n(e_{2g+2}) = 1$. Таким образом, $(wR_n)(e_{2g+2}) = 1$ и

$$(wR_n)(z^{(1)}) = \Phi^{-n}(z^{(1)}) \exp \left\{ - \sum_{j=1}^g G(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) - \sum_{s=1}^l G(\infty^{(2)}, a_j^{(2)}; z^{(1)}) \right\}. \quad (19)$$

Определим теперь для $z \in D$ функцию $V_n(z) := F_n(z^{(1)})F_n(z^{(2)})$. Нетрудно видеть, что для ее дивизора в D имеем: $(V_n)_D = (l-g)\infty + z_1 + \dots + z_g - a_1 - \dots - a_l$, а сама функция V_n продолжается как мероморфная (т.е. однозначная аналитическая) функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}$. Отсюда вытекает, что V_n однозначна в $\overline{\mathbb{C}}$ и $V_n(z) = X_n(z)/p_l(z)$, где нормировка полинома $X_n = \text{const} \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ согласована с ранее выбранной нормировкой $V_n(e_{2g+2}) = 1$.

Из (17), умножив предварительно обе его части на $(wR_n)(z^{(1)})$ и учитывая только что установленные свойства функции V_n , а также соглашение об отождествлении z и $z^{(1)}$ для $z \in D$, получаем следующее представление:

$$Q_n(z)(wR_n)(z) = \frac{1}{2} \{p_l(z)(wR_n)^2(z) + X_n(z)\}, \quad z \in D. \quad (20)$$

Тем самым фактически получена *явная формула для полиномов* Q_n в терминах функции остатка R_n , мероморфной на $\mathfrak{R}$, и полиномиального параметра X_n .

Из представления (19) для функции F_n вытекает, что первое слагаемое в правой части (20) убывает с геометрической скоростью по сравнению со вторым. Тем самым, по теореме Руше имеем: на любом компакте число нулей (голоморфной) функции $Q_n wR_n$ и функции $X_n/2$ одинаково. Нули функции остатка R_n в D — это те и только те нули X_n , которые порождены точками $z_j^{(1)}$. На основании полученного ранее представления $(wR_n)(z^{(1)}) \cdot (wR_n)(z^{(2)}) = X_n(z)/p_l(z)$ мы можем считать нулями функции остатка и те нули X_n , которые попали на компакт E . Оставшиеся нули X_n или стремятся к E , или компактно по n принадлежат D и произошли от точек $z_j^{(2)}$ (т.е. это точки $\text{pr } z_j^{(2)}$). Очевидно, нули X_n второй группы и только они соответствуют тем нулям полинома Q_n , которые компактно принадлежат D . Тем самым, *нули полинома Q_n , имеющие предельные точки вне множества E , полностью описаны в терминах соответствующих нулей полинома X_n* , где, напомним, нули полинома X_n — в точности проекции z_j точек $\mathbf{z}_j = (z_j, \pm) \in \mathfrak{R}$, составляющих дивизор d . Отсюда, в частности, вытекает, что число таких нулей знаменателя $\leq g$. Отметим, что при доказательстве результатов этого пункта условие правильности дивизора d^0 нигде не использовалось.

2. Вернемся к системе (18) уравнений на дивизор d . Запишем ее в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) = \xi_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (21)$$

где

$$\xi_k = 2n\Omega_k(\infty^{(2)}) + \sum_{s=1}^l (\Omega_k(a_s^{(2)}) - \Omega_k(\infty^{(2)})) - g\Omega_k(\infty^{(2)}). \quad (22)$$

Соотношения (21) представляют собой проблему обращения Якоби для вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_g)$.

Рассмотрим проблему обращения Якоби для вектора $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_g^0)$, где координаты ξ_k^0 заданы соотношениями (ср. с (22))

$$\xi_k^0 = \sum_{s=1}^l (\Omega_k(a_s^{(2)}) - \Omega_k(\infty^{(2)})) - g\Omega_k(\infty^{(2)}).$$

Решение $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$ такой проблемы всегда существует, а если дивизор d^0 неспециальный, то оно единственно. По условию теоремы дивизор d^0 неспециальный. Пусть координаты вектора ξ^0 в многообразии Якоби равны x_j^0, y_j^0 . Тем самым, для дивизора $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$ имеем

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j^0) = x_k^0 + \sum_{j=1}^g y_j^0 B_{kj} \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g.$$

Пользуясь этим соотношением и формулой (10), приведем представления (22) для ξ_k в уравнениях (21) к виду

$$\xi_k = x_k^0 + \sum_{j=1}^g y_j^0 B_{kj} + n \sum_{j=1}^g \omega_j(\infty) B_{kj}, \quad k = 1, \dots, g,$$

т.е. x -, y -координаты вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_g)$ в многообразии Якоби вычисляются по формулам

$$x_j = x_j^0, \quad y_j = y_j^0 + n\omega_j(\infty) \pmod{1}, \quad j = 1, \dots, g.$$

Рассмотрим в $\text{Jas } \mathfrak{R}$ множество точек с координатами

$$x_k = x_k^0, \quad y_k = \tau_k, \quad k = 1, \dots, g, \quad \text{где } \tau_k \in [0, 1),$$

изоморфное g -мерному вещественному тору $\mathbb{T}^g$. Пусть $\mathbb{D} = \mathbb{D}(x^0)$ — соответствующее ему множество в $S^g \mathfrak{R}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g : \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv x_k^0 + \sum_{j=1}^g \tau_j B_{kj}, \tau_j \in [0, 1), k = 1, \dots, g \right\}.$$

По условию координаты x_k^0 дивизора d^0 таковы, что всякий дивизор d из $\mathbb{D}$ неспециальный. Тем самым, каждый дивизор $d \in \mathbb{D}$ однозначно определяется заданными $\tau_k \in [0, 1)$: $d = d(\tau) = d(\tau_1, \dots, \tau_g)$, т.е. $\mathbb{D}$ также изоморфно $\mathbb{T}^g$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства множества $\mathbb{D}$.

ЛЕММА 1. Замкнутое множество $\mathbb{D} \subset S^g \mathfrak{R}$ обладает следующими свойствами:

1) если дивизор $\mathbf{z}_1 + \dots + z_j^{(1)} + \dots + \mathbf{z}_g = d(\tau) \in \mathbb{D}$ при некотором $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g)$, то дивизор $\mathbf{z}_1 + \dots + \bar{z}_j^{(2)} + \dots + \mathbf{z}_g = d(\tau') \in \mathbb{D}$ при некотором $\tau' = (\tau'_1, \dots, \tau'_g)$;

2) функции $\mathbf{z}_j = \psi_j(\tau_1, \dots, \tau_g)$ — вещественно аналитические функции переменных τ_j , удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$(d\psi_1, \dots, d\psi_g)^T = (\Omega'_k(\psi_j))^{-1} \mathbf{B} (d\tau_1, \dots, d\tau_g)^T.$$

Отметим, что это соотношение на функции ψ_k переменных τ_j , записанное в форме

$$\|\Omega'_k(\psi_j)\| \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau_j} \right\| = \mathbf{B},$$

задает естественное обобщение понятия ортогональной траектории квадратичного дифференциала на римановой поверхности (см. [35]). Действительно, ортогональная траектория квадратичного дифференциала $Q(\zeta) d\zeta^2$ — (максимальная) кривая, на которой $Q(\zeta) d\zeta^2 < 0$, т.е. $\sqrt{Q(\zeta)} d\zeta \in i\mathbb{R}$ или, при подходящей параметризации, $\sqrt{Q(\zeta)} d\zeta/d\tau = i$. Естественность обобщения вытекает теперь из того, что матрица $\mathbf{B}$ чисто мнимая, при этом $\text{Im } \mathbf{B} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Утверждения п. 2) следуют непосредственно из определения множества $\mathbb{D}$.

Для доказательства п. 1) рассмотрим квадратичный дифференциал $d\Omega_k^2$, $k = 1, \dots, g$, порожденный голоморфным абелевым дифференциалом $d\Omega_k$, и воспользуемся хорошо известными [35; гл. III] свойствами квадратичных дифференциалов на римановой поверхности. Из теоремы о локальном строении их траекторий вытекает, что через каждую точку $\mathfrak{R}$, которая не является критической для квадратичного дифференциала, проходит ровно одна ортогональная траектория. Критические точки $d\Omega_k^2$ — это в точности его нули, которые все двукратны и лежат на $g-1$ отрезках E_j , $j \neq k$. Тем самым, через любую точку $z^{(1)} \in D^{(1)}$ проходит ровно по одной ортогональной траектории ℓ_k для каждого дифференциала $d\Omega_k^2$. Из теоремы о глобальном строении траекторий [35; гл. III, § 3.4, теорема 3.5] вытекает, что каждая из кривых ℓ_k проходит и через точку $\bar{z}^{(2)}$. Тем самым, $\Omega_k(z^{(1)}) - \Omega_k(\bar{z}^{(2)}) \in i\mathbb{R}$ (mod периодов) для любого $k = 1, \dots, g$. Отсюда, так как матрица $\mathbf{B}$ невырождена, вытекает справедливость 1).

3. Пусть

$$\mathbb{D}_1 = \{d(\tau) \in \mathbb{D} : \tau_j = y^0 + t\omega_j(\infty) \pmod{1}, t \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, g\},$$

$$\mathbb{D}_0 = \{d(\tau) \in \mathbb{D} : \tau_j = y^0 + n\omega_j(\infty) \pmod{1}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, g\},$$

$\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D}_1 = \{d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)\}$ — кривая в $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_0 = \{d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)\}$ — дискретное множество. Движение дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t)$ на торе $\mathbb{D}$ — условно периодическое с периодами $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ (см., например, [36; гл. 10, § 51]).

С точки зрения изучения сходимости аппроксимаций Паде нас интересует множество предельных точек $\mathbb{D}'_0$. Отметим следующий хорошо известный факт [36; гл. 10, § 51]: если величины $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ рационально независимы, то $\mathbb{D}'_1 = \mathbb{D}$,

т.е. траектория $\mathbb{D}_1$ дивизора $d(t)$ всюду плотна в $\mathbb{D}$; если же $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty), 1$ рационально независимы⁷, то и $\mathbb{D}'_0 = \mathbb{D}$.

Из леммы 1 следует, что функции $z_j = z_j(t)$ – вещественно аналитические функции переменной $t \in \mathbb{R}$, поэтому для $d \in \mathbb{D}_1$ получаем:

$$\sum_{j=1}^g \Omega'_k(\mathbf{z}_j) \dot{z}_j = \sum_{j=1}^g \omega_j(\infty) B_{jk}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (23)$$

где $\dot{z}_k = dz_k/dt$. Рассмотрим (23) как линейную систему относительно $\dot{z}_j$. Нетрудно видеть, что

$$\det \|\Omega'_k(\mathbf{z}_j)\| = \frac{\text{const}}{\prod_{j=1}^g w(\mathbf{z}_j)} V(z_1, \dots, z_g), \quad (24)$$

где const зависит только от точек $e_1, \dots, e_{2g+2}$, V – определитель Вандермонда от g переменных. Пусть D_k – определитель матрицы, полученной из матрицы системы (23) заменой k -го столбца на столбец правых частей. С помощью соотношения (10) получаем:

$$D_k = -\frac{\text{const}}{2} \int_{e_{2g+2}}^{+\infty} \frac{V_k(z_1, \dots, x, \dots, z_g)}{\prod_{j \neq k} w(\mathbf{z}_j)} \frac{dx}{w(x)}, \quad (25)$$

где const – та же, что и в (24), путь интегрирования – луч от e_{2g+2} до $+\infty$, V_k – определитель Вандермонда от g переменных, в котором z_k заменено на x . Разрешая теперь систему (23) относительно величин $\dot{z}_j$ и используя только что установленные формулы (24), (25), а также явную формулу для определителя Вандермонда, получаем динамическую систему (*). Система Дубровина [37] (см. также [38; гл. VIII, (8.2.15)]) получается из (*) заменой сомножителя $(z - e_{2g+2})$ на $(z/e_{2g+2} - 1)$ и последующим (формальным) переходом к пределу при $e_{2g+2} \rightarrow \infty$.

4. Положим $\vec{\Omega}(z) = (\Omega_1(z), \dots, \Omega_g(z))^T$, $\vec{\omega}(z) = (\omega_1(z), \dots, \omega_g(z))^T$, где $z \in D$, $\omega_j(z) = \omega(E_j, z; D)$. Нетрудно проверить, что справедливо следующее представление:

$$\text{Re}\{\mathbf{B}^{-1} \vec{\Omega}(z)\} = -\frac{1}{2} \vec{\omega}(z), \quad z \in D. \quad (26)$$

С учетом этой формулы и (10) для дивизора $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t) \in \mathbb{D}_1$ получаем следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^g \varepsilon_j \omega_s(z_j) = (g - 2t) \omega_s(\infty) + 2\rho_s \pmod{2}, \quad s = 1, \dots, g,$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от положения точки $\mathbf{z}_j = (z_j, \pm)$ на $\mathfrak{R}$. В частности, если при переходе от $t = n$ к $t = n + 1$ все знаки всех величин ε_j сохраняются, то

$$\sum_{j=1}^g \varepsilon_j \Delta \omega_s(z_j) = -2\omega_s(\infty) \quad (27)$$

⁷В силу соотношения $\omega_1(\infty) + \dots + \omega_{g+1}(\infty) = 1$ это условие эквивалентно тому, что $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы.

(ср. [7; лемма 3] и [39; с. 62]). Соотношения (27) фактически означают, что движение дивизора $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$ по кривой $\mathbb{D}_1$ происходит с постоянной “угловой скоростью”.

Отметим следующий любопытный факт, связанный с гармоническими мерами ω_j . Так как область D многосвязна, то гармонически сопряженные функции $\tilde{\omega}_j$ многозначны. Соответствующие величины $P_{jk} = \frac{\Delta}{E_k} \tilde{\omega}_j$ — периоды функции $\tilde{\omega}_j$ относительно E_k — впервые рассматривались Максвеллом [40; часть I, гл. III, пп. 87–89] (см. также [41]), который, в частности, доказал, что матрица $\mathbf{P} = \|P_{jk}\|$ симметрична и положительно определена. Непосредственно из (26) вытекает, что в случае вещественной римановой поверхности матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{P}$ связаны соотношением: $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \mathbf{B} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1}$.

5. Подведем итоги. В условиях теоремы 1 при каждом $n \in \mathbb{N}$ нули полинома X_n — это в точности проекции на $\mathbb{C}$ точек $\mathbf{z}_j(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, g$. При произвольном $t \in \mathbb{R}_+$ точки $\mathbf{z}_j(t)$ составляют дивизор $d(t) = \mathbf{z}_1(t) + \dots + \mathbf{z}_g(t) \in \mathbb{D}_1$, x -координаты которого постоянны и полностью определяются начальными условиями задачи (т.е. полиномом $p \in \mathbb{C}[z]$), а y -координаты равны $y_j = y_j^0 + t\omega_j(\infty) \pmod{1}$ (и, тем самым, есть условно периодические функции переменной t). Дивизор $d(t)$ неспециален и удовлетворяет системе (*).

Непосредственно из пп. 1–4 настоящего параграфа вытекает справедливость теорем 1 и 2.

6. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество предельных точек полюсов аппроксимаций Паде, принадлежащих D , а через $\mathcal{Z} \subset D$ — множество предельных точек свободных нулей функции остатка R_n . Пусть $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}$ — полный прообраз множества $\mathbb{D}(x^0)$ при отображении $\mathfrak{R} \rightarrow S^g \mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ — его части, расположенные соответственно на первом и втором (открытых) листах $\mathfrak{R}$. Из полученных результатов вытекает, что в условиях теоремы 1 множество $\mathcal{P} \subset \operatorname{pr} \mathfrak{D}^{(2)}$, а $\mathcal{Z} \subset \operatorname{pr} \mathfrak{D}^{(1)}$. Если, кроме того, выполнено условие рациональной независимости величин $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$, то $\mathcal{P} = \operatorname{pr} \mathfrak{D}^{(2)}$, а $\mathcal{Z} = \operatorname{pr} \mathfrak{D}^{(1)}$. Более того, при этом условии всякий дивизор $d = z_1^{(2)} + \dots + z_g^{(2)} \in \mathbb{D}$ — предельная точка для дивизоров, составленных из полюсов аппроксимаций Паде, а всякий дивизор $d = z_1^{(1)} + \dots + z_g^{(1)} \in \mathbb{D}$ — предельная точка для дивизоров, составленных из свободных нулей R_n .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если при всех $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ в дивизоре $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$ ровно $k \leq g$ точек $\mathbf{z}_j(n)$ компактно по n принадлежат $D^{(2)}$, то по этой подпоследовательности Λ нули Q_n имеют в точности k предельных точек вне E . Аналогичное утверждение с заменой $D^{(2)}$ на $D^{(1)}$ справедливо для R_n .

Для произвольного дивизора $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ под $\operatorname{pr} d$ будем понимать дивизор $z_1 + \dots + z_g$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если величины $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы, то любой дивизор $\operatorname{pr} d$, где $d \in \mathbb{D}$, есть предельная точка последовательности дивизоров степени g , составленных из нулей произведения $Q_n R_n$, расположенных в $\mathbb{C} \setminus E$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если дивизор d^0 таков, что все $z_j^0 \in E'_j$, $j = 1, \dots, g$, то $\mathbb{D}(x^0) = \ell_1 \times \dots \times \ell_g$, где ℓ_j — замкнутые кривые на $\mathfrak{R}$, соответствующие лакунам E'_j .

Утверждение следствия 3 вытекает непосредственно из следующего легко проверяемого факта: дивизор d^0 имеет x -координаты, равные $x_k^0 = (g - k + 1)/2 \pmod{1}$ тогда и только тогда, когда все его точки лежат в лакунах: $z_j^0 \in E'_j$ (см. [5; § 4]).

Отметим, что соответствующие отрезкам E_j замкнутые кривые $L_j \subset \mathfrak{R}$ — траектории квадратичных дифференциалов $d\Omega_k^2$, а ℓ_j — ортогональные траектории $d\Omega_k^2$.

§ 4. Доказательство теоремы 3

1. Доказательство теоремы 3 проведем по схеме, впервые реализованной в [4] (см. также [5]), в основе которой — “явное” построение и изучение свойств решения определенной краевой задачи Римана на $\mathfrak{R}$.

Пусть $\Lambda = \Lambda_1$ или $\Lambda = \Lambda_2$ в соответствии с п. 1° или п. 2°. Рассмотрим сначала случай, когда $r \equiv 0$, $\rho \neq 0$ — допустимый вес. Стандартным образом [4], [5] доказывается, что для любого $n \in \Lambda$ существует кусочно мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция $\Psi_n \in \mathcal{M}(\mathfrak{R} \setminus L)$ такая, что:

1) дивизор $(\Psi_n) = -n\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + (n - g)\infty^{(1)}$, где $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n) \in \mathfrak{R} \setminus L$, и, кроме того, выполняется краевое условие

$$2) \Psi^+(\zeta) = \rho(\zeta) \Psi^-(\zeta), \zeta \in L.$$

Для $z \in D$ положим: $\varphi_n(z) := \Psi_n(z^{(2)})$, $\psi_n(z) := \Psi_n(z^{(1)})$. Получим пару функций (φ_n, ψ_n) , которая играет ключевую роль в рассуждениях работ [4], [5]. Повторим коротко схему доказательства работы [4]. Функции φ_n, ψ_n мероморфны в D и удовлетворяют краевым условиям на E : $\rho\varphi_n^+ = \psi_n^-$, $\rho\varphi_n^- = \psi_n^+$. Для их дивизоров в D имеем: $(\varphi_n) = -n\infty + z_1 + \dots + z_\varkappa$, $(\psi_n) = (n - g)\infty + z_{\varkappa+1} + \dots + z_g$, где $\varkappa = \varkappa(n)$, $0 \leq \varkappa \leq g$, причем $\varkappa \leq g - 1$ при $\Lambda = \Lambda_1$, $\varkappa \geq 1$ при $\Lambda = \Lambda_2$.

Непосредственно из формулы Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши вытекает следующее соотношение для функции остатка R_n на множестве E :

$$R_n^+(\zeta) - R_n^-(\zeta) = -\frac{Q_n(\zeta)\rho(\zeta)}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in E \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}.$$

Из этого соотношения, используя условия на функции φ_n и ψ_n , легко получаем следующую пару соотношений:

$$\begin{aligned} (R_n\varphi_n w)^+(\zeta) + (R_n\psi_n w)^-(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} &= -Q_n(\zeta)\psi_n^-(\zeta), \quad \zeta \in E, \\ (R_n\varphi_n w)^-(\zeta) + (R_n\psi_n w)^+(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} &= -Q_n(\zeta)\psi_n^+(\zeta), \quad \zeta \in E. \end{aligned} \quad (28)$$

Определим теперь на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ кусочно мероморфную функцию $F(\mathbf{z})$ следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \begin{cases} R_n(z)\varphi_n(z)w(z), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ -Q_n(z)\psi_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что в бесконечно удаленных точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ функция F имеет полюсы порядка $\leq g$; в остальных точках $\mathfrak{R} \setminus L$ функция F голоморфна.

Непосредственно из (28) вытекает, что на кривой L для F выполняется граничное условие

$$F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = \chi^-(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in L, \quad (29)$$

где мы положили $\chi(\mathbf{z}) = -R_n(z)\psi_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$. С помощью мероморфного абелева дифференциала (13) функция $F(\mathbf{z})$ восстанавливается по граничному условию (29) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \chi^-(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) - p_n(z), \quad \mathbf{z} \notin L, \quad (30)$$

где $p_n(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p_n \leq g$. Получили сингулярное интегральное уравнение для функции остатка R_n .

2. Рассмотрим это уравнение для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Так как $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой связной компоненте E_j компакта E , то $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой кривой L_j . Поэтому контур L можно, не меняя значения интеграла, покомпонентно продеформировать в близкий контур L' , также состоящий из $g+1$ компоненты и целиком расположенный на втором листе $D^{(2)}$ в некоторой окрестности L , в которой определена и голоморфна функция $\rho(\zeta)$ (напомним, что функция $\chi(\zeta)$ определена и голоморфна на всем втором листе $D^{(2)}$). Полученная интегральная формула задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур L на второй лист римановой поверхности вплоть до контура L' (для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ оно, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной выше). Отсюда, учитывая определения функций F и χ , получаем:

$$\begin{aligned} (R_n \varphi_n w)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} (R_n \psi_n w)(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) - p_n(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} (R_n \varphi_n w)(\zeta) \frac{\psi_n(\zeta)}{\varphi_n(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) - p_n(z), \quad z \in \overline{D}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выберем теперь и зафиксируем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее следующим условиям: линия уровня функции Грина $L(\varepsilon) = \{z : g_D(z, \infty) = \varepsilon\}$ состоит ровно из $g+1$ компоненты; функция ρ голоморфна внутри и на $L(\varepsilon)$; для достаточно больших $n \in \Lambda$ все точки $z_j(n) \in D(\varepsilon)$, где $D(\varepsilon) = \{z : g_D(z, \infty) > \varepsilon\}$. Только такие $n \in \Lambda$ мы и рассматриваем в дальнейшем. Последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \in \Lambda}$, $\varepsilon_n \in [\varepsilon/2, 3\varepsilon/4]$, выберем, исходя из следующего условия:

$$\max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = O(1) \cdot \min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)|$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$ (это, очевидно, возможно, так как $\deg p_n \leq g$).

Пусть теперь контур $L' = L'(n) \subset D^{(2)}$ в (31) таков, что в области D ему соответствует линия уровня $L(\varepsilon_n)$. Подчеркнем еще раз, что формула (31) справедлива в замкнутой области $\overline{D^{(1)}}$, т.е. остается верной и для $z = z^{(1)} \in L$: непосредственно из явного вида (15) дифференциала $d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)})$ вытекает, что он не имеет особенности при $z = \zeta$.

С учетом того, что голоморфная в $\mathbb{C} \setminus E$ функция $(R_n \varphi_n w)(z)$ имеет полюс в точке $z = \infty$ порядка $\leq g$, и определения функций φ_n и ψ_n получаем из (31) следующее соотношение для максимума модуля M_n функции $(R_n \varphi_n w)(z)$ на $E^+ \cup E^-$:

$$M_n = M_n \cdot O(q^n) + \max_{z \in E} |p_n(z)|, \quad n \in \Lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

$q = \exp\{-2\varepsilon_n\} \in (0, 1)$. Следовательно, $M_n = \max_{z \in E} |p_n(z)|(1 + O(q^n))$, $n \in \Lambda$, $n \rightarrow \infty$, а значит, $\max_{z \in E} |(R_n \varphi_n w)(z) - p_n(z)| = M_n \cdot O(q^n)$. Из последнего соотношения и теоремы Руше вытекает, что в $D(\varepsilon)$ полином p_n имеет $\varkappa \leq g$ нулей, асимптотически близких к $\varkappa$ “свободным” нулям φ_n .

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (30) для $\mathbf{z} \in \overline{D^{(2)}(\varepsilon)} = \{\mathbf{z} \in D^{(2)} : g_D(z, \infty) \geq \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} (-Q_n \psi_n)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} (R_n \psi_n w)(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) - p_n(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} (R_n \varphi_n w)(\zeta) \frac{\psi_n(\zeta)}{\varphi_n(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) - p_n(z), \quad z \in \overline{D(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) и условия выбора ε_n вытекает, что

$$\max_{z \in L(\varepsilon_n)} |(Q_n \psi_n)(z) - p_n(z)| = \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| \cdot O(q^n) = \min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| \cdot O(q^n), \quad (33)$$

где $0 < q < 1$. Поскольку мы заранее выбрали $\varepsilon > 0$ так, что все $g - \varkappa$ “свободных” нулей функции ψ_n компактно (при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$) принадлежат области $D(\varepsilon)$, то вновь с помощью теоремы Руше получаем из (33), что функции $Q_n \psi_n$ и p_n для всех достаточно больших $n \in \Lambda$ имеют в $D(\varepsilon_n)$ одинаковое количество нулей. Так как функция ψ_n имеет в конечной плоскости $g - \varkappa$ нулей, получаем, что p_n имеет $g - \varkappa$ нулей, асимптотически близких к “свободным” нулям ψ_n . По условию теоремы $d(n)$ неспециальный при всех n . Следовательно, $z_j(n) \neq z_k(n)$ при $j \leq \varkappa$ и $k \geq \varkappa + 1$. Значит, $\deg p_n = g$ и все его g нулей компактно (по $n \in \Lambda$) принадлежат $D(\varepsilon)$. Отсюда уже вытекает: $\deg Q_n = n$, т.е. индекс n нормальный.

Вернемся теперь к случаю $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Непосредственно из (31) получаем, что функция $R_n \varphi_n w$ имеет в D_ε ровно g конечных нулей. Следовательно, функция R_n имеет в D_ε ровно $g - \varkappa$ конечных нулей. Тем самым, для $n \in \Lambda$ аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ интерполируют функцию $\hat{\rho}(z)$ дополнительно в $g - \varkappa$ точках, $\varkappa = \varkappa(n)$, компактно по $n \in \Lambda$ принадлежащих D .

3. В случае, когда в условиях теоремы 3 функция $f = \hat{\rho} + r$, где $r \neq 0$, необходимо по аналогии с [4] и [5; § § 3, 4] рассмотреть *модифицированную* краевую задачу для кусочно мероморфной в $\mathfrak{R} \setminus L$ функции $\Psi_n(\zeta)$. Отметим, что в этой модифицированной постановке краевое условие 2) полностью сохраняется, а условие 1) на дивизор функции (Ψ_n) в $\mathfrak{R} \setminus L$ изменяется следующим образом. К правой части этого условия добавляется дивизор нулевой степени, зависящий от n и определяемый рациональной функцией r , точнее — ее полюсами. В остальном приведенные выше рассуждения, основанные на использовании сингулярного интегрального уравнения, полностью сохраняются.

Отметим, что в условиях теоремы 3 удастся показать, что *все* предельные точки нулей Q_n и R_n описываются в терминах решений системы (*), пока только для случая, когда все z_j^0 лежат в g различных лакунах (одна из них может быть и внешней).

СЛЕДСТВИЕ 4. Если в условиях теоремы 3 при всех $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ в дивизоре $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$ ровно k , $0 \leq k \leq g$, точек $\mathbf{z}_j(n)$ компактно по n принадлежат $D^{(2)}$, а остальные компактно принадлежат $D^{(1)}$, то по этой подпоследовательности Λ нули Q_n имеют в точности k предельных точек вне E , а свободные нули функции R_n имеют ровно $g - k$ предельных точек вне E .

СЛЕДСТВИЕ 5. Если в условиях теоремы 3 величины $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы, то любой дивизор $\text{pr } d$, где $d \in \mathbb{D}$, есть предельная точка последовательности дивизоров степени g , составленных из нулей произведения $Q_n R_n$, расположенных в $\mathbb{C} \setminus E$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $g = 1$, $f_1 = \widehat{r_1} + r_1$, где допустимый вес r_1 марковский, $r_1 \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{H}(E)$, а $f_2 = \widehat{1/p}$, где $p \in \mathbb{C}[z]$ и $p(z) = \prod_{j=1}^m (z - \overline{b_j})^2$, $b_1, \dots, b_m \in D$ — полюсы r_1 . Тогда множество $\text{pr } \mathfrak{D}^{(2)}$ (см. п. 6 §3) для голоморфной в D функции f_2 совпадает с кривой γ из теоремы Разманова для мероморфной в D функции f_1 .

Отметим, что $\gamma = \text{pr } \gamma^{(2)}(f_1)$, где $\gamma^{(2)}(f_1) = \mathfrak{D}^{(2)}(f_1)$ “невидимая” часть ортогональной траектории некоторого квадратичного дифференциала на $\mathfrak{A}$, а на проекции другой части части $\gamma^{(1)}(f_1) = \mathfrak{D}^{(1)}(f_2)$ этой ортогональной траектории расположены все предельные точки свободных нулей функции остатка R_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6. Поскольку вес r_1 марковский, из п. 5 §2 вытекает, что x -координаты вектора $\xi^0 = \xi^0(f_1)$ полностью определяются величинами $\Omega_k(a^{(2)})$. Рассмотрим две функции $f_1 = \widehat{r_1} + r_1$ и $f_2 = \widehat{1/p}$, где $p(z) = \prod_{j=1}^m (z - \overline{b_j})^2$, а $b_1, \dots, b_m \in D$, как и прежде, — полюсы r ; тем самым, $\deg p = 2m$. Результаты п. 5 §2 с учетом того, что $\Omega_k(z^{(1)}) - \Omega_k(\overline{z}^{(2)}) \in i\mathbb{R} \pmod{\text{периодов}}$, показывают, что при таком выборе полинома $p \in \mathbb{C}[z]$ имеем: $x_k^0(f_1) = x_k^0(f_2)$, т.е. x -координаты начальных условий совпадают, тем самым совпадают и соответствующие множества $\mathbb{D} = \mathbb{D}(x^0)$. Следовательно, в случае одной лакуны (т.е. при $g = 1$) получаем, что множество $\text{pr } \mathfrak{D}^{(2)}$ — дуга $\gamma = \gamma(f_2)$, совпадающая с дугой $\gamma = \gamma(f_1)$, возникающей по теореме С. Тем самым, (4) имеет место и для голоморфной в D функции $f = f_2$.

§ 5. Случай рода $g = 2$

При $g = 2$ всякий специальный дивизор d имеет вид $d = z^{(1)} + z^{(2)}$. Для такого дивизора $\Omega_k(z^{(1)}) + \Omega_k(z^{(2)}) \equiv 0$, т.е. его x -, y -координаты равны нулю. Следовательно, если мы выберем начальные условия d^0 так, что $x_1^0 \neq 0$ или $x_2^0 \neq 0$, то и d^0 , и всякий дивизор, принадлежащий $\mathbb{D}(x^0)$, будет неспециальным.

Изучим теперь строение множества $\mathbb{D}(x^0) = \{d = \mathbf{z} + \zeta : \text{Re } \Omega_k(\mathbf{z}) + \text{Re } \Omega_k(\zeta) = x_k^0 \pmod{1}\}$ более детально. Нетрудно видеть, что точка $z \in E'_1$ тогда и только тогда, когда $\text{Re } \Omega_1(\mathbf{z}) = 1/2 \pmod{1}$, $\text{Re } \Omega_2(\mathbf{z}) = 0 \pmod{1}$. Аналогично, $\zeta \in E'_2$ тогда и только тогда, когда $\text{Re } \Omega_k(\zeta) = 1/2 \pmod{1}$, $k = 1, 2$. Если при некотором x^0 множество $\mathbb{D}(x^0)$ содержит дивизор $d = \mathbf{z} + \zeta$ с $z \in E'_1$, то для ζ имеем:

$$\text{Re } \Omega_1(\zeta) = x_1^0 - \frac{1}{2} \pmod{1}, \quad \text{Re } \Omega_2(\zeta) = x_2^0 \pmod{1}. \quad (34)$$

Если мы выбрали x^0 так, что $\zeta \notin E'_2$, то, тем самым, точка ζ лежит на пересечении соответствующих ортогональных траекторий квадратичных дифференциалов $d\Omega_1^2$

и $d\Omega_2^2$ (в дальнейшем в этом параграфе мы будем говорить короче: траектории дифференциалов $d\Omega_k$). Нетрудно видеть, что если $t_k \in (-1/2, 1/2)$, $t_k \neq 0$, то две траектории $\operatorname{Re} \Omega_k(\zeta) = t_k$ и $\operatorname{Re} \Omega_k(\zeta) = -t_k$ лежат одна над другой на разных листах $\mathfrak{R}$ и, тем самым, не пересекаются (здесь $k = 1, 2$). Если же мы возьмем $t_1 \in (-1/2, 0)$, $t_2 \in (0, 1/2)$, то не пересекаются траектории $\operatorname{Re} \Omega_1(\zeta) = t_1$ и $\operatorname{Re} \Omega_2(\zeta) = t_2$. Следовательно, при $x_1^0, x_2^0 \in (0, 1/2)$ соотношения (34) выполняться не могут. Аналогично анализируется и ситуация, когда $\zeta \in E'_2$ или $\zeta \in E'_3$. В итоге оказывается, что найдутся координаты $x_1^0, x_2^0 \in (0, 1/2)$ (при этом x_1^0 близко к 0, а x_2^0 — к $1/2$) такие, что для некоторых $d = \mathbf{z} + \zeta \in \mathbb{D}(x^0)$ имеем: $z, \zeta \notin E'_1 \cup E'_2 \cup E'_3$. Таким образом, для таких x^0 множество $\mathbb{D}(x^0) \neq S^g \mathfrak{R}$.

Итак, пусть начальные условия d^0 таковы, что для $d \in \mathbb{D}(x^0)$ имеем: $z, \zeta \notin E'_1 \cup E'_2 \cup E'_3$. Нетрудно видеть, что найдется $d \in \mathbb{D}(x^0)$ такой, что $z, \zeta \notin \mathbb{R}$. Через точку $\mathbf{z}$ проходит ровно по одной траектории γ_1 и γ_2 дифференциалов $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$. Взаимное расположение этих кривых описывается следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть φ — угол пересечения траекторий γ_1 и γ_2 . Тогда $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{z}_1 = \psi_1(t)$ и $\mathbf{z}_2 = \psi_2(t)$ — уравнения траекторий γ_1 и γ_2 соответственно, т.е. $\Omega_1(\mathbf{z}_1) - \Omega_1(\mathbf{z}) = it$ и $\Omega_2(\mathbf{z}_2) - \Omega_2(\mathbf{z}) = it$, $t \in \mathbb{R}$. Дифференцируя эти соотношения, получаем $\psi'_j(t)\Omega'_j(\mathbf{z}_j) = i$ при $j = 1, 2$. Если бы кривые γ_1 и γ_2 касались друг друга в точке $\mathbf{z}$, то в представлении $\psi'_j(0) = R_j e^{i\theta_j}$ мы бы имели $\theta_1 = \theta_2 = \theta \pmod{\pi}$, т.е. $\psi'_1(0)/\psi'_2(0) \in \mathbb{R}$. Откуда получили бы, что $\Omega'_1(\mathbf{z})/\Omega'_2(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}$. Поскольку справедливо представление $\Omega'_j(\mathbf{z}) = (a_j z + b_j)/w(\mathbf{z})$, где $a_j, b_j \in i\mathbb{R}$, то для точки z с $\operatorname{Im} z \neq 0$ имеем: $a_1 z + b_1 = \lambda(a_2 z + b_2)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Тем самым, $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, чего быть не может, так как дифференциалы $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ образуют базис. Непосредственно из доказательства вытекает, что $\varphi \neq \pi/2 \pmod{\pi}$.

Таким образом, взаимное расположение траекторий дифференциалов $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ в некоторых окрестностях U и V точек $\mathbf{z}$ и ζ для выбранного $d = \mathbf{z} + \zeta \in \mathbb{D}(x^0)$ таково, что они образуют (локальную) систему “криволинейных координат” (см. рис. 1) в следующем смысле. Любые две траектории $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$, проходящие через окрестность U , пересекаются между собой и притом ровно в одной точке; аналогичное справедливо и для V .

Рис. 1. Взаимное расположение ортогональных траекторий квадратичных дифференциалов $d\Omega_1^2$ и $d\Omega_2^2$ в окрестностях точек z и ζ

Пусть $\operatorname{Re} \Omega_j(\mathbf{z}) = \alpha_j$, $\operatorname{Re} \Omega_j(\zeta) = \beta_j$, где $\alpha_j, \beta_j \in (-1/2, 1/2)$ и $\alpha_j + \beta_j = x_j^0 \pmod{1}$, $j = 1, 2$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\alpha_j \pm \varepsilon, \beta_j \pm \varepsilon \in (-1/2, 1/2)$. Определим

ε -окрестности $U_\varepsilon \subset U$ и $V_\varepsilon \subset V$ для точек $\mathbf{z}$ и ζ соответственно следующим образом. Окрестность U_ε состоит из точек $\mathbf{z}'$, для которых $\operatorname{Re} \Omega_j(\mathbf{z}') = \alpha_j + t_j$, $t_j \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Аналогично определяется окрестность V_ε точки ζ . Нетрудно видеть, что любой дивизор $d' = \mathbf{z}' + \zeta'$, в котором точки $\mathbf{z}'$ и ζ' являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Omega_1(\mathbf{z}') &= \alpha_1 + t_1, \quad \operatorname{Re} \Omega_2(\mathbf{z}') = \alpha_2 + t_2, \\ \operatorname{Re} \Omega_1(\zeta') &= \beta_1 - t_1, \quad \operatorname{Re} \Omega_2(\zeta') = \beta_2 - t_2, \quad \text{где } t_1, t_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$

принадлежит множеству $\mathbb{D}(x^0)$. Таким образом, множество $\operatorname{pr} \mathfrak{D}$ содержит открытое множество $\operatorname{pr} U_\varepsilon \sqcup \operatorname{pr} V_\varepsilon$, т.е. является “двумерным”.

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. О непрерывных дробях // Ученые записки Императорской академии наук. 1855. Т. III. С. 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 103–126.)
2. Markoff A. A. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta Math. 1895. V. 19. P. 93–104. (Марков А. А. Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.)
3. Марков А. А. О корнях некоторых уравнений. I // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 34–43.
4. Суетин С. П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
5. Суетин С. П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // УМН. 2002. Т. 57. №1. С. 45–142.
6. Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 97 (139). С. 607–629.
7. Рахманов Е. А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). №2. С. 271–291.
8. Peherstorfer F. Zeros of polynomials orthogonal on several intervals // arXiv: math-ph/0203058 v1. 28 Mar 2002.
9. Гончар А. А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1982. Т. 118 (160). №4 (8). С. 535–556.
10. Stahl H. Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // Constr. Approx. 1986. V. 2. P. 225–240; 241–251.
11. Stahl H. Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1996. Spec. Iss. P. 121–193.
12. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
13. Stahl H. Conjectures around Baker–Gammel–Wills conjecture // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 287–292.
14. Buslaev V. I., Simple counterexample to the Baker–Gammel–Wills conjecture // East J. Approx. 2001. V. 7. №4. P. 515–517.
15. Буслаев В. И. О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде // Матем. сб. 2002. Т. 193. №6. С. 25–38.
16. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Собрание сочинений. Т. II. М.: АН СССР, 1952. С. 7–106.
17. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
18. Суетин С. П. О динамике “блуждающих” нулей полиномов, ортогональных на нескольких отрезках // УМН. 2002. Т. 57. №2. С. 199–200.
19. Ахиезер Н. И. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. №1. С. 9–12.

20. Ахиезер Н. И., Томчук Ю. Я. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 4. С. 743–746.
21. Ахиезер Н. И. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 2. С. 263–266.
22. Nuttall J., Singh R. S. Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs // J. Approx. Theory. 1977. V. 21. P. 1–42.
23. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386.
24. Widom H. Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3. P. 127–232.
25. Антекеров А. И. Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 2 (10). С. 231–258.
26. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory // Preprint, 1998.
27. Chen Y., Lawrence N. A generalisation of the Chebyshev polynomials // Preprint, 2001.
28. Dumas S. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues // Thesis. Zürich, 1908.
29. Никишин Е. М. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). № 2. С. 280–292.
30. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–180.
31. Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
32. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
33. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
34. Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. New York: Chelsea Publishing Company, XXIV, 1970.
35. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М.: ИЛ, 1962.
36. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
37. Дубровин Б. А. Периодические задачи для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 3. С. 41–52.
38. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
39. Разманов Е. А. Некоторые вопросы сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1983.
40. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I. М.: Наука, 1989.
41. Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Приложение к книге Р. Куранта “Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности”. М.: ИЛ, 1953. С. 234–301.