Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Резонансное рассеяние в квантовых волноводах, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:02:40

УДК 517.958+621.372.8

А. А. Арсеньев

Резонансное рассеяние в квантовых волноводах

В рамках теории рассеяния Бирмана–Като исследовано взаимодействие квантового волновода с резонатором. Доказано существование полюсов матрицы рассеяния и вычислен скачок амплитуды рассеяния вблизи резонанса.

Библиография: 49 названий.

§ 1. Введение

Мы изучаем задачу рассеяния для пары эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в области, которая вне шара есть цилиндр. В математической теории распространения колебаний область подобного типа называется *волноводом*. Мы предполагаем, что на границе области заданы условия Дирихле и рассматриваем уравнение первого порядка по времени. Эта математическая модель описывает объект, который в современной математической физике называется *квантовым волноводом*. Теория квантовых волноводов возникла в связи с математическим описанием некоторых приборов квантовой электроники. Мы предполагаем, что часть области есть резонатор, и изучаем поведение матрицы рассеяния (т.е. матрицы коэффициентов прохождения и отражения) вблизи собственных частот резонатора.

Поясним на примере. Рассмотрим цилиндр, которого извне касается шар. Предположим, что точка касания цилиндра и шара расширена до небольшого отверстия и через отверстие внутренность шара соединяется с внутренностью цилиндра. Мы интересуемся тем, что происходит с распространяющейся по волноводу волной, когда ее частота изменяется в окрестности частот собственных колебаний шара. Аналогичная задача решается для того случая, когда резонатор расположен внутри волновода, например, когда резонатор есть часть цилиндра между двух сечений, в которых цилиндр сжат так, что его диаметр в этих сечениях мал. Мы доказываем, что если взаимодействие резонатора с волноводом превращает собственное колебание резонатора в захваченную моду (т.е. собственное колебание системы резонатор и волновод), то в окрестности резонанса матрица рассеяния есть гладкая функция спектрального параметра. Если же взаимодействие резонатора с волноводом превращает собственное колебание резонатора в квазистационарное состояние системы резонатор и волновод, то матрица рассеяния вблизи резонанса

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00271).

испытывает скачок, величина которого не зависит от деталей взаимодействия резонатора с волноводом, свойств резонатора и свойств волновода. В случае внешнего резонатора (типичный пример: касающийся цилиндра извне шар) скачок матрицы рассеяния может привести к “запиранию” волновода: на резонансной частоте волна будет полностью отражаться. В случае внутреннего резонатора (типичный пример: сжатый в двух сечениях цилиндр) скачок матрицы рассеяния может привести к туннелированию волны: она будет проходить без отражения. Эти утверждения суть следствия основного результата нашей работы – теоремы 2.

Опишем используемые обозначения. Точки d -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем символами $x, y, \dots$. Точка декартова произведения $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1$ обозначается символом $x \times z$, $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^1$. Пространство $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1$ отождествляется с $\mathbb{R}^{d+1}$. Скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве мы обозначаем символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Скалярное произведение линейно по второму аргументу. Символ $\| \cdot \|_B$ обозначает норму в банаховом пространстве B , если указание на пространство необходимо. Символ $f(x)$ в зависимости от контекста обозначает имя функции, оператор умножения на функцию или значение функции в точке. Символ $L(A \rightarrow B)$ обозначает банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B . Символ id обозначает единичный оператор. Символами δ , const мы будем обозначать положительные константы, точное значение которых для нас несущественно и которые могут принимать разные значения при каждом вхождении в формулы. Остальные обозначения будут пояснены позже. Мы без специальных ссылок будем использовать факты математической теории рассеяния, которые изложены в [1].

§ 2. Постановка задачи

Пусть S – связная открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. При $d > 1$ мы предполагаем, что граница ∂S гладкая (класса C^∞). Положим $D_0 = S \times \mathbb{R}^1$ и пусть D – область в $\mathbb{R}^{d+1}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $D \subset D_0$;
- 2) $\exists R_0: D \cap \{x \times z; x \times z \in \mathbb{R}^{d+1}, |z| > R_0\} = D_0 \cap \{x \times z; x \times z \in \mathbb{R}^{d+1}, |z| > R_0\}$;
- 3) $\partial D \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$.

Пусть L – оператор в $C^2(D)$

$$L = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x \times z) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x \times z), \quad 1 \leq i, j \leq d+1, \quad x_{d+1} = z. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что входящие в (1) функции заданы во всем пространстве и бесконечно дифференцируемы, оператор (1) эллиптичен и вне некоторого компакта выполнены равенства

$$c(x \times z) \equiv 0, \quad a_{ij}(x \times z) = \delta_{ij}.$$

Тем же символом L мы обозначим определяемое граничными условиями Дирихле на ∂D самосопряженное расширение оператора (1) в $L^2(D, dx dz)$. Символом L_0

мы обозначим отвечающее граничным условиям Дирихле самосопряженное расширение оператора

$$L_0 = -\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

в $L^2(D_0, dx dz)$.

Обозначим символом I оператор сужения

$$I: L^2(D_0, dx dz) \rightarrow L^2(D, dx dz), \quad If(x \times z) = f(x \times z), \quad x \times z \in D.$$

Оператор вложения

$$I^*: L^2(D, dx dz) \rightarrow L^2(D_0, dx dz)$$

определяется соотношением

$$\langle f, Ig \rangle = \langle I^* f, g \rangle. \quad (2)$$

В левой части равенства (2) стоит скалярное произведение в $L^2(D, dx dz)$, в правой – в $L^2(D_0, dx dz)$. Оператор I^* действует следующим образом:

$$I^* f(x \times z) = f(x \times z), \quad x \times z \in D, \quad I^* f(x \times z) = 0, \quad x \times z \in D_0 \setminus D.$$

Положим

$$W_{\pm}(L, L_0, I) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itL) I \exp(-itL_0), \quad (3)$$

$$S(L, L_0, I) = W_+^*(L, L_0, I) W_-(L, L_0, I). \quad (4)$$

В равенстве (3) и во всех аналогичных соотношениях берутся либо верхние знаки, либо нижние. Сопряжение в (4) понимается в смысле (2). Оператор $S(L, L_0, I)$ называется *оператором рассеяния для пары L, L_0* при отождествлении I . Он будет предметом нашего изучения.

Определим решения стационарной задачи рассеяния.

Пусть $\{\phi_m, \nu_m\}$ – собственные функции и собственные значения задачи

$$-\Delta_x \phi_m(x) = \nu_m \phi_m(x), \quad x \in S, \quad \phi_m(x) = 0, \quad x \in \partial S, \quad \nu_m \leq \nu_{m+1}. \quad (5)$$

Положим

$$e(\pm, m, \lambda, x \times z) = \exp(\pm iz \sqrt{\lambda - \nu_m}) \phi_m(x) \theta(\lambda - \nu_m), \quad (6)$$

где

$$\theta(\lambda) = 1, \quad \lambda > 0, \quad \theta(\lambda) = 0, \quad \lambda \leq 0.$$

Решением стационарной задачи рассеяния для оператора L мы называем функцию $u(\pm, m, \lambda, x \times z)$, которая удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$L_{x,z} u(\cdot, x \times z) = \lambda u(\cdot, x \times z), \quad x \times z \in D, \quad u(\cdot, x \times z) = 0, \quad x \times z \in \partial D, \quad (7)$$

и представима в виде

$$u(\pm, m, \lambda, x \times z) = e(\pm, m, \lambda, x \times z) + w(\pm, m, \lambda, x \times z), \quad (8)$$

где функция w удовлетворяет асимптотическим соотношениям

$$w(+, m, \lambda, x \times z) = \sum_p (t(+, p, m, \lambda) - \delta_{pm}) e(+, p, \lambda, x \times z) + O(\dots), \quad z > 0, \quad (9a)$$

$$w(+, m, \lambda, x \times z) = \sum_p r(+, p, m, \lambda) e(-, p, \lambda, x \times z) + O(\dots), \quad z < 0, \quad (9b)$$

$$w(-, m, \lambda, x \times z) = \sum_p r(-, p, m, \lambda) e(+, p, \lambda, x \times z) + O(\dots), \quad z > 0, \quad (9c)$$

$$w(-, m, \lambda, x \times z) = \sum_p (t(-, p, m, \lambda) - \delta_{pm}) e(-, p, \lambda, x \times z) + O(\dots), \quad z < 0, \quad (9d)$$

и

$$O(\dots) = O(\exp(-\delta|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Суммирование в (9) ведется по тем значениям индекса p , которые удовлетворяют условию $\nu_p < \lambda$. Коэффициенты $t(\pm, p, m, \lambda)$, $r(\pm, p, m, \lambda)$ называются *коэффициентами прохождения и отражения*. Напомним интерпретацию этих величин в рассматриваемой задаче. Оператор импульса квантовомеханической частицы, которая движется по оси z , есть $-i\hbar\partial/\partial z$. Поэтому среднее значение проекции импульса на ось z частицы, которая находится в состоянии $e(\pm, \dots)$, будет положительным или отрицательным в соответствии со знаками $\pm$. В соответствии с этим коэффициенты $t(\pm, p, m, \lambda)$ описывают вероятность частице, которая находится в состоянии $e(\pm, \dots)$, пройти из точки $z = \mp\infty$ в точку $z = \pm\infty$, а коэффициенты $r(\pm, p, m, \lambda)$ – отразиться. В дальнейшем мы будем говорить, что функция w удовлетворяет *условию излучения*, если для нее справедлива асимптотика вида (9).

Пусть преобразование

$$\mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}: x \times z \rightarrow \varphi(x \times z) \quad (10)$$

бесконечно дифференцируемо, взаимно однозначно и удовлетворяет условию

$$\varphi(x \times z) \equiv x \times z, \quad |x \times z| > R_0, \quad \det(\varphi(x_1, \dots, z)/(x_1, \dots, z)) > \text{const} > 0.$$

Пусть D_φ – образ области D при отображении (10). Отображение

$$U_\varphi: L^2(D_\varphi, dx dz) \rightarrow L^2(D, dx dz), \\ U_\varphi f(x \times z) = f(\varphi(x \times z)) (\det(\varphi(x_1, \dots, z)/(x_1, \dots, z)))^{1/2}$$

унитарно и обратное отображение дается формулой

$$U_\varphi^{-1}: L^2(D, dx dz) \rightarrow L^2(D_\varphi, dx dz), \\ U_\varphi^{-1} f(x \times z) = f(\varphi^{-1}(x \times z)) (\det(\varphi^{-1}(x_1, \dots, z)/(x_1, \dots, z)))^{1/2},$$

где

$$\varphi(\varphi^{-1}(x \times z)) \equiv x \times z.$$

Положим

$$L_\varphi = U_\varphi^{-1} L U_\varphi.$$

Если функция u есть решение задачи рассеяния для оператора L в области D , то функция $U_\varphi^{-1}u$ есть решение задачи рассеяния для оператора L_φ в области D_φ , причем коэффициенты прохождения и отражения для решений u и $U_\varphi^{-1}u$ совпадают. Ясно, что гладкой заменой переменных задача рассеяния для оператора L в области D может быть сведена к задаче рассеяния для оператора L_φ в области D_0 , но в дальнейшем нам будет нужно проследить, как изменяются коэффициенты прохождения и отражения при сингулярном возмущении области (например, при стягивании сечения цилиндра в точку). Мы не будем сводить такое возмущение области к возмущению коэффициентов.

Нам предстоит доказать существование и единственность решения задачи рассеяния, существование и полноту волновых операторов и выразить оператор рассеяния через коэффициенты прохождения и отражения. Традиционный путь решения этих задач опирается на изучение резольвент операторов L и L_0 . Особенность нашей задачи состоит в том, что, во-первых, операторы L и L_0 определены в разных областях и, во-вторых, в пересечении областей определения оператор возмущения $L - L_0$ есть дифференциальный оператор второго порядка. По-видимому, в этой ситуации для доказательства теорем существования можно было бы с небольшими изменениями использовать методы работ [2]–[4]. Однако наша основная задача состоит в изучении поведения коэффициентов прохождения и отражения при сингулярном возмущении области, и мы воспользуемся вытекающим из принципа инвариантности волновых операторов равенством

$$S(L, L_0, I) = S(J(L), J(L_0), I), \quad J(\lambda) = -\exp(-t\lambda). \quad (11)$$

Равенство (11) сводит изучение возмущения оператора L к изучению возмущения порожденной этим оператором полугруппы $\exp(-tL)$. Начиная с 60-х годов, подобный прием есть часть так называемого “марковского подхода” в квантовой теории поля и хорошо известен в теории потенциального рассеяния. В нашей задаче этот прием дает следующее.

1) Оператор $\exp(-tL)$ – это интегральный оператор, ядро которого – функция Грина уравнения теплопроводности, поэтому мы можем воспользоваться хорошо известными оценками, вывод которых подробно описан в доступной литературе [5], [6]. То обстоятельство, что в нашем случае граница ∂D не компактна, никак не влияет на построения работ [5], [6], так как ядра тепловых потенциалов – это гауссовы экспоненты и все интегралы по ∂D сходятся. Для рассматриваемого нами случая функцию Грина можно построить и как предел функций Грина в области $D \cap \{x \times z; |z| < R\}$, $R \rightarrow \infty$.

2) Для функции Грина исследование сингулярного возмущения области становится абсолютно тривиальным: достаточно применить принцип максимума для уравнения теплопроводности и доопределить нулем ядра интегральных операторов.

3) На основе полугруппового свойства легко доказывается, что оператор

$$V = J(L) - J(L_0) = \exp(-tL) - \exp(-tL_0)$$

– это ядерный оператор, поэтому можно применять стандартную схему теории рассеяния при ядерных возмущениях.

4) Произвол в выборе параметра t позволяет свести задачу к ситуации “общего положения” и без дополнительных условий доказать равенство нулю нильпотентов возмущенного оператора.

Появление гауссовых экспонент в оценках ядер интегральных операторов делает тривиальным обоснование всех выкладок, но за это приходится платить тем, что сопровождающие рассуждения формулы становятся очень громоздкими. По возможности мы не будем их выписывать.

§ 3. Вспомогательные построения

Пусть Ω – декартово произведение двухточечного множества $\{+, -\}$ на множество целых чисел $\mathbb{Z}$, $\Omega = \{\pm, \mathbb{Z}\}$. Превратим множество Ω в пространство с мерой $d\omega$, приписав точке $\{\pm, j\}$ меру 1. В пространстве $L^2(\Omega, d\omega)$ введем скалярное произведение, положив

$$\langle f, g \rangle_\Omega = \sum_j (\overline{f(-, j)}g(-, j) + \overline{f(+, j)}g(+, j)) \equiv \int_\Omega \overline{f(\omega)}g(\omega) d\omega.$$

Пространство

$$h = L^2([\nu_1, \infty) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega), d\lambda)$$

есть гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых функций на $[\nu_1, \infty)$ со значениями в $L^2(\Omega, d\omega)$. Норма в h задается формулой

$$\|f|h\|^2 = \int_{\nu_1}^{\infty} \|f(\cdot, \lambda)\|_{L^2(\Omega, d\omega)}^2 d\lambda.$$

Пространство h может быть отождествлено с $L^2(\Omega \times [\nu_1, \infty), d\omega \times d\lambda)$. Положим

$$\widehat{f}(\pm, j, \lambda) = \int_{D_0} e(\mp, j, \lambda, x \times z) f(x \times z) dx dz. \quad (12)$$

Обратим внимание на знаки в (12).

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} U: L^2(D_0, dx dz) &\rightarrow L^2([\nu_1, \infty) \rightarrow L^2(\Omega, d\lambda)), \\ Uf(\pm, j, \lambda) &= (4\pi\sqrt{\lambda - \nu_j})^{-1/2} \widehat{f}(\pm, j, \lambda). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что

$$\forall f \in L^2(D_0, dx dz): \quad Uf(\lambda, \pm, j) = 0, \quad \lambda \leq \nu_j. \quad (14)$$

Отображение U унитарно и диагонализует оператор L_0

$$\langle f, L_0 g \rangle = \int_{\nu_1}^{\infty} \lambda \langle Uf(\cdot, \lambda), Ug(\cdot, \lambda) \rangle_\Omega d\lambda.$$

Обратное отображение U^{-1} есть интегральный оператор в $L^2(\Omega \times [\nu_1, \infty), d\omega \times d\lambda)$ с ядром

$$U^{-1}(x \times z, \pm, j, \lambda) = (4\pi\sqrt{\lambda - \nu_j})^{-1/2} e(\pm, j, \lambda, x \times z). \quad (15)$$

ЛЕММА 1. *Оператор*

$$G_0(t) = \exp(-tL_0)$$

– это интегральный оператор в $L^2(D_0, dx \times dz)$ с ядром

$$G_0(x \times z, x' \times z', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(z - z')^2}{4t}\right) \sum_j \exp(-\nu_j t) \phi_j(x) \phi_j(x'). \quad (16)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что числа $\lambda_\infty, \lambda, \varepsilon$ выбраны так, что

$$\nu_1 < \lambda_\infty, \quad |\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon, \quad \{\lambda : |\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon\} \cap \{\nu_j\} = \emptyset$$

и число ε достаточно мало.

ЛЕММА 2. *При $0 < \operatorname{Im} \lambda < \pi/t$ оператор*

$$R_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} R(J(\lambda), J(L_0)) = (\exp(-tL_0) - \exp(-t\lambda))^{-1}$$

представим в виде

$$R_0(\lambda) = -\exp(t\lambda) \left(\operatorname{id} + \sum_{\nu_j < \lambda_\infty} K(\lambda - \nu_j) P_j \right) + A(\lambda),$$

где P_j – интегральный оператор в $L^2(S, dx)$ с ядром $\phi_j(x) \phi_j(x')$, $K(\lambda)$ – интегральный оператор в $L^2(R^1, dz)$ с ядром

$$K(z - z', \lambda) = \frac{i}{2t\sqrt{\lambda}} \exp(i|z - z'| \sqrt{\lambda}), \quad 0 < \arg \sqrt{\lambda} < \pi,$$

$A(\lambda)$ – интегральный оператор в $L^2(D_0, dx dz)$, ядро которого аналитично по λ в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$ и имеет оценку

$$\|A(\lambda)|L^2(S, dx)\| < \operatorname{const} \cdot \exp(-\delta|z - z'|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно: разлагаем в ряд Фурье по ϕ_j , берем преобразование Фурье по z , в формуле обращения для преобразования Фурье сдвигаем контур интегрирования в комплексную плоскость, учитываем вычеты и оцениваем интеграл по контуру. Сходимость ряда по ϕ_j контролируется на основе оценок

$$|\phi_j(x)| < \operatorname{const} (\nu_j)^{d/2}, \quad \nu_j \approx \operatorname{const} j^{2/d}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Оператор

$$G(t) = \exp(-tL) \quad (17)$$

— это интегральный оператор в $L^2(D, dx dz)$, ядро которого $G(x \times z, x' \times z', t)$ есть функция Грина задачи

$$\begin{aligned} \partial_t G(x \times z, x' \times z', t) &= -L_{x \times z} G(x \times z, x' \times z', t), \\ G(x \times z, x' \times z', +0) &= \delta(x \times z - x' \times z'), \\ G(x \times z, x' \times z', t) &= 0, \quad x \times z \in \partial D. \end{aligned} \quad (18)$$

По переменным $x \times z, x' \times z'$ доопределим функцию $G(x \times z, x' \times z', t)$ нулем на область D_0 и будем в дальнейшем обозначать символом $G(t)$ интегральный оператор в $L^2(D_0, dx dz)$ с ядром, доопределенным таким образом. Ясно, что равенство (17) сохранится лишь на функциях с носителем в D . В силу принципа максимума выполнено неравенство

$$0 \leq G(x \times z, x' \times z', t) \leq \tilde{G}(x \times z, x' \times z', t), \quad (19)$$

где $\tilde{G}$ — фундаментальное решение уравнения (18) во всем пространстве.

Положим

$$V = G_0 - G.$$

ЛЕММА 3. *Справедливы оценки*

$$0 \leq G(x \times z, x' \times z', t) \leq \text{const} \cdot \exp(-\delta|z - z'|^2), \quad (20)$$

$$|V(x \times z, x' \times z', t)| \leq \text{const} \cdot \exp(-\delta(z^2 + (z')^2)). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (20) есть следствие оценки (19) и оценки (6.12) из [6]. Оценку (21) получаем так. В сечениях $z = \pm R_0$ используем оценку (20), а в области $|z| > R_0$ используем тот факт, что по переменным $x \times z$ функция V есть решение уравнения теплопроводности с нулевыми начальными данными и нулевым значением на ∂D .

Пусть $H_{\pm}$ — гильбертовы пространства с нормой

$$\|f\|_{H_{\pm}}^2 = \int_{D_0} |f(x \times z)|^2 \exp(\mp|z|) dx dz.$$

Установим двойственность между H_+ и H_- с помощью билинейной формы

$$H_+ \times H_- \ni f \times g \mapsto \langle f|g \rangle = \int_{D_0} f(x \times z)g(x \times z) dx dz.$$

ЛЕММА 4. 1) В $L^2(D_0, dx)$ оператор V самосопряженный и ядерный.
2) В $L(H_+ \rightarrow H_-)$ оператор V вполне непрерывный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем равенство

$$V(2t) = G_0(t)^2 - G(t)^2 = [G_0(t)Z(a)][Z(a)^{-1}(G_0(t) - G(t))] + [(G_0(t) - G(t))Z(a)^{-1}][Z(a)G(t)], \quad (22)$$

где $Z(a)$ – оператор умножения на $\exp(-a|z|)$. При соответствующем выборе параметра a каждый из операторов $[\dots]$ в (22) есть оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(D_0, dx dz)$, что и доказывает ядерность оператора V . Аналогично доказывается вполне непрерывность.

Положим

$$\Gamma(\lambda) = R_0(\lambda)V, \quad 0 < \operatorname{Im} \lambda < \frac{\pi}{t}. \quad (23)$$

ЛЕММА 5. 1) *Функция*

$$\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) \in L(H_+ \rightarrow H_+)$$

имеет аналитическое продолжение из области $\{\lambda : |\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ в круг $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$, и ее значения в этом круге – вполне непрерывные операторы.

2) *В круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$ справедливо равенство*

$$(G_0(t) - \exp(-t\lambda))\Gamma(\lambda) = G_0(t) - G(t). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$ оператор $R_0(\lambda)$ аналитичен по λ как функция со значениями в $L(H_- \rightarrow H_+)$. Далее воспользуемся леммой 4.

Пусть $\{D_n\}$ – последовательность областей, каждая из которых удовлетворяет условиям 1)–3) для области D (с фиксированным R_0) (см. §2) и такая, что

1) $D_{n+1} \subset D_n$;

2) область

$$D_\infty = \operatorname{Int} \bigcap_n D_n$$

имеет гладкую границу ∂D_∞ и есть объединение двух непустых областей

$$D_\infty = D_{\text{out}} \cup D_{\text{int}}, \quad \operatorname{dist}(D_{\text{out}}, D_{\text{int}}) > 0,$$

где область D_{int} связна и ограничена, а область D_{out} либо связна, либо состоит из двух связных компонент;

3) $d(D_n, D_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{mes}_{d+1}(D_n \setminus D_\infty) + \operatorname{mes}_d(\partial D_\infty \setminus \partial D_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Мы будем помечать индексом n величины, которые соответствуют области D_n .

ЛЕММА 6. *Справедлива оценка*

$$\int_{D_0} |G_n(x \times z, x' \times z', t) - G_\infty(x \times z, x' \times z', t)| dx dz dx' dz' < \operatorname{const} \cdot d(D_n, D_\infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу принципа максимума

$$0 \leq G_\infty \leq G_n \leq \tilde{G}. \quad (25)$$

Положим

$$\alpha(x \times z, t) = \int_{D_0} (G_n(x \times z, x' \times z', t) - G_\infty(x \times z, x' \times z', t)) dx' dz'.$$

Справедливо равенство

$$\int_{D_0} \alpha(x \times z, t) dx dz = \int_{D_n \setminus D_\infty} \alpha(x \times z, t) dx dz + \int_{D_\infty} \alpha(x \times z, t) dx dz.$$

Для оценки первого интеграла используем оценку (25) и получим

$$\int_{D_n \setminus D_\infty} \alpha(x \times z, t) dx dz \leq \text{const} \cdot \text{mes}_{d+1}(D_n \setminus D_\infty).$$

Далее заметим, что в области D_∞ функция $\alpha(x \times z, t)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha(x \times z, t) &= -L_n \alpha(x \times z, t), \quad x \times z \in D_\infty, \quad t > 0, \\ \alpha(x \times z, 0) &= 0, \quad x \times z \in D_\infty, \quad \alpha(x \times z, t) = 0, \quad x \times z \in \partial D_\infty \cap \partial D_n, \\ \alpha(x \times z, t) &= \int_{D_\infty} (G_n(x \times z, x' \times z', t) - G_\infty(x \times z, x' \times z', t)) dx' dz' \\ &\equiv \beta(x \times z, t), \quad x \times z \in \partial D_\infty \setminus \partial D_n. \end{aligned}$$

Применим формулу Грина к функции $\alpha(x, t)$ и функции $G_\infty(x, x', t)$. Получим

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \int_0^t \int_{\partial D_\infty \setminus \partial D_n} l_{x \times z} \nabla_{x \times z} G_\infty(x \times z, x' \times z', t - \tau) \beta(x' \times z', \tau) dx' dz' d\tau, \\ &\quad x \times z \in D_\infty, \end{aligned}$$

где $l_{x \times z}$ — нормаль к ∂D_∞ . Интегрируем это равенство по D_∞ , при оценке градиента функции $G_\infty(x \times z, x' \times z', t - \tau)$ на границе учитываем гладкость ∂D_∞ . Получим оценку

$$\int_{D_\infty} \alpha(x \times z, t) dx dz \leq \text{const} \cdot \text{mes}_d(\partial D_\infty \setminus \partial D_n).$$

Следствием леммы 6 является

ЛЕММА 7. *Справедлива оценка*

$$\|(\Gamma_n(\lambda) - \Gamma_\infty(\lambda)) \mid L(H_+ \rightarrow H_+)\| < \text{const} \cdot d(D_n, D_\infty)^{1/2}. \quad (26)$$

§ 4. Стационарная задача рассеяния

ЛЕММА 8. *Интегральные операторы $G(t)$ в $L^2(D, \exp(-|z|) dx dz)$ порождают полугруппу класса C_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нем нуждается только ограниченность операторов $G(t)$, а она есть следствие леммы 3.

В дальнейшем на функциях с носителем в D мы будем рассматривать оператор (1) как инфинитезимальный оператор полугруппы $G(t)$ в $L^2(D, \exp(-|z|) dx dz)$.

ЛЕММА 9. *Если функция u при некотором $t > 0$ есть решение уравнения*

$$G(t)u = \exp(-t\lambda)u, \quad u \in L^2(D, \exp(-|z|) dx dz), \quad (27)$$

то она удовлетворяет уравнению (27) при всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение есть следствие теоремы 16.7.2 из [8].

Очевидным следствием леммы 9 является

ЛЕММА 10. *Функция u есть решение уравнения*

$$Lu = \lambda u, \quad u \in L^2(D, \exp(-|z|) dx dz), \quad (28)$$

в том и только том случае, если она есть решение уравнения (27) при каком-либо $t > 0$.

В дальнейшем мы доопределим решение задачи рассеяния нулем на область $D_0 \setminus D$. С учетом доопределения оператора $G(t)$ ясно, что эквивалентность уравнений (28) и (27) в пространстве H_+ при этом сохраняется.

ЛЕММА 11. *Функция u в (8) есть решение уравнения (28) в том и только том случае, если функция w удовлетворяет уравнению*

$$(G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\cdot, \lambda) = V(e(\cdot, \lambda) + w(\cdot, \lambda)). \quad (29)$$

ЛЕММА 12. *Функция w в (29) удовлетворяет условиям излучения (9) в том и только том случае, если функция w есть решение уравнения*

$$w(\cdot, \lambda) = \Gamma(\lambda)(e(\cdot, \lambda) + w(\cdot, \lambda)), \quad \lambda \in (\nu_1, \infty) \setminus \{\nu_j\}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция w в (29) удовлетворяет условиям (9), то умножим обе части (29) на $(G_0(t) - \exp(-t(\lambda + i\varepsilon)))^{-1}$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условия излучения и лемма 2 позволят нам вычислить этот предел и получить (30). Если выполнено уравнение (30), то выполнение уравнения (29) следует из леммы 5, а выполнение условий излучения следует из леммы 2.

Итак, справедлива

ЛЕММА 13. *Функция u в (8) есть решение задачи рассеяния в том и только том случае, если функция w есть решение уравнения (30).*

Заметим, что уравнение (30) – это уравнение Липмана–Швингера для пары $-G(t), -G_0(t)$.

ЛЕММА 14. *Если при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ функция $w(\cdot, \lambda)$ есть решение уравнения*

$$w(\cdot, \lambda) = \Gamma(\lambda)w(\cdot, \lambda), \quad w(\cdot, \lambda) \in H_+, \quad (31)$$

то

$$Lw(\cdot, \lambda) = \lambda w(\cdot, \lambda), \quad w(x \times z, \lambda) = O(\exp(-\delta|z|)), \quad z \rightarrow \infty. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим слева (31) на $(G_0(t) - \exp(-t\lambda))$. Получим, что решение уравнения (31) удовлетворяет уравнению (27) и поэтому удовлетворяет уравнению (28). Если $\operatorname{Im} \lambda > 0$, то оценка (32) следует из леммы 2. При $\operatorname{Im} \lambda = 0$ справедливо равенство

$$\overline{w}Lw - wL\overline{w} = 0.$$

Интегрируем это равенство по области $D \cap \{x \times z : |z| < R\}$, применяем формулу Грина, на ∂D используем граничные условия, на поверхности $z = \pm R$ используем условия излучения. Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем, что множители перед функциями e в асимптотике функции w равны нулю и поэтому справедлива оценка (32).

Итак, мы получаем, что оператор $\Gamma_n(\lambda)$ вполне непрерывен, аналитичен по λ и равномерно по λ сходится при $n \rightarrow \infty$. Ядро оператора $\operatorname{id} - \Gamma_n(\lambda)$ описано в лемме 14. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. 1) *При $\operatorname{Im} \lambda = 0$ либо уравнение (32) имеет принадлежащее $L^2(D, dx dz)$ нетривиальное решение, либо решение задачи рассеяния существует, единственно и в некоторой окрестности точки λ есть аналитическая функция параметра λ со значениями в пространстве H_+ .*

2) *Если при $\lambda = \lambda_\infty$, $L = L_\infty$ уравнение (32) не имеет нетривиальных решений, то существуют такие $n_0 < \infty$, $\varepsilon > 0$, что при $n > n_0$, $\lambda_\infty - \varepsilon < \lambda < \lambda_\infty + \varepsilon$ решение задачи рассеяния для оператора L_n существует, единственно и в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$ есть аналитическая функция параметра λ со значениями в пространстве H_+ и непрерывная функция параметра n в окрестности $n = \infty$. Коэффициенты прохождения и отражения для оператора L_n аналитичны по λ в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon$ и непрерывны по n в окрестности $n = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поясним, как получаются утверждения о коэффициентах прохождения и отражения. Для этого мы сначала из уравнения (30) получаем явные выражения коэффициентов через решение задачи рассеяния, а затем используем свойства решения задачи рассеяния.

§ 5. Вычисление матрицы рассеяния

Так как оператор V ядерный, волновые операторы для пары $-G(t)$, $-G_0(t)$ существуют, полны и существует оператор рассеяния $S(-G(t), -G_0(t), \text{id})$. Оператор $(\text{id} - I^* I)$ есть оператор умножения на характеристическую функцию компактного множества $D_0 \setminus D$, а для любого компакта K и любой $f \in C^\infty(D_0)$ справедливо равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\exp(\pm i\tau G_0)f \mid L^2(K, dx dz)\| = 0,$$

поэтому

$$S(-G(t), -G_0(t), \text{id}) = S(-G(t), -G_0(t), I) = S(J(L), J(L_0), I) = S(L, L_0, I).$$

Итак, нам достаточно вычислить оператор рассеяния $S(-G(t), -G_0(t), I)$.

Положим

$$R(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (G(t) - \exp(-t\lambda))^{-1}.$$

Пусть функции w и e связаны с решением задачи рассеяния соотношением (8). Тогда функция w есть решение уравнения (30).

ЛЕММА 15. *Справедливо равенство*

$$w(\cdot, \lambda) = R(\lambda)Ve(\cdot, \lambda). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (33) через $\tilde{w}$. В области $\text{Im } \lambda \geq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda)(e(\cdot, \lambda) + \tilde{w}) &= R_0(\lambda)(G_0 - G)e(\cdot, \lambda) + R_0(\lambda)(G_0 - G)R(\lambda)(G_0 - G)e(\cdot, \lambda) \\ &= (R_0(\lambda) + R_0(\lambda)(G_0 - G)R(\lambda))(G_0 - G)e(\cdot, \lambda) \\ &= R(\lambda)Ve(\cdot, \lambda) = \tilde{w}. \end{aligned}$$

Так как решение уравнения (30) единственно, $\tilde{w} = w$.

Так как оператор $G_0(t)$ коммутирует с оператором $S(-G(t), -G_0(t), \text{id})$, оператор $US(-G(t), -G_0(t), \text{id})U^{-1}$ в пространстве h задается операторной функцией

$$\lambda \mapsto S(-G(t), -G_0(t) \mid \lambda) \in L(L^2(\Omega, d\omega) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega)).$$

Из общей теории [1] следует, что

$$S(-G(t), -G_0(t) \mid \exp(-t\lambda)) = \text{id} - 2\pi i T_\Omega(-G(t), -G_0(t) \mid -\exp(-t\lambda)),$$

где $T_\Omega(\dots)$ – интегральный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$ с ядром

$$T_\Omega(-G(t), -G_0(t) \mid -\exp(-t\lambda), \omega_1, \omega_2) = U(T(\lambda)U^{-1}(\lambda, \omega_1))(\lambda, \omega_2) \quad (34)$$

и

$$T(\lambda) = V + VR(\lambda)V. \quad (35)$$

ЛЕММА 16. *Справедливо равенство*

$$T(\lambda)e(\omega, \lambda) = (G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\omega, \lambda), \quad \text{Im } \lambda \geq 0. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (33) следует, что

$$Ve(\omega, \lambda) = (G_0(t) - \exp(-t\lambda) - V)w(\omega, \lambda).$$

Поэтому, учитывая равенство (33), мы получаем

$$\begin{aligned} T(\lambda)e(\omega, \lambda) &= (G_0(t) - \exp(-t\lambda) - V)w(\omega, \lambda) + VR(\lambda)Ve(\omega, \lambda) \\ &= (G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\omega, \lambda). \end{aligned}$$

Учитывая определения (12), (13), мы видим, что справедлива

ЛЕММА 17. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} &T_\Omega(-G(t), -G_0(t) \mid -\exp(-t\lambda), \omega_1, \omega_2) \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(\lambda - \nu_{j_1})(\lambda - \nu_{j_2})}} \langle e(\omega_1, \lambda) \mid (G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\omega_2, \lambda) \rangle, \\ &\quad \omega_1 = \{\pm, j_1\}, \quad \omega_2 = \{\pm, j_2\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Итак, наша задача свелась к вычислению правой части (37). Заметим, что в равенстве (37) нельзя перебросить оператор $(G_0(t) - \exp(-t\lambda))$ на $e(\omega_1, \lambda)$.

Пусть $Z(\varepsilon)$ — оператор умножения на $\exp(-\varepsilon|z|)$ в $L^2(D_0, dx dz)$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\langle e(\omega_1, \lambda) \mid (G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\omega_2, \lambda) \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle Z(\varepsilon)e(\omega_1, \lambda) \mid (G_0(t) - \exp(-t\lambda))w(\omega_2, \lambda) \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle (G_0(t) - \exp(-t\lambda))Z(\varepsilon)e(\omega_1, \lambda) \mid w(\omega_2, \lambda) \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Определим функцию

$$\begin{aligned} \beta(\varepsilon, y, b) &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} + ixb - \varepsilon|x|\right) dx \\ &\quad - \exp(-b^2 t + iby - \varepsilon|y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Справедлива

ЛЕММА 18. 1) *Если $\varphi(y)$ абсолютно интегрируема, то*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\varepsilon, y, b) \varphi(y) dy = 0.$$

2) *Для любых $R > 0$, $a \in \mathbb{R}^1$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_R^\infty \beta(\varepsilon, y, b) \exp(-ia y) dy &= -2ibt \exp(-b^2 t) \delta_{ab}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-R} \beta(\varepsilon, y, b) \exp(-ia y) dy &= 2ibt \exp(-b^2 t) \delta_{ab}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к прямому вычислению.

Из (38) с учетом леммы 18 и формулы (7.2.4) из [1] следует утверждение.

ЛЕММА 19. *Справедливы равенства*

$$-2\pi iT_\Omega(L, L_0 \mid \lambda, (+, p), (+, m)) = t(+, p, m, \lambda) - \delta_{pm}, \quad (39a)$$

$$-2\pi iT_\Omega(L, L_0 \mid \lambda, (+, p), (-, m)) = r(+, p, m, \lambda), \quad (39b)$$

$$-2\pi iT_\Omega(L, L_0 \mid \lambda, (-, p), (+, m)) = r(-, p, m, \lambda), \quad (39c)$$

$$-2\pi iT_\Omega(L, L_0 \mid \lambda, (-, p), (-, m)) = t(-, p, m, \lambda) - \delta_{pm}. \quad (39d)$$

Заметим, что при вычислении матрицы рассеяния следует учесть равенство (14).

§ 6. Поведение матрицы рассеяния вблизи резонанса

Рассмотрим случай, когда уравнение

$$\psi_\infty = \Gamma_\infty(\lambda_\infty)\psi_\infty, \quad \psi_\infty \in H_+,$$

имеет нетривиальное решение. Оно является решением уравнения

$$\lambda_\infty \psi_\infty = L_\infty \psi_\infty, \quad \psi_\infty \in L^2(D, dx dz), \quad (40)$$

т.е. точка λ_∞ есть погруженное в непрерывный спектр собственное значение оператора L_∞ . Нас интересует поведение матрицы рассеяния для пары L_n, L_0 при больших n в окрестности точки λ_∞ . Как правило, в подобной ситуации при возмущении собственное значение может остаться собственным значением (т.е. остаться на действительной оси) или превратиться в резонанс (т.е. приобрести отличную от нуля мнимую часть). Мы будем использовать предложенную в [7] модель образования резонансов. При сопоставлении данной работы с работой [7] следует величины, которые в данной работе обозначены символами $-G_n(t)$, $-\exp(-t\lambda)$, сопоставить с величинами, которые в [7] обозначены символами A_n, λ соответственно.

Предположим, что размерность собственного пространства (40) равна единице, т.е. точка λ_∞ есть простое собственное значение. Докажем, что в этом случае при соответствующем выборе параметра t точка λ_∞ есть полюс первого порядка для операторной функции

$$\lambda \mapsto (\text{id} - \Gamma_\infty(\lambda))^{-1} \in L(H_+ \rightarrow H_+). \quad (41)$$

В наших обозначениях квадратичная форма (7) из [7] принимает вид

$$\langle \psi_\infty \mid V_\infty \psi_\infty \rangle = \langle \psi_\infty \mid G_0(t) \psi_\infty \rangle - \exp(-t\lambda_\infty). \quad (42)$$

Ясно, что за счет выбора параметра t правую часть (42) можно сделать не равной нулю. Из лемм 1 и 3 работы [7] следует, что в этом случае точка λ_∞ есть полюс первого порядка для (41) и что в круге $\{\lambda : |\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon\}$ при n достаточно большом есть одна и только одна особая точка операторной функции

$$\lambda \mapsto (\text{id} - \Gamma_n(\lambda))^{-1} \in L(H_+ \rightarrow H_+) \quad (43)$$

и эта особая точка есть полюс первого порядка, который мы обозначим через λ_n . Известно, что $\operatorname{Im} \lambda_n \leq 0$. Рассмотрим два случая:

$$\forall n: \quad \operatorname{Im} \lambda_n = 0, \quad \forall n: \quad \operatorname{Im} \lambda_n < 0.$$

В первом случае из лемм 4 и 5 работы [7] и формулы (31) работы [7] следует, что в круге $\{\lambda : |\lambda - \lambda_\infty| < \varepsilon\}$ существуют равномерно по λ пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\pm, p, m, \lambda) = r_\infty(\pm, p, m, \lambda), \quad (44a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\pm, p, m, \lambda) = t_\infty(\pm, p, m, \lambda). \quad (44b)$$

Очевидно, что t_∞, r_∞ суть коэффициенты прохождения и отражения решения задачи рассеяния для сужения оператора L_∞ на $L^2(D_{\text{out}}, dx dz)$. Действительно, правые части (44) аналитичны по λ , а для $\lambda \neq \lambda_\infty$ при вычислении пределов (44) мы можем воспользоваться теоремой 1.

Теперь рассмотрим второй случай. Определим отображения

$$\begin{aligned} l_k: H_+ &\rightarrow H_+, & l_1 \psi(x) &= \overline{\psi}(x), & l_2 \psi(x) &= \overline{\psi}(-x), \\ p_k: \Omega &\rightarrow \Omega, & p_1(\pm, j) &= (\mp, j), & p_2(\pm, j) &= (\pm, j). \end{aligned}$$

ЛЕММА 20. 1) *Отображения l_1, p_1 удовлетворяют условиям S1, S2 работы [7].*

2) *Если при всех n оператор $G_n(t)$ коммутирует с операцией отражения относительно плоскости $z = 0$, т.е.*

$$\forall n: \quad \operatorname{Refl} G_n = G_n \operatorname{Refl}, \quad \operatorname{Refl} u(x \times z) = u(x \times (-z)),$$

то отображения l_2, p_2 удовлетворяют условиям S1, S2 работы [7].

Во всех случаях параметр β в формуле (12) работы [7] удовлетворяет равенству $|\beta| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к прямому вычислению.

Пусть

$$\text{v. p. } r_\infty(\pm, m, m, \lambda_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\pm, m, m, \lambda) \right), \quad (45)$$

а если оператор $G_n(t)$ коммутирует с операцией отражения относительно плоскости $z = 0$, то

$$\text{v. p. } t_\infty(\pm, m, m, \lambda_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\pm, m, m, \lambda) \right). \quad (46)$$

Существование пределов в (45), (46), следует из леммы 7 работы [7].

Пусть последовательность действительных чисел $\{\gamma_n\}$ такова, что

$$|\operatorname{Re} \lambda_n - \gamma_n| = O(|\operatorname{Im} \lambda_n|^{1+\delta}), \quad \delta > 0.$$

Теорема 1 работы [7] в нашем случае принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $\forall n: \operatorname{Im} \lambda_n < 0$, то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_m (|\text{v. p. } r_\infty(+, m, m, \lambda_\infty) - r_n(+, m, m, \gamma_n)| + |\text{v. p. } r_\infty(-, m, m, \lambda_\infty) - r_n(-, m, m, \gamma_n)|) \right) = 2. \quad (47)$$

2) Если $\forall n: \operatorname{Im} \lambda_n < 0$ и при всех n оператор $G_n(t)$ коммутирует с операцией отражения относительно плоскости $z = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_m (|\text{v. p. } t_\infty(+, m, m, \lambda_\infty) - t_n(+, m, m, \gamma_n)| + |\text{v. p. } t_\infty(-, m, m, \lambda_\infty) - t_n(-, m, m, \gamma_n)|) \right) = 2. \quad (48)$$

Посмотрим, какие следствия можно извлечь из теоремы 2. Предположим, что область D есть цилиндр D_0 , к которому через тонкую трубку присоединена сфера. Гладким отображением φ переведем эту область в D_0 , а потом будем сжимать трубку и будем следить за образом получающейся области (при фиксированном отображении φ). Образ сферы перейдет в область D_{int} , а образ цилиндра – в область D_{out} . Очевидно, что

$$\text{v. p. } r_\infty(\pm, m, m, \lambda_\infty) = 0.$$

Если λ_∞ выбрано так, что в сумме (47) есть только одно слагаемое, то из (47) следует, что либо в окрестности λ_∞ должны быть частоты, на которых волна почти полностью отражается, либо должно быть выполненным равенство $\operatorname{Im} \lambda_n \equiv 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что в случае симметричного относительно плоскости $z = 0$ внутреннего резонатора (типичный пример – сжатый в двух сечениях цилиндр) либо должно быть выполненным равенство $\operatorname{Im} \lambda_n \equiv 0$, либо волна будет туннелировать, т.е. проходить без отражения.

§ 7. Заключительные замечания

С точки зрения математической теории рассеяния обсуждаемые нами вопросы относятся к теории резонансов и туннелирования. Представление об этой тематике можно составить по работам [9]–[26]. С точки зрения теории эллиптических уравнений рассматриваемые нами задачи связаны с исследованием поведения решений эллиптических краевых задач в окрестности особых точек границы. Оценка леммы 6, конечно, очень грубая. Из нее следует, что

$$|\lambda_n - \lambda_\infty| \leq \text{const} \cdot d(D_n, D_\infty)^{1/2}.$$

В работе [24] в аналогичной ситуации доказана более точная оценка

$$|\operatorname{Im}(\lambda_n - \lambda_\infty)| \leq \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\delta}{d(D_n, D_\infty)}\right).$$

С нашей точки зрения эта оценка не дает надежды решить методами традиционной теории возмущений вопрос о том, какой из двух случаев реализуется: $\text{Im } \lambda_n < 0$ или $\text{Im } \lambda_n \equiv 0$.

Мы изучали только случай граничных условий Дирихле. Аналогичные задачи решались и для случая граничных условий второго рода [26].

С математической точки зрения теория квантовых волноводов, квантовых проволок и квантовых точек связана с изучением спектральных свойств эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в неограниченных областях специального вида. Изучались области, форма которых напоминает форму математических символов $+$, $\angle$, Z .

Иногда квантовые волноводы моделируются операторами вида

$$L = -\Delta_{x,z} + V_0(x) + V_{\text{inter}}(x \times z),$$

где $V_0(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow \infty$, а потенциал $V_{\text{inter}}(x \times z)$ можно рассматривать как возмущение. Ясно, что с математической точки зрения такая модель существенно проще рассматриваемой нами, а с точки зрения физики обе модели часто оказываются эквивалентны.

Нам кажется, что в связи с рассмотренными нами вопросами будут интересны работы [27]–[49]. В них либо решаются задачи, близкие к рассмотренной нами, либо они могут служить источником интересных постановок математических задач.

Список литературы

1. Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1994.
2. Goldstein C. I. Eigenfunction expansions associated with the Laplacian for certain domains with infinite boundaries. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 1–31.
3. Goldstein C. I. Eigenfunction expansions associated with the Laplacian for certain domains with infinite boundaries. II. Applications to scattering theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 33–50.
4. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралыцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
7. Арсеньев А. А. Математическая модель резонансного рассеяния // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 4. С. 491–502.
8. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
9. Albeverio Sergio, Hoegh-Kron Raphael. Perturbations of resonances in quantum mechanics // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 101. P. 491–513.
10. Howland James S. The Livsic matrix in perturbation theory // J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 50. P. 415–437.
11. Agmon S. A perturbation theory of resonances // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 61. P. 1255–1309.
12. Recent development of the theory of tunneling // Progress of Theoretical Physics. 1997. Suppl. № 127.
13. Ballistic transport in mesoscopic physics // Progress of Theoretical Physics. 1991. Suppl. № 106.
14. Brandas E., Elander N. (eds.) Resonances: The unifying route towards the formulation of dynamical processes. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Physics. V. 325.)

15. *Soffer A., Weinstein M. I.* Time dependent resonance theory // *Geom. Funct. Anal.* 1998. V. 8. P. 1086–1128.
16. *Costin O., Soffer A.* Resonance theory for Schrödinger operators // *Comm. Math. Phys.* 2001. V. 224. P. 133–152.
17. *Merkil M., Sigal I. M.* A time-dependent theory of quantum resonances // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 201. P. 549–576.
18. *Zworski M.* Resonances in physics and geometry // *Notices Amer. Math. Soc.* 1999. V. 46. P. 319–328.
19. *Sjöstrand J., Zworski M.* Complex scaling and distribution of scattering poles // *J. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 4. № 4. P. 729–768.
20. *Razavy M., Pimpale A.* Quantum tunneling. A general study // *Phys. Rep.* 1988. V. 160. № 6.
21. *Ferreira R., Bastard G.* Tunneling and relaxation in semiconductor double wells // *Rep. Progr. Phys.* 1997. V. 60. № 3. P. 345–387.
22. *Abramov A. A., Aslanjan A., Davis E. B.* Bounds on complex eigenvalues and resonances // *J. Phys. A.* 2001. V. 34. № 1. P. 57–72.
23. *Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A.* Lower bounds on the interaction between cavities connected by a thin tube // *Duke Math. J.* 1994. V. 73. № 1. P. 163–178.
24. *Hislop P. D., Martinez A.* Scattering resonances of a Helmholtz resonator // *Indiana Univ. Math. J.* 1991. V. 40. № 2. P. 767–788.
25. *Fernández C. A.* Resonances in scattering by a resonator // *Indiana Univ. Math. J.* 1985. V. 34. № 1. P. 115–125.
26. *Brown R., Hislop P. D.* Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions // *J. Differential Equations.* 1995. V. 115. P. 458–476.
27. Special issue on mesoscopic physics // *J. Math. Phys.* 1996. V. 37. № 10.
28. *Bryant G. W.* Resonant tunneling through coupled, double-quantum-box nanostructures // *Phys. Rev. B.* 1991. V. 47. № 7. P. 3064–3069.
29. *Lyford W. C.* Asymptotic energy propagation and scattering of waves in waveguides with cylinders // *Math. Ann.* 1976. V. 219. № 3. P. 193–212.
30. *Carini J. P., Londergen J. T., Merdok D. P., Frinkle D., Yung C. S.* Bound states in waveguides and bent quantum wires. I. Application to waveguide systems // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. № 15. P. 9842–9851; II. Electron in quantum wires // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. № 15. P. 9852–9859.
31. *Berggren Karl-Fredrik, Zhen-li Ji.* Resonant tunneling via quantum bound states in a classically undound systems // *Phys. Rev. B.* 1991. V. 43. № 6. P. 4760–4764.
32. *Porod W., Shao Z., Lent C. S.* Waveguide linked to a resonant cavity // *Appl. Phys. Lett.* 1992. V. 61. P. 1350–1352.
33. *Sang Chil Lee, Young Bong Kung, Doo Chul Kim.* Magnetophonon and electrophonon resonances in quantum wires // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. № 11. P. 6719–6722.
34. *Liang C.-T., Castleton I. M., Frost J. E. E., Barnes C. H. W., Smith C. G., Ford C. J. B., Ritelne D. A., Pepper M.* Resonant transmission through an open quantum dot // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 55. № 11. P. 6723–6726.
35. *Avishon Y., Bessis D., Gisaud B. G., Montica G.* Quantum bound states in open geometries // *Phys. Rev. B.* 1991. V. 44. № 15. P. 8028–8034.
36. *Tekman E., Bagwell Ph. F.* Fano resonances in quasi-one-dimensional electron waveguides // *Phys. Rev. B.* 1993. V. 48. № 4. P. 2553–2559.
37. *Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B.* Weakly coupled bound states in quantum waveguides // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 125. № 5. P. 1487–1495.
38. *Davies E. B., Parnowski L.* Trapped modes in acoustic waveguides // *Quant. J. Mech. Appl. Math.* 1998. V. 51. P. 477–492.
39. *Aslanyan A., Parnowski L., Vassiliev D.* Complex resonances in acoustic waveguides // *Quant. J. Mech. Appl. Math.* 2000. V. 53. P. 429–447.
40. *Razavy M.* Bound states in three dimensional quantum wires // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 228. № 4–5. P. 239–242.

41. *Exner P., Šebe D., Vaněk D.* Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window // J. Math. Phys. 1996. V. 37. №10. P. 4867–4887.
42. *Exner P.* Resonances in curved quantum wires // Phys. Lett. A. 1989. V. 141. №5–6. P. 213–216.
43. *Exner P., Kryčirik D.* Quantum waveguides with lateral semitransparent barrier: spectral and scattering properties // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 4475–4494.
44. *Kyungsun Na, Reichl L. E.* Electron conduction and lifetimes in a ballistic electron waveguides // J. Statist. Phys. 1998. V. 92. №3–4. P. 519–542.
45. *Glutsch S., Sienger U., Mycek M.-A., Chemla D. S.* Fano resonances due to coupled magnetoexciton and continuum states in bulk semiconductor // Phys. Rev. B. 1994. V. 50. №23. P. 17009–17017.
46. *Sols Fernando, Macuci M., Ravaioli U., Hess Karl.* Theory for a quantum modulated transistor // J. Appl. Phys. 1989. V. 66. №8. P. 3892–3906.
47. *Bockelmann U.* Phonon scattering between zero-dimensional electron states: spartial versus Landau quantization // Phys. Rev. B. 1994. V. 50. №23. P. 17271–17279.
48. *Ancilotto F.* Quantum tunneling of electron through a double barrier in a transverse magnetic field // J. Phys. C. 1998. V. 21. №26. P. 4657–4662.
49. *Dereziński Jan, Jakšić Vojkan.* Spectral theory of Pauli–Fierz operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 180. P. 243–327.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
03.04.2002