Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, K_2 для простейших целочисленных групповых колец и топологические приложения, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 23–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:31:34

УДК 515.164

П. М. Ахметьев

K_2 для простейших целочисленных групповых колец и топологические приложения

В работе вычисляется группа $K_2(\Lambda)$, где $\Lambda = \mathbb{Z}/2[\pi]$ – групповое кольцо фундаментальной группы с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}/2$, $\pi = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ – простейшая абелева элементарная группа ранга 2. При помощи этих вычислений удастся оценить снизу значение $K_2(\bar{\Lambda})$, где $\bar{\Lambda}$ – целочисленное групповое кольцо группы π . Это вычисление влечет некоторые следствия в теории псевдоизотопий, поскольку группа $Wh_2(\mathbb{Z}/2^2)$ оказывается нетривиальной. Обсуждаются конструкции в дифференциальной топологии, приводящие к вычислению Wh_2 -значных инвариантов.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Псевдоизотопией гладкого замкнутого многообразия M^m размерности $m \geq 5$ называется диффеоморфизм $F: M \times I \rightarrow M \times I$, коммутирующий с проекцией на второй сомножитель – отрезок I в малой окрестности границы многообразия, тождественный на нижней границе $M \times \{0\}$. Пространство всех псевдоизотопий, снабженное C^∞ -топологией, обозначается через $E(M)$. Это пространство впервые было определено и изучено в фундаментальной работе Серфа [1]. В [1] было доказано, что если M – односвязно, то $E(M)$ – связно. Для произвольного (неодносвязного) многообразия при условии $\pi_2(M) = 0$ компоненты связности пространства псевдоизотопий $E(M)$ были описаны в алгебраических терминах в работе [2]. Связь геометрических и алгебраических методов вычисления фундаментальной группы $\pi_1(E(M))$ пространства псевдоизотопий до сих пор в полном объеме не исследована, результаты в этом направлении изложены в обзоре [3].

Алгебраическое вычисление $\pi_0(E(M))$ является сложной задачей. Основную роль в этом вычислении играет группа $Wh_2(\pi_1(M))$, которая имеет прозрачное алгебраическое определение.

Общий метод для вычисления группы $Wh_2(\pi)$ предложен в [4]. В этой работе было доказано, что $Wh_2(\mathbb{Z}/2) = Wh_2(\mathbb{Z}/4) = 0$, но простых нетривиальных примеров группы Wh_2 найдено не было. При помощи методов более поздней работы [5], в которой соответствующие вычисления проведены для аналогичной группы над локальным кольцом, мы получили нижнюю оценку для группы $Wh_2(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)$, показав, что эта группа нетривиальна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 02-01-00014, 02-01-00578).

Это вычисление и является основным результатом работы, вслед за напоминанием основных определений оно проводится в § 2. В заключительном третьем параграфе происходит обсуждение связи Wh_2 -кручений с L -теорией. Эта связь проявляется при вычислении Wh_2 -значных инвариантов Хассе–Витта от невырожденных симметричных (кососимметричных) квадратичных форм над групповыми кольцами. Топологические аспекты были изучены в [6], алгебраический подход изложен в [7]. К сожалению, автору не удалось предложить простой пример квадратичной формы с нетривиальным Wh_2 -значным инвариантом Хассе–Витта. Скорее всего, для элементарных абелевых 2-групп такого примера не существует (несмотря на то, что группа, в которой принимают значения инварианты, ненулевая). С другой стороны, для следующего этажа Wh_3 существование подобного примера весьма вероятно. В этом направлении обсуждается гипотеза о невырожденности Wh_3 -кручения для квадратичных форм, представляющих элементы 2-типа в смысле А. Ф. Харшиладзе.

Проблема построения высших инвариантов Хассе–Витта является актуальной и доставляет прямой аналог проблемы Милнора, которая формулируется для полей нечетной характеристики (см. [8]).

§ 2. Предварительные определения и основная теорема

Изложим предварительные алгебраические сведения, следуя книге [9]. Пусть R – кольцо (для простоты изложения коммутативное). В этой работе нас будет интересовать, прежде всего, случай целочисленных групповых колец $\overline{\Lambda}$ над элементарной абелевой 2-группой π . Алгебраические аспекты вычислений связаны с переходом к локальному групповому кольцу Λ с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}/2$ (в более общем случае в целых 2-адических числах $\widehat{\mathbb{Z}}_2$).

Рассмотрим подгруппу $E(n, R) \subset GL(n, R)$ в группе обратимых матриц размера $n \times n$, порожденную всевозможными элементарными матрицами $e_{i,j}^\lambda$, где элемент $\lambda \in R$ стоит на (i, j) -месте, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, все диагональные элементы равны 1, а на остальных местах стоят нули. Определим $E(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(n, R)$ и $K_2(R) = H_2(E(R))$. Группа $K_2(R)$ допускает описание в терминах образующих и соотношений.

Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим группу $St(n, R)$, порожденную образующими $x_{i,j}^\lambda$ и следующими соотношениями:

- 1) $x_{i,j}^\lambda x_{i,j}^\mu = x_{i,j}^{\lambda+\mu}$;
- 2) $[x_{i,j}^\lambda, x_{j,l}^\mu] = x_{i,l}^{\lambda\mu}$, $i \neq l$, где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$;
- 3) $[x_{i,j}^\lambda, x_{k,l}^\mu] = 1$, $j \neq k$, $i \neq l$.

Далее, определим $St(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} St(n, R)$. Определен канонический гомоморфизм $\varphi: St(R) \rightarrow GL(R)$ формулой $\varphi(x_{i,j}^\lambda) = e_{i,j}^\lambda$. Группа $K_2(R)$ совпадает с подгруппой $\ker \varphi$ и является центром группы $St(R)$.

В простейшем случае R совпадает с кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Согласно теореме Милнора справедливо равенство $K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, причем изоморфизм $h: K_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(SO) = \mathbb{Z}/2$ устанавливается следующим правилом. Пусть $\prod_{s=1}^k x_{i_s, j_s}^{\lambda_s}$ представляет элемент из $K_2(\mathbb{Z})$. Определим отображение $h: S^1 \rightarrow GL(R)$, заданное по формуле $h(t) = \prod_{s=1}^k x_{i_s, j_s}^{\lambda_s t}$, $0 \leq t \leq 1$, где матрица $h(t)$, зависящая от параметра, представляется произведением обратимых унимодулярных матриц над полем

вещественных чисел. По построению $h(0) = h(1) = E$. Гомотопическая эквивалентность $SO \subset GL(R)$ определяет элемент $\pi_1(SO) = \mathbb{Z}/2$.

Для общего случая по двум единицам кольца R (случай целочисленного группового кольца здесь не столь интересен, так как в этом кольце все единицы имеют вид $\pm t$, где $t \in \pi$ – элемент группы) определяется алгебраический аналог образующего элемента из $K_2(Z)$. Нам потребуется несколько технических обозначений.

Для единицы $u \in R^*$ определим символ $w_{i,j}(u) = x_{i,j}^u x_{i,j}^{-u^{-1}} x_{i,j}^u$, $h_{i,j}(u) = w_{i,j}(u) w_{i,j}(-1)$. Матрица $\varphi(h_{i,j}(u))$ является диагональной, причем отличается от единичной только элементами $a_{i,i} = a_{j,j} = u$. Далее по двум единицам $u, v \in R^*$ определяется символ Стейнберга $\{u; v\} = h_{12}(u) h_{13}(v) h_{12}^{-1}(u) h_{13}^{-1}(v)$, задающий элемент в $K_2(R)$. (Напомним, что мы условились рассматривать случай коммутативного кольца.)

Если R является полем (основной пример доставляется случаем $R = \mathbb{Q}$ и группа $K_2(\mathbb{Q})$ связана с квадратичным законом взаимности Гаусса), то вычисление группы $K_2(R)$ происходит по теореме Мацумото. В этом случае группа $K_2(R)$ порождена символами Стейнберга $\{u; v\}$, где $u, v \in R^*$ – единицы. Образующие группы подчинены следующему набору соотношений:

$$\{u; 1 - u\} = 1; \quad (1)$$

$$\{u; v\} \{v; u\} = 1; \quad (2)$$

$$\{uv; w\} = \{u; v\} \{v; w\}; \quad (3)$$

$$\{u; -u\} = 1. \quad (4)$$

В работе Кольстера [5] формулы (1)–(4) переносятся на случай произвольного локального кольца R . Для коммутативного локального кольца R с радикалом $\text{rad}(R) \subset R$, для которого $R/\text{rad}(R) = \mathbb{Z}/2$, группа $K_2(R)$ порождена теми же символами и кроме соотношений (1)–(4) подчинена также соотношению (5)

$$\begin{aligned} & \{u_1; 1 + qu_1\} \{(1 + qu_1)^{-1} u_2; (1 + qu_1)^{-1} (1 + q(u_1 + u_2))\} \\ & = \{v_1; 1 + qv_1\} \{(1 + qv_1)^{-1} v_2; (1 + qv_1)^{-1} (1 + q(v_1 + v_2))\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q \in \text{rad}(R)$, $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in \text{rad}(R)$.

Мы ограничиваемся случаем $R = \Lambda = \mathbb{Z}/2[\pi] = \{\sum_{g \in \pi} n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}/2\}$, $\pi = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Обозначим через t_1 и t_2 образующие группы π . Кольцо Λ локально и $\text{rad}(\Lambda) = \text{Ker}(\varepsilon: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}/2)$, $\varepsilon(n_t + n_{t_1} t_1 + n_{t_2} t_2 + n_{t_1 t_2} t_1 t_2) = n_1 + n_{t_1} + n_{t_2} + n_{t_1 t_2}$.

Через $W \subset K_2(\Lambda)$ обозначим подгруппу, порожденную символами $\{\tau_1; \tau_2\}$, где $\tau_i \in \pi$, $i = 1, 2$. Аналогично вводится подгруппа $\overline{W}$ надцелочисленным групповым кольцом. Согласно стандартному правилу $K_2(\overline{\Lambda})/\overline{W}$ обозначается через $Wh_2(\pi)$.

ТЕОРЕМА. Факторгруппа $K_2(\Lambda)/W$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ и порождена символами $\{\tau; t_1 + t_2 + t_1 t_2\}$, $\tau \in \pi$.

СЛЕДСТВИЕ. Группа $Wh_2(\pi)$ содержит, по крайней мере, 3 различных ненулевых элемента $l_1, l_2, l_1 l_2$, проекции которых в группу $K_2(\Lambda)/W$ задаются символами $\Theta(l_i) = \{\tau_i; t_1 + t_2 + t_1 t_2\}$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Перепишем соотношение (5) в следующей удобной форме (это преобразование справедливо над групповым кольцом с коэффициентами $\mathbb{Z}/4$, хотя для наших целей достаточно коэффициентов $\mathbb{Z}/2$):

$$A(u_1, u_2, q)B(u_1, u_2, q) = A(v_1, v_2, q)B(v_1, v_2, q),$$

где $A(u_1, u_2, q) = \{u_1; 1 + qu_1\}\{u_2; 1 + qu_2\}\{1 + qu_1; 1 + qu_2\}$, $B(u_1, u_2, q) = \{(1 + qu_1)u_2; (1 + q^2u_1u_2)\}$, $u_i, v_i \in \Lambda^*$, $q \in \text{rad}(\Lambda)$. Мы покажем, что для кольца Λ соотношение (5) является следствием соотношений (2)–(4). Соотношение (1) вырождается, так как для любой единицы u элемент $1 + u \in \text{rad}(\Lambda)$ является необратимым.

Мультипликативно группа единиц Λ^* порождается элементами группы $\tau \in \pi$ и единственной нетривиальной единицей $1 + \mu$, где $\mu = 1 + t_1 + t_2 + t_1t_2$. Заметим, что если $q \in \text{rad}(\Lambda)$, то $q^2 = 0$. Следовательно, $B(u_1, u_2, q) = 0$ для произвольных единиц u_1, u_2, q . Очевидно, в случае $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ соотношение (5) выполняется. Докажем, что $A(u_1, u_2, q) = A(u_1 + r_1, u_2 + r_1, q)$ для произвольных необратимых элементов $r_1, q \in \text{rad}(\Lambda)$ и произвольных единиц u_1, u_2 .

Обозначим $u'_1 = u_1 + r_1 = u_1(1 + u_1r_1)$, $u'_2 = u_2 + r_1 = u_2(1 + u_2r_1)$. Выражение $A(u'_1, u'_2, q)$ равно произведению трех следующих выражений (с учетом равенства над $\mathbb{Z}/4$ $u_1^2r_1 = r_1$, $r_1 \in \text{rad}(\Lambda)$):

$$\begin{aligned} &\{u_1(1 + u_1r_1); (1 + qu_1)(1 + qr_1)\}; \\ &\{u_2(1 + u_2r_1); (1 + qu_2)(1 + qr_1)\}; \\ &\{(1 + qu_1)(1 + qr_1); (1 + qu_2)(1 + qr_1)\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие символы:

$$\{u_1; 1 + qr_1\}; \quad (1.1)$$

$$\{u_2; 1 + qr_1\}; \quad (1.2)$$

$$\{1 + u_1r_1; 1 + qu_1\}; \quad (2.1)$$

$$\{1 + u_2r_1; 1 + qu_2\}; \quad (2.2)$$

$$\{1 + u_1r_1; 1 + qr_1\}; \quad (3.1)$$

$$\{1 + u_2r_1; 1 + qr_1\}; \quad (3.2)$$

$$\{1 + qu_1; 1 + qr_1\}; \quad (4.1)$$

$$\{1 + qu_2; 1 + qr_1\}; \quad (4.2)$$

$$\{1 + qr_1; 1 + qr_1\}. \quad (5.1)$$

Очевидно, что произведение символов (1.1)–(5.1) равно $A^{-1}(u_1; u_2; q)A(u'_1, u'_2, q)$. Докажем, что это произведение тривиально для произвольных u_1, r_1, q . Вначале заметим, что символ (5.1) тривиален, как следствие соотношения (4) над $\mathbb{Z}/4$. Рассмотрим преобразование $u_1 \mapsto u_1 + r_2$, $r_2 \in \text{rad}(\Lambda)$. При этом преобразовании символы (1.1)–(5.1) умножаются на следующие символы:

$$\{1 + r_2u_1; 1 + qr_1\}; \quad (1.1')$$

$$\{1 + r_1r_2; 1 + qu_1\}; \quad (2.1')$$

$$\{1 + u_1r_1; 1 + qr_2\}; \quad (2.1'')$$

$$\{1 + qr_1; 1 + r_1r_2\}; \quad (3.1')$$

$$\{1 + qr_2; 1 + qr_1\}. \quad (4.1')$$

Для того чтобы показать, что произведение символов (1.1')–(4.1') тривиально, достаточно положить $u_1 = 1$, поскольку можно умножить элементы r_1, r_2, q на $u_1 = u_1^{-1}$, не изменив при этом значение произведения. Теперь с точностью до преобразования $r'_1 = r_1 + \mu_i, i = 1, 2, q' = q + \mu_0$, где $\mu_i = 0$ или $\mu_i = \mu, i = 0, 1, 2$, и с точностью до перестановки r_1, r_2, q имеем два различных случая.

Случай 1: $r_1 = 1 + t_1; r_2 = 1 + t_2; q = 1 + t_1 t_2$.

Случай 2: $r_1 = r_2 = 1 + t_1; q = t_1 + t_2$.

Теперь тривиальность произведения (1.1')–(5.1) получается как следствие прямых вычислений в каждом из перечисленных случаев.

Из соотношений (2)–(4) вытекает, что $K_2(\Lambda)/W$ порождена символами $\{\tau; 1 + \mu\}, \tau \in \pi$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Рассмотрим следующие матрицы с определителем 1:

$$A = \begin{pmatrix} -(t_1 + t_2 + t_1 t_2) & -(1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2) & 0 \\ 1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2 & 2 + t_1 + t_2 + t_1 t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{A}$ – матрица, полученная из A в результате умножения элементов a_{12} и a_{21} на τ . Очевидно, $\bar{A} = A$ для произвольной единицы $\tau \in \pi$. Матрица $[A\bar{A}^{-1}B^{-1}]$ является единичной и, тем самым, элемент $\alpha(\tau) \in K_2(\mathbb{Z}[\pi])$ корректно определен. По построению $\Theta(\alpha(\tau)) = \{\tau; t_1 + t_2 + t_1 t_2\}$. Следовательно, $\Theta(\alpha(\tau)) \neq 0$ для произвольного $\tau \in \pi$. Следствие доказано.

§3. Wh_2 -значные инварианты Хассе–Витта для квадратичных форм над целочисленными групповыми кольцами и топологические обсуждения

Напомним основные определения в теории групп Уолла, следуя построениям [10]. Пусть R – кольцо с инволюцией. Инволюция определяется как антиавтоморфизм $J: R \rightarrow R$. Напомним, что мы интересуемся случаем $R = \bar{\Lambda} = \mathbb{Z}[\pi]$, где π – конечнопорожденная абелева группа. В этом случае понятия автоморфизма и антиавтоморфизма совпадают и автоморфизм J определяется по формуле $J(\sum_i n_{g_i} g_i) = \sum_i (-1)^{w(g_i)} n_{g_i} g_i$, где $w: \pi \rightarrow \mathbb{Z}/2$ – гомоморфизм, называемый *характером ориентации на группе π* .

Квадратичной $\pm$ -формой называется пара (P, φ) , где P – свободный $\bar{\Lambda}$ -модуль конечной размерности, снабженный выделенным базисом, $\varphi: P \rightarrow P^*$ – гомоморфизм модуля P в сопряженный модуль P^* , в котором также отмечен базис, двойственный исходному. *Спариванием $\pm$ -формы* называют гомоморфизм $\theta = \varphi \pm \varphi^*: P \rightarrow P^*$, где $\varphi^*: P \rightarrow P^*$ – сопряженный гомоморфизм. При этом модуль P отождествляется с модулем P^{**} посредством отображения $i: P \rightarrow P^{**}, i(p)(f) = J(f(p)), p \in P, f \in P^*$. Квадратичная $\pm$ -форма (P, φ) называется *невыврожденной*, если ее спаривание θ является изоморфизмом свободных модулей,

сохраняющим класс эквивалентности (в смысле кручения в $Wh_1(\pi)$) выделенных базисов.

Морфизмом $\pm$ -форм $(P, \varphi), (Q, \psi)$ называется пара $f: P \rightarrow Q, \chi: P \rightarrow P^*$ такая, что выполнено равенство $f^*\psi f - \varphi = \chi \mp \chi^*$. При этом определении спаривание, порожденное формой φ , переходит в спаривание, порожденное формой ψ .

Прямое слагаемое $L \subset P$ (в смысле свободных модулей с отмеченными базисами) называется *лагранжевой плоскостью квадратичной $\pm$ -формы* (P, φ) , если L совпадает с собственным ортогональным дополнением $L^\perp$ относительно спаривания θ и композиция $L \subset P \xrightarrow{\varphi} P^* \rightarrow L^*$ имеет вид $\lambda \mp \lambda^*$ для некоторого выбора гомоморфизма $\lambda: L \rightarrow L^*$. Кроме того, требуется, чтобы точная последовательность $0 \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow L^* \rightarrow 0$ сохраняла класс эквивалентности отмеченных базисов.

Группой Уолла $L_{2k}(\pi, w)$ называется группа Витта моноида $Q^{-1k}(\bar{\Lambda})$ квадратичных $(-1)^k$ -форм относительно подмоноида, порожденного квадратичными формами, имеющими лагранжевую плоскость.

Инволюция на групповом кольце позволяет определить инволюцию на группе $Wh_2(\pi)$, которую мы не переобозначаем, $*$: $Wh_2(\pi) \rightarrow Wh_2(\pi)$. Теперь определим когомологии Тейта $H^n(\mathbb{Z}/2; Wh_2(\bar{\Lambda})) = \widetilde{Wh}_2(\bar{\Lambda})/\{\alpha + (-)^{n+1}\alpha^*\}$, $\widetilde{Wh}_2(\bar{\Lambda}) = \{\alpha : \alpha = (-)^{n+1}\alpha^*\}$.

Инвариантом Хассе–Витта (Wh_2 -значным) называется гомоморфизм $\Theta: L_{2k}(\pi, w) \rightarrow H^0(\mathbb{Z}/2; Wh_2(\pi))$, который определяется согласно следующему правилу. Пусть форма (P, φ) представляет элемент из $L_{2k}(\pi, w)$. Представим матрицу спаривания $\theta = \varphi \pm \varphi^* = \prod_{i=1}^k E_{i,j}^\lambda$ в виде произведения элементарных матриц и, быть может, диагональной матрицы с элементами $\{\pm\pi\}$. Равенство $\theta = (-1)^k \theta^* \pmod{\{\pm\pi\}}$ определяет элемент в группе $\widetilde{Wh}_2(\pi)$, при этом произвол в выборе формы φ в классе эквивалентности не приводит к произволу в факторгруппе $H^0(\mathbb{Z}/2; Wh_2(\pi))$.

Топологическая картина такова (она изучалась в [6]). Выбирают нормальное отображение степени 1 между двумя многообразиями высокой размерности, $f: (X, \partial X) \rightarrow (Y, \partial Y)$. С точностью до нормального кобордизма, перестраивающего отображение до простой гомотопической эквивалентности, такое отображение задается элементом $\alpha \in L_{\dim(Y)}(\pi_1(Y), w)$ в группе Уолла над групповым кольцом фундаментальной группы многообразия Y , причем инволюция на групповом кольце $\bar{\Lambda}$ определена гомоморфизмом $w = w_1: \pi_1(Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ (см. [11]). (Предполагается, что ограничение на край отображения f является простой гомотопической эквивалентностью и рассматриваются только внутренние перестройки, т.е. при кобордизме ограничение на край не меняется с точностью до гомотопии.)

Предполагают, что многообразие образа $(Y, \partial Y)$ представлено в виде прямого произведения замкнутого многообразия M размерности $m = \dim(M) \geq 5$ и стандартного трехмерного куба, $Y = M^m \times K^3$. Нормальное отображение выбирается диффеоморфизмом на нижнем основании куба, умноженном на M , и на его боковой стороне, также умноженной на M . На верхнем основании куба, умноженном на M , отображение диффеоморфизмом, вообще говоря, не предполагается, но является простой гомотопической эквивалентностью. Обозначим это ограничение через $g: (W, \partial W) \rightarrow (M \times D^2, M \times S^1)$. По построению ограничение g на край является диффеоморфизмом.

Теперь проводят следующий тест на нетривиальность отображения f методами теории особенностей. Рассматривают стандартную проекцию в образе $p: M \times D^2 \rightarrow D^2$, которая индуцирует отображение $\hat{p}: W \rightarrow D^2$, не имеющее по условию критических точек на границе. По условию W и $M \times D^2$ оказываются диффеоморфными, но выбор расслоения $p: \partial W \rightarrow S^1$, вообще говоря, не согласован с этой структурой прямого произведения. Поэтому избежать критических точек внутри W у отображения $\hat{p}$, вообще говоря, не удастся. Инвариант Хассе–Витта $\Theta(\alpha)$ есть полное препятствие к тому, чтобы $\hat{p}$ оказалось гомотопным расслоению. Возникает алгебраическая вычислительная задача.

Можно переформулировать ту же задачу иначе, используя препятствие к построению изотопии двух целочисленных 1-форм (отображений в окружность), т.е. гомотопии в классе целочисленных 1-форм без критических точек. Эта задача изучалась в работе [12] и затем в [13]. В нашей ситуации первая форма на границе изучаемых многообразий задана проекцией $p: S^1 \times M \rightarrow S^1$. Вторая 1-форма определена из представления прообраза в виде $W = D^2 \times M$. Такое представление задано с некоторым произволом, поэтому используется препятствие Зибенмана не для изотопии форм, а для их конкордантности. Если определить коммутативную группу $\mathfrak{R}(S^1 \times M)$ всех неособых целочисленных 1-форм, гомотопных стандартной 1-форме p по модулю отношения конкордантности форм, то композиция

$$L_{m+3}^s(\pi; w) \rightarrow \mathfrak{R}(S^1 \times M^m) \rightarrow H^{m+1}(\mathbb{Z}/2; Wh_2(\pi))$$

оказывается корректно определенной. Случай нечетного $m + 3$ также возможен, но алгебраические препятствия будут описываться по-другому.

К сожалению, не удалось построить примера квадратичной формы над кольцом с инволюцией, для которой инвариант Хассе–Витта оказался бы нетривиальным. В связи с этой задачей сформулируем гипотезу о высшем аналоге инварианта Хассе–Витта, принимающего значения в $H^1(\mathbb{Z}/2; Wh_3(\pi))$. Рассмотрим целочисленное групповое кольцо $\overline{\Lambda} = \mathbb{Z}[(\mathbb{Z}/2)^3]$ элементарной абелевой 2-группы ранга 3. Групповое кольцо $\overline{\Lambda}$ снабжено нетривиальной инволюцией, которая определяется на образующих $\{t_1, t_2, \tau\}$ посредством следующего гомоморфизма $w: (\mathbb{Z}/2)^3 \rightarrow \{+1, -1\}$: $w(t_1) = w(t_2) = +1$; $w(\tau) = -1$.

Группа Уолла $L_0^s((\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/2^-)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Она содержит единственный нетривиальный элемент, имеющий ненулевой Арф-инвариант. Свойства этой группы изучались А. Ф. Харшиладзе при помощи оператора периодичности в L -теории (см. [14]), это простейший пример элемента второго типа в смысле Харшиладзе. Алгебраически этот элемент детектируется спинорной нормой Басса и связан с препятствием к расщеплению вдоль системы подмногообразий коразмерности 1, в которой происходит подскок фундаментальной группы (см. [15]).

Зададим исследуемый элемент как класс эквивалентности симметризации θ соответствующей квадратичной формы

$$\theta = \begin{pmatrix} 2 & \tau n + m & 0 & 0 \\ -\tau n + m & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 2 & n \\ 0 & m & n & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь через n обозначен элемент $1 + m$, $n, m \in Z[\mathbb{Z}/2^2]$. В результате прямых вычислений получаем $h(\theta) = \{t_1 + t_2 + t_1 t_2; -1\} \in H^0(\mathbb{Z}/2; Wh_2(\Lambda))$, где $\Lambda = \mathbb{Z}/4[(\mathbb{Z}/2)^3]$ – групповое кольцо группы $(\mathbb{Z}/2)^3$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/4$. Вычисление при помощи копредставления Кольстера доставляет $h(\theta) = 0$. Следовательно, естественно предположить, что и над целочисленным групповым кольцом $h(\theta) = 0$. Следовательно, определен высший аналог инварианта Хассе–Витта, принимающий значения в $H^1(\mathbb{Z}/2; Wh_3((\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/2^-))$ (во всяком случае, этот инвариант определен над групповым кольцом Λ). Предположим, что этот инвариант нетривиален. Это означало бы, что при действии группы $L_0^s((\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/2^-)$ на тождественном гомотопическом сглаживании многообразия $D^3 \times M$, где M – неориентируемое многообразие размерности $4k$, $k \geq 1$, с фундаментальной группой $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2^3$ (например, подойдет $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^2$), получается многообразие W , диффеоморфное $D^3 \times M$, край которого расслоен над S^2 , но расслоение не продолжается до расслоения над D^3 . Препятствие доставляется в рамках теории псевдоизотопий и связано уже с вычислением фундаментальной группы пространства функций без критических точек на многообразии $M \times [0; 1]$.

Автор благодарит И. Р. Шафаревича за возможность обсудить результаты на семинаре, А. С. Мищенко и Д. Орлова за полезные замечания. Часть этой работы была выполнена во время месячного визита в университет г. Нанта в июне 1999, который автор благодарит за гостеприимство и финансовую поддержку.

Список литературы

1. *Cerf J.* La stratification naturelle des espaces des fonctions differentiables reelles et le theoreme de la pseudoisotopie // Publ. Math. IHES. 1978. V. 39. P. 5–173.
2. *Hatcher A., Wagoner J.* Pseudo-isotopies of compact manifolds // Asterisque. 1973. V. 6.
3. *Hatcher A.* Concordance spaces, higher simple-homotopy theory, and applications // Proc. Sympos. Pure Math. 1978. V. 32. P. 3–21.
4. *Stein M.* Excision and K_2 of group rings // J. Pure Appl. Algebra. 1980. V. 18. P. 213–224.
5. *Kolster M.* K_2 of non-commutative local rings // J. Algebra. 1985. V. 95. №1. P. 173–200.
6. *Hsiang W. C., Sharpe R. W.* Parametrized surgery and isotopy // Pacific J. Math. 1976. V. 67. P. 401–459.
7. *Giffen Ch.* Hasse–Witt invariants for (α, u) -reflexive forms and automorphisms. I: Algebraic K_2 -valued Hasse–Witt invariants // J. Algebra. 1977. V. 44. P. 434–456.
8. *Suslin A. A.* Algebraic K -theory of fields // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, California, USA, August 3–11, 1986). V. 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987. P. 222–244.
9. *Milnor J.* Introduction to algebraic K -theory. Princeton: Princeton Acad. Press, 1971.
10. *Ranicki A.* Algebraic L -theory. I: Foundation // Proc. London Math. Soc. (3). 1973. V. 27. P. 101–125.
11. *Wall C. T. C.* Surgery on compact manifolds. New York: Academic Press, 1970.
12. *Siebenmann L. C.* Torsion invariants for pseudoisotopies on closed manifolds // Notices Amer. Math. Soc. 1967. V. 14. P. 942.
13. *Kinsey L. C.* Pseudoisotopies and submersions of a compact manifold to the circle // Topology. 1987. V. 26. №1. P. 67–78.
14. *Харшиладзе А. Ф.* Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами // УМН. 1987. Т. 42. №4. С. 55–85.
15. *Харшиладзе А. Ф.* Эрмитова K -теория и квадратичные расширения колец // Труды ММО. 1980. Т. 41. С. 3–36.