Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Феликсон, Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 12, 134–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:41:51

УДК 512.817.72+514.174.5

А. А. Феликсон

Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов

Кокстеровским разбиением многогранника в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ называется такое разбиение многогранника на конечное число кокстеровских многогранников, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую гипергрань, симметричны друг другу относительно нее. Классификация кокстеровских разбиений тесно связана с задачей классификации подгрупп конечного индекса, порожденных отражениями, в гиперболических дискретных группах, порожденных отражениями. В статье найдены все кокстеровские разбиения симплексов в гиперболических пространствах $\mathbb{H}^n$ при $n > 3$.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Выпуклый многогранник в пространстве постоянной кривизны называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Кокстеровским разбиением* выпуклого многогранника P называется такое его разбиение на конечное число кокстеровских многогранников, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую гипергрань, симметричны друг другу относительно нее.

Задача о кокстеровских разбиениях гиперболических треугольников исследовалась в ряде работ (см. [1]–[5]). В [6] перечислены кокстеровские разбиения гиперболических тетраэдров. В настоящей работе найдены все кокстеровские разбиения симплексов в гиперболических пространствах $\mathbb{H}^n$, $n \geq 4$. Тем самым закончена классификация кокстеровских разбиений гиперболических симплексов.

Автор благодарит Э. Б. Винберга за многочисленные ценные советы и постоянное внимание к работе.

Основные определения. Многогранники разбиения из определения 2 называются *фундаментальными*. Любые два фундаментальных многогранника, очевидно, конгруэнтны. Гиперплоскость α , содержащая гипергрань какого-нибудь фундаментального многогранника, называется *зеркалом*, если α не содержит гиперграни многогранника P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задано кокстеровское разбиение многогранника P . *Двугранный угол* многогранника P , образованный гипергранями α и β , называется *неразрезанным*, если грань $\alpha \cap \beta$ не принадлежит ни одному зеркалу.

Все многогранники, рассматриваемые в дальнейшем, суть многогранники, ограниченные зеркалами кокстеровского разбиения какого-либо многогранника. Под словами “грань многогранника” далее будем понимать гипергрань.

Обозначения:

P – симплекс, допускающий кокстеровское разбиение;

F – фундаментальный многогранник, рассматриваемый с точностью до конгруэнтности;

$\Sigma(T)$ – схема Кокстера симплекса Кокстера T ;

N – число фундаментальных многогранников, содержащихся внутри P .

Разбиение будет называться *нетривиальным*, если $N > 1$.

Для типов сферических и евклидовых симплексов Кокстера будут использованы стандартные обозначения $A_n, \tilde{A}_n, B_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, D_n, \tilde{D}_n, \dots$. Обозначения для гиперболических симплексов Кокстера введены в таблице 2.

§ 2. Общие свойства разбиений симплексов

2.1. Фундаментальный многогранник.

ТЕОРЕМА 1. Если P – гиперболический симплекс, то F – тоже симплекс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку разбиение конечно, в нем существует *минимальный* симплекс, не содержащий меньших симплексов. Докажем, что он и является фундаментальным многогранником. Без ограничения общности можно предположить, что сам симплекс P является минимальным.

Пусть P имеет разрезанный двугранный угол. Тогда любое зеркало, разрезающее двугранный угол симплекса P , отсекает от P меньший симплекс, что противоречит минимальности симплекса P . Поэтому все двугранные углы симплекса P не разрезаны.

Предположим, что F – не симплекс. Рассмотрим многогранники, которые можно отрезать от P одним зеркалом. Поскольку число зеркал конечно, среди таких многогранников можно выбрать *минимальный* многогранник M , т.е. многогранник, не содержащий других многогранников с тем же свойством. Пусть Π – зеркало, отсекающее M от симплекса P .

Покажем, что все двугранные углы многогранника M не разрезаны. В самом деле, углы при зеркале Π не могут быть разрезаны, поскольку иначе отрезался бы меньший многогранник, лежащий внутри M , что противоречило бы минимальности M . Остальные углы являются углами симплекса P и не могут быть разрезаны по доказанному выше. Поэтому двугранные углы многогранника M не могут быть разрезаны, а следовательно, M – многогранник Кокстера.

Пусть $A_0, \dots, A_k$ – вершины симплекса P , лежащие в M , а $A_{k+1}, \dots, A_n$ – остальные вершины P . Если $k = 0$, то M – симплекс, что противоречит минимальности симплекса P . Если $k \neq 0$, рассмотрим прямые A_0A_n и A_1A_n . Они пересекаются в точке A_n , а их части, являющиеся ребрами многогранника M , не пересекаются. Этого не может быть, поскольку M – остроугольный многогранник (см. [7]). Полученное противоречие доказывает, что F – симплекс.

ЛЕММА 1. Гиперболический симплекс Кокстера F может быть фундаментальным многогранником только для конечного числа кокстеровских разбиений симплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неевклидов симплекс полностью определяется величинами своих двугранных углов. Величины двугранных углов многогранника, допускающего кокстеровское разбиение, кратны величинам двугранных углов фундаментального многогранника. Поэтому для любого фундаментального симплекса F существует лишь конечное число возможных наборов двугранных углов симплекса P .

ЛЕММА 2 (свойство объемов). $\frac{\text{Vol } P}{\text{Vol } F} \in \mathbb{Z}$, где $\text{Vol } T$ – объем симплекса T .

Доказательство очевидно.

Объемы гиперболических симплексов Кокстера вычислены в работе [8]. Объемы n -мерных симплексов Кокстера при $n \geq 4$ мы приводим в таблице 2.

2.2. Три типа кокстеровских разбиений симплексов. Пусть задано кокстеровское разбиение симплекса P . Предположим, что симплекс P имеет разрезанный двугранный угол. Предположим также, что любой симплекс, лежащий внутри P , либо фундаментален, либо имеет разрезанный двугранный угол. Зеркало, разрезающее двугранный угол симплекса P , делит P на два меньших симплекса P_1 и P_2 . Зная разбиения этих симплексов, можно построить разбиение симплекса P . По предположению каждый из симплексов P_1 и P_2 либо является фундаментальным, либо имеет разрезанный угол. В последнем случае маленькие симплексы подразделяются на еще меньшие. Процесс деления симплексов на все меньшие и меньшие остановится только тогда, когда все симплексы разбиения станут фундаментальными. Поскольку P содержит конечное число фундаментальных симплексов, этот процесс остановится.

Обращая процесс деления симплексов, получаем следующую индуктивную процедуру сборки разбиения большого симплекса из разбиений меньших симплексов.

Шаг 0. Возьмем фундаментальный симплекс F , положим $P_0 = F$.

Шаг 1. Составим из двух экземпляров симплекса P_0 все возможные (т.е. допускающие кокстеровское разбиение с $N = 2$) симплексы $P_1, \dots, P_l$.

Шаг 2. Найдем все возможные симплексы $P_{l+1}, \dots, P_k$, состоящие из P_1 и P_0 (по одному экземпляру) или из двух экземпляров P_1 .

...

Шаг m . Пусть к концу $(m-1)$ -го шага получены симплексы $P_0, P_1, \dots, P_n$. Тогда на m -м шаге составляем все симплексы из P_{m-1} и P_i для каждого $i \leq m-1$ (если при этом получается разбиение, уже находящееся в списке $P_0, \dots, P_n$, записывать его второй раз не нужно).

Ясно, что если любой симплекс внутри P либо фундаментален, либо имеет разрезанный двугранный угол, то разбиение симплекса P может быть получено с помощью конечного числа шагов описанной выше индуктивной процедуры. Симплекс, полученный в ходе индуктивной процедуры, вообще говоря, может содержать симплекс, не имеющий разрезанных углов и не являющийся фундаментальным. Однако разбиение симплекса, не имеющего разрезанных двугранных углов, не может быть получено с помощью такой процедуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кокстеровское разбиение симплекса P будет называться разбиением

- *первого типа*, если это разбиение можно получить с помощью описанной выше индуктивной процедуры,

- *второго типа*, если все двугранные углы симплекса P не разрезаны,
- *третьего типа*, если P имеет разрезанный двугранный угол, но разбиение P не может быть получено с помощью индуктивной процедуры.

Для нахождения разбиений первого типа мы используем алгоритмическую процедуру. Поиск разбиений второго типа более сложен, поскольку не алгоритмизован. Разбиения третьего типа получатся как композиции разбиений первого и второго типов.

§ 3. Классификация разбиений симплексов

3.1. Разбиения первого типа. Зафиксируем фундаментальный симплекс F . Будем осуществлять индуктивную процедуру шаг за шагом. По лемме 1 симплекс F может быть фундаментальным лишь для конечного числа кокстеровских разбиений симплексов, причем каждое разбиение можно получить конечным числом способов. Поэтому после конечного числа шагов процедура закончится. К этому моменту будут получены все разбиения первого типа с фундаментальным симплексом F .

Число гиперболических симплексов Кокстера размерности большей чем 2 конечно. Для этих симплексов индуктивную процедуру можно провести последовательно, используя компьютер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть существуют разбиение $\Theta(F, P)$ симплекса P с фундаментальным симплексом F и разбиение $\Theta_1(T, P)$ симплекса P с фундаментальным симплексом T , причем каждое зеркало разбиения $\Theta_1(T, P)$ является зеркалом разбиения $\Theta(F, P)$. Тогда разбиение $\Theta(F, P)$ называется *композицией* разбиений $\Theta_1(T, P)$ и $\Theta(F, T)$, где $\Theta(F, T)$ – ограничение разбиения $\Theta(F, P)$ на симплекс T . Разбиение называется *простым*, если оно не является композицией никаких двух разбиений.

Ясно, что достаточно перечислить все простые разбиения. Число простых разбиений первого типа довольно велико. В частности, в лемме 3 доказано, что любой симплекс, не имеющий двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$, допускает кокстеровское разбиение. В таблицах 3 и 4 перечислены все простые разбиения первого типа симплексов, имеющих хотя бы один двугранный угол отличный от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. Полный список простых разбиений первого типа можно найти в [9].

Для доказательства леммы 3 потребуется следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть P – гиперболический, евклидов или сферический симплекс, не имеющий двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. Пусть двугранный угол α симплекса P равен $2\pi/3$, и пусть Π – плоскость, делящая угол α на два равных угла величины $\pi/3$. Тогда Π делит P на два симплекса P_1 и P_2 , каждый из которых не имеет двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по размерности симплекса. Если P – симплекс размерности 2, то P – сферический треугольник с углом $2\pi/3$, и лемму легко проверить перебором. Предположим, что лемма доказана для всех

симплексов размерности не более k . Докажем лемму для симплекса P размерности $k + 1$.

Рассмотрим двугранный угол симплекса P_1 , образованный плоскостью Π и гранью Φ симплекса P . Пусть A – вершина симплекса P , лежащая на $\Pi \cap \Phi$. Пусть s – сфера достаточно малого радиуса с центром в точке A (если вершина A идеальная, рассмотрим орисферу с центром в A). Пусть p – пересечение s с гранями симплекса P . Тогда p – сферический (соответственно евклидов) симплекс размерности k . По предположению индукции $s \cap \Pi$ делит p на симплексы p_1 и p_2 , не имеющие двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. Отсюда следует, что Π пересекает Φ под углом $\pi/2$, $\pi/3$ или $2\pi/3$.

ЛЕММА 3. Пусть P – гиперболический или сферический симплекс, не имеющий двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. Тогда P допускает кокстеровское разбиение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_P – группа, порожденная отражениями относительно гиперграней симплекса P . Предположим, что группа G_P дискретна и F – фундаментальная камера этой группы. Тогда P допускает кокстеровское разбиение с фундаментальным многогранником F (если P – симплекс Кокстера, получится тривиальное кокстеровское разбиение).

Докажем, что группа G_P дискретна. Предположим, что P не является симплексом Кокстера. Тогда хотя бы один двугранный угол симплекса P равен $2\pi/3$. Пусть α_1 – двугранный угол симплекса P равный $2\pi/3$. Рассмотрим плоскость Π , делящую угол α_1 на два равных угла величины $\pi/3$. По предложению 1 плоскость Π делит P на два симплекса P_1 и P'_1 , каждый из которых не имеет двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. Предположим, что симплекс P_1 не является кокстеровским. Тогда P_1 имеет двугранный угол α_2 равный $2\pi/3$ и P_1 можно разрезать на симплексы P_2 и P'_2 , каждый из которых не имеет двугранных углов отличных от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$. И так далее. Процесс деления симплекса P_i на меньшие симплексы P_{i+1} и P'_{i+1} не может продолжаться до бесконечности, поскольку в неевклидовом пространстве число симплексов с двугранными углами $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$ конечно (с точностью до движения). Поэтому на некотором шаге будет получен симплекс Кокстера P_k .

Пусть G_{P_i} и $G_{P'_i}$ – группы, порожденные отражениями относительно гиперграней симплексов P_i и P'_i соответственно ($i = 1, \dots, k$). Поскольку $\alpha_i = 2\pi/3$, получаем $G_{P_i} = G_{P_{i-1}} = G_{P'_i}$ (где $G_{P_0} = G_P$). Поэтому $G_{P_k} = G_P$. Группа G_{P_k} дискретна, а следовательно, дискретна и группа G_P .

3.2. Разбиения второго типа. Пусть симплекс P допускает такое кокстеровское разбиение, что все двугранные углы симплекса P не разрезаны. Очевидно, в этом случае P является симплексом Кокстера.

ЛЕММА 4 (свойство подсхем). Пусть симплекс P допускает кокстеровское разбиение второго типа с фундаментальным симплексом F . Тогда для любой вершины v схемы Кокстера $\Sigma(P)$ существует такая вершина w схемы $\Sigma(F)$, что либо $\Sigma(P) \setminus v = \Sigma(F) \setminus w$, либо симплекс p , соответствующий подсхеме $\Sigma(P) \setminus v$, допускает кокстеровское разбиение второго типа с фундаментальным симплексом f , соответствующим подсхеме $\Sigma(F) \setminus w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершина v схемы Кокстера $\Sigma(P)$ соответствует в симплексе P грани α , противоположащей вершине A .

Пусть вершина A принадлежит ровно одному фундаментальному симплексу F_A . Тогда все, кроме одной, грани симплекса F_A лежат на гранях симплекса P . Поэтому двугранные углы между соответствующими гранями симплексов P и F равны, а следовательно, $\Sigma(P) \setminus v = \Sigma(F) \setminus w$.

Пусть вершина A принадлежит нескольким фундаментальным симплексам. Рассмотрим малую сферу (орисферу) s с центром в точке A , не пересекающую зеркал, не проходящих через A . Кокстеровское разбиение симплекса P высекает на s кокстеровское разбиение сферического (евклидова) симплекса p . Очевидно, что схема Кокстера фундаментального симплекса этого разбиения совпадает с $\Sigma(F) \setminus w$ для некоторой вершины w схемы F . Поскольку все двугранные углы симплекса P не разрезаны, ясно, что не разрезаны также и все углы симплекса p .

Для применения свойства подсхем нам потребуется классификация разбиений сферических симплексов второго типа (см. [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Кокстеровское разбиение сферического многогранника называется *неразложимым*, если схема Кокстера фундаментального многогранника связна.

В [10] показано, что любое кокстеровское разбиение сферического симплекса является прямым произведением неразложимых разбиений, причем разбиение второго типа является произведением разбиений второго типа.

ТЕОРЕМА 2. *Неразложимое кокстеровское разбиение сферического симплекса второго типа однозначно определяется парой (F, P) . Все возможные такие пары перечислены в таблице 1.*

ТАБЛИЦА 1. Неразложимые кокстеровские разбиения второго типа сферических симплексов

F	P
H_3	$3A_1$
F_4	$2A_2$
H_4	$A_4, 2G_2^{(5)}, 2A_2, H_3 + A_1, D_4, 4A_1$
D_n	$D_{m_1} + \dots + D_{m_r} \ (m_1 + \dots + m_r = n),$ $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r > 1$, где $D_2 = 2A_1, D_3 = A_3$
E_6	$A_5 + A_1, 3A_2$
E_7	$D_6 + A_1, A_5 + A_2, 2A_3 + A_1, A_7, D_4 + 3A_1, 7A_1$
E_8	$A_8, A_7 + A_1, A_5 + A_2 + A_1, 2A_4, 4A_2, A_6 + A_2, E_7 + A_1,$ $D_8, D_6 + 2A_1, D_5 + A_3, 2D_4, D_4 + 4A_1, 2A_3 + 2A_1, 8A_1$

Для случаев, когда $F \neq H_3, H_4, F_4, B_n$, эта классификация непосредственно вытекает из результатов Е. Б. Дынкина [11]. Доказательство теоремы в остальных случаях см. в [10].

ЛЕММА 5. Пусть симплекс P размерности n допускает нетривиальное кокстеровское разбиение, в котором любая вершина v принадлежит ровно одному фундаментальному симплексу F_v . Тогда симплекс F_v не содержит вершин симплекса P , отличных от v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α_v — грань симплекса F_v , противоположная вершине v . Все грани симплекса F_v , за исключением α_v , лежат на гранях симплекса P . Предположим, что F_v содержит вершину $w \neq v$ симплекса P . Тогда α_v проходит через w . Поскольку разбиение нетривиально, α_v не лежит на грани симплекса P . Следовательно, вершина w принадлежит как минимум двум фундаментальным симплексам, что противоречит условию леммы.

ЛЕММА 6. Пусть симплекс P размерности $n > 2$ допускает кокстеровское разбиение, в котором каждая вершина принадлежит ровно одному фундаментальному симплексу. Тогда в этом разбиении $N \geq 2(n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную вершину v симплекса P . Эта вершина принадлежит ровно одному фундаментальному симплексу F_v . Пусть F^v — фундаментальный симплекс, имеющий с F_v общую грань (такой симплекс в разбиении только один). Пусть F_w и F^w — фундаментальные симплексы, построенные аналогичным образом в окрестности вершины $w \neq v$. Для доказательства леммы достаточно установить, что среди симплексов F_v, F^v, F_w и F^w нет совпадающих.

По построению $F_v \neq F^v$ и $F_w \neq F^w$. Предположим, что $F_v = F_w$, $F_v = F^w$, $F^v = F_w$ или $F^v = F^w$. Тогда симплексы $F_v \cap F^v$ и $F_w \cap F^w$ являются гранями одного и того же n -мерного фундаментального симплекса. Ввиду леммы 5 симплекс $F_v \cap F^v$ имеет вершины на внутренней части каждого из n ребер, сходящихся в v , а симплекс $F_w \cap F^w$ — на внутренней части каждого из ребер, сходящихся в w . Поэтому симплекс с гранями $F_v \cap F^v$ и $F_w \cap F^w$ должен иметь не менее $2n-1$ вершин, что невозможно при $n > 2$.

ЛЕММА 7. В кокстеровском разбиении, состоящем из двух фундаментальных симплексов, есть разрезанный двугранный угол.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 8. Пусть P — симплекс в $\mathbb{E}^n$, допускающий нетривиальное кокстеровское разбиение, причем симплексы F и P подобны. Если схема $\Sigma(F)$ отлична от $\tilde{C}_2$ и $\tilde{G}_2^{(5)}$, то $N \geq 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{v}$ — вершина расширенной схемы Дынкина $\Sigma(P)$, добавленная при расширении, а v — вершина симплекса P , противоположная грани, соответствующей вершине $\bar{v}$. Известно, что в этом случае стабилизатор вершины v в расширенной группе Вейля $\tilde{W}$ совпадает с множеством линейных частей движений из группы W . Поэтому вершина v симплекса P может принадлежать только одному фундаментальному симплексу F . При этом если схема $\Sigma(F)$ отлична от $\tilde{C}_2$ и $\tilde{G}_2^{(5)}$, то симплекс F гомотетичен симплексу P .

Пусть $\Sigma(P) \neq \tilde{A}_n$. Тогда симплекс F имеет ребро r_F , выходящее из вершины v и перпендикулярное противоположной ему грани α . Пусть r_P — ребро симплекса P , содержащее ребро r_F . При отражении относительно грани α прямая, содержащая ребро r_F , переходит в себя. Поэтому ребро r_P длиннее ребра r_F как минимум в два раза, и лемма доказана.

Пусть $\Sigma(P) = \tilde{A}_n$. Покажем, что и в этом случае коэффициент гомотетии не может быть меньше чем 2. Пусть $R_{\min}$ – множество самых коротких ребер симплекса F_v . Группа симметрий симплекса F_v действует на его вершинах транзитивно. Поэтому множество $R_{\min}$ содержит хотя бы одно ребро r_v , выходящее из вершины v . Пусть t_v – ребро симплекса P , содержащее ребро r_v . Фундаментальный симплекс не имеет ребер, более коротких, чем r_v . Поэтому ребро t_v длиннее ребра r_v не менее, чем в два раза, а следовательно, $\frac{\text{Vol } P}{\text{Vol } F} \geq 2^n$.

В трехмерном случае свойству объемов и свойству подсхем удовлетворяет много пар кокстеровских тетраэдров. В бóльших размерностях после применения свойства объемов, свойства подсхем, леммы 6 и леммы 7 оказывается, что пара (F, P) должна быть одной из следующих пар: (H_3^4, H_9^4) , $N = 10$; (H_5^5, H_{12}^5) , $N = 16$; (H_7^5, H_{11}^5) , $N = 6$; (H_4^5, H_{11}^5) , $N = 20$; (H_1^9, H_3^9) , $N = 527$. (Напомним, что обозначения для гиперболических симплексов Кокстера введены в таблице 2.)

Выясним для каждого из этих случаев, соответствует ли пара (F, P) какому-нибудь разбиению, и если соответствует, то какому. Пару (F, P) будем называть *видом* разбиения симплекса P с фундаментальным симплексом F . (Иногда рядом с парой (F, P) будем указывать число N .)

3.2.1. Разбиение вида (H_3^4, H_9^4) , $N = 10$ существует, причем ровно одно. Фундаментальный симплекс H_3^4 имеет единственную идеальную вершину. Подсхема, соответствующая сечению орисферой с центром в идеальной вершине, – параболическая схема $\tilde{A}_3$ (далее будем говорить, что сама идеальная вершина имеет вид $\tilde{A}_3$). Симплекс H_9^4 имеет три идеальные вершины такого же вида. По лемме 8 для любого разбиения вида $(\tilde{A}_3, \tilde{A}_3)$ верно $N = 1$ или $N \geq 8$. Поскольку 10 фундаментальных симплексов имеют в сумме 10 идеальных вершин, одна из идеальных вершин (обозначим ее v_1) симплекса H_9^4 принадлежит восьми фундаментальным симплексам, а каждая из двух оставшихся идеальных вершин – одному фундаментальному симплексу.

Единственное разбиение вида $(\tilde{A}_3, \tilde{A}_3)$, $N = 8$ устроено как показано на рис. 1. Так выглядит разбиение, высекаемое орисферой в окрестности вершины v_1 . Пусть $F_1, \dots, F_8$ – фундаментальные симплексы, содержащие v_1 , а $f_1, \dots, f_8$ – их грани, противоположные v_1 . Пусть S – объединение граней $f_1, \dots, f_8$. Тогда S имеет такую же комбинаторную структуру, как разбиение на рис. 1. При этом не все грани $f_1, \dots, f_8$ лежат в одной плоскости. В самом деле, грань f_1 перпендикулярна всем остальным граням симплекса F_1 , кроме одной грани, с которой она пересекается под углом $\pi/3$. Двумерную грань фундаментального симплекса H_3^4 , двугранный угол при которой равен π/n , будем называть *n-гранью*. Так же будем называть и двумерную грань фундаментального симплекса $\tilde{A}_3$ разбиения вида $(\tilde{A}_3, \tilde{A}_3)$, соответствующую *n-грани* в H_3^4 .

Заранее не ясно, какая именно грань является 3-гранью, иными словами, какая грань тетраэдра $A E F G$ на рис. 1 соответствует 3-грани.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существует ровно две 3-грани, делящие $A B C D$ на части: $L M F$, $L E K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество S делится двумерными 3-гранями на части, лежащие в разных трехмерных плоскостях. Только одна из этих плоскостей (назовем ее Π) содержит грань симплекса H_9^4 . Поэтому каждая грань f_i , $i = 1, \dots, 8$, такая,

Рис. 1.

что $f_i \notin \Pi$, принадлежит еще одному фундаментальному симплексу кроме F_i . Поскольку в разбиении есть только два симплекса кроме $F_1, \dots, F_8$, ясно, что только две грани из множества $f_1, \dots, f_8$ не лежат на плоскости Π . Поэтому только две 3-грани могут делить множество S на части, т.е. только две 3-грани соответствуют на рис. 1 треугольнику, лежащему внутри тетраэдра $ABCD$. Две двумерные грани, симметричные относительно какого-либо зеркала разбиения, либо одновременно являются 2-гранями, либо одновременно являются 3-гранями. Перебор четырех возможных вариантов показывает, что последние условия выполнены, только если 3-гранями являются KLM , LMF , LEF , LEK , KMD , AEF . Из этих 3-граней только LMF и LEK лежат внутри тетраэдра $ABCD$.

Приклеим к объединению фундаментальных симплексов $F_1, \dots, F_8$ еще два фундаментальных симплекса по гиперграням, соответствующим тетраэдрам $LMGC$ и $BKEL$. Ясно, что получится симплекс, причем его двугранные углы равны углам симплекса H_9^4 . Таким образом, получилось разбиение вида (H_3^4, H_9^4) , $N = 10$. Ясно, что других разбиений этого вида быть не может.

3.2.2. Разбиения вида (H_5^5, H_{12}^5) , $N = 16$ не существует. Схема H_{12}^5 имеет две параболические подсхемы $\tilde{C}_4$ и четыре параболические подсхемы $\tilde{F}_4$, а схема H_5^5 — по одной подсхеме $\tilde{C}_4$ и $\tilde{F}_4$. При этом симплекс $\tilde{F}_4$ не может быть разбит на симплексы $\tilde{C}_4$, а $\tilde{C}_4$ не может быть разбит на $\tilde{F}_4$. В самом деле, в схеме $\tilde{F}_4$ нет подсхемы $2B_2$, а в $\tilde{C}_4$ нет подсхемы $2A_2$, причем симплексы $2A_2$ и $2B_2$ не допускают разбиений второго вида с $N < 32$. Поэтому 16 вершин вида $\tilde{C}_4$, принадлежащих шестнадцати фундаментальным симплексам, распределены по двум таким же вершинам симплекса P , а 16 вершин вида $\tilde{F}_4$ — по четырем таким вершинам симплекса P . По лемме 8 в разбиении вида $(\tilde{F}_4, \tilde{F}_4)$ число фундаментальных симплексов либо равно 1, либо не меньше чем 16. Поэтому в симплексе H_{12}^5 каждая из четырех вершин вида $\tilde{F}_4$ принадлежит либо одной такой вершине симплекса H_5^5 , либо не менее чем шестнадцати таким вершинам.

Общее же число таких вершин во всех фундаментальных симплексах равно 16. Это невозможно.

3.2.3. Разбиения вида (H_7^5, H_{11}^5) , $N = 6$ не существует. Пусть такое разбиение существует. Тогда в шести фундаментальных симплексах всего $3 \cdot 6 = 18$ идеальных вершин. Эти 18 вершин распределены по пяти идеальным вершинам симплекса P . Никакая идеальная вершина симплекса P не может принадлежать ровно одному фундаментальному симплексу, поскольку в F нет подсхемы $\tilde{D}_4$. Она не может принадлежать ровно двум фундаментальным симплексам, так как иначе в симплексе P был бы разрезанный двугранный угол.

Предположим, что какая-то идеальная вершина симплекса P принадлежит ровно трем фундаментальным симплексам. Тогда существует разбиение второго типа, в котором $N = 3$ и $(F, P) = (\tilde{B}_4, \tilde{D}_4)$ или $(\tilde{F}_4, \tilde{D}_4)$. Но в $\tilde{D}_4$ есть подсхема $4A_1$, которой нет ни в $\tilde{B}_4$, ни в $\tilde{F}_4$, причем тетраэдр $4A_1$ не имеет разбиений второго типа с $N = 3$. Таким образом, разбиений вида $(\tilde{B}_4, \tilde{D}_4)$ и вида $(\tilde{F}_4, \tilde{D}_4)$ быть не может, а следовательно, никакая идеальная вершина симплекса P не принадлежит ровно трем фундаментальным симплексам.

Итак, каждая из пяти идеальных вершин симплекса P принадлежит как минимум четырем фундаментальным симплексам. Но общее число идеальных вершин во всех фундаментальных симплексах равно 18. Противоречие показывает, что разбиения вида (H_7^5, H_{11}^5) нет.

3.2.4. Разбиение вида (H_4^5, H_{11}^5) , $N = 20$ существует, причем ровно одно. Из леммы 8 следует, что идеальная вершина симплекса P в рассматриваемом разбиении может быть двух видов: вершина принадлежит либо ровно одному фундаментальному симплексу, либо не менее чем 16 фундаментальным симплексам. Симплекс $P = H_{11}^5$ имеет пять идеальных вершин. Поскольку $N = 20$, четыре из них являются вершинами первого вида, а одна – второго.

ЛЕММА 9. *Если разбиение вида (H_4^5, H_{11}^5) существует, то только одно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – вершина симплекса P , принадлежащая ровно одному фундаментальному симплексу F_1 , а α – грань симплекса F_1 , противоположная вершине v . Расположение симплекса F_1 внутри P полностью определяет разбиение. Поэтому достаточно показать, что грань α можно провести единственным способом. Ясно, что α перпендикулярна всем граням симплекса P , кроме некоторой грани β , причем эту грань можно выбрать произвольно среди граней, противоположащих идеальным вершинам (замена грани β на другую такую грань приведет к симметрии всего разбиения, а не к новому разбиению).

ЛЕММА 10. *Разбиение вида (H_4^5, H_{11}^5) , $N = 20$ существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму несложно доказать в линейной модели гиперболического пространства.

Опишем, как устроено получившееся разбиение. Это разбиение во многом похоже на четырехмерное разбиение вида (H_3^4, H_9^4) , $N = 10$. Наглядно представить это разбиение можно следующим образом.

Опишем сначала, как выглядит разбиение в окрестности идеальной вершины v , принадлежащей шестнадцати фундаментальным симплексам $F_1, \dots, F_{16}$. На ори-сфере с центром в v высекается евклидово разбиение вида $(\tilde{D}_4, \tilde{D}_4)$, $N^4 = 16$. В де-

картовых координатах симплекс D_4 , допускающий кокстеровское разбиение, можно задать как множество $\{P^4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, x_i \geq 0\}$. Тогда вершина $(0, 0, 0, 0)$ принадлежит двенадцати фундаментальным симплексам $f_1, \dots, f_{12}$. Разбиение в окрестности вершины $(0, 0, 0, 0)$ совпадает с разбиением вида $(D_3, A_1 + A_1 + A_1 + A_1)$, $N^3 = 12$. Четыре недостающих фундаментальных симплекса $f_{13}, \dots, f_{16}$ отрезаются от симплекса P^4 трехмерными 3-гранями $x_i = 1, i = 1, \dots, 4$.

Пусть $\bar{f}_i$ – четырехмерная грань симплекса F_i ($i = 1, \dots, 16$), противолежащая вершине v . Тогда грани $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{12}$ лежат в одной четырехмерной плоскости Π , а грани $\bar{f}_{13}, \dots, \bar{f}_{16}$ лежат в четырех других плоскостях и пересекают Π под углом $\pi/3$. Отразив симплексы $F_{13}, \dots, F_{16}$ относительно граней $\bar{f}_{13}, \dots, \bar{f}_{16}$ соответственно, получим четыре оставшихся фундаментальных симплекса $F_{17}, \dots, F_{20}$.

3.2.5. Разбиение вида (H_1^9, H_3^9) , $N = 527$ существует, причем ровно одно. Занумеруем вершины симплекса $P = H_3^9$ как показано на рис. 2. Из свойства подсхем следует, что вершина v симплекса P , противолежащая четвертой грани, принадлежит ровно одному фундаментальному симплексу F_1 . При этом симплекс F_1 можно расположить только одним способом относительно симплекса P . Поэтому разбиение вида (H_1^9, H_3^9) может быть только одно. Зададим нормали этих симплексов в координатах в линейной модели девятимерного гиперболического пространства. Тогда несложно проверить, что такое разбиение действительно существует: достаточно с помощью последовательных отражений симплекса F_1 получить грань симплекса P , противолежащую вершине v . Это можно сделать с помощью программы. При этом оказывается, что идеальная вершина, противолежащая первой грани, принадлежит 270 фундаментальным симплексам, идеальная вершина, противолежащая девятой грани, принадлежит 256 фундаментальным симплексам, а вершина, противолежащая десятой грани, принадлежит одному фундаментальному симплексу.

Рис. 2. Нумерация вершин схемы симплекса H_3^9

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Кокстеровское разбиение гиперболического симплекса второго типа однозначно определяется парой (F, P) . Все возможные такие пары перечислены в таблице 4.*

3.3. Разбиения третьего типа. Напомним, что разбиение симплекса P называется разбиением третьего типа, если P имеет разрезанный двугранный угол, но разбиение не может быть получено с помощью описанной в п. 2.2 индуктивной процедуры.

Пусть $\Theta_1(T, P)$ – разбиение симплекса P с фундаментальным симплексом T , а симплекс T допускает разбиение $\Theta_2(F, T)$ с фундаментальным симплексом F . Ясно, что тогда P допускает разбиение $\Theta(F, P)$ с фундаментальным симплексом F , являющееся композицией разбиений $\Theta_1(T, P)$ и $\Theta_2(F, T)$.

Ограничение разбиения $\Theta(F, P)$ на симплекс T будем обозначать через $\Theta(F, T)$.

ЛЕММА 11. Пусть $\Theta(F, P)$ – кокстеровское разбиение симплекса P с фундаментальным симплексом F , причем P разрезан зеркалом этого разбиения на симплексы P_1 и P_2 . Пусть существует такой симплекс $T \subseteq P_1$, что разбиение $\Theta(F, P_1)$ является композицией разбиения $\Theta(F, T)$ и некоторого разбиения $\Theta_1(T, P_1)$ симплекса P_1 с фундаментальным симплексом T , причем в разбиении $\Theta(F, T)$ все двугранные углы не разрезаны. Тогда разбиение $\Theta(F, P)$ является композицией разбиения $\Theta(F, T)$ и разбиения $\Theta_1(T, P)$ с фундаментальным симплексом T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = A_0 A_1 A_2 \dots A_n$, $P_1 = A_0 A_1 \dots A_{n-1} B$, $P_2 = B A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ ($B \in A_0 A_n$). Продолжим разбиение $\Theta_1(T, P_1)$ до разбиения $\Theta_1(T)$ всего пространства $\mathbb{H}^n$. Ясно, что все грани симплекса P , кроме, быть может, грани $\alpha = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$, лежат на зеркалах этого разбиения. Для доказательства леммы достаточно проверить, что грань α тоже лежит на зеркале разбиения $\Theta_1(T)$.

Рассмотрим множество S зеркал разбиения $\Theta_1(T)$, проходящих через $(n-2)$ -мерную грань $A_1 \dots A_{n-1}$. Предположим, что грань α не принадлежит S . Тогда α разрезает двугранный угол некоторого фундаментального симплекса T_1 разбиения $\Theta_1(T)$. А следовательно, каждый фундаментальный симплекс разбиения $\Theta(F, T)$ имеет разрезанный двугранный угол, что противоречит условию леммы.

ТЕОРЕМА 4. Любое разбиение третьего типа является композицией двух разбиений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta(F, P)$ – разбиение третьего типа симплекса P с фундаментальным симплексом F . По определению разбиения третьего типа симплекс P разрезан некоторым зеркалом этого разбиения на два симплекса P_1 и P_2 . Пусть Θ_1 и Θ_2 – ограничения разбиения $\Theta(F, P)$ на симплексы P_1 и P_2 соответственно. Тогда хотя бы одно из разбиений Θ_1 и Θ_2 является разбиением второго или третьего типа (иначе разбиение симплекса P можно было бы получить с помощью индуктивной процедуры). Предположим, что Θ_1 является разбиением второго типа. Тогда по лемме 11 (примененной в случае $T = P_1$) получим, что $\Theta(F, P)$ является композицией разбиения Θ_1 и некоторого разбиения симплекса P с фундаментальным симплексом P_1 .

Предположим, что Θ_1 является разбиением третьего типа. Тогда симплекс P_1 можно снова разрезать на два меньших симплекса. Поскольку разбиение $\Theta(F, P)$ является разбиением третьего типа, после некоторого числа шагов будет отрезан симплекс с разбиением второго типа. Тогда по лемме 11 разбиение симплекса, отрезанного на предыдущем шаге, является композицией некоторых разбиений. Применяя лемму 11 столько раз, сколько шагов было сделано, получим утверждение теоремы.

Таким образом, простые разбиения гиперболических симплексов исчерпываются простыми разбиениями первого и второго типов.

§ 4. Таблицы

ТАБЛИЦА 2.¹ Гиперболические симплексы Кокстера размерности ≥ 4

Схема Кокстера	Обозначение	Объем
$H_1^{(4)}$	0.00091385226
$H_2^{(4)}$	0.00776774420
$H_3^{(4)}$	0.01553548841
$H_4^{(4)}$	0.02376015874
$H_5^{(4)}$	0.02513093713
H_1^4	0.00685389195
H_2^4	0.01142315324
H_3^4	0.01370778389
H_4^4	0.02284630648
H_5^4	0.03426945973
H_6^4	0.06853891945
H_7^4	0.06853891945
H_8^4	0.09138522594
H_9^4	0.13707783890

4.1. Разбиения первого типа. Симплексы, имеющие двугранные углы вида $\pi k/q$, представляются следующими схемами, аналогичными схемам Кокстера: двугранному углу величины $\pi k/q$ соответствует на схеме ребро кратности $q - 2$, разделенное на k частей.

Список разбиений первого типа получен с помощью индуктивной процедуры. В случае отсутствия нетривиальных разбиений с данным фундаментальным симплексом Кокстера этот симплекс не приводится. Нетривиальные разбиения выписаны вслед за схемой Кокстера фундаментального для них симплекса в том порядке, в котором они получаются в индуктивной процедуре. Таблицы содержат только *простые* разбиения первого типа (определение простого разбиения см. в п. 3.1). Разбиения симплексов Кокстера выделены в отдельную таблицу.

Числа $(N, s; k, l, i, j)$, стоящие под схемами, указывают, как получено данное разбиение:

N — число фундаментальных симплексов в разбиении;

s — число склеек, необходимое для получения разбиения (если разбиение получено путем склеивания двух симплексов с числами склеек s_1 и s_2 , то $s = 1 + \max\{s_1, s_2\}$);

k и l — номера тех симплексов, допускающих кокстеровское разбиение с данным фундаментальным симплексом, склеиванием которых получено данное разбиение;

i и j — номера склеиваемых граней симплексов k и l соответственно (вершины схем пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$ слева направо).

¹ Таблица объемов взята из работы [8].

ТАБЛИЦА 2 (продолжение)

Схема Кокстера	Обозначение	Объем
	H_1^5	0.0001826041
	H_2^5	0.0005478123
	H_3^5	0.0009130206
	H_4^5	0.0010956247
	H_5^5	0.0018260413
	H_6^5	0.0020740519
	H_7^5	0.0036520826
	H_8^5	0.0054781239
	H_9^5	0.0075726186
	H_{10}^5	0.0109562478
	H_{11}^5	0.0219124956
	H_{12}^5	0.0292166608
	H_1^6	$0.3987432701 \times 10^{-4}$
	H_2^6	$0.7974865401 \times 10^{-4}$
	H_3^6	$2.9620928633 \times 10^{-4}$
	H_1^7	$0.1892871372 \times 10^{-5}$
	H_2^7	$0.2725266071 \times 10^{-5}$
	H_3^7	$0.5450532141 \times 10^{-5}$
	H_4^7	$4.1106779054 \times 10^{-5}$
	H_1^8	$0.0213042335 \times 10^{-6}$
	H_2^8	$0.1810859845 \times 10^{-6}$
	H_3^8	$0.3621719690 \times 10^{-6}$
	H_4^8	$5.7947515032 \times 10^{-6}$
	H_1^9	$0.0004650871 \times 10^{-7}$
	H_2^9	$0.1225504411 \times 10^{-7}$
	H_3^9	$0.2451008823 \times 10^{-7}$

Таблица 3. Простые разбиения первого типа симплексов Кокстера

F	P	N	s	(k, l, i, j)
$H_2^{(4)}$	$H_3^{(4)}$	2	1	$(0, 0, 4, 4)$
H_6^4	H_9^4	2	1	$(0, 0, 4, 4)$
H_7^4	H_9^4	2	1	$(0, 0, 1, 1)$
H_5^4	H_6^4	2	1	$(0, 0, 4, 4)$
H_5^4	H_7^4	2	1	$(0, 0, 0, 0)$
H_4^4	H_7^4	3	2	$(0, 0, 3, 3)$
H_4^4	H_8^4	4	2	$(1, 0, 0, 1)$
H_2^4	H_4^4	2	1	$(2, 2, 0, 0)$
H_2^4	H_5^4	3	2	$(1, 0, 0, 3)$
H_1^4	H_3^4	2	1	$(0, 0, 3, 3)$
H_1^4	H_5^4	5	3	$(3, 2, 0, 0)$

F	P	N	s	(k, l, i, j)
H_{10}^5	H_{11}^5	2	1	$(0, 0, 0, 0)$
H_8^5	H_{10}^5	2	1	$(0, 0, 0, 0)$
H_7^5	H_{12}^5	8	3	$(5, 5, 0, 0)$
H_7^5	H_{10}^5	3	2	$(1, 0, 0, 1)$
H_5^5	H_8^5	3	2	$(1, 0, 0, 4)$
H_5^5	H_7^5	2	1	$(0, 0, 0, 0)$
H_3^5	H_8^5	6	3	$(2, 2, 5, 5)$
H_3^5	H_7^5	4	3	$(2, 0, 0, 2)$
H_2^5	H_8^5	10	4	$(6, 6, 0, 0)$
H_2^5	H_4^5	2	1	$(0, 0, 0, 0)$
H_1^5	H_5^5	10	4	$(4, 6, 4, 1)$
H_1^5	H_3^5	5	4	$(7, 0, 5, 2)$
H_1^5	H_2^5	3	2	$(1, 0, 0, 1)$
H_1^6	H_2^6	2	1	$(0, 0, 5, 5)$
H_2^7	H_3^7	2	1	$(0, 0, 6, 6)$
H_2^8	H_3^8	2	1	$(0, 0, 7, 7)$
H_2^9	H_3^9	2	1	$(0, 0, 8, 8)$

ТАБЛИЦА 4.² Простые разбиения первого типа некокстеровских симплексов, имеющих двугранный угол отличный от $\pi/2$, $\pi/3$ и $2\pi/3$

Разбиения ограниченных четырехмерных симплексов

1. $F = H_1^4$			
0		1	
		$(2,1;0,0,0,0)$	$(2,1;0,0,4,4)$
4		5	
$(3,2;2,0,0,3)$	$(6,3;3,1,0,2)$	$(4,3;4,0,0,2)$	$(6,3;4,4,2,2)$
8		9	
$(6,3;4,4,4,4)$	$(12,4;5,5,1,1)$	$(5,4;6,0,4,1)$	$(6,4;6,1,4,0)$
12		13	
$(8,4;6,6,1,1)$	$(10,4;8,6,0,0)$	$(12,4;8,8,1,1)$	$(10,5;10,10,0,0)$
16		17	
$(10,5;10,10,3,3)$	$(8,5;11,1,4,0)$	$(11,5;11,10,0,4)$	$(12,5;11,11,1,1)$
20		21	
$(20,5;13,13,1,1)$	$(20,5;13,13,2,2)$	$(15,5;14,4,0,1)$	$(18,5;14,5,0,2)$
24		25	
$(24,5;14,14,3,3)$	$(14,6;15,6,0,2)$	$(20,6;15,13,0,0)$	$(20,6;15,15,1,1)$
28		29	
$(16,6;17,17,1,1)$	$(16,6;17,17,4,4)$	$(22,6;18,18,2,2)$	$(22,6;18,18,3,3)$
32		33	
$(26,6;20,11,0,0)$	$(40,6;20,20,1,1)$	$(30,6;21,13,0,3)$	$(30,6;22,22,0,0)$

² Полный список простых разбиений первого типа некокстеровских симплексов см. [9].

2. $F = H_2^4$

3. $F = H_3^4$

4. $F = H_4^4$

Разбиения неограниченных четырехмерных симплексов

Разбиения пятимерных симплексов

1. $F = H_1^5$ 0 1

(2,1;0,0,0,0)

2

(2,1;0,0,5,5)

3

(3,2;1,0,0,1)

4

(4,2;1,1,4,4)

5

(3,2;2,0,0,4)

6

(6,3;4,1,0,3)

7

(4,3;5,0,5,3)

8

(6,3;5,5,0,0)

9

(6,3;5,5,3,3)

10

(8,4;6,1,5,2)

11

(12,4;6,6,0,0)

12

(12,4;6,6,3,3)

13

(7,4;7,3,5,0)

14

(8,4;7,7,1,1)

15

(12,4;8,8,2,2)

16

(16,5;10,10,2,2)

17

(24,5;11,11,1,1)

18

(14,5;13,13,0,0)

19

(14,5;13,13,3,3)

20

(21,5;15,10,0,3)

21

(24,5;15,15,3,3)

22

(48,6;17,17,4,4)

23

(28,6;18,18,3,3)

24

(42,6;20,20,4,4)

2. $F = H_2^5$ 0 1

(2,1;0,0,4,4)

2

(2,1;0,0,5,5)

3

(3,2;1,0,0,3)

4

(4,2;1,1,1,1)

5

(5,3;3,2,0,0)

6

(6,3;3,3,3,3)

7

(10,4;5,5,2,2)

3. $F = H_3^5$ 0 1

(2,1;0,0,0,0)

2

(3,2;1,0,0,1)

3

(4,2;1,1,4,4)

4

(4,3;2,0,0,2)

5

(6,3;2,2,1,1)

6

(6,3;2,2,4,4)

7

(7,4;4,2,5,0)

Разбиения шестимерных симплексов

Разбиения семимерных симплексов

Разбиения восьмимерных симплексов

Разбиения девятимерных симплексов

4.2. Разбиения второго типа.

ТАБЛИЦА 5. Разбиения второго типа гиперболических симплексов

F	P	N	Описание
H_3^4	H_9^4	10	см. п. 3.2.2
H_4^5	H_{11}^5	20	см. п. 3.2.4
H_1^9	H_3^9	527	см. п. 3.2.5

Список литературы

1. *Klimenko E., Sakuma M.* Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ containing orientation-reversing elements // *Geom. Dedicata*. 1998. V. 72. P. 247–282.
2. *Knapp A. W.* Doubly generated Fuchsian groups // *Michigan Math. J.* 1968. V. 15. P. 289–304.
3. *Matelski J. P.* The classification of discrete 2-generator subgroups of $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ // *Israel J. Math.* 1982. V. 42. P. 309–317.
4. *Mostow G. D.* On discontinuous action of monodromy groups on the complex n -ball // *J. Amer. Math. Soc.* 1988. V. 1. №3. P. 555–586.
5. *Felikson A.* Coxeter decompositions of hyperbolic polygons // *European J. Combin.* 1998. V. 19. P. 801–817.
6. *Felikson A.* Coxeter decompositions of hyperbolic tetrahedra // Preprint № 98-083. Bielefeld.
7. *Андреев Е. М.* О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами // *Матем. заметки*. 1970. Т. 8. №4. С. 521–527.
8. *Johnson N. W., Kellerhals R., Ratcliffe J. G., Tschantz S. T.* The size of a hyperbolic Coxeter simplex // *Transform. Groups*. 1999. V. 4. №4. P. 329–353.
9. *Felikson A.* Coxeter decompositions of hyperbolic simplices // Preprint, arXiv:math.MG/0210067.
10. *Феликсон А.* Кокстеровские разбиения сферических симплексов с неразрезанными двугранными углами // *УМН*. 2002. Т. 57. №2. С. 201–202.
11. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // *Матем. сб.* 1952. Т. 30. №2. С. 349–462.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23.11.2001