Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Оценки потенциалов Грина. Приложения, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 61–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:35:41

УДК 517.53

В. И. Данченко

Оценки потенциалов Грина. Приложения

Получены оптимальные покрытия картановского типа носителей гриновых α -потенциалов гиперболическими кругами в односвязной области на комплексной плоскости и даны оценки потенциалов вне покрытий. Результаты прилагаются к задачам о разделении особенностей аналитических и гармонических функций. Например, в терминах гриновых емкостей получены равномерные и интегральные оценки для компонент мероморфных функций.

Библиография: 22 названия.

§1. Определения. Вспомогательные результаты

1.1. Пусть G – односвязная область на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с границей, содержащей более одной точки. При фиксированном $\zeta \in G$ через $w = \varphi(z; \zeta) = \varphi_G(z; \zeta)$ обозначим какое-либо конформное однолистное отображение области G на единичный круг $\mathcal{D} = \{w : |w| < 1\}$ с условием $\varphi(\zeta; \zeta) = 0$. Пусть μ – неотрицательная σ -конечная борелевская мера в G . При $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ будем называть (γ, α) -потенциалом Грина меры μ следующий интеграл:

$$\nu_{\gamma, \alpha}(\mu, z) = \int_G q^\gamma(|\varphi(z; \zeta)|) Q_\alpha(|\varphi(z; \zeta)|) d\mu(\zeta), \quad (1.1)$$

где

$$q(r) = \ln \frac{2}{1-r}, \quad Q_0(r) = -\ln r, \quad Q_\alpha(r) = r^{-\alpha} - 1, \quad \alpha > 0. \quad (1.2)$$

При $\gamma = 0$ получаются классические гриновы потенциалы $u_\alpha = \nu_{0, \alpha}$. Отметим, что (в случае $\|\mu(G)\| \neq \infty$) $\nu_{\gamma, \alpha}(\mu, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0 \in \partial G$, если z_0 не является точкой сгущения множества $\text{supp } \mu$; u_0 (u_α при $\alpha > 0$) является неотрицательной гармонической (субгармонической) функцией в $G \setminus \text{supp } \mu$.

1.2. Множество вида

$$g = g_G(z_0; \rho) = \{z : |\varphi(z; z_0)| < \tanh \rho\}, \quad \rho > 0, \quad z_0 \in G,$$

будем называть *подобластью Грина* (*п.Г.*) области G . Область g является кругом в гиперболической метрике (h -метрике) в G , определяемой линейным элементом $ds(z) = (1 - |\varphi(z; \zeta)|^2)^{-1} |\varphi'(z; \zeta)| |dz|$ (точка $\zeta \in G$ фиксирована произвольно).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00913, 00-01-00341) и Бел2002-а (грант № 02-01-81081).

Этот h -круг имеет гиперболический радиус (h -радиус) ρ и гиперболический центр (h -центр) z_0 , его h -площадь равна $\pi \operatorname{sh}^2 \rho$ (см., например, [1]). Положим

$$\mathcal{B}(g) = \mathcal{B}_G(g) := z_0, \quad \mathcal{R}(g) = \mathcal{R}_G(g) := \rho.$$

Индекс G в обозначениях $\varphi, g, \mathcal{B}, \mathcal{R}$ как правило будем опускать.

Функции $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}$ инвариантны относительно конформных преобразований области G (см., например, [1]). Точнее, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Конформное однолистное отображение $\tilde{z} = \varphi(z)$ области G на область $\tilde{G}$ переводит произвольную п.Г. g области G в область $\tilde{g}$, являющуюся п.Г. области $\tilde{G}$ с тем же h -радиусом и $\mathcal{B}_{\tilde{G}}(\tilde{g}) = \varphi(\mathcal{B}_G(g))$.*

В единичном круге $G = \mathcal{D}$ h -геометрия определяется метрикой

$$ds(z) = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|,$$

при этом

$$g = g_{\mathcal{D}}(z_0; \rho) = \left\{ z : \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| < \operatorname{th} \rho \right\}.$$

Легко проверить, что обычный центр c_0 круга g лежит на отрезке прямой, соединяющем начало координат O с h -центром z_0 и

$$c_0 = z_0 \frac{1 - \operatorname{th}^2 \rho}{1 - |z_0|^2 \operatorname{th}^2 \rho}, \quad \operatorname{diam} g = 2 \operatorname{th} \rho \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |z_0|^2 \operatorname{th}^2 \rho}, \quad (1.3)$$

где $\operatorname{diam} g$ – обычный диаметр круга g . В частности, если $O \in \partial g$, то $\operatorname{diam} g = \operatorname{th} 2\rho$, $|\mathcal{B}(g)| = |z_0| = \operatorname{th} \rho$.

1.3. Скажем, что п.Г. g_1 и g_2 области G слабо перекрываются, если $\mathcal{B}(g_1) \notin g_2$ и $\mathcal{B}(g_2) \notin g_1$. Последовательность п.Г. $g_1, g_2, \dots$ будем называть *регулярной*, если она состоит из попарно слабо перекрывающихся п.Г. g_s , $s \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 1.2 [2]. *Пусть $g_1, g_2, \dots$ – регулярная последовательность п.Г. области G и при некотором ρ имеем*

$$\bar{g}_1 \cap \bar{g}_2 \cap \dots \neq \emptyset, \quad \rho_j := \mathcal{R}(g_j) \leq \rho, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность $\{g_j\}$ конечна и для числа n ее элементов имеем оценку $n \leq 1 + 2\pi \operatorname{ch} \rho < 8e^\rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 достаточно рассмотреть случай, когда $G = \mathcal{D}$ и начало координат O лежит в $\bigcap_{j=2}^{\infty} \bar{g}_j$. Будем считать, что $\mathcal{B}(g_j) \neq O$ и $O \in \partial g_j$ для всех $j \geq 2$ (в противном случае вместо кругов g_j следует рассмотреть меньшие, h -концентрические с ними, круги, удовлетворяющие этим условиям). При выполнении указанных условий имеем (см. п. 1.2) $\operatorname{diam} g_j = \operatorname{th} 2\rho_j$, $|\mathcal{B}(g_j)| = \operatorname{th} \rho_j$. Из слабого перекрытия каждой пары кругов g_j и g_k , $j \neq k$, следует, что если $\rho_j \geq \rho_k$, то наименьшее возможное значение $\sigma = \sigma_{j,k}$, $0 < \sigma < \pi/2$, угла, образованного прямолинейными отрезками $[O, \mathcal{B}(g_j)]$ и $[O, \mathcal{B}(g_k)]$, удовлетворяет условию $\cos \sigma \leq |\mathcal{B}(g_k)| / \operatorname{diam} g_j$ (что соответствует случаю $\mathcal{B}(g_k) \in \partial g_j$). С учетом ограничений $\rho_j \leq \rho$, $\rho_k \leq \rho$ это дает $2 \cos \sigma \leq \operatorname{ch} 2\rho / \operatorname{ch}^2 \rho$. Следовательно,

$$\sigma \geq 2 \sin \frac{\sigma}{2} = \sqrt{2(1 - \cos \sigma)} \geq \operatorname{ch}^{-1} \rho.$$

Отсюда получается, что число всех п.Г. g_j , $j \geq 1$, не превосходит величины $1 + 2\pi / \min\{\sigma_{j,k}\} \leq 1 + 2\pi \operatorname{ch} \rho$. Что и требовалось.

1.4. ЛЕММА 1.3. Пусть g_0 и g_1 — п.Г. области G , причем $z_0 = \mathcal{B}(g_0) \notin g_1$ и $\bar{g}_1 \setminus g_0 \neq \emptyset$. Пусть, далее,

$$E = E(g_0, g_1) = g_0 \cap \left(\bigcup_{\sigma} G_{\sigma} \right),$$

где объединение берется по всем п.Г. G_{σ} , для которых $\mathcal{B}(G_{\sigma}) \in \bar{g}_1 \setminus g_0$ и $z_0 \notin G_{\sigma}$. Тогда при любом $\rho > 0$ множество E можно покрыть некоторой п.Г. g со свойствами

- а) $\mathcal{B}(g) \in \partial g(z_0; \rho)$;
- б) $\Delta > \delta \delta_0 ((\delta + \delta_0)^2 + 4\delta_0)^{-1}$, где $\Delta = e^{-2\mathcal{R}(g)}$, $\delta = e^{-2\rho}$, $\delta_0 = e^{-2\mathcal{R}(g_0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что $G = \mathcal{D}$, $z_0 = 0$, $\mathcal{B}(g_1) \in (0, 1)$. Тогда $g_0 = \{z : |z| < R\}$, где $R = \text{th } \mathcal{R}(g_0)$, а g_1 включается в круг $v = \{z : |2z - 1| < 1\}$. Через 2θ , $0 < \theta < \pi/2$, обозначим величину центрального угла, на сторонах которого лежат вершины двуугольника $v \setminus g_0$. Теперь положим $v_1 = g_0 \cap e^{i\theta}v$, $v_2 = g_0 \cap e^{-i\theta}v$. Из простых геометрических соображений заключаем, что $E \subset g_0 \cap (v_1 \cup v_2)$. Поэтому достаточно показать, что оба двуугольника v_1 и v_2 покрываются п.Г. g с указанными в лемме свойствами.

Пусть $\rho > 0$, $r = \text{th } \rho = (1 - \delta)/(1 + \delta)$. Положим

$$A = \frac{|Re^{2i\theta} - r|}{|1 - Re^{2i\theta}r|}, \quad g = \left\{ z : \frac{|z - r|}{|1 - zr|} < A \right\}; \quad \Delta = \frac{1 - A}{1 + A}.$$

Тогда $\Delta = e^{-2\mathcal{R}(g)}$ и

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(1 - r^2)(1 - R^2)}{((r^2 + R^2 - 2rR \cos 2\theta)^{1/2} + (1 + r^2R^2 - 2rR \cos 2\theta)^{1/2})^2} \\ &> 4^{-1}(1 - r^2)(1 - R^2)(1 + r^2R^2 - 2rR \cos 2\theta)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\cos \theta = R$, $\cos 2\theta = 2R^2 - 1$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta &> 4^{-1}(1 - r^2)(1 - R^2)((1 - rR)^2 + 4rR(1 - R^2))^{-1} \\ &= \frac{\delta \delta_0}{(\delta + \delta_0)^2 + 4\delta_0(1 - \delta^2)(1 - \delta_0)/(1 + \delta_0)} > \frac{\delta \delta_0}{(\delta + \delta_0)^2 + 4\delta_0}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $v_1 \cup v_2 \subset g$. Действительно, окружности ∂g и $\partial(e^{i\theta}v)$ пересекаются в точке $Re^{2i\theta} \in \partial g_0$ и, как нетрудно проверить, точки $z = R$ и $z = 0$ лежат внутри g (т.е. $|R - r|/|1 - Rr| < A$ и $|r| < A$). Следовательно, $v_1 \subset g$. Такое же включение справедливо и для v_2 . Лемма 1.3 доказана.

1.5. ЛЕММА 1.4. Пусть $0 < d_0 < 1$, $1 \leq \nu < d_0^{-1/2}$. Пусть при фиксированном натуральном $s \leq \nu$ и при всех $j = \overline{0, s-1}$ для положительных величин δ_j , d_j , d_{j+1} имеем рекуррентные соотношения

$$\delta_j = \nu d_j^{1/2}, \quad d_{j+1} = \frac{\delta_j d_j}{(\delta_j + d_j)^2 + 4d_j}.$$

Пусть $z_0 \in G$, $g_0 = g_G(z_0; R_0)$, $R_0 = 2^{-1} \ln(1/\delta_0)$.

При $j = \overline{1, s-1}$ положим $g_j = g_G(z_j; R_j)$ с некоторыми $z_j \in \bar{g}_{j-1}$ и $R_j = 2^{-1} \ln(1/\delta_j)$.

При $\rho_s = 2^{-1} \ln(1/d_s)$ и некотором $z_s \in \bar{g}_{s-1}$ положим $g_s = g_G(z_s; \rho_s)$. Тогда

- а) $z_s \in g_G(z_0; \mathcal{R}_2)$, $e^{2\mathcal{R}_2} \leq 12Nd_0^{-1+2^{-s}}$, где $N = \nu(\nu^2 + 2\nu + 5)^{-1}$;
- б) $g_s \subset g_G(z_0; \mathcal{R}_1)$, $e^{2\mathcal{R}_1} \leq 12d_0^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при всех $j \geq 0$ имеем

$$d_j \in (0, 1), \quad d_{j+1} = \nu d_j^{1/2} ((\nu + d_j^{1/2})^2 + 4)^{-1} > N d_j^{1/2}.$$

Из этих неравенств при $0 \leq j \leq s-1$ находим

$$d_{j+1} > N d_j^{1/2} > \dots > N^{1+2^{-1}+\dots+2^{-j}} d_0^{2^{-j-1}}, \quad \delta_j > \nu N^{1-2^{-j}} d_0^{2^{-j-1}}. \quad (1.4)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. При замене N на $M = \nu(\nu^2 + 4)^{-1}$ получаются неравенства, противоположные предыдущим, откуда в силу ограничения $\nu < d_0^{-1/2}$ следует, что $0 < \delta_j < (\nu M)^{1-2^{-j}} \nu^{2^{-j}} d_0^{2^{-j-1}} < 1$ при всех $j \geq 0$. Поэтому равенства $e^{-2R_j} = \delta_j$ определяют конечные h -радиусы $R_j > 0$.

Далее, при условии $z_s \in \bar{g}_{s-1}$ имеем $z_s \in g_G(z_0; \mathcal{R}_2)$, $\mathcal{R}_2 = \sum_{j=0}^{s-1} R_j$, где (учитываем, что $0 < N < 1$ и $s \leq \nu$)

$$e^{-2\mathcal{R}_2} = \prod_{j=0}^{s-1} \delta_j > \nu^s N^{s-2+2^{-s+1}} d_0^{1-2^{-s}} \geq N^{-1} (\nu N)^s d_0^{1-2^{-s}} > (12N)^{-1} d_0^{1-2^{-s}}.$$

Этим утверждение а) доказано. Утверждение б) получается из соотношений $g_s \subset g_G(z_0; \mathcal{R}_1)$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \rho_s$, где

$$e^{-2\mathcal{R}_1} = e^{-2\rho_s} e^{-2\mathcal{R}_2} \geq N^{2-2^{-s+1}} d_0^{2^{-s}} \prod_{j=0}^{s-1} \delta_j > (\nu N)^s d_0 > 12^{-1} d_0.$$

§ 2. Первый метод покрытия

В §§2–4 построены покрытия картановского типа подобластями Грина точек достаточно большой плотности меры μ и вне этих покрытий получены оценки (γ, α) -потенциалов. Отметим, что указанные покрытия не обязательно покрывают весь носитель $\text{supp } \mu$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G — односвязная область на $\bar{\mathbb{C}}$ с невырожденной в точку границей, μ — неотрицательная конечная борелевская мера в G . Тогда существует конечный или счетный набор п.Г. $g_G(z_k; r_k)$, $k \in \mathbb{N}$, объединение V которых обладает следующими свойствами:

$$\sum_k r_k \leq \|\mu\|; \quad (2.1)$$

при любых $\alpha \in [0, 1]$, $z \in G \setminus V$ имеем¹ ($u_\alpha = \nu_{0,\alpha}$)

$$u_\alpha(\mu; z) \leq A(\alpha), \quad A(0) = 50, \quad A(\alpha) \leq \frac{100}{1-\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad (2.2)$$

если, в частности, мера μ сосредоточена в некоторых точках $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ области G и $\mu(\zeta_m) = p_m > 0$, то при $z \in G \setminus V$ имеем

$$\prod_m |\varphi_G(z; \zeta_m)|^{-p_m} \leq e^{50}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2.1. Прежде всего заметим, что теорему 2.1. достаточно доказать при дополнительном условии $\text{supp } \mu \subset G$ с заменой величин $A(\alpha)$ на $A_0(\alpha) = A(\alpha)/20$. Действительно, конечную в G меру μ можно представить в виде $\mu = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s$, где μ_s — неотрицательные борелевские меры с $\text{supp } \mu_s \subset G$, для которых $\sum_{s=1}^M \|\mu_s\| \geq (1 - 2^{-M})\|\mu\|$ при всех $M \geq 1$. Тогда $\|\mu_s\| \leq 2^{-s+1}\|\mu\|$ при $s \geq 1$. Пусть теорема 2.1 доказана для мер вида $12^{-1}s^2\mu_s$ с указанной величиной $A_0(\alpha)$. Тогда, просуммировав по s соответствующие неравенства (2.1), (2.2), для общего покрытия V получим $\sum_k r_k \leq 6^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 2^{-s} \|\mu\| = \|\mu\|$. При $z \in G \setminus V$ будем иметь $u_\alpha(\mu; z) \leq 12A_0(\alpha) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-2} < A(\alpha)$.

2.2. Пусть e — некоторое фиксированное борелевское подмножество области G . Определим функцию

$$\Phi(e, z; \rho) = \frac{1}{2} \mu(e \cap \bar{g}) - \rho, \quad (2.4)$$

где $g = g(z; \rho) = g_G(z; \rho)$. Легко видеть, что при фиксированных $e \subset G$ и $z = \mathcal{B}(g)$ функция $\psi(\rho) = \Phi(e, z; \rho)$ непрерывна справа на полуоси $\mathbb{R}^+ = \{\rho : \rho > 0\}$ и

$$\psi(+\infty) = -\infty, \quad \psi(\rho - 0) \leq \psi(\rho + 0) = \psi(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Отсюда следует, что область значений функции ψ связна, и если множество решений $\rho > 0$ неравенства $\psi(\rho) \geq 0$ не пусто, то оно имеет наибольший элемент $\rho_z = \sup\{\rho : \psi(\rho) \geq 0\} \in \mathbb{R}^+$. Отметим также, что $\psi(\rho_z) = 0$ и $\psi(\rho) < 0$ при $\rho > \rho_z > 0$.

Рассмотрим функцию $\psi(z; \rho) = \Phi(e, z; \rho)$. Поскольку $\psi(z; \rho) < (1/2)\|\mu\| - \rho$, то равенство $\psi(z; \rho) = 0$ может выполняться лишь на некотором компактном подмножестве e_1 области G (в некоторой окрестности носителя $\text{supp } \mu \subset G$). При этом $\rho_0 := \sup\{\rho_z : z \in e_1\} < \infty$. Выделим некоторую последовательность $z_n \in e_1$, $z_n \rightarrow z_0 \in G$ и $\rho_{z_n} \rightarrow \rho_0$ при $n \rightarrow \infty$, с условием $\psi(z_n; \rho_{z_n}) = 0$. Тогда, очевидно, $\psi(z_0; \rho_0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(z_n; \rho_{z_n}) = 0$. С другой стороны, по определению ρ_0 имеем $\psi(z; \rho_0) \leq 0$ при всех $z \in G$ и, следовательно, $\psi(\rho_0, z_0) = 0$.

¹В теореме 2.1 и ниже через $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $A_j(\cdot)$, $B_j(\cdot)$ обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных аргументов, а через A , B , A_j , B_j — положительные константы.

Итак, при условии существования решений z и ρ неравенства $\Phi(e, z; \rho) \geq 0$ (где множество e фиксировано) найдется экстремальная п.Г. $g_0 = g(z_0; \rho_0)$ со следующими свойствами максимальной ее h -радиуса:

$$\Phi(e, z_0; \rho_0) = 0, \quad \Phi(e, z; \rho_0 + \varepsilon) \leq 0, \quad (2.5)$$

где последнее неравенство выполняется при всех $z \in G$ и $\varepsilon > 0$.

2.3. Перейдем к построению покрытия V . Положим $E_1 = \text{supp } \mu$. Если при всех $z \in G$ и $\rho > 0$ имеем $\Phi(E_1, z; \rho) < 0$, то полагаем $V = \emptyset$ и построение заканчивается. В противном случае на первом шаге построения через $g_1 = g(z_1; \rho_1)$ обозначим некоторую п.Г., обладающую свойствами (2.5) при $e = E_1$, и положим $E_2 = E_1 \setminus \bar{g}_1$. Далее, если $E_2 = \emptyset$ или $\Phi(E_2, z; \rho) < 0$ при всех $z \in G$ и $\rho > 0$, то полагаем $V = g_1$ и построение заканчивается. В противном случае операция повторяется, т.е. выбирается какая-либо п.Г. $g_2 = g(z_2; \rho_2)$ со свойствами (2.5) при $e = E_2$.

Продолжая построение по индукции, на шаге $k \geq 2$ определим п.Г. $g_k = g(z_k; \rho_k)$ со свойствами (2.5) при $e = E_k \neq \emptyset$ и положим $E_{k+1} = E_k \setminus \bar{g}_k$. Если $E_{k+1} = \emptyset$ или $\Phi(E_{k+1}, z; \rho) < 0$ при всех $z \in G$ и $\rho > 0$, то полагаем $V = g_1 \cup \dots \cup g_k$ и построение заканчивается.

В результате получается конечный или бесконечный счетный набор п.Г. $g_k = g(z_k; \rho_k)$ с невозрастающей последовательностью радиусов $\rho_k \rightarrow 0$ (см. (2.6)).

2.4. Положим

$$E_0 = \text{supp } \mu \setminus \bigcup_k \bar{g}_k, \quad V = \bigcup_k g(z_k; r_k), \quad r_k := 2\rho_k.$$

Поскольку по построению $\Phi(E_k, z_k; \rho_k) = 0$, т.е. $r_k = \mu(E_k \cap \bar{g}_k)$, и при $k \neq l$ множества $E_k \cap \bar{g}_k$ и $E_l \cap \bar{g}_l$ не имеют общих точек, то

$$\sum_k r_k = \sum_k \mu(E_k \cap \bar{g}_k) \leq \|\mu\|. \quad (2.6)$$

Этим свойство (2.1) доказано.

2.5. Фиксируем $z \in G \setminus V$, $\rho > 0$, и предположим, что $\bar{g} = \overline{g(z; \rho)}$ имеет непустое пересечение с $E_1 = \text{supp } \mu$. Покажем, что $\Phi(E_1, z; \rho) \leq 0$. Будем различать два возможных случая.

В первом случае $\bar{g} \cap (E_1 \setminus E_0) = \emptyset$. Тогда $E_0 \neq \emptyset$ и $\bar{g}$ не имеет общих точек ни с одним из пересечений $E_k \cap \bar{g}_k$. Отсюда следует, что $\Phi(E_0, z; \rho) = \Phi(E_1, z; \rho) < 0$. Действительно, в случае конечности покрытия п.Г. g_k это непосредственно вытекает из построения V . Если же последовательность $\{g_k\}$ бесконечна, то, начиная с некоторого номера $k_0(\rho)$, будем иметь $\rho_k < \rho$, и свойство максимальной (2.5) означает, что $\Phi(E_0, z; \rho) = \Phi(E_k, z; \rho) < \Phi(E_k, z_k; \rho_k) = 0$.

Во втором случае $\bar{g} \cap (E_1 \setminus E_0) \neq \emptyset$. Обозначим через s минимальный номер, при котором $\bar{g} \cap \bar{g}_s \neq \emptyset$. Тогда из того, что $z \notin g(z_s, r_s)$, очевидно, следует $\rho \geq \rho_s$. Отсюда и из (2.5) получается $\Phi(E_1, z; \rho) = \Phi(E_s, z; \rho) \leq 0$.

Таким образом, при фиксированном $z \in G \setminus V$ и $\rho > 0$ имеем $\Phi(E, z; \rho) \leq 0$, что при $\zeta \in \partial g(z; \rho)$ равносильно неравенству

$$2\rho = \ln \frac{1 + |\varphi(z; \zeta)|}{1 - |\varphi(z; \zeta)|} \geq \mu_0(\rho), \quad \text{или} \quad |\varphi(z; \zeta)| \geq \frac{\exp(\mu_0(\rho)) - 1}{\exp(\mu_0(\rho)) + 1}, \quad (2.7)$$

где $\mu_0(\rho) := \mu(\overline{g})$ при $\rho = \mathcal{R}(g)$. Отметим, что $\mu_0(0+) = 0$, $z \in G \setminus V$.

Положим $\rho_0 = \inf\{\rho : \mu_0(\rho) > 0\}$. Из (2.7) получаем (интегралы Лебега–Стилтьеса)

$$\int \ln \frac{1}{|\varphi(z; \zeta)|} d\mu(\zeta) \leq \int_{\rho_0}^{\infty} L(\mu_0(\rho)) d\mu_0(\rho), \quad L(x) = \ln \frac{\exp(x) + 1}{\exp(x) - 1}. \quad (2.8)$$

2.6. Обозначим последний интеграл через $I(\mu_0)$. Для его оценки напомним, что функция $\mu_0(\rho)$ не убывает, непрерывна справа, так что для ее составляющей скачков μ_1 имеем $\mu_1(\rho) = \sum_{\delta_s \leq \rho} (\mu_0(\delta_s) - \mu_0(\delta_s - 0))$, где δ_s – точки разрыва μ_0 . Не ограничивая общности, будем считать, что μ_0 имеет лишь конечное число точек разрыва $\delta_1 < \dots < \delta_n$. Тогда, положив $\delta_0 = 0$, $\delta_{n+1} = \infty$, с учетом убывания $L(x)$, $x > 0$, получим

$$\begin{aligned} I(\mu_0) &\leq \sum_{s=1}^n L(\mu_0(\delta_s))(\mu_0(\delta_s) - \mu_0(\delta_s - 0)) + \sum_{s=1}^{n+1} \int_{\mu_0(\delta_{s-1})}^{\mu_0(\delta_s - 0)} L(x) dx \\ &\leq \sum_{s=1}^n \int_{\mu_0(\delta_{s-1})}^{\mu_0(\delta_s)} L(x) dx + \sum_{s=1}^{n+1} \int_{\mu_0(\delta_{s-1})}^{\mu_0(\delta_s - 0)} L(x) dx = \int_0^{\infty} L(x) dx \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^{\infty} e^{-x(2k+1)} dx = \frac{\pi^2}{4} < \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Этим оценка (2.2) при $\alpha = 0$ доказана (см. п. 2.1).

2.7. При $\alpha > 0$ оценка (2.2) получается аналогично из (2.7). Действительно, ядро $|\varphi(z; \zeta)|^{-\alpha} - 1$ при $z \in G \setminus V$ и указанном в (2.7) значении ρ оценивается сверху, как легко проверить, величинами

$$3\mu_0^{-\alpha}(\rho) \text{ при } \mu_0(\rho) \leq \ln 2, \quad 2\alpha(\exp(\mu_0(\rho)) - 1)^{-1} \text{ при } \mu_0(\rho) > \ln 2. \quad (2.9)$$

С учетом этого оценки интеграла $u_\alpha(\mu, z)$ проводятся как в п. 2.6 и дают неравенство (2.4) с $A(\alpha) = 5/(1 - \alpha)$.

Теорема 2.1 доказана.

2.8. Рассмотрим одну модификацию покрытия из теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с невырожденной в точку границей, μ – неотрицательная конечная борелевская мера в G , $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\mathcal{R}_0 > 0$. Тогда существует конечный или счетный набор п.Г. $g_G(z_k; r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, с ограничениями $r_k \leq \mathcal{R}_0$, объединение $V(\mathcal{R}_0, \beta)$ которых обладает следующими свойствами:

$$\sum_k r_k^\beta \leq \|\mu\|, \quad r_k \leq \mathcal{R}_0; \quad (2.10)$$

при каждом фиксированном $z \in G \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)$ существует число $r_0(z) \in [\mathcal{R}_0/2, \infty]$ такое, что для сужения $\mu_g(e) = \mu(e \cap g)$ меры μ на множество $g = g_G(z, r_0(z))$ имеем

$$\nu_{\gamma, 0}(\mu_g, z) \leq A_1(\gamma, \beta), \quad \nu_{\gamma, \alpha\beta}(\mu_g, z) \leq A_2(\gamma, \alpha\beta), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.11)$$

В случае конечности величины $r_0(z)$ выполняется неравенство

$$\mu(\overline{g(z; r_0(z))}) \geq \mathcal{R}_0^\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение покрытия $V(\mathcal{R}_0, \beta)$ областями $g_k = g(z_k; 2\rho_k)$ проводится аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, но при дополнительном условии $\rho_k \leq \mathcal{R}_0/2$. Кроме того, вместо измеряющей функции, определенной в (2.4), в данном случае возьмем

$$\Phi_\beta(e, z; \rho) = \frac{1}{2} \mu^{1/\beta}(e \cap \bar{g}) - \rho,$$

где $g = g(z, \rho)$. Теперь условие максимальности h -радиуса ρ (при фиксированном $e \subset G$) записывается в виде

$$\rho_0 = \mathcal{R}(g_0) = \max \left\{ \rho : \Phi_\beta(e, z; \rho) \geq 0, 0 < \rho \leq \frac{\mathcal{R}_0}{2}, z \in G \right\},$$

и в случае существования решения $\rho_0 > 0$ экстремальная п.Г. $g_0 = g(z_0; \rho_0)$ обладает одним из следующих свойств:

$$\Phi_\beta(e, z_0; \rho_0) = 0, \quad \rho_0 < \frac{\mathcal{R}_0}{2}, \quad \text{или} \quad \Phi_\beta(e, z_0; \rho) \geq 0, \quad \rho_0 = \frac{\mathcal{R}_0}{2}. \quad (2.12)$$

В любом случае будем иметь неравенство $\rho_0^\beta \leq 2^{-\beta} \mu(e \cap \bar{g}_0)$. Определим покрытие $V(\mathcal{R}_0, \beta)$ множества $\text{supp } \mu$ экстремальными п.Г. $g_k = g(z_k, 2\rho_k)$, $k = 1, 2, \dots$, как и в п.п. 2.3, 2.4. Учитывая предыдущее неравенство и то, что в таком покрытии множества $E_k \cap \bar{g}_k$ и $E_l \cap \bar{g}_l$, $k \neq l$, не имеют общих точек, получим $\sum_k r_k^\beta \leq \|\mu\|$, где $r_k = 2\rho_k$. Кроме того, по построению (см. (2.12)) имеем неравенство $\Phi_\beta(\text{supp } \mu, \mathcal{B}(g); \mathcal{R}(g)) \leq 0$ для всех п.Г. g , удовлетворяющих условиям $\mathcal{R}(g) < \mathcal{R}_0/2$ и $\mathcal{B}(g) \in G \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)$. Пусть $z \in G \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)$. Если $\Phi_\beta(\text{supp } \mu, z, \rho) \leq 0$ при всех ρ , то положим $r_0 = \infty$, в противном случае пусть

$$r_0 = r_0(z) = \inf \{ \rho : \Phi_\beta(\text{supp } \mu, z, \rho) > 0 \}. \quad (2.13)$$

Отметим, что $r_0 \geq \mathcal{R}_0/2$ (см. (2.12)), причем если $r_0 \neq \infty$, то

$$\mu(\overline{g(z; r_0)}) \geq 2^\beta r_0^\beta \geq \mathcal{R}_0^\beta. \quad (2.14)$$

Оценки интегралов $\nu_{\gamma,0}(\mu_g, z)$ и $\nu_{\gamma,\alpha\beta}(\mu_g, z)$ проводятся как в пп. 2.6, 2.7. Именно, при фиксированном $z \in G \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)$ и всех $\rho < r_0(z)$ имеем $\Phi_\beta(\text{supp } \mu, z; \rho) \leq 0$, т.е. $\mu(\overline{g(z; \rho)}) \leq 2^\beta \rho^\beta$, что при $\zeta \in \partial g$ равносильно неравенству

$$|\varphi_G(z; \zeta)| \geq \frac{\exp(\mu_0(\rho)^{1/\beta}) - 1}{\exp(\mu_0(\rho)^{1/\beta}) + 1}, \quad \mu_0(\rho) = \mu(\overline{g(z; \rho)}), \quad \rho < r_0(z). \quad (2.15)$$

Легко проверить, что при $\gamma > 0$, $\alpha \in [0, 1)$ ядро

$$J(|\varphi(z; \zeta)|) := q^\gamma(|\varphi(z; \zeta)|) Q_\alpha(|\varphi(z; \zeta)|)$$

(см. определение в (1.1), (1.2)) обладает следующим свойством:

$$J(|\varphi(z; \zeta)|) \leq A(\gamma, \alpha) q^\gamma(a) Q_\alpha(a) \quad \text{при} \quad |\varphi(z; \zeta)| \geq a. \quad (2.16)$$

Отсюда и из (2.15) легко получаются (как в пп. 2.6, 2.7) оценки (2.11) теоремы 2.2.

2.9. Отметим некоторые другие свойства покрытий. Если для некоторого компакта $K \subset G$ при $\beta \in (0, 2]$ имеем $\text{mes}_\beta(K \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)) = 0$ (mes_β — β -мера Хаусдорфа), то и $\mu(K \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)) = 0$. Действительно, по построению имеем $\mu(\overline{g(z; \rho)}) \leq 2^\beta \rho^\beta$ для всех $z \in K \setminus V(\mathcal{R}_0, \beta)$ и $\rho < \mathcal{R}_0$. Остается учесть, что при малых h -радиусах ρ h -круги покрываются обычными кругами радиуса $A(K)\rho$, что следует из теорем Кебе об искажении.

2.10. При фиксированном $z \in G$ и достаточно малых $r = r(z) > 0$ положим $\nu_0(z, r) = \mu(\{t : |t - z| \leq r\})$. Покажем, что условие $\mathcal{A} : \nu_0(z, r) > 3r \text{dist}^{-1}(z, \partial G)$ (dist — эвклидово расстояние) является достаточным для покрытия точки z множеством V из теоремы 2.1. Действительно, для $\varphi(\zeta) = \varphi_G(\zeta; z)$ равномерно по $t \in \partial g(z; \rho)$ имеем

$$|t - z| \rho^{-1} |\varphi'(z)| \rightarrow 1, \quad \rho \rightarrow 0, \quad |\varphi'(z)| \leq \text{dist}^{-1}(z, \partial G).$$

Следовательно, из условия $\mathcal{A}$ (при достаточно малых r) получается $\mu(\overline{g(z; \rho)}) > 2\rho$. Но точки z , для которых выполнено это неравенство, содержатся в покрытии V (см. (2.4)).

§ 3. Второй метод покрытия

3.1. ТЕОРЕМА 3.1. Пусть G — односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с невырожденной в точку границей, $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, μ — неотрицательная конечная борелевская мера с $\text{supp } \mu \subset G$. Тогда существует конечный (зависящий от ε) набор п.г. $G_k = g_G(z_k; r_k)$, $k = 1, \dots, k_0$, с $r_k > 1$, объединение V которых обладает следующими свойствами:

$$\sum_{r_k \leq r} e^{2r_k} \leq A(\varepsilon, \varepsilon_1) \|\mu\| (2 + r)^{1+\varepsilon}, \quad r > 0; \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} e^{2r_k} \leq A(\varepsilon, \varepsilon_1) \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|); \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} e^{2\sigma r_k} \leq A(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_1) \|\mu\|, \quad \sigma \in (0, 1). \quad (3.3)$$

При любых $z \in G \setminus V$, $\zeta \in G$ имеем

$$|\varphi(z; \zeta)| \geq \frac{\mu(\overline{g}) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu(\overline{g})) - 1}{\mu(\overline{g}) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu(\overline{g})) + 1}, \quad (3.4)$$

где $g = \{t : |\varphi(z; t)| < |\varphi(z; \zeta)|\}$, $\varphi = \varphi_G$. Если, в частности, мера μ дискретна и сосредоточена в некоторых точках $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ области G с $\mu(\zeta_s) = 1$, то при $z \in G \setminus V$ имеем

$$\prod_{s=1}^n |\varphi(z; \zeta_s)|^{-1} \leq A_0(\varepsilon_1). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

3.2. Положим $M = M(\varepsilon_1) := \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \|\mu\|)$. Если $M \leq 1$, то неравенство (3.4) выполняется тривиально и в этом случае полагаем $V = \emptyset$. Пусть $M > 1$. Определим функцию

$$\psi(z; \rho) = \Psi(g) = e^{-2\rho} \mu(\overline{g}) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu(\overline{g})), \quad (3.6)$$

где $g = g(z; \rho) = g_G(z; \rho)$. Пусть D — открытое подмножество области G и $\overline{D} \subset G$. Рассмотрим экстремальную задачу о достижении $\sup \rho$, где $\sup$ берется по всем п.Г. $g(z; \rho)$ с условием $\psi(z, \rho) \geq 1$ и $z \in G \setminus D$. Как и в п. 2.2, используя непрерывность справа по $\rho > 0$ функции $\psi(z; \rho)$ (при каждом фиксированном z), легко показать, что при условии выполнения неравенства $\psi(z, \rho) \geq 1$ при каких-либо $z \in G \setminus D$ и $\rho > 0$ найдется экстремальная п.Г. $g_0 = g(z_0; \rho_0)$, $z_0 \in G \setminus D$, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\psi(z_0, \rho_0) = 1, \quad \rho_0 = \sup\{\rho : \psi(z, \rho) \geq 1, z \in G \setminus D\} > 0. \quad (3.7)$$

Если $\psi(z, \rho) < 1$ при всех $z \in G \setminus D$ и $\rho > 0$, то будем писать $g_0 = \emptyset$. Из (3.7) и (3.6), в частности, следует, что если $g_0 \neq \emptyset$, то

$$d_0^{-1} := e^{2\rho_0} \leq \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \|\mu\|) = M, \quad \mu(\overline{g}_0) > 2^{-1-\varepsilon_1} \quad (3.8)$$

(поскольку $x \ln^{1+\varepsilon_1}(e + x) < 1$ при $x = 2^{-1-\varepsilon_1}$).

3.3. Фиксируем открытое множество D , $\overline{D} \subset G$. Предположим, что по соотношениям (3.7) определяется некоторая п.Г. $g_0 = g(z_0; \rho_0) \neq \emptyset$. При $d_0 = e^{-2\rho_0}$ положим

$$\nu = \nu(g_0) = \log_2 \log_2(4d_0^{-1/4}), \quad N = \nu(\nu^2 + 2\nu + 5)^{-1}. \quad (3.9)$$

Непосредственно из (3.8), (3.9) находим

$$d_0^{-1/2} > \nu > 1, \quad d_0^{2^{-\nu}} > 2^{-4}, \quad 6^{-1} > N > (8\nu)^{-1} > 8^{-1}M^{-1/2}, \quad (3.10)$$

где при доказательстве первого и последнего неравенств использовалась также оценка $\log_2 \log_2(4x) \leq x^2$, $x \geq 1$.

Проведем по индукции построение некоторой цепочки $\lambda = \lambda(D)$ п.Г. $g_j = g(z_j; \rho_j)$, $j = \overline{0, s}$. Введем обозначения $d_j = e^{-2\rho_j}$, $\delta_j = \nu d_j^{1/2}$ при $j \geq 0$.

Элемент $g_0 = g(z_0; \rho_0)$ определим как в п. 3.2. Если $g_0 = \emptyset$, то полагаем $\lambda(D) = \emptyset$. Пусть элемент $g_j \neq \emptyset$ определен при $j \geq 0$. Выберем следующую п.Г. $g_{j+1} = g(z_{j+1}; \rho_{j+1})$ (если это возможно) из условий

$$\mu(\overline{g}_{j+1}) \geq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-1} \mu(\overline{g}_j), \quad (3.11)$$

$$z_{j+1} \in \overline{g(z_j; R_j)}, \quad \text{где } R_j = 2^{-1} \ln \frac{1}{\delta_j}, \quad (3.12)$$

$$d_{j+1} \leq N^2 d_0^{2^{-\nu}}, \quad \text{где } d_{j+1} = \frac{\delta_j d_j}{(\delta_j + d_j)^2 + 4d_j}. \quad (3.13)$$

Если же п.Г. g_{j+1} из условий (3.11)–(3.13) выбрать нельзя, то полагаем $g_{j+1} = \emptyset$ и $\lambda(D) = \{g_0, \dots, g_j\}$. Как будет показано в следующем пункте, процесс построения цепочки в любом случае обрывается на некотором конечном шаге $j = s = s(D) \geq 0$ вслед за построением некоторой отличной от $\emptyset$ п.Г. g_s . Таким образом, определяется цепочка $\lambda = \lambda(D) = \{g_0, \dots, g_s\}$. Положим

$$\mathcal{G}^{(0)}(D) = g_s, \quad \mathcal{G}(D) = g(\mathcal{B}(g_s); R), \quad \text{где } e^{-2R} = 10^{-1}N^2d_0. \quad (3.14)$$

Номер $s \geq 0$ будем называть *индексом п.Г. $\mathcal{G}(D)$* , а п.Г. $\mathcal{G}^{(0)}(D)$ – *ядром этой п.Г.*

3.4. Укажем некоторые свойства $\lambda(D) = \{g_0, \dots, g_s\}$. Из равенства в (3.13) и из определения $\delta_j = \nu d_j^{1/2}$ следует, что $d_{j+1} > Nd_j^{1/2}$ при всех $j = 0, \dots, s-1$, откуда получаем (как и неравенства в (1.4))

$$d_s = e^{-2\rho_s} \geq N^{2-2^{-s+1}} d_0^{2^{-s}} > N^2 d_0^{2^{-s}}. \quad (3.15)$$

Отсюда, учитывая неравенства $d_0 \geq 1/M$ (см. (3.8)) и $N > 8^{-1}M^{-1/2}$ (см. (3.10)), находим

$$d_s \geq N^2 d_0 > (8M)^{-2}. \quad (3.16)$$

Сравнивая (3.15) и (3.13) с учетом (3.9), получаем оценку числа s элементов в $\lambda(D)$:

$$s \leq \nu < \log_2 \log_2 \frac{4}{d_0} \leq \log_2 \log_2 (4M) := \nu^{(0)}. \quad (3.17)$$

Из леммы 1.4 а) находим

$$z_s \in g(z_0; \rho), \quad \text{где } e^{-2\rho} = (12N)^{-1} d_0^{1-2^{-s}}, \quad (3.18)$$

и, следовательно, $z_0 \in g(z_s; \rho)$ с тем же ρ . Положим

$$\mu_0 = \mu(\overline{g_0}), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(D), \quad \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}^{(0)}(D) = g_s$$

(см. определение (3.14)). Тогда из (3.17), (3.11) для последней п.Г. g_s в цепочке $\lambda(D)$ будем иметь

$$\mu(\overline{\mathcal{G}^{(0)}}) = \mu(\overline{g_s}) \geq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\nu} \mu_0 > e^{-1} \mu_0. \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.14), учитывая равенство $d_0^{-1} = \mu_0 \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu_0)$ (см. (3.7)), получаем

$$10^{-1}N^2 e^{2\mathcal{R}(\mathcal{G})} = d_0^{-1} = \mu_0 \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu_0) \leq e\mu(\overline{\mathcal{G}^{(0)}}) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \|\mu\|). \quad (3.20)$$

Справедливо также более точное неравенство. Действительно, поскольку $N < \frac{1}{6}$ (см. (3.10)), то из (3.14) находим $\mu_0 < d_0^{-1} < 360^{-1}e^{2\mathcal{R}(\mathcal{G})}$. Потому из (3.19) получается

$$\begin{aligned} 10^{-1}N^2 e^{2\mathcal{R}(\mathcal{G})} &= d_0^{-1} = \mu_0 \ln^{1+\varepsilon_1}(e + \mu_0) \leq e\mu(\overline{\mathcal{G}^{(0)}}) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + d_0^{-1}) \\ &< e\mu(\overline{\mathcal{G}^{(0)}}) \ln^{1+\varepsilon_1}(3e^{2\mathcal{R}(\mathcal{G})}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отметим, что при обрыве цепочки $\lambda(D)$ из-за невыполнения (3.13) имеем

$$d_{s+1} = \nu d_s^{1/2} ((\nu + d_s^{1/2})^2 + 4)^{-1} > N^2 d_0^{2^{-\nu}}, \quad d_s = e^{-2\rho s}.$$

Поскольку $d_{s+1} \leq d_s^{1/2} (\nu + 4/\nu)^{-1} \leq 5^{-1} d_s^{1/2}$, то (см. третье и пятое неравенства в (3.10))

$$d_s^{1/2} > 5N^2 d_0^{2^{-\nu}} > 2^{-2} N^2 > (16\nu)^{-2}, \quad s \geq 0. \quad (3.22)$$

3.5. Перейдем к построению покрытия $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots\}$ множества E . Пусть $D_1 = \emptyset$ и $G_1 = \mathcal{G}(D_1)$ (см. (3.14)). Если уже построены п.Г. $G_1, \dots, G_k$, то полагаем

$$D_{k+1} = D_k \cup G_k, \quad G_{k+1} = \mathcal{G}(D_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $V = \bigcup G_k$ и покажем, что покрытие V удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Из (3.14) следует, что h -радиусы $\mathcal{R}(G_k)$ всех областей G_k больше единицы.

В силу (3.17) последовательность Λ можно разбить на конечное число подпоследовательностей

$$\Lambda_s = \{G_{s,1}; G_{s,2}; \dots\}, \quad s = \overline{0, s_0}, \quad s_0 \leq \nu^{(0)},$$

состоящих из тех п.Г. $G_{s,j}$, индекс которых равен s . В пп. 3.5, 3.6 будем считать, что элементы в Λ_s расположены в порядке невозрастания их h -радиусов.

Пусть $m < k$ и ядра $G_{s,m}^{(0)}$ и $G_{s,k}^{(0)}$ из Λ_s , $s \geq 0$, определяются соответственно цепочками $\lambda(D_{s,m}) = \{g_{m,j}\}$ и $\lambda(D_{s,k}) = \{g_{k,j}\}$, $j = \overline{0, s}$, так что $G_{s,m}^{(0)} = g_{m,s}$ и $G_{s,k}^{(0)} = g_{k,s}$. По построению имеем $D_{s,m} \subset D_{s,k}$ и, следовательно, $\mathcal{R}(g_{m,0}) \geq \mathcal{R}(g_{k,0})$ — по свойству максимальности (3.7). Отсюда и из (3.12), (3.13) получаем последовательно

$$\mathcal{R}(g_{m,j}) \geq \mathcal{R}(g_{k,j}), \quad j = \overline{0, s}, \quad (3.23)$$

в частности,

$$\mathcal{R}(G_{s,m}) \geq \mathcal{R}(G_{s,k}), \quad \mathcal{R}(G_{s,m}^{(0)}) \geq \mathcal{R}(G_{s,k}^{(0)}), \quad m < k. \quad (3.24)$$

3.6. Фиксируем $s \geq 0$ и покажем следующее.

Последовательность ядер $\Lambda_s^{(0)} = \{G_{s,j}^{(0)}\}$ регулярна. При $s = 0$ регулярную последовательность образуют и сами п.Г. $G_{0,j}$.

Действительно, при $s = 0$ оба утверждения непосредственно следуют из построения и являются следствием (3.24). Пусть $s \geq 1$. Положим $g_{m,j} = g_G(z_{m,j}; \rho_{m,j})$, $g_{k,j} = g_G(z_{k,j}; \rho_{k,j})$, $j = \overline{0, s}$. Тогда при $m < k$ по построению имеем $z_{k,0} \notin G_{s,m}$. Используя это, докажем, что ядра $g_{m,s}$ и $g_{k,s}$ слабо перекрываются. Для этого достаточно показать, что $z_{k,s} \notin g_{m,s}$ (поскольку h -радиус п.Г. $g_{m,s}$ не меньше h -радиуса п.Г. $g_{k,s}$ (см. (3.23)).

Предположим противное: $z_{k,s} \in g_{m,s}$, тогда и $z_{m,s} \in g(z_{k,s}; \rho_{m,s})$. Отсюда и из того, что по (3.18) имеем $z_{k,s} \in g(z_{k,0}; \rho)$ с указанным там ρ , находим

$z_{m,s} \in g(z_{k,0}; \rho + \rho_{m,s})$. Пусть N_m и N_k , $N_k < \frac{1}{5}$, определены по формуле (3.9). Тогда, как следует из (3.18), (3.15), (3.23), (3.14),

$$e^{-2(\rho+\rho_{m,s})} > (12N_k)^{-1} d_{k,0}^{1-2^{-s}} N_m^2 d_{m,0}^{2^{-s}} \geq 10^{-1} N_m^2 d_{m,0} = e^{-2R},$$

где $R = \mathcal{R}(G_{s,m})$. Следовательно, по определению (3.14) должно быть включение $z_{k,0} \in g(z_{m,s}; R) = G_{s,m}$, что противоречит построению.

3.7. Отметим, что при фиксированном $s \geq 0$ последовательность Λ_s конечна. Действительно, из (3.16) и из леммы 1.2 вытекает, что кратность покрытия любой точки $z \in G$ регулярной последовательностью $\Lambda_s^{(0)}$ не превосходит $A_1 := 64M$. С другой стороны, при $s \geq 0$ и $g \in \Lambda_s^{(0)}$ из (3.19) и (3.8) имеем неравенство $\mu(\bar{g}) \geq e^{-1} 2^{-1-\varepsilon_1}$ и, значит, число элементов в Λ_s оценивается сверху величиной $e^{2^{1+\varepsilon_1}} A_1 \|\mu\|$.

3.8. ЛЕММА 3.1. Пусть $\varepsilon_2 = (\varepsilon + \varepsilon_1)/2$, индекс $s \geq 0$ фиксирован. Положим $\rho_{s,m} = \mathcal{R}(G_{s,m})$. Тогда для любого $r > 0$ имеем

$$\sum_{\rho_{s,m} \leq r} e^{2\rho_{s,m}} \leq A(\varepsilon_2) \|\mu\| (2+r)^{1+\varepsilon_2}, \quad (3.25)$$

$$\sum_m e^{2\rho_{s,m}} \leq A(\varepsilon_2) \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon_2}(e + \|\mu\|). \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda_s = \lambda_1 \cup \lambda_2$, где λ_2 состоит из тех п.Г. $G_m = G_{s,m} \in \Lambda_s$, для ядер которых справедливо неравенство (3.22), а λ_1 — из оставшихся п.Г. Положим

$$r_m = \mathcal{R}(G_m^{(0)}), \quad d_m = e^{-2r_m}, \quad z_m = \mathcal{B}(G_m^{(0)}), \quad \mu_m = \overline{\mu(G_m^{(0)})}.$$

Пусть ядро $G_m^{(0)}$ определяется цепочкой $\{g_{m,j}\}$, $g_{m,s} = G_m^{(0)}$ и (см. (3.9))

$$\nu_m = \log_2 \log_2(4e^{\mathcal{R}(g_{m,0})/2}), \quad N_m = \frac{\nu_m}{\nu_m^2 + 2\nu_m + 5}.$$

Предположим, что $G_m \in \lambda_1$. Тогда неравенство (3.22) не выполняется и имеет место (3.13). Следовательно, как нарушение соотношений (3.11), (3.12) имеем

$$\mu(\bar{g}) < \left(1 + \frac{1}{\nu_m}\right)^{-1} \mu_m, \quad (3.27)$$

где $g = g(v; r)$ — произвольная п.Г. с $v \in \partial g(z_m; R_m)$ и

$$\delta_m := e^{-2R_m} = \nu_m d_m^{1/2}, \quad e^{-2r} = \delta_m d_m ((\delta_m + d_m)^2 + 4d_m)^{-1}. \quad (3.28)$$

Фиксируем точку $z \in G \setminus V$ (V — покрытие, определенное в п. 3.5). Для простоты будем считать, что нумерация последовательности $\{G_m\}$ такова, что $\lambda_1 =$

$\{G_1; \dots; G_L\}$ (с некоторым конечным L) и, кроме того, $|\varphi(z; z_m)| \geq |\varphi(z; z_{m+1})|$, $m = 1, L-1$. Фиксируем номер m , $1 \leq m \leq L-1$, и положим

$$\theta_m = \mu \left(\overline{G_m^{(0)}} \setminus \bigcup_{n=m+1}^L \overline{G_n^{(0)}} \right), \quad G(m) = \{t : |\varphi(z; t)| < |\varphi(z; z_m)|\}.$$

Из регулярности последовательности $\lambda_1^{(0)} = \{G_n^{(0)}\}_1^L$ при указанной нумерации следует, что все h -центры z_m п.Г $G_n^{(0)}$ с номерами $n > m$ лежат на множестве $\overline{G(m)} \setminus \overline{G_m^{(0)}}$. Из леммы 1.3 вытекает, что пересечение

$$G_m^{(0)} \cap \left(\bigcup_{n=m+1}^L G_n^{(0)} \right)$$

можно покрыть некоторой п.Г. $g = g(v; r)$ со свойствами, которые указаны в (3.28). Поэтому для этой области g должно выполняться (3.27), откуда находим

$$\theta_m \geq \mu_m - \mu(\bar{g}) \geq (1 + \nu_m)^{-1} \mu_m.$$

Далее, принимая во внимание (3.21), получаем

$$(10e)^{-1} N_m^2 e^{2\mathcal{R}(G_m)} \ln^{-1-\varepsilon_1} (4e^{2\mathcal{R}(G_m)}) \leq \mu_m \leq (1 + \nu_m) \theta_m. \quad (3.29)$$

Заметим, что (3.29), очевидно, выполняется и при $m = L$.

Пусть $r > 0$. Если $\mathcal{R}(G_m) \leq r$, то $\nu_m \leq \log_2 \log_2 (4e^r)$ (см. (3.9), (3.14)) и

$$N_m^{-1} \leq 8\nu_m \leq 8 \log_2 \log_2 (4e^r) \leq A_1 \ln(2 + r).$$

Учитывая это, а также то, что $\sum \mu_m \leq \|\mu\|$, просуммируем неравенства (3.29) по всем п.Г. $G_m \in \lambda_1$, для которых $\mathcal{R}(G_m) \leq r$:

$$\sum_1 e^{2\mathcal{R}(G_m)} \leq A_2(\varepsilon_2) \|\mu\| (2 + r)^{1+\varepsilon_2}. \quad (3.30)$$

Далее, оценим аналогичную сумму по п.Г. $G_m \in \lambda_2$ (при том же условии $\mathcal{R}(G_m) \leq r$). В этом случае перепишем неравенство (3.22) для h -радиусов ядер $G_m^{(0)}$:

$$e^{r_m} < (16\nu_m)^2 \leq 4A_1^2 \ln^2(2 + r). \quad (3.31)$$

Воспользовавшись леммой 1.2, получим, что максимальная кратность T покрытия точек G замыканиями ядер $G_m^{(0)}$ не превосходит $A_3 \ln^2(2 + r)$. Таким образом, из (3.21) получается неравенство

$$\sum_2 e^{2\mathcal{R}(G_m)} \leq A_4(\varepsilon_1) T \|\mu\| (2 + r)^{1+\varepsilon_1}, \quad T \leq A_3 \ln^2(2 + r). \quad (3.32)$$

Отсюда и из (3.30) получается оценка (3.25) леммы 3.1.

Оценка (3.26) получается так же, как и (3.25), если вместо (3.21) использовать (3.20), а для ν_m и N_m использовать равномерные оценки (см. (3.17)): $\nu_m \leq \nu^{(0)}$ и $N_m^{-1} \leq 8\nu_m \leq 8\nu^{(0)}$.

Лемма 3.1 доказана.

3.9. Суммированием по s неравенств (3.25) и (3.26) получим соответственно неравенства (3.1) и (3.2) теоремы 3.1. Действительно, в первом случае максимальный индекс s п.Г. G_j (при условии $\mathcal{R}(G_{s,m}) \leq r$) оценивается величиной $\nu(r) = A_5 \ln(2 + r)$, а во втором случае – величиной $\nu^{(0)} = A_6 \ln \ln(3 + \|\mu\|)$ (см. (3.17)).

3.10. Неравенство (3.3) является следствием (3.1). В самом деле, предположим, что $\delta_k = e^{-2r_k}$ расположены в порядке невозрастания при $k = \overline{1, k_0}$. Тогда при $K = \overline{1, k_0}$ из (3.1) получаем $\sum_{k=1}^K \delta_k^{-1} < C \ln^{1+\varepsilon}(10\delta_K^{-1})$, где $C = A(\varepsilon)\|\mu\|$. Положим $\lambda = 1 - \sigma$. При $\lambda \in (0, 1)$ преобразование Абеля дает

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{k=1}^{k_0} \delta_k^\lambda \delta_k^{-1} = \delta_{k_0}^\lambda \sum_{k=1}^{k_0} \delta_k^{-1} + \sum_{K=1}^{k_0-1} (\delta_K^\lambda - \delta_{K+1}^\lambda) \sum_{k=1}^K \delta_k^{-1} \\ &\leq C \delta_{k_0}^\lambda \ln^{1+\varepsilon}(10\delta_{k_0}^{-1}) + C \sum_{K=1}^{k_0-1} (\delta_K^\lambda - \delta_{K+1}^\lambda) \ln^{1+\varepsilon}(10\delta_K^{-1}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta_K^\lambda - \delta_{K+1}^\lambda < 3(\delta_K^{\lambda/3} - \delta_{K+1}^{\lambda/3})\delta_K^{2\lambda/3}$$

и, как нетрудно проверить,

$$\delta_K^{2\lambda/3} \ln^{1+\varepsilon}(10\delta_K^{-1}) < 10 \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\varepsilon} \left(\frac{1+\varepsilon}{\lambda}\right)^{1+\varepsilon} =: a(\sigma, \varepsilon),$$

то из предыдущего находим

$$S \leq Ca(\sigma, \varepsilon) \left(1 + 3 \sum_{K=1}^{k_0-1} (\delta_K^{\lambda/3} - \delta_{K+1}^{\lambda/3})\right) = A(\sigma, \varepsilon).$$

3.11. Наконец, при $z \in G \setminus V$ и $\rho > 0$ по построению имеем $\psi(z, \rho) < 1$, что равносильно (3.4). Неравенство (3.5) получается из (3.4), поскольку при нумерации точек ζ_s , при которой $|\varphi(z; \zeta_s)| \geq |\varphi(z; \zeta_{s+1})|$, справедливо

$$|\varphi(z; \zeta_s)| \geq \frac{s \ln^{1+\varepsilon_1}(e + s) - 1}{s \ln^{1+\varepsilon_1}(e + s) + 1},$$

и произведение в (3.5) легко оценивается. Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Комбинированный метод покрытия

4.1. Оценка суммы экспонент h -радиусов теоремы 3.1 значительно усиливает соответствующие неравенства теорем 2.1 и 2.2 при больших значениях r_k . Однако (3.4) при малых h -расстояниях между z и ζ может оказаться несодержательным и для оценок потенциалов непригодным. В этом параграфе предлагается некоторая комбинация теорем 2.2, 3.1, позволяющая получать оценки потенциалов при той же, что и в теореме 3.1, оценке суммы экспонент h -радиусов r_k покрытия.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть G – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с невырожденной в точку границей, μ – неотрицательная и конечная в области G борелевская мера, $\varepsilon > \gamma \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, 1)$. Тогда существует конечный или счетный набор (зависящий от $\varepsilon, \gamma, \beta$) п.г. $G_k = g_G(z_k; r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, объединение W которых обладает следующими свойствами:

$$\sum_{r_k \leq 1} r_k^\beta + \sum_{r_k > 1} e^{2r_k} \leq A_1(\varepsilon, \gamma) \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|), \quad (4.1)$$

$$\sum_{r_k \leq 1} r_k^\beta + \sum_{r_k > 1} e^{2\sigma r_k} \leq A_2(\sigma, \varepsilon, \gamma) \|\mu\|. \quad (4.2)$$

Кроме того, при $z \in G \setminus W$ справедливо неравенство

$$\nu_{\gamma, \alpha\beta}(\mu, z) \leq A_3(\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma). \quad (4.3)$$

4.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для меры μ с $\text{supp } \mu \subset G$ (см. примечание к теореме 2.1). Применим теорему 3.2 (с параметром $\varepsilon_1 = (\varepsilon + \gamma)/2$) и теорему 2.2 (с параметрами $\mathcal{R}_0 = 1$, $\beta > 0$). Тогда объединение $W = V \cup V(\mathcal{R}_0, \beta)$ покрытий из этих теорем будет удовлетворять свойствам (4.1)–(4.3).

Действительно, (4.1), (4.2) получаются суммированием неравенств (2.10) (где $r_k \leq 1$) и (3.2), (3.3) (где $r_k > 1$) соответственно. Далее, фиксируем точку $z \in G \setminus W$ и положим $m(r) = \mu(g(z; r))$. В силу (2.11) оценку (4.3) достаточно установить для сужения меры μ на множество $\mathcal{T} = G \setminus g(z; r_0)$ и только в том случае, когда величина $r_0 = r_0(z) \geq \mathcal{R}_0/2$ из теоремы 2.2 конечна. В этом случае из теоремы 2.2 получаем $m(r) \geq m(r_0) \geq \mathcal{R}_0^\beta = 1$ при $r > r_0$. При таких r и при $\zeta \in \partial g(z; r)$ имеем неравенство (см. (3.4))

$$|\varphi(z; \zeta)| > \frac{m(r) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + m(r)) - 1}{m(r) \ln^{1+\varepsilon_1}(e + m(r)) + 1},$$

откуда при $\alpha\beta \geq 0$ находим (см. (2.16))

$$q^\gamma(|\varphi(z; \zeta)|) Q_{\alpha\beta}(|\varphi(z; \zeta)|) \leq A m^{-1}(r) \ln^\gamma(e + m(r)) \ln^{-1-\varepsilon_1}(e + m(r)),$$

где $A = A(\gamma, \alpha\beta, \varepsilon_1)$. Следовательно (см. п. 2.6),

$$\int_{\mathcal{T}} q^\gamma Q_{\alpha\beta} d\mu(\zeta) \leq A \int_1^\infty t^{-1} \ln^{-1-\varepsilon_1+\gamma}(e + t) dt < \infty.$$

Теорема 4.1 доказана.

4.3. В случае шара $G \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, справедливы утверждения, вполне аналогичные леммам и теоремам из §§1–4. При этом п.Г. определяются через мёбиусовы отображения шара G на единичный шар в $\mathbb{R}^N$. Пусть, к примеру, G – открытый шар радиуса r с центром в начале координат, $\zeta \in G$, $w = \varphi_G(z; \zeta)$ – какое-либо фиксированное конформное отображение шара G на единичный шар $|w| < 1$ с условием $\varphi_G(\zeta; \zeta) = 0$. Для определенности пусть

$$r\varphi_G(z; \zeta) = -\zeta^* + \frac{r^2 - |\zeta^*|^2}{|z - \zeta^*|^2}(z - \zeta^*),$$

где точки $\zeta^* = (r/|\zeta|)^2\zeta$ и ζ симметричны относительно ∂G . Легко проверить, что отображение $\varphi_G(z; \zeta)$ действует в каждой комплексной плоскости, проходящей через точки O и ζ (O – центр G), как антианалитическое дробно-линейное отображение вида $w = -r(\zeta/\bar{\zeta})(\bar{z} - \bar{\zeta})/(r^2 - \bar{z}\zeta)$. При этом

$$g(G; z, \zeta) = (1 - |\varphi_G(z; \zeta)|^{N-2})|\zeta - z|^{2-N}$$

является функцией Грина для шара G с полюсом ζ и, следовательно, п.Г. в шаре G можно определить следующим образом:

$$g_G(\zeta; \rho) = \{z \in G : g(G; z, \zeta)|\zeta - z|^{N-2} > 1 - \text{th}^{N-2} \rho\}. \quad (4.4)$$

Легко видеть, что леммы §1 (кроме леммы 1.2) остаются справедливыми и для п.Г. в шарах. Следует сделать поправку только в лемме 1.2 о границе для числа n элементов последовательности $\{g_j\}$. В случае $\mathbb{R}^N$ имеем $n \leq C_N e^{\rho(N-1)}$. Действительно, в $\mathbb{R}^N$ неравенство леммы 1.2 $\sigma \geq \text{ch}^{-1} \rho$ дает оценку для попарных сферических расстояний между радиальными проекциями h -центров z_j на сферу ∂G . Отсюда и из сравнения мер mes_{N-1} для ∂G и для $(\text{ch}^{-1} \rho)$ -окрестности множества $\{z_k\}$ на ∂G получим нужную оценку. Расхождение в оценках n для построений в теоремах 3.1, 4.1 (эти оценки используются лишь там) несущественно, поскольку лемма 1.2 применяется только при оценке кратности T покрытия, вытекающей из (3.31); в случае шара в $\mathbb{R}^N$ из (3.31) получается оценка $T \leq A(N) \ln^{2(N-1)}(2+r)$ и, следовательно, из оценки (3.32) снова получается оценка (3.25) леммы 3.1.

Приведем аналог теоремы 4.1 для случая шара в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Положив $\gamma = \alpha\beta/(N-2)$, при $\gamma \geq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi_G(z; \zeta)|^{-\alpha\beta} &= \left(g(G; z, \zeta) \left(\frac{|z|}{r} \right)^{N-2} |\zeta - z^*|^{N-2} + 1 \right)^\gamma \\ &\geq g^\gamma(G; z, \zeta) \left(\frac{|z|}{r} \right)^{\alpha\beta} |\zeta - z^*|^{\alpha\beta} + 1. \end{aligned}$$

Поэтому (как теорема 4.1 при $\gamma > 1$, $\beta = \gamma(N-2)/\alpha > \gamma(N-2)$) получается

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть G – открытый шар в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, радиуса r , $g(G; z, \zeta)$ – функция Грина для G с полюсом $\zeta \in G$, μ – неотрицательная конечная борелевская мера в G , $\gamma \geq 1$, $\beta > \gamma(N-2)$. Тогда существует конечный или счетный набор (зависящий от β) п.г. $G_k = g_G(z_k; r_k)$ шара G , объединение W которых обладает следующими свойствами:

$$\sum_{r_k \leq 1} r_k^\beta + \sum_{r_k > 1} e^{\sigma r_k} \leq A_1(\sigma, \beta) \|\mu\|, \quad \sigma \in (0, 1); \quad (4.5)$$

при $z \in G \setminus W$ справедливо неравенство

$$\int g^\gamma(G; z, \zeta) |\zeta - z^*|^{\gamma(N-2)} d\mu(\zeta) \leq A_2 \left(\frac{r}{|z|} \right)^{\gamma(N-2)}. \quad (4.6)$$

§ 5. Интегральные оценки некоторых ядер

5.1. Пусть K – некоторое подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, γ – локально спрямляемая кривая и $\overline{K} \cap \gamma = \emptyset$. Положим

$$I(\gamma; K) = I_1(\gamma; K) = \int_\gamma \text{dist}^{-1}(z, K) |dz|,$$

где через $\text{dist}(K_1, K)$ обозначается евклидово расстояние между множествами K_1 и K .

При $\lambda > 0$ назовем λ -разбиением кривой γ относительно K любое разбиение γ на конечную или счетную совокупность дуг γ_k , $k = 1, 2, \dots$, не имеющих общих внутренних точек и удовлетворяющих равенствам $I(\gamma_k; K) = \lambda$ при всех k , кроме, возможно, одного номера $k = 1$, которому соответствует “неполная” дуга с $I(\gamma_1; K) < \lambda$. Подразумевается, что “неполные” дуги могут быть лишь при конечных разбиениях.

Пусть γ – (связная) дуга и $I(\gamma; K) = \lambda \leq \frac{1}{2}$. Фиксируем произвольно $z \in K$. Тогда если z_0 делит γ на равновеликие дуги $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, то положив $\rho_0 = |z - z_0|$, для какой-то из этих дуг, пусть для определенности для γ_1 , будем иметь $\lambda/2 \geq I(\gamma_1; K) \geq \ln(1 + |\gamma_1|/\rho_0)$. Следовательно, $|\gamma| \leq 2\rho_0(e^{\lambda/2} - 1)$, откуда получается, что для окружности d с центром, делящим дугу γ на равновеликие дуги, и с радиусом $|\gamma|$ имеем

$$\sup_{z \in K} \frac{\sup\{\text{dist}(\zeta, z) : \zeta \in d\}}{\inf\{\text{dist}(\zeta, z) : \zeta \in d\}} \leq \frac{2e^{\lambda/2} - 1}{3 - 2e^{\lambda/2}} \leq 1 + 6\lambda, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

Пусть G – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с границей, содержащей более одной точки. Положим $d(G) = \text{diam}(\overline{\mathbb{C}} \setminus G) := \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus G\}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть G – односвязная область, $d(G) = \infty$, $z_0 \in G$, $\rho > 0$, $\beta \in [0, 2\pi)$. Тогда для линий

$$\gamma = \partial g_G(z_0; \rho), \quad \gamma_0 = \{\zeta : 0 \leq e^{i\beta} \varphi_G(\zeta; z_0) \leq \text{th } \rho\}$$

справедливы оценки

$$I(\gamma; \partial G) \leq 4\pi(e^{2\rho} - 1), \quad I(\gamma_0; \partial G) \leq 8\rho. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки немедленно получаются из следующей оценки производной отображения $w = w(z) = \varphi_G(z; z_0)$ с произвольным фиксированным нулем $z_0 \in G$ (см., например, [2])

$$|w'| \geq \frac{1 - |w|}{4 \operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad d(G) = \infty. \quad (5.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} I(\gamma; \partial G) &\leq 4 \int_{|w|=\operatorname{th} \rho} (1 - |w|)^{-1} |dw| = 4\pi(e^{2\rho} - 1), \\ I(\gamma_0; \partial G) &\leq 4 \int_0^{\operatorname{th} \rho} (1 - |w|)^{-1} |dw| = 4 \ln \left(\frac{e^{2\rho} + 1}{2} \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. При любом $\lambda > 0$ число дуг в λ -разбиении линии γ не превосходит величины $1 + 4\pi e^{2\rho} \lambda^{-1}$.

5.2. ЛЕММА 5.2. Пусть G — односвязная область, $d(G) = \infty$, $g = g_G(z_0, \rho)$ — некоторая ее п.Г. ($z_0 \in G$, $\rho > 0$). Тогда существует односвязная область G_0 с кусочно-аналитической границей Γ_0 такая, что $g \subseteq G_0 \subset G$ и для любой точки $z \notin G$ имеем

$$J(\Gamma_0; z) := \int_{\Gamma_0} |\zeta - z|^{-1} |d\zeta| \leq A\rho e^\rho. \quad (5.4)$$

При $\rho > 1$ доказательство, основанное на λ -разбиении ∂g , имеется в [2]. В случае $\rho \leq 1$ неравенство (5.4) следует из (5.2) при $G_0 = g$.

5.3. Положим $D(\zeta, \rho) := \{z : |z - \zeta| < \rho\}$.

ЛЕММА 5.3 [3]. Пусть имеется конечная совокупность k открытых кругов, объединение которых обозначим через V . Тогда в k можно указать некоторый набор $D(\zeta_k, \rho_k)$, $k = \overline{1, m}$, со свойствами:

- (i) круги $D(\zeta_k, \rho_k/2)$ попарно не пересекаются;
- (ii) $V \subset \bigcup_{k=1}^m D(\zeta_k, 2\rho_k)$.

ЛЕММА 5.4. Пусть G — односвязная ограниченная область, $g = g_G(z_0, \rho)$ — некоторая ее п.Г., $\chi \in (0, 1]$. Тогда существует односвязная область G_0 с кусочно-аналитической границей Γ_0 такая, что $g \subseteq G_0 \subset G$ и

$$I_\chi(\Gamma_0; \partial G) := \int_{\Gamma_0} \frac{|d\zeta|}{\operatorname{dist}^\chi(\zeta)} \leq A(\chi, G) \min\{\rho, e^{\rho(1+\chi)}\}, \quad (5.5)$$

где $\operatorname{dist}(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \partial G)$. Если G — обобщенно ляпуновская область, то при $\chi \in (0, 1]$ имеем

$$I_\chi(\partial g; \partial G) \leq A(\chi, G) \min\{\rho, e^{2\rho\chi}\}. \quad (5.6)$$

Напомним, что ограниченная область G с гладкой жордановой границей $\Gamma = \partial G$ называется обобщенно ляпуновской, если модуль непрерывности $\omega(r)$ угла наклона касательной к Γ как функции длины s дуги удовлетворяет условию Дини $\int_0^\infty \omega(s)/s \, ds < \infty$. Приведем один результат С.Е. Варшавского (см. [4]). Если G — обобщенно ляпуновская область, то при фиксированном $z_0 \in G$ и $w = w(z) = \varphi_G(z; z_0)$ имеем $0 < A_1 \leq |w'(z)| \leq A_2 < \infty$, $z \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\rho \leq 1$ оценка (5.5) с $\chi = 1$ следует из (5.2) при $G_0 = g$, тем самым получается оценка (5.5) и при всех $\rho \leq 1$, $\chi \leq 1$. Пусть теперь $\rho > 1$. Положим $\delta = e^{-2\rho}$. Пусть дуги γ_k представляют какое-либо $(1/2)$ -разбиение кривой $\gamma = \partial g$. По следствию п. 5.1 их число N не превосходит $30/\delta$. Покроем каждую дугу γ_k замкнутым кругом радиуса $\rho_k = |\gamma_k|/2$ с центром на γ_k . К полученной совокупности κ применим лемму 5.3 и определим некоторый набор кругов $D(\zeta_k, \rho_k)$ с $k = 1, \dots, m$ ($m \leq N$). Через V обозначим объединение тех кругов $D_k = D(\zeta_k, 2\rho_k)$, которые имеют общие точки с множеством $\{\zeta \in \partial g : \text{dist}(\zeta) > \sqrt{\delta}\}$. Из (5.1) следует, что расстояние от таких кругов до ∂G будет не меньше $\sqrt{\delta}/4$. В качестве $G_0 \subset G$ возьмем односвязную область, состоящую из объединения $V \cup g$, а также из тех точек, которые отделяются этим объединением от ∞ . Отметим, что граница $\Gamma_0 = \partial G_0$ состоит из конечного числа аналитических дуг (следствие того, что аналитические замкнутые кривые, имеющие бесконечное число общих точек, совпадают). Часть границы Γ_0 , состоящую из дуг окружностей ∂D_k , обозначим через γ_2 и положим $\gamma_1 = \Gamma_0 \setminus \gamma_2$. По построению $\text{dist}(\zeta) \leq \sqrt{\delta}$ при $\zeta \in \gamma_1$. Отсюда и из (5.3) при $\zeta \in \gamma_1$ находим

$$|w'(\zeta)| \geq 4^{-1} \frac{1 - |w(\zeta)|}{\text{dist}(\zeta)} \geq 4^{-1} \frac{\delta}{\text{dist}^{1-\chi}(\zeta)} \text{dist}^{-\chi}(\zeta) \geq 4^{-1} \delta^{(1+\chi)/2} \text{dist}^{-\chi}(\zeta).$$

Следовательно, $I_\chi(\gamma_1; \partial G) \leq 8\pi\delta^{-(1+\chi)/2}$. Для оценки $I_\chi(\gamma_2; \partial G)$ используем свойство (i) леммы 5.3.

$$\begin{aligned} I_\chi(\gamma_2; \partial G) &\leq 4^\chi \delta^{-\chi/2} \int_{\partial V} |d\zeta| \leq 4\delta^{-\chi/2} 8\sqrt{\pi} \left(\sum_k \pi \left(\frac{\rho_k}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k 1 \right)^{1/2} \\ &\leq 32\delta^{-\chi/2} \sqrt{\pi} \sqrt{\text{mes}_2 G} \sqrt{N} \leq 32\sqrt{30\pi} \sqrt{\text{mes}_2 G} \delta^{-(1+\chi)/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получается (5.5).

В случае круга $G = \mathcal{D}$ при $\chi \in (0, 1]$, $\delta = e^{-2\rho} \in (0, 1)$ имеем

$$K_\chi := \int_{\partial g} (1 - |z|^2)^{-\chi} |dz| \leq 2\pi\rho\delta^{-\chi}. \quad (5.7)$$

Действительно, перейдем к новой переменной $v = (z - z_0)/(1 - z\bar{z}_0)$. Тогда, положив $t = \text{th } \rho$, после простых преобразований получим

$$K_\chi = \frac{t(1 + \delta)^{2\chi}}{4\chi} \frac{1}{\delta\chi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - |z_0|^2)^{1-\chi} d\varphi}{|1 + \bar{z}_0 t e^{i\varphi}|^{2(1-\chi)}}.$$

Первая дробь перед интегралом не превосходит ρ , а интеграл оценивается величиной

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - |z_0|^2 t^2}{1 + 2|z_0|t \cos \varphi + |z_0|^2 t^2} \right)^{1-\chi} d\varphi \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z_0|^2 t^2}{1 + 2|z_0|t \cos \varphi + |z_0|^2 t^2} d\varphi \right)^{1-\chi} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right)^\chi = 2\pi, \end{aligned}$$

откуда и следует (5.7). Поскольку в случае обобщенно ляпуновской области G имеем $|w'(\zeta)| \asymp 1$, то $\text{dist}(\zeta) \asymp 1 - |z|^2$, $z = w(\zeta)$, и неравенство (5.6) следует из (5.7).

§ 6. Приложение к задачам о разделении особенностей

6.1. Пусть G – односвязная область, K – компакт, лежащий в G . Пусть μ – неотрицательная мера с $\text{supp } \mu \subset K$. Фиксируем $\alpha \in [0, 1)$, $0 < v < \infty$, и положим

$$u_\alpha(z) = u_\alpha(\mu, z), \quad K_\alpha(v) = \{z : z \in K, u_\alpha(z) \leq v\}, \quad K_\alpha(\infty) = K. \quad (6.1)$$

Легко видеть, что $K_\alpha(v)$ – компакт. Будем называть *0-уровнем потенциала* $u_\alpha(z)$ любую фиксированную величину $v_\alpha = v_\alpha(\mu) \in (0, \infty]$, удовлетворяющую условию $\text{mes}_1 K_\alpha(v_\alpha) = 0$, где mes_1 – 1-мера Хаусдорфа. Любая величина v , $v < \lambda_\alpha(\mu) := \inf_{z \in E} u_\alpha(\mu, z)$, является 0-уровнем потенциала. Если h -диаметр множества $\text{supp } \mu$ конечен и равен $\rho > 1$, то простая оценка дает

$$\lambda_\alpha(\mu) \geq \|\mu\| \ln h^{-1} 2\rho \geq \|\mu\| e^{-4\rho} \quad \text{и} \quad \lambda_\alpha(\mu) \geq \|\mu\| \alpha e^{-4\rho}, \quad \alpha > 0.$$

Пусть v_α – конечный 0-уровень потенциала $u_\alpha(z)$. Тогда при любом $\varepsilon_0 > 0$ существует покрытие W_{ε_0} компакта $K_\alpha(v_\alpha)$ конечным набором п.Г. $g_G(v_k; \rho_k)$, удовлетворяющее условиям

$$\sum \rho_k \leq \varepsilon_0, \quad \rho_k \leq 1. \quad (6.2)$$

Пусть $K_{\varepsilon_0} = K \setminus W_{\varepsilon_0}$. Тогда $u_\alpha(z) \geq v_\alpha$ при $z \in K_{\varepsilon_0}$.

Фиксируем параметры $\alpha \in [0, 1)$, $\varepsilon > \gamma = 0$, $\beta = 1$ из условия теоремы 4.1. Пусть $q \geq 2A_3/v_\alpha$, где $A_3 = A_3(\varepsilon, \alpha, 1, 0)$ (см. (4.3)). По теореме 4.1 для меры $q\mu$ существует множество $W = \bigcup_k g_G(z_k; r_k)$ со свойствами (4.1)–(4.3), причем неравенство (4.3) принимает вид

$$u_\alpha(z) \leq \frac{A_3}{q} \leq \frac{v_\alpha}{2}, \quad z \in G \setminus W. \quad (6.3)$$

Из (6.3), в частности, следует, что $K_{\varepsilon_0} \subset W$. Через V_1 обозначим какое-либо выделенное из W конечное подпокрытие компакта K_{ε_0} . Рассмотрим множество

$$E = \left\{ z : z \in G \setminus (W_{\varepsilon_0} \cup V_1), u_\alpha(z) \geq 2\frac{A_3}{q} \right\}.$$

Из непрерывности $u_\alpha(z)$ на множестве $G \setminus (W_{\varepsilon_0} \cup V_1)$ следует, что E – компакт, а из (6.3) следует, что $E \subset W$. Через V_2 обозначим какое-либо выделенное из W конечное подпокрытие компакта E . Объединение $D = W_{\varepsilon_0} \cup V_1 \cup V_2$ является конечным покрытием компакта K , причем $u_\alpha(z) \leq 2A_3/q$ при $z \in G \setminus D$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть G – односвязная область с границей, содержащей более одной точки, K – компакт в G , μ – неотрицательная борелевская мера с $\text{supp } \mu \subset K$, $\alpha \in [0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $v_\alpha = v_\alpha(\mu) < \infty$. Тогда существует некоторое число $B = B(\alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что при любом $q \geq B/v_\alpha$ найдется конечное покрытие $D = D(q)$ (всего) компакта K подобластями Грина $g(z_k, r_k)$ со свойствами:

$$\sum_{r_k \leq 1} r_k + \sum_{r_k > 1} e^{2r_k} \leq B_1(\varepsilon)(1+q)^2 \|\mu\| \ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|), \quad (6.4)$$

$$\sum_{r_k \leq 1} r_k + \sum_{r_k > 1} e^{2\sigma r_k} \leq B_2(\sigma, \varepsilon) q \|\mu\|, \quad \sigma \in (0, 1), \quad (6.5)$$

$$u_\alpha(\mu, z) \leq \frac{B}{q}, \quad z \in G \setminus D. \quad (6.6)$$

Если $d(G) = \infty$ (неограниченность дополнения к G), то существует множество D_0 , граница которого состоит из конечного числа аналитических дуг, $D \subset D_0 \subset G$, и

$$J(\partial D_0; z) \leq B_3(\varepsilon)q\|\mu\|, \quad z \notin G, \quad (6.7)$$

$$I_\chi(\partial D_0; \partial G) \leq B_4(\chi, \varepsilon, G)q\|\mu\|, \quad \chi \in (0, 1), \quad \text{diam } G < \infty. \quad (6.8)$$

Неравенство, аналогичное (6.8), справедливо и при $\chi = 1$ со следующим изменением: справа в оценке интеграла I_χ появляется дополнительный множитель $\ln^{1+\varepsilon}(e + \|\mu\|)$. Все утверждения остаются справедливыми при замене v_α на $\lambda_\alpha(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав произвольно $\varepsilon_0 \in (0, q\|\mu\|)$ в (6.2), из (4.1), (4.2) получим соответственно свойства (6.4), (6.5) покрытия D . Множество D_0 получается как объединение покрытий из лемм 5.3 и 5.4 множества D (дважды покрывается каждая п.г., входящая в D). Из (6.5) (при соответствующем выборе σ) и из леммы 5.3 получается (6.7), а из (6.5) и леммы 5.4 получается (6.8) и дополняющее (6.8) неравенство при $\chi = 1$.

6.2. Пусть $d(G) = \infty$, K – компакт, лежащий в G , $[G \setminus K]$ – пересечение G со связной компонентой дополнения к K , содержащей ∞ , функция f голоморфна в $[G \setminus K]$ и при некоторых $\alpha \in [0, 1)$, $M > 0$, $m > 0$ имеем

$$\ln |f(z)| \leq u_\alpha(z) \ln M + (1 - u_\alpha(z)) \ln m, \quad z \in [G \setminus K]. \quad (6.9)$$

Пусть D – конечное покрытие компакта K из теоремы 6.1, построенное при $\varepsilon = 1$. С помощью контурных интегралов представим f в виде суммы функций f_K и $f_{\partial G}$ так, чтобы $f_K(z)$ была регулярной в $[G \setminus K]$ и $f_K(\infty) = 0$, а функция $f_{\partial G}(z) = f(z) - f_K(z)$ была регулярной в G . Тогда

$$f_K(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial D} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta, \quad z \notin D.$$

Положим

$$M(f, \partial G) = \limsup_{z \rightarrow \partial G} |f(z)|, \quad M(f, K) = \limsup_{z \rightarrow K} |f(z)|, \quad z \in [G \setminus K].$$

При условии (6.9) оценим величину $M(f_K, \partial G)$. Пусть сначала $M \leq m$ и, следовательно, $|f(z)| \leq m(M/m)^{u_\alpha(z)} \leq m$ всюду в $[G \setminus K]$. В данном случае положим $q = B/v_\alpha$ ($v_\alpha < \infty$). Из (6.7), (6.6) получаем

$$|f_K(z)| \leq mJ(\partial D_0; z) \leq B_3qm\|\mu\| = B_3Bm\|\mu\|v_\alpha^{-1}, \quad z \notin G; \quad B_3 = B_3(1).$$

Предположим теперь, что $M > m$ и, следовательно, всюду в $[G \setminus D]$ имеем $|f(z)| \leq m(M/m)^{B/q}$ (см. (6.6)). Отсюда и из (6.7) получаем

$$|f_K(z)| \leq m \left(\frac{M}{m} \right)^{B/q} J(\partial D_0; z) \leq B_3mq \left(\frac{M}{m} \right)^{B/q} \|\mu\|, \quad z \notin \overline{G}.$$

Оценим правую часть $\mathcal{M}$ полученного неравенства. Будем различать два случая. В первом случае $M/m > \exp(1/v_\alpha)$ выберем q из условия $q/B = \ln(M/m)$ (тогда $q > B/v_\alpha$) и получим $\mathcal{M} \leq B_3Bem \ln(M/m)\|\mu\|$. Во втором случае $1 < M/m \leq \exp(1/v_\alpha)$, положив $q = B/v_\alpha$, получим $\mathcal{M} \leq B_3Bem v_\alpha^{-1} m \|\mu\|$.

Доказано первое утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $G, K, \mu, \alpha, v_\alpha$ – те же, что и в теореме 6.1, причем $d(G) = \infty$. Тогда для любой регулярной в $[G \setminus K]$ функции $f(z) = f_{\partial G}(z) + f_K(z)$ при выполнении условия (6.9) имеем

$$M(f_K, \partial G) \leq B_4(\alpha) m \left(\ln^+ \left(\frac{M}{m} \right) + v_\alpha^{-1} \right) \|\mu\|. \quad (6.10)$$

Кроме того, для любой регулярной и ограниченной в $[G \setminus K]$ функции f имеем

$$M(f_K, \partial G) \leq B_4(\alpha) v_\alpha^{-1} \|f\|_G \|\mu\|, \quad (6.11)$$

где $\|f\|_G = \max\{M(f, \partial G), M(f, K)\}$. Все утверждения остаются справедливыми при замене $u_\alpha(\mu)$ на $\lambda_\alpha(\mu)$.

Неравенство (6.11) непосредственно следует из (6.7) при $q = Bv_\alpha^{-1}$.

6.3. Напомним определение гриновой емкости конденсатора $[K, \partial G]$ (см. [5]–[9]). Фиксируем $\alpha \geq 0$ и рассмотрим все неотрицательные меры μ с $\text{supp } \mu \subset K$, для которых $u_\alpha(\mu, z) \leq 1, z \in G$. Положим $C_\alpha[K, \partial G] = \sup\{\mu(K)\}$, где $\sup$ берется по всем таким мерам. Если указанным ограничениям удовлетворяет лишь нулевая мера, то полагаем $C_\alpha[K, \partial G] = 0$. Значение $C_\alpha[K, \partial G] > 0$ достигается на некоторой мере $\mu = \mu_\alpha$, которая называется *равновесным распределением массы*. Для μ_α имеем равенство $u_\alpha(\mu_\alpha, z) = 1$ всюду на K , кроме, может быть, некоторого подмножества на K , имеющего нулевую α -емкость (теорема Фростмана (см. [8], [10])).

Пусть $\alpha \in [0, 1)$ и конечна α -емкость $C_\alpha[K, \partial G] > 0$. Тогда любое $v_\alpha < 1$ является 0-уровнем потенциала $u_\alpha(\mu_\alpha, z)$. По теореме Неванлинны о двух константах (см., например, [1]) при $z \in [G \setminus K]$ имеем (6.9), где $\alpha = 0, m = M(f, \partial G), M = M(f, K)$. Поэтому из теоремы 6.2 с $\mu = \mu_\alpha$ получается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть G, K – те же, что и в теореме 6.1, причем $d(G) = \infty$. Тогда для любой регулярной и ограниченной в $G \setminus K$ функции $f(z) = f_{\partial G}(z) + f_K(z)$ имеем

$$M(f_K, \partial G) \leq B_5 m \left(1 + \ln^+ \left(\frac{M}{m} \right) \right) C_0[K, \partial G], \quad B_5 = \text{const} > 0, \quad (6.12)$$

где $m = M(f, \partial G), M = M(f, K)$. Кроме того, при $\alpha \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$M(f_K, \partial G) \leq B_6(\alpha) \|f\|_G C_\alpha[K, \partial G]. \quad (6.13)$$

Задача о разделении особенностей в аналогичной постановке впервые рассматривалась А. А. Гончаром и Л. Д. Григоряном [6], [11]. В частности, в [11] показано, что если компакт K включает некоторый невырожденный в точку континуум E , то для колебания $\Omega(f_{\partial G}, E) = \sup\{|f_{\partial G}(z_1) - f_{\partial G}(z_2)| : z_1, z_2 \in E\}$ компоненты $f_{\partial G}$ на E справедливо неравенство

$$\Omega(f_{\partial G}, E) \leq 2\pi \|f\|_G C_0[K, \partial G].$$

Другие результаты о разделении особенностей (без использования аппарата емкостей) были получены, например, в работах Е. А. Севастьянова [12], А. А. Пекарского [13], автора [2], [14].

6.4. Рассмотрим одно следствие теоремы 6.2 в случае, когда для голоморфной в $G \setminus K$ функции f выполняется условие

$$|f(z)| \leq |f_0(z)| \prod_{k=1}^{\infty} |\varphi(z; z_k)|^{-p_k}, \quad z \in G \setminus K, \quad (6.14)$$

где $z_k \in K$, $p = \sum p_k < \infty$, $f_0(z)$ — голоморфная ограниченная в $G \setminus K$ функция. Пусть $M_0 = M(f_0, K)$, $m_0 = M(f_0, \partial G)$.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть G , K — те же, что и в теореме 6.1, причем $d(G) = \infty$ и выполнено (6.14). Тогда

$$M(f_K, \partial G) \leq B_7 m_0 \left(1 + \ln \left(e + \frac{M_0}{m_0} \right) \right) (C_0[K, \partial G] + p).$$

Действительно, в данном случае (6.9) в области $G \setminus K$ выполняется при $\alpha = 0$, $M = em_0 + M_0$ и $m = m_0$ для меры $\mu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k$, где ν_k , $k \geq 1$, — заряды в точках z_k величины p_k .

6.5. Рассмотрим задачу об оценках компонент медленно растущих аналитических функций.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть G — односвязная ограниченная область, K — компакт ($\subset G$). Пусть $\chi \in (0, 1)$, $a > 0$ и аналитическая в $[G \setminus K]$ функция f удовлетворяет условию $\text{dist}^\chi(z, \partial G)|f(z)| \leq a$, $z \in [G \setminus K]$. Тогда для любого спрямляемого контура l , охватывающего K и лежащего в G , имеем

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq aB(\chi, \alpha, \partial G)C_\alpha[K, \partial G], \quad \alpha \geq 0. \quad (6.15)$$

Если ∂G — кусочно-гладкая кривая, $p > 1$, $0 \leq \chi < 1/p$, то при выполнении указанного ограничения на рост f имеем

$$\|f_K\|_p \leq aB(\chi, p, \alpha, \partial G)C_\alpha[K, \partial G], \quad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\partial G)}. \quad (6.16)$$

Доказательство первой части теоремы 6.5 аналогично доказательству (6.13). Нужно только вместо (6.7) использовать (6.8) с $\mu = \mu_\alpha$ и $l = \partial D_0$. При доказательстве второй части воспользуемся теоремой И. И. Привалова [15] о граничных значениях интеграла типа Коши и теоремой М. Рисса об оценке в L^p , $1 < p < \infty$, сингулярного интеграла типа Коши через его плотность (см., например, [16]–[18]). Из этих теорем, в частности, следует, что

$$\|f_K\|_p \leq B_8(p, G) \inf \{ \|f_K - h\|_p : h \in E^p \},$$

откуда, используя соотношение двойственности (см. [19], [20]), получим

$$\begin{aligned} \|f_K\|_p &\leq B_8(p, G) \sup \left\{ \left| \int_l F(z)f(z) dz \right| : F \in E^q, \|F\|_q \leq 1 \right\} \\ &\leq aB_9(p, G) \int_l \text{dist}^{-1/q-\chi}(z, \Gamma) |dz|, \end{aligned}$$

где $1/q + \chi < 1$. Воспользовавшись покрытием D_0 из теоремы 6.1 (см. (6.8)), при $\mu = \mu_\alpha$ и $l = \partial D_0$ получим оценку (6.16).

6.6. Нам понадобится

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.1, $E \subset G$ – замкнутое относительно G множество, $\lambda = \lambda_{\gamma, \alpha\beta}(\mu) := \inf_{z \in E} \nu_{\gamma, \alpha\beta}(\mu, z)$, причем $\lambda > 0$. Тогда существует конечный или счетный набор (зависящий от $\varepsilon, \gamma, \alpha, \beta$) п.Г. $G_k = g_G(z_k; r_k)$, объединение W_0 которых является полным покрытием множества E и обладает свойствами (4.1), (4.2) с заменой величин $\|\mu\|$ на $2A_3\|\mu\|\lambda^{-1}$, где величина $A_3 = A_3(\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma)$ определена в (4.3).

(Получается из теоремы 4.1, примененной к мере $2A_3\mu\lambda^{-1}$.)

Пусть G – односвязная область на $\mathbb{C}$ с гладкой границей, $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ – действительнoзначная функция. Пусть $u = u(z)$ – решение следующей задачи Дирихле для уравнения Пуассона: $\Delta u = f(z)$, $z \in G$, $u|_{\partial G} = 0$. Положим

$$\Pi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)} ds(\xi),$$

где $n(\xi)$ – нормаль к ∂G . Некоторые задачи об оценках потоков $\Pi(u)$ сформулированы в работе П. В. Парамонова [21].

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть $\varepsilon > \gamma \geq 0$, $\alpha \in [0, 1)$. Тогда при указанных G и f имеем $|u(z)| < 1$ всюду в G , за возможным исключением некоторого подмножества, h -площадь которого не превосходит $B(\varepsilon)C \ln^{1+\varepsilon}(e + C)$, где $C = \|f\|_{L^1(\text{mes}_2)}$. Если при некотором $\rho_0 > 0$ и всех $\rho \leq \rho_0$, $z \in G$ имеем

$$\int_{g(z, \rho)} |f(\zeta)| d\text{mes}_2(\zeta) \leq b\rho \quad (6.17)$$

с некоторой постоянной b , то

$$|\Pi(u)| \leq bB(\alpha, \varepsilon, \gamma, \rho_0)c \ln^{1+\varepsilon}(e + c), \quad c = \|\mu\| \lambda_{\gamma, \alpha}^{-1}(\mu),$$

для любой неотрицательной конечной меры μ (при $\lambda_{\gamma, \alpha}(\mu) = 0$ правая часть считается равной ∞).

Первое утверждение получается из формулы (см. [22])

$$u(z) = -(2\pi)^{-1} \int_G Q_0(|\varphi(z; \zeta)|) f(\zeta) d\text{mes}_2(\zeta)$$

и из теоремы 4.1, где $\beta = 1$, $\alpha = 0$, а в качестве меры μ следует взять $|f(\zeta)| d\text{mes}_2(\zeta)$. Поскольку h -площадь п.Г. G_k равна $\pi \text{sh}^2 \mathcal{R}(G_k)$, то нужная оценка h -площади покрытия W получается из (4.1).

При доказательстве второго утверждения оценка следует из (6.17), формулы Гаусса $\Pi(u) = \int_G f(\zeta) d\text{mes}_2(\zeta)$ и из приведенного следствия теоремы 4.1. В этом случае достаточно покрыть каждую п.Г. G_k из покрытия W_0 (из следствия теоремы 4.1) конечной совокупностью п.Г. $g_{j,k}$, $j = 1, \dots, j_k$, с условиями:

- а) $\rho_{j,k} = \mathcal{R}(g_{j,k}) \leq \rho_0$;
- б) $j_k \leq B_{10}(\rho_0) \exp(2\mathcal{R}(G_k))$ в случае $\mathcal{R}(G_k) > 1$ (здесь мы учитываем, что h -площадь G_k равна $\pi \text{sh}^2 \mathcal{R}(G_k)$);
- в) $\sum_j \rho_{j,k} \leq B_{11}(\rho_0) \mathcal{R}(G_k)$ в случае $\mathcal{R}(G_k) \leq 1$.

6.7. ПРИМЕЧАНИЕ. Теоремы (6.1)–(6.5) легко обобщаются на случай (γ, α) -потенциалов $\nu_{\gamma, \alpha}(\mu, z)$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$, и соответствующих емкостей $C_{\gamma, \alpha}[K, \partial G]$.

Список литературы

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. *Данченко В. И.* О разделении особенностей мероморфных функций // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 2. С. 181–198.
3. *Данченко В. И.* Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 33–52.
4. *Warschawski S. E.* On differentiability at the boundary in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. № 4. P. 615–620.
5. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
6. *Гончар А. А., Григорян Л. Д.* Об оценках норм голоморфной составляющей мероморфной функции // Матем. сб. 1976. Т. 99 (141). № 4. С. 634–638.
7. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
8. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
9. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.-Л.: ГИТТЛ, 1937.
10. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
11. *Гончар А. А., Григорян Л. Д.* Об оценке компонент ограниченных аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 132 (174). № 3. С. 299–303.
12. *Севастьянов Е. А.* Рациональная аппроксимация и абсолютная сходимость рядов Фурье // Матем. сб. 1978. Т. 107 (149). № 2. С. 227–244.
13. *Пекарский А. А.* Наилучшие рациональные приближения в комплексной области // Труды МИАН. 1989. Т. 190. С. 222–233.
14. *Данченко В. И.* О рациональных составляющих мероморфных функций и их производных // Anal. Math. 1990. V. 16. № 4. P. 241–255.
15. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
16. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
17. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1965.
18. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 10. № 3. С. 207–256.
20. *Хавинсон С. Я.* Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций // УМН. 1949. Т. 4. № 4 (32). С. 158–159.
21. *Парамонов П. В.* О гармонических аппроксимациях в $\mathbb{C}^1$ -норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1341–1365.
22. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Владимирский государственный университет
E-mail: danch-m2@vpti.vladimir.su

Поступила в редакцию
 23.05.2002