Общероссийский математический портал

М. В. Кочетов, Тождества smash-произведения универсальной обертывающей супералгебры Ли и групповой алгебры, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 87–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:04:54

УДК 512.552.4

М. В. Кочетов

Тождества smash-произведения универсальной обертывающей супералгебры Ли и групповой алгебры

Пусть H – алгебра Хопфа, A – H -модульная алгебра. Тогда мы можем образовать smash-произведение $A \# H$, которое является обобщением обычного тензорного произведения (последнее возникает, если действие H на A тривиально). В статье рассматривается вопрос, когда $A \# H$ удовлетворяет полиномиальному тождеству. Вводятся дельта-множества подходящего вида и даются необходимые условия на действие H на A в терминах этих дельта-множеств для определенного класса алгебр. Основная теорема посвящена частному случаю, когда H является групповой алгеброй, которая действует на супералгебре Ли L характеристики нуль. В этом случае полученные результаты о дельта-множествах, совместно с известными фактами о групповых и универсальных обертывающих алгебрах, позволяют дать необходимые и достаточные условия наличия полиномиального тождества в $U(L) \# H$.

Библиография: 11 названий.

§1. Введение

Пусть $\mathbb{k}$ – некоторое поле. Все рассматриваемые нами векторные пространства, алгебры, тензорные произведения и т. п. будут над полем $\mathbb{k}$. Пусть H – алгебра Хопфа. Мы будем использовать так называемые “сигма-обозначения” для коумножения H :

$$\Delta: H \rightarrow H \otimes H: h \mapsto \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Эта запись является символической в том смысле, что $h_{(1)}$ и $h_{(2)}$ не являются какими-то определенными элементами H . Коединица H будет обозначаться

$$\varepsilon: H \rightarrow \mathbb{k}: h \mapsto \varepsilon(h).$$

Напомним определение объекта, который, за неимением лучшего термина, мы будем называть “smash-произведением” (от английского “smash product”, см. [1; п. 4.1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть H – алгебра Хопфа, а A – ассоциативная алгебра с единицей. Пусть задано действие H на A :

$$H \otimes A \rightarrow A: h \otimes a \mapsto h \cdot a,$$

так что A превращается в H -модульную алгебру, т. е. A является H -модулем и, кроме того, для любых $h \in H$, $a, b \in A$ выполняется

$$\begin{aligned} h \cdot 1 &= \varepsilon(h)1, \\ h \cdot (ab) &= \sum (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b). \end{aligned}$$

Тогда *smash-произведение* $A \# H$ определяется как векторное пространство $A \otimes H$, снабженное умножением

$$(a \# h)(b \# k) = \sum a(h_{(1)} \cdot b) \# h_{(2)}k,$$

где $h, k \in H$, $a, b \in A$ и мы пишем $a \# h$ вместо $a \otimes h$.

Легко видеть, что $A \# H$ является ассоциативной алгеброй с единицей $1 \# 1$, причем A и H изоморфны подалгебрам $A \# 1$ и $1 \# H$ соответственно. Если действие H на A тривиально, получаем обычное тензорное произведение.

Smash-произведение возникает, в частности, в структурной теории алгебр Хопфа. Например, классическая теорема Костанта, Картье и Габриеля (см. [1; п. 5.6]) утверждает, что всякая точечная кокоммутативная алгебра Хопфа изоморфна smash-произведению связной алгебры Хопфа и групповой алгебры некоторой группы. Причем в случае поля характеристики нуль структура связной компоненты тоже известна – это универсальная обертывающая некоторой алгебры Ли.

Представляет интерес вопрос, когда $A \# H$ удовлетворяет полиномиальному тождеству? Если ограничиться случаем $H = \mathbb{k}G$ – групповая алгебра некоторой группы G , то алгебра $A \# \mathbb{k}G$ известна также в литературе под названием косого группового кольца группы G с коэффициентами в A .

Критерий того, когда такое групповое кольцо удовлетворяет полиномиальному тождеству в предположении, что A является G -полупервичным кольцом, дан в [2; гл. 23] (там рассматривается даже несколько более общий случай: умножение элементов из G “подкручено” с помощью коцикла). Надо отметить, что этот критерий не дает явного описания структуры A или действия G на A .

Другой подход к проблеме – ограничиться рассмотрением A какого-нибудь конкретного типа. Например, критерий наличия тождества в $A \# \mathbb{k}G$ в случае $A = U(L)$ или $u(L)$ – (ограниченная) обертывающая некоторой (ограниченной) алгебры Ли L , на которой G действует автоморфизмами, дан в [3]. В этом случае удастся достичь конкретного описания структуры G , L и действия G на L , не предполагая при этом G -полупервичности. В настоящей статье мы получим ответ для $A = U(L)$, где $L = L_0 \oplus L_1$ – некоторая супералгебра Ли характеристики нуль. Но прежде приведем здесь критерии наличия тождества в $U(L)$ и $\mathbb{k}G$, взятых в отдельности (см. [4] и [5]: нам потребуется лишь случай характеристики нуль, положительная характеристика рассматривается в [6] и [7]).

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ – супералгебра Ли над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ удовлетворяет полиномиальному тождеству тогда и только тогда, когда L_0 абелева и существует такой L_0 -подмодуль $M \subset L_1$, что $[M, M] = 0$, а L_1/M и $[L_0, M]$ конечномерны.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть G – группа, $\mathbb{k}$ – поле. Групповая алгебра $\mathbb{k}G$ удовлетворяет полиномиальному тождеству тогда и только тогда, когда существует подгруппа $A \subset G$ конечного индекса, абелева в случае $\text{char } \mathbb{k} = 0$ и p -абелева в случае $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$.

Нам также потребуются критерий для smash-произведения универсальной обертывающей обычной алгебры Ли характеристики нуль и групповой алгебры (см. [8], вытекает также из результатов в [9]).

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть L – алгебра Ли над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Пусть группа G действует на L автоморфизмами. Тогда $U(L) \# \mathbb{k}G$ удовлетворяет полиномиальному тождеству тогда и только тогда, когда L абелева и найдется абелева подгруппа $A \subset G$ конечного индекса, действующая тривиально на L .*

Основным результатом настоящей статьи является следующий критерий наличия полиномиального тождества в smash-произведении универсальной обертывающей супералгебры Ли и групповой алгебры над полем характеристики нуль. Под автоморфизмом градуированной алгебры мы понимаем автоморфизм, оставляющий компоненты градуировки инвариантными.

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ – супералгебра Ли над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Пусть группа G действует на L автоморфизмами градуированной алгебры. Тогда smash-произведение $U(L) \# \mathbb{k}G$ удовлетворяет полиномиальному тождеству тогда и только тогда, когда существуют такие L_0 - и G -инвариантные подпространства $N \subset M \subset L_1$, а также подгруппа $A \subset G$, что выполняются следующие условия:*

- 1) N и L_1/M конечномерны;
- 2) $[L_0, L_0] = [M, M] = 0$ и $[L_0, M] \subset N$;
- 3) A абелева и имеет конечный индекс в G ;
- 4) A действует тривиально на L_0 и на M/N .

Достаточность этих условий доказывается сравнительно просто. Необходимость 1) и 2) вытекает из теоремы 1.2, а 3) – из теоремы 1.3. Единственная трудность здесь – показать, что подпространства N и M могут быть выбраны G -инвариантными. Мы займемся этим в §3. Для доказательства необходимости условия 4) нам потребуются теория дельта-множеств для действия группы, развиваемая в §2 и представляющая самостоятельный интерес. Следует заметить, что идея дельта-множеств этого типа была предложена в [3], где она применяется для изучения smash-произведения ограниченной обертывающей ограниченной алгебры Ли и групповой алгебры.

Проиллюстрируем на примерах, что теорема 1.5 не может быть усилена путем отбрасывания N , т.е. нельзя утверждать, что найдется такое подпространство M конечной коразмерности, что L_0 и A действуют тривиально на M .

ПРИМЕР 1.6. Возьмем $L_0 = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$, $L_1 = \langle z, y_1, y_2, \dots \rangle$ и $G = \{1\}$, где $[L_0, L_0] = [L_1, L_1] = 0$ и

$$[x_i, z] = 0, \quad [x_i, y_j] = \delta_{ij}z, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Тогда $U(L)$ удовлетворяет тождеству $[X, Y]^2 = 0$ и условиям теоремы с $M = L_1$, $N = \langle z \rangle$, однако, как легко видеть, централизатор L_0 есть одномерное пространство $\langle z \rangle$, имеющее в L_1 бесконечную коразмерность.

ПРИМЕР 1.7. Положим $L_0 = 0$, $L_1 = \langle z, y_1, y_2, \dots \rangle$ и $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$, причем

$$g_i \cdot z = z, \quad g_i \cdot y_j = y_j + \delta_{ij}z, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Тогда $U(L) \# \mathbb{k}G$ удовлетворяет тождеству $[X, Y]^2 = 0$ и условиям теоремы с $M = L_1$, $N = \langle z \rangle$ и $A = G$, однако пространство неподвижных точек G есть $\langle z \rangle$, имеющее бесконечную коразмерность, причем ситуация не изменится, если мы заменим G какой-либо подгруппой конечного индекса.

§ 2. Дельта-множества

В этом параграфе мы несколько обобщаем результаты [3] о дельта-множествах для действия группы, в частности, чтобы они были применимы в нашей ситуации. Характеристика поля в большинстве результатов произвольна.

Начнем с общего наблюдения, принадлежащего Ю. А. Бахтуру. Пусть H — алгебра Хопфа, A — H -модульная алгебра. Если $A \# H$ удовлетворяет полиномиальному тождеству, то имеется “слабое” тождество следующего вида, несущее информацию о структуре действия H на A (доказательство в случае $H = \mathbb{k}G$ см. в [3], общий случай — в [10]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если smash-произведение $A \# H$ является PI, то найдутся такие натуральное число n и коэффициенты $\gamma_\pi \in \mathbb{k}$, $\pi \in S_n$, не все равные нулю, что*

$$\sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi (h_1 \cdot X_{\pi(1)}) \cdots (h_n \cdot X_{\pi(n)}) = 0 \quad (1)$$

для любых $h_1, \dots, h_n \in H$, $X_1, \dots, X_n \in A$.

Допустим теперь, что в A имеется H -подмодуль V , порождающий A как алгебру с единицей. Мы можем ввести два типа дельта-множеств для действия H на V (которое определяет действие на всей A):

$$\begin{aligned} \delta_H^m(V) &= \{v \in V \mid \dim(H \cdot v) \leq m\}, \quad \delta_H(V) = \bigcup_m \delta_H^m(V), \\ \delta_V^m(H) &= \{h \in H \mid \dim(h \cdot V) \leq m\}, \quad \delta_V(H) = \bigcup_m \delta_V^m(H), \end{aligned}$$

где $m = 0, 1, \dots$.

Непосредственно проверяются следующие свойства.

ЛЕММА 2.2. 1) Если $x \in \delta_H^i(V)$, $y \in \delta_H^j(V)$, то $\alpha x + \beta y \in \delta_H^{i+j}(V)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

2) Все $\delta_H^m(V)$ являются H -инвариантными множествами.

3) Если $\Phi: V \rightarrow V$ — гомоморфизм H -модулей, то $\Phi(\delta_H^m(V)) \subset \delta_H^m(V)$.

4) Если $h \in \delta_V^i(H)$, $k \in \delta_V^j(H)$, то $\alpha h + \beta k \in \delta_V^{i+j}(H)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

5) Все $\delta_V^m(H)$ являются инвариантными относительно правых и левых умножений на элементы H .

Из леммы вытекает, что $\delta_H(V)$ — H -подмодуль V , а $\delta_V(H)$ — двусторонний идеал H (но, вообще говоря, не идеал Хопфа!). Поскольку $\delta_H^m(V)$ и $\delta_V^m(H)$ не обязаны быть подпространствами, нам потребуются понятие коразмерности подмножества векторного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть W – векторное пространство, $T \subset W$ – подмножество. Мы будем писать $\dim W/T = n$, если найдется такое подпространство $U \subset W$ размерности n , что $W = U + T$ и n – минимальное натуральное число с этим свойством.

Используя порождающее множество V , мы можем определить возрастающую фильтрацию на алгебре A

$$A = \bigcup_{m \geq 0} A_m, \quad A_m = V^m,$$

а также ассоциированную градуированную алгебру

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{m \geq 0} \operatorname{gr}_m A, \quad \operatorname{gr}_m A = A_m / A_{m-1}, \quad m \geq 1, \quad \operatorname{gr}_0 A = \langle 1 \rangle.$$

Поскольку $V \subset A$ – H -подмодуль, $\operatorname{gr} A$ естественным образом превращается в H -модульную алгебру. В дальнейшем мы будем предполагать, что V не содержит $1 \in A$, так что его можно естественным образом отождествить с $\operatorname{gr}_1 A$. Отсюда получаем, что вся информация о действии H на A на самом деле содержится в действии H на $\operatorname{gr} A$.

Мы будем использовать следующие обозначения. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{k}$, тогда $S(V)$ – его симметрическая алгебра, а $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра. Если $\operatorname{char} \mathbb{k} = p > 0$, то через $V^{[p]}$ мы будем обозначать подпространство алгебры $S(V)$, порожденное элементами v^p , $v \in V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть A – H -модульная алгебра. Пусть H -подмодуль $V \subset A$ не содержит 1 и порождает A как алгебру с единицей. Предположим далее, что определяемая V градуированная алгебра $\operatorname{gr} A$ изоморфна $S(V)$, $\Lambda(V)$ или $S(V)/\operatorname{ideal}(V^{[p]})$ (в случае $\operatorname{char} \mathbb{k} = p > 0$). Тогда из выполнения “слабого” тождества (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in H$, $X_1, \dots, X_n \in V$ вытекает

- 1) $\dim V / \delta_H^{n^2}(V) < n$,
- 2) $\dim H / \delta_V^{n^2}(H) < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку V вкладывается в $\operatorname{gr} A$ как H -модуль и тождество (1) выполняется для действия H на $\operatorname{gr} A$, мы можем заменить A на $\operatorname{gr} A$. Мы можем также считать без ограничения общности, что в (1) $\gamma_1 \neq 0$.

1) Следуя идее доказательства теоремы 6.2 в [3], зафиксируем произвольные элементы $v_1, \dots, v_n \in V$. Обозначая левую часть (1) за F , получаем

$$F(v_1, \dots, v_n; h_1, \dots, h_n) = \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi(h_1 \cdot v_{\pi(1)}) \cdots (h_n \cdot v_{\pi(n)}) = 0$$

для любых $h_1, \dots, h_n \in H$.

Докажем индукцией по t следующее утверждение: если $v_1, \dots, v_m \in V$ удовлетворяют условию

$$F(v_1, \dots, v_m; h_1, \dots, h_m) = \sum_{\pi \in S_m} \gamma_\pi(h_1 \cdot v_{\pi(1)}) \cdots (h_m \cdot v_{\pi(m)}) = 0 \quad (2)$$

для всех $h_1, \dots, h_m \in H$, где $\gamma_1 \neq 0$, то $v_1, \dots, v_m$ линейно зависимы по модулю $\delta_H^{m^2}(V)$. При $m = n$ это как раз дает желаемое.

Итак, если $m = 1$, получаем $h_1 \cdot v_1 = 0$ для всех $h_1 \in H$ и, в частности, для $h_1 = 1$, так что $v_1 = 0$. Пусть теперь $m > 1$. Мы можем разложить левую часть (2) следующим образом:

$$F(v_1, \dots, v_m; h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m (h_1 \cdot v_i) F_i(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_m; h_2, \dots, h_m), \quad (3)$$

где F_i имеет тот же вид, что и F , но степень $m - 1$.

Если теперь $F_1(v_2, \dots, v_m; h_2, \dots, h_m) = 0$ для всех $h_2, \dots, h_m \in H$, то по предположению индукции $v_2, \dots, v_m$ линейно зависимы по модулю $\delta_H^{(m-1)^2}(V)$ и доказательство закончено. В противном случае зафиксируем такие $h_2, \dots, h_m \in H$, что $F_1(v_2, \dots, v_m; h_2, \dots, h_m) \neq 0$. Тогда $f_i = F_i(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_m; h_2, \dots, h_m)$, $i = 1, \dots, m$, — фиксированные элементы A , причем $f_1 \neq 0$. Из (2) и (3) тогда получаем следующее тождество:

$$\sum_{i=1}^m (h \cdot v_i) f_i = 0 \quad \forall h \in H. \quad (4)$$

Положим $W = \langle h_i \cdot v_j \mid i = 2, \dots, m, j = 1, \dots, m \rangle$, тогда W — подпространство V размерности меньше m^2 . Выберем в W упорядоченный базис и расширим его до базиса V . Согласно нашему предположению о структуре алгебры A упорядоченные мономы от элементов базиса V со степенями переменных меньше p в случае $S(V)/\text{ideal}(V^{[p]})$ и меньше 2 в случае $\Lambda(V)$ образуют базис A . Для элемента $z \in A$ через $\text{supp } z$ обозначим множество всех элементов базиса V , встречающихся в представлении z . Тогда по построению $\text{supp } f_i \subset W$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Будем теперь уменьшать шаг за шагом количество слагаемых в (4).

Если $H \cdot v_m \subset W$, то $v_m \in \delta_H^{m^2}(V)$ и доказательство закончено. Иначе выберем такой $d \in H$, что $e = d \cdot v_m \notin W$. Без ограничения общности мы можем считать, что e включен в наш базис для V . Положим $d \cdot v_j = \alpha_j e + u_j$, $j = 1, \dots, m - 1$, где $\text{supp } u_j$ не содержит e . Подставляя $h = d$ в (4), получаем

$$e(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{m-1} f_{m-1} + f_m) + u_1 f_1 + \dots + u_{m-1} f_{m-1} = 0.$$

Поскольку $\text{supp } u_j f_j$, $j = 1, \dots, m - 1$, не содержат элемента e , это равенство возможно лишь в случае $e(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{m-1} f_{m-1} + f_m) = 0$, откуда по тем же соображениям $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{m-1} f_{m-1} + f_m = 0$. Выражая отсюда f_m и подставляя обратно в (4), приходим к тождеству

$$\sum_{i=1}^{m-1} (h \cdot (v_i - \alpha_i v_m)) f_i = 0 \quad \forall h \in H,$$

которое имеет тот же вид, что и (4), но слагаемых на одно меньше. Заметим также, что если нам удастся доказать, что

$$\widetilde{v}_1 = v_1 - \alpha_1 v_m, \dots, \widetilde{v}_{m-1} = v_{m-1} - \alpha_{m-1} v_m$$

линейно зависимы по модулю $\delta_H^{m^2}(V)$, то и $v_1, \dots, v_m$ будут линейно зависимы по модулю $\delta_H^{m^2}(V)$.

Повторяя вышеописанную процедуру $m - 1$ раз, мы приходим к соотношению

$$(h \cdot \tilde{v}_1)f_1 = 0 \quad \forall h \in H.$$

Если теперь $H \cdot \tilde{v}_1 \not\subset W$, то мы можем так выбрать $d \in H$, что $d \cdot \tilde{v}_1 = e \notin W$, и тогда $ef_1 = 0$ влечет $f_1 = 0$ – противоречие. Следовательно, $H \cdot \tilde{v}_1 \subset W$, а это означает $\tilde{v}_1 \in \delta_H^{m^2}(V)$. Доказательство первого утверждения закончено.

2) Доказательство второго утверждения теоремы вполне аналогично доказательству первого (и следует идее [3; теорема 6.3]). Здесь мы вместо (1) используем его эквивалентную форму:

$$F'(X_1, \dots, X_n; h_1, \dots, h_n) = \sum_{\pi \in S_n} \gamma'_\pi(h_{\pi(1)} \cdot X_1) \cdots (h_{\pi(n)} \cdot X_n) = 0,$$

где $\gamma'_\pi = \pm \gamma_{\pi^{-1}}$, причем теперь $h_1, \dots, h_n \in H$ – фиксированные, а $X_1, \dots, X_n \in V$ – переменные.

Индукцией по m доказываем утверждение: если $h_1, \dots, h_m \in H$ удовлетворяют условию

$$F'(X_1, \dots, X_m; h_1, \dots, h_m) = \sum_{\pi \in S_m} \gamma'_\pi(h_{\pi(1)} \cdot X_1) \cdots (h_{\pi(m)} \cdot X_m) = 0 \quad (5)$$

для всех $X_1, \dots, X_m \in V$, где $\gamma'_1 \neq 0$, то $h_1, \dots, h_m$ линейно зависимы по модулю $\delta_V^{m^2}(H)$.

Если $m = 1$, получаем $h_1 \cdot X_1 = 0$ для всех $X_1 \in V$, так что $h_1 \in \delta_V^0(H)$. Пусть теперь $m > 1$. Разлагая левую часть (5)

$$F'(X_1, \dots, X_m; h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m (h_i \cdot X_1) F'_i(X_2, \dots, X_m; h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_m), \quad (6)$$

по предположению индукции получаем, что либо $h_2, \dots, h_m$ линейно зависимы по модулю $\delta_V^{(m-1)^2}(H)$, либо мы можем найти такие $v_2, \dots, v_m \in V$, что $F'_1(v_2, \dots, v_m; h_2, \dots, h_m) \neq 0$.

Обозначим $f'_i = F'_i(v_2, \dots, v_m; h_1, \dots, \hat{h}_i, \dots, h_m) \in A$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $f'_1 \neq 0$, а из (5) и (6) вытекает тождество

$$\sum_{i=1}^m (h_i \cdot X) f'_i = 0 \quad \forall X \in V. \quad (7)$$

Полагая $W = \langle h_i \cdot v_j \mid i = 1, \dots, m, j = 2, \dots, m \rangle$, завершаем доказательство, как в первой части.

Если теперь $H = \mathbb{k}G$ – групповая алгебра группы G , мы можем ввести дельта-множества для действия G на V

$$\delta_V^m(G) = \{g \in G \mid \dim((g - 1) \cdot V) \leq m\}, \quad \delta_V(G) = \bigcup_m \delta_V^m(G), \quad m = 0, 1, \dots$$

Следующие свойства вытекают непосредственно из определения.

ЛЕММА 2.5. 1) Если $g \in \delta_V^i(G)$, $g' \in \delta_V^j(G)$, то $gg' \in \delta_V^{i+j}(G)$.

2) Все $\delta_V^m(G)$ содержат 1 и замкнуты относительно взятия обратного элемента.

3) Все $\delta_V^m(G)$ инвариантны относительно внутренних автоморфизмов G .

В частности, $\delta_V(H)$ – нормальная подгруппа G . Напомним также определение индекса подмножества, не обязательно являющегося подгруппой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть G – группа, $T \subset G$ – подмножество. Чтобы не делать различия между левым и правым индексами, предположим, что T замкнуто относительно взятия обратного элемента. Мы будем писать $(G : T) = n$, если найдутся такие $g_1, \dots, g_n \in G$, что $G = g_1T \cup \dots \cup g_nT$, причем n – минимальное с этим свойством.

Аналогично предложению 2.4 может быть получено следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть группа G действует автоморфизмами ассоциативной алгебры A с единицей. Пусть G -подмодуль $V \subset A$ не содержит 1 и порождает A как алгебру с единицей. Предположим далее, что определяемая V градуированная алгебра $\text{gr } A$ изоморфна $S(V)$ или $S(V)/\text{ideal}(V^{[p]})$ (в случае $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$). Тогда из выполнения “слабого” тождества (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in A$ вытекает $(G : \delta_V^{n^3}(G)) < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 6.1 в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Следует отметить, что выполнения (1) только для элементов $X_1, \dots, X_n$ из V недостаточно (см. [3; пример 5.1]).

К сожалению, доказательство из [3] не проходит в случае $\text{gr } A \cong \Lambda(V)$ из-за некоммутативности. Поскольку именно этот случай нам потребуется для изучения smash-произведения универсальной обертывающей супералгебры Ли и групповой алгебры, мы дадим другое доказательство, требующее дополнительных предположений, но дающее результат, достаточный для наших целей (предложения 2.12 и 2.13).

ЛЕММА 2.9. Пусть циклическая группа $G = \langle g \rangle$ действует автоморфизмами алгебры $\Lambda(V)$, причем V является G -инвариантным. Предположим, что найдутся такие линейно независимые $v_i \in V$, $i = 0, \dots, N_1 = n^2 - 1$, что $g \cdot v_i = v_{i+1}$, $i = 0, \dots, N_1 - 1$. Тогда не может выполняться никакое нетривиальное “слабое” тождество (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in \Lambda(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Подставим в тождество (1) $h_i = g^{i-1}$, $X_i = v_{n(i-1)}$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n (h_i \cdot X_{\pi(i)}) &= \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n v_{n(\pi(i)-1)+i-1} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \pi} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n v_{n(i-1)+\pi^{-1}(i)-1} = 0. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости упорядоченных мономов $\prod_{i=1}^n v_{n(i-1)+\pi^{-1}(i)-1}$, $\pi \in S_n$, заключаем, что $\gamma_\pi = 0$ для всех $\pi \in S_n$. Противоречие.

ЛЕММА 2.10. Пусть циклическая группа $G = \langle g \rangle$ действует автоморфизмами алгебры $\Lambda(V)$, причем V является G -инвариантным. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{k}$ не является корнем из 1 степени меньше n и g имеет в V не менее $N_2 = (n^n - 1)/(n - 1)$ линейно независимых собственных векторов с собственным значением λ . Тогда не может выполняться никакое нетривиальное “слабое” тождество (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in \Lambda(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное и выберем такие линейно независимые $v_{i,j} \in V$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, s_i = n^{i-1}$, что $g \cdot v_{i,j} = \lambda v_{i,j}$ для всех i, j (всего N_2 векторов). Зафиксируем натуральное k и подставим в (1) $h_i = g^{k(i-1)}$ и $X_i = v_{i,1} \cdots v_{i,s_i}$

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n (h_i \cdot X_{\pi(i)}) &= \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n (\lambda^{k(i-1)s_{\pi(i)}} v_{\pi(i),1} \cdots v_{\pi(i),s_{\pi(i)}}) \\ &= \left(\sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^n \lambda^{k(\pi^{-1}(i)-1)s_i} \right) \prod_{i=1}^n (v_{i,1} \cdots v_{i,s_i}) = 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\pi) = \pm 1$. Отсюда получаем, что полином

$$f(t) = \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \varepsilon(\pi) t^{\sum_{i=1}^n (\pi^{-1}(i)-1)s_i}$$

имеет n^n различных корней λ^k , $k = 1, \dots, n^n$. При этом

$$\deg f \leq \sum_{i=1}^n (n-1)n^{i-1} = n^n - 1,$$

откуда $f(t) = 0$. Поскольку все числа $\sum_{i=1}^n (\pi^{-1}(i)-1)s_i$, $\pi \in S_n$, различны, получаем $\gamma_\pi = 0$ для всех $\pi \in S_n$. Противоречие.

ЛЕММА 2.11. Пусть циклическая группа $G = \langle g \rangle$ действует автоморфизмами алгебры $\Lambda(V)$, причем V является G -инвариантным. Предположим, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$ и что найдутся такие линейно независимые $x_{i,j}, y_{i,j} \in V$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$, всего $N_3 = n(n+1)/2$ пар, что $g \cdot x_{i,j} = x_{i,j} + y_{i,j}$ и $g \cdot y_{i,j} = y_{i,j}$ для всех i, j . Тогда не может выполняться никакое нетривиальное “слабое” тождество (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in \Lambda(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем натуральные $k_1, \dots, k_n$ и подставим $h_i = g^{k_i}$ и $X_i = x_{i,1} \cdots x_{i,i}$ в (1)

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n (h_i \cdot X_{\pi(i)}) &= \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n ((x_{\pi(i),1} + k_i y_{\pi(i),1}) \cdots (x_{\pi(i),\pi(i)} + k_i y_{\pi(i),\pi(i)})) = 0. \end{aligned}$$

Выбирая лишь члены, не содержащие $x_{i,j}$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \prod_{i=1}^n (k_i^{\pi(i)} y_{\pi(i),1} \cdots y_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= \left(\sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^n k_i^{\pi(i)} \right) \prod_{i=1}^n (y_{i,1} \cdots y_{i,i}) = 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(\pi) = \pm 1$. Отсюда получаем, что полином

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\pi \in S_n} \gamma_\pi \varepsilon(\pi) t_1^{s_\pi(1)} \cdots t_n^{s_\pi(n)}$$

обращается в 0 на всех наборах натуральных чисел $(k_1, \dots, k_n)$. Поскольку $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то $f(t_1, \dots, t_n) = 0$, что влечет $\gamma_\pi = 0$ для всех $\pi \in S_n$. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть циклическая группа $G = \langle g \rangle$ действует автоморфизмами алгебры $\Lambda(V)$, причем V является G -инвариантным. Предположим, что выполняется нетривиальное “слабое” тождество (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in \Lambda(V)$. Тогда существует такое N , зависящее только от n , что $\dim((g^N - 1) \cdot V) \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем $\mathbb{k}$ алгебраически замкнутым. Тогда в силу леммы 2.9 мы можем разложить V в прямую сумму корневых подпространств $V(\lambda)$ оператора g , причем число различных собственных значений λ не превосходит N_1 . Если λ не является корнем из 1 степени меньше n^n , то по лемме 2.10 собственное подпространство V^λ имеет размерность меньше N_2 , откуда снова по лемме 2.9 размерность $V(\lambda)$ меньше $N_1 N_2$. Таким образом, суммарная размерность $V(\lambda)$ с λ , не являющимся корнем из 1 степени меньше n^n , будет меньше $N_1^2 N_2$. Отбрасывая эти корневые подпространства и заменяя g на g^{N_4} , где $N_4 = \text{НОК}(1, \dots, n^n)$, мы можем считать, что g на V имеет лишь собственное значение 1. Снова применяя лемму 2.9, получаем $(g - 1)^{N_1} \cdot V = 0$. Если $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$, то отсюда вытекает, что $(g^{p^s} - 1) \cdot V = 0$, где $p^s \geq N_1$, и предложение доказано. Так что в дальнейшем мы можем считать $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Применяя теперь лемму 2.11, мы получаем, что число линейно независимых циклических подпространств g размерности больше или равной 2 не может достигать N_3 . Следовательно, собственное подпространство V^1 имеет коразмерность меньше $N_1 N_3$, откуда $\dim((g - 1) \cdot V) < N_1 N_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. Пусть абелева группа G действует автоморфизмами ассоциативной алгебры A с единицей над полем $\mathbb{k}$ характеристики 0. Пусть G -подмодуль $V \subset A$ не содержит 1 и порождает A как алгебру с единицей. Предположим далее, что определяемая V градуированная алгебра $\text{gr } A$ изоморфна $\Lambda(V)$. Тогда из выполнения “слабого” тождества (1) степени n для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in A$ вытекает $(G : \delta_V(G)) < M$, где M — число, зависящее только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку V вкладывается в $\text{gr } A$ как G -модуль и тождество (1) выполняется для действия G на $\text{gr } A$, мы можем без ограничения общности полагать, что $A = \text{gr } A = \Lambda(V)$.

Обозначим $G_0 = \delta_V(G)$, по лемме 2.5 – это подгруппа. Из предложения 2.12 тогда вытекает, что факторгруппа G/G_0 имеет конечную экспоненту N , зависящую только от n . Положим $M = N^n$ и будем доказывать от противного, что $(G : G_0) < M$. Если это не так, то найдется конечно порожденная подгруппа $G_1 \subset G$ такая, что индекс $(G_1 : G_0 \cap G_1) \geq M$, но при этом конечен (в силу конечности экспоненты G/G_0). Тогда $G_0 \cap G_1$ также конечно порождена, скажем, элементами $g_1, \dots, g_s$. Положим

$$W = \sum_{i=1}^s (g_i - 1) \cdot V.$$

Это конечномерное подпространство, более того, оно G -инвариантно (в силу абелевости G). Поскольку $G_0 \cap G_1$ действует тривиально на V/W , мы можем рассмотреть действие

$$G_2 = G_1 / G_0 \cap G_1$$

на V/W . Если теперь некоторый элемент $g \in G_2$ принадлежит $\delta_{V/W}(G_2)$, то его прообраз $\bar{g} \in G_1$ будет принадлежать $\delta_V(G_1) = G_0 \cap G_1$, так что $g = 1$.

Заменяя G на G_2 и V на V/W , мы оказываемся в следующей ситуации: конечная абелева группа G порядка больше или равного M действует на пространстве V так, что $\delta_V(G) = \{1\}$. В частности это означает, что G действует на V точно. При этом тождество (1) продолжает выполняться для всех $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in \Lambda(V)$, и мы можем считать $\gamma_1 \neq 0$.

Считая без ограничения общности поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнутым, выпишем разложение

$$V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} V_\chi,$$

где $\widehat{G}$ – группа характеров группы G и $V_\chi = \{v \in V \mid g \cdot v = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$.

Возьмем произвольный $1 \neq g_1 \in G$. В силу точности мы можем найти $0 \neq v_1 \in V_{\chi_1}$, причем $\chi_1(g_1) = \lambda_1 \neq 1$. Положим $G_1 = \ker \chi_1$. Поскольку N – экспонента G , $(G : G_1) \leq N$. Так как $(G : 1) \geq M = N^n$, то $G_1 \neq \{1\}$ и мы можем выбрать $1 \neq g_2 \in G_1$. Снова в силу точности мы найдем $0 \neq v_2 \in V_{\chi_2}$, причем $\chi_2(g_2) = \lambda_2 \neq 1$, и положим $G_2 = G_1 \cap \ker \chi_2$. Продолжая в том же духе, мы получим набор векторов $0 \neq v_i \in V_{\chi_i}$, $i = 1, \dots, n$, и набор элементов $g_1, \dots, g_n \in G$, причем $\chi_i(g_i) = \lambda_i \neq 1$ и $\chi_i(g_j) = 1$ для всех $j > i$.

Если мы теперь подставим $h_i = g_i - 1$ и $X_i = v_i$ в тождество (1), то все члены с $\pi \neq 1$ обратятся в 0, а $\pi = 1$ даст $\gamma_1(\lambda_1 - 1) \cdots (\lambda_n - 1)v_1 \cdots v_n$. Но этот член не может равняться 0, поскольку $\gamma_1 \neq 0$, $\lambda_i \neq 1$ и $v_1, \dots, v_n$ линейно независимы (так как соответствуют разным характерам $\chi_1, \dots, \chi_n$). Противоречие.

Теперь мы можем получить основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.14. Пусть группа G действует автоморфизмами ассоциативной алгебры A с единицей над полем $\mathbb{k}$. Пусть G -подмодуль $V \subset A$ не содержит 1 и порождает A как алгебру с единицей. Через $\text{gr } A$ обозначим градуированную алгебру, ассоциированную с соответствующей V фильтрацией. Предположим далее, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\text{gr } A$ изоморфна симметрической алгебре $S(V)$;
- 2) $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$ и $\text{gr } A$ изоморфна $S(V)/\text{ideal}(V^{[p]})$, где $V^{[p]} = \langle v^p \mid v \in V \rangle$;
- 3) $\text{char } \mathbb{k} = 0$, G абелева и $\text{gr } A$ изоморфна внешней алгебре $\Lambda(V)$.

Тогда из выполнения нетривиального “слабого” тождества вида (1) для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{k}G$, $X_1, \dots, X_n \in A$ вытекает, что существует такая подгруппа $G_1 \subset G$ конечного индекса и такое G -инвариантное подпространство $V_1 \subset V$ конечной коразмерности, что пространство $(\mathbb{k}G_1)^+ \cdot V_1$ конечномерно (где, как обычно, $(\mathbb{k}G)^+$ обозначает пополняющий идеал $\mathbb{k}G$).

Для доказательства нам потребуются следующие факты (см. [5], [3] и [11] соответственно).

ЛЕММА 2.15. Пусть подмножество T группы G содержит 1 и замкнуто относительно взятия обратного элемента. Если $(G : T) \leq m$, то

$$T^{4^m} = \underbrace{T \cdot \dots \cdot T}_{4^m}$$

является подгруппой G .

ЛЕММА 2.16. Пусть подмножество T векторного пространства V замкнуто относительно умножения на скаляры. Если $\dim V/T \leq m$, то

$$4^m \cdot T = \underbrace{T + \dots + T}_{4^m}$$

является подпространством в V .

ТЕОРЕМА 2.17. Пусть U , V и W – векторные пространства над полем $\mathbb{k}$, $\varphi: U \times V \rightarrow W$ – билинейное отображение. Допустим, что существуют такие натуральные числа m и n , что $\dim \varphi(u, V) \leq m$ для всякого $u \in U$ и $\dim \varphi(U, v) \leq n$ для всякого $v \in V$. Тогда $\dim \varphi(U, V) \leq mn$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.14. Пусть n – степень “слабого” тождества. Согласно предложению 2.4 и леммам 2.16 и 2.2 множество $V_1 = 4^n \cdot \delta_{\mathbb{k}G}^{n^2}(V)$ является G -инвариантным подпространством V коразмерности меньше n и содержится в $\delta_{\mathbb{k}G}^{4^n n^2}(V)$. Аналогично, множество $I = 4^n \cdot \delta_V^{n^2}(\mathbb{k}G)$ является идеалом $\mathbb{k}G$ коразмерности меньше n и содержится в $\delta_V^{4^n n^2}(\mathbb{k}G)$. Применяя теорему 2.17 к билинейному отображению $\cdot: I \times V_1 \rightarrow V_1$, получаем $\dim(I \cdot V_1) \leq 16^n n^4$.

Аналогично из предложения 2.7 и лемм 2.15 и 2.5 в случаях 1) и 2) вытекает, что индекс подгруппы $G_1 = \delta_V(G) \subset G$ конечен. В случае 3) предложение 2.13 приводит к тому же результату.

Поскольку $\dim(\mathbb{k}G_1)^+/I \cap (\mathbb{k}G_1)^+ \leq \dim \mathbb{k}G/I < n$, мы можем выбрать такие элементы $g_1, \dots, g_n \in G_1$, что

$$(\mathbb{k}G_1)^+ = \text{span}(g_1 - 1, \dots, g_n - 1) + I \cap (\mathbb{k}G_1)^+,$$

откуда получаем

$$(\mathbb{k}G_1)^+ \cdot V_1 \subset (g_1 - 1) \cdot V_1 + \dots + (g_n - 1) \cdot V_1 + I \cdot V_1.$$

По построению пространство в правой части конечномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Из леммы 2.2 также вытекает, что построенное нами подпространство V_1 инвариантно относительно любого гомоморфизма G -модулей $\Phi: V \rightarrow V$.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Докажем сначала достаточность условий 1)–4) теоремы 1.5 для наличия тождества в $R = U(L) \# \mathbb{k}G$. Прежде всего заметим, что $L_0 \oplus M$ является G -инвариантной подсупералгеброй L (даже идеалом), и рассмотрим подкольцо

$$R_1 = U(L_0 \oplus M) \# \mathbb{k}A$$

кольца R . Из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для супералгебр и определения smash-произведения вытекает, что R порождается как левый R_1 -модуль элементами вида

$$x_{i_1} \cdots x_{i_s} \# g_j, \quad i_1 < \dots < i_s, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где $\{x_i\}$ – базис L_1 по модулю подпространства M , а $\{g_j\}$ – представители правых смежных классов G по подгруппе A . Поскольку число элементов вида (8) конечно, нам достаточно доказать, что R_1 удовлетворяет тождеству.

Рассмотрим идеал $I \triangleleft R_1$, порожденный N . Поскольку N является A -инвариантным идеалом супералгебры Ли $L_0 \oplus M$, мы видим, что

$$I = R_1 N = N R_1.$$

В силу теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта $N^{\dim N+1} = 0$, откуда $I^{\dim N+1} = 0$, так что I – нильпотентный идеал. Далее,

$$R_1/I \cong U(L_0 \oplus M/N) \# \mathbb{k}A \cong U(L_0) \otimes \Lambda(M/N) \otimes \mathbb{k}A,$$

поскольку действие A и L_0 на M/N тривиально. Наконец, $U(L_0)$ и $\mathbb{k}A$ коммутативны, так что R_1/I удовлетворяет тождеству $[[X, Y], Z] = 0$. Поскольку идеал I нильпотентен, R_1 также является PI -алгеброй, что и требовалось.

Переходим к доказательству необходимости. Из наличия тождества в $U(L) \# \mathbb{k}G$ (а следовательно, и в $U(L)$ и $\mathbb{k}G$) нам известна структура L и G (см. теоремы 1.2 и 1.3). А именно, имеется абелева подгруппа $A_1 \subset G$ конечного индекса, L_0 является абелевой, а также найдется L_0 -подмодуль $M \subset L_1$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$[M, M] = 0, \quad L_1/M \text{ и } [L_0, M] \text{ конечномерны.} \quad (9)$$

4*

Для нашей цели нам необходимо выбрать подпространство $M \subset L_1$, удовлетворяющее условиям (9), не только L_0 -, но и G -инвариантным. Напомним основные этапы доказательства теоремы 1.2 в [4], чтобы убедиться, что на каждом шаге получается *характеристическое* (т.е. устойчивое относительно всех автоморфизмов супералгебры L) подпространство в L_1 .

Прежде всего введем три типа дельта-множеств (четвертая возможность не представляет интереса в силу абелевости L_0)

$$\begin{aligned}\delta_{L_1}^m(L_0) &= \{x \in L_0 \mid \dim[x, L_1] \leq m\}, \quad \delta_{L_1}(L_0) = \bigcup_m \delta_{L_1}^m(L_0), \\ \delta_{L_0}^m(L_1) &= \{x \in L_1 \mid \dim[L_0, x] \leq m\}, \quad \delta_{L_0}(L_1) = \bigcup_m \delta_{L_0}^m(L_1), \\ \delta_{L_1}^m(L_1) &= \{x \in L_1 \mid \dim[L_1, x] \leq m\}, \quad \delta_{L_1}(L_1) = \bigcup_m \delta_{L_1}^m(L_1),\end{aligned}$$

где $m = 0, 1, \dots$.

В [4] доказывается, а также непосредственно видно из существования какого-нибудь подпространства $M \subset L_1$, удовлетворяющего условиям (9), что существуют такие s, t_0 и t_1 , что

$$\delta_{L_1}(L_0) = \delta_{L_1}^s(L_0) = L_0, \quad (10)$$

$$\delta_{L_0}(L_1) = \delta_{L_0}^{t_0}(L_1) \text{ имеет конечную коразмерность в } L_1, \quad (11)$$

$$\delta_{L_1}(L_1) = \delta_{L_1}^{t_1}(L_1) \text{ имеет конечную коразмерность в } L_1, \quad (12)$$

причем по определению все эти подпространства $\text{Aut } L$ -инвариантны.

Положим $Q = \delta_{L_0}(L_1) \cap \delta_{L_1}(L_1) \subset L_1$. Это $\text{Aut } L$ -инвариантное подпространство конечной коразмерности. Из тождества Якоби вытекает, что оно также L_0 -инвариантно. По теореме 2.17 получаем

$$\dim[L_0, Q] \leq st_0, \quad \dim[Q, Q] \leq t_1^2.$$

Далее, в силу (10) централизатор $C_{L_1}(x)$ любого элемента $x \in L_0$ имеет конечную коразмерность в L_1 , так что $C_{L_1}([Q, Q])$ также имеет конечную коразмерность. Поскольку Q является $\text{Aut } L$ - и L_0 -инвариантным, этими же свойствами обладает $C_{L_1}([Q, Q])$. Обозначим $T = Q \cap C_{L_1}([Q, Q])$, тогда T — подпространство L_1 конечной коразмерности, устойчивое относительно $\text{Aut } L$ и L_0 .

Наконец, положим $\tilde{L} = [T, T] \oplus T$ и $M = Z(\tilde{L}) \cap T$. Тогда из построения следует, что $\tilde{L}$ — подсупералгебра L , причем компонента $\tilde{L}_0 = [T, T]$ конечномерна и центральна в $\tilde{L}$. Из леммы 5.2 в [4] и следующего за ней рассуждения теперь вытекает, что $Z(\tilde{L})$ имеет конечную коразмерность в $\tilde{L}$ (здесь также используется наличие тождества в $U(\tilde{L}) \subset U(L)$). Следовательно, наше подпространство M имеет конечную коразмерность в T , а стало быть, и в L_1 . По построению $[M, M] = 0$, $[L_0, M] \subset [L_0, Q]$ конечномерно и, как мы и хотели, M является $\text{Aut } L$ - и L_0 -инвариантным.

Возвращаясь к рассмотрению smash-произведения $U(L) \# \mathbb{k}G$, мы видим, что $L_0 \oplus M$ является G -инвариантной подсупералгеброй L , причем L_1/M конечномерно. Следовательно, мы можем без ограничения общности считать, что $M = L_1$,

так что $[L_1, L_1] = 0$ и пространство $[L_0, L_1]$ конечномерно. Из теоремы 1.4 мы знаем, что абелева подгруппа $A_1 \subset G$ конечного индекса может быть выбрана действующей тривиально на L_0 . Более того, из $[L_1, L_1] = 0$ вытекает, что алгебра $\Lambda(L_1) \# \mathbb{k}A_1$ вложена в $U(L) \# \mathbb{k}G$, и из наличия тождества в последней получаем, что выполняется некоторое тождество на действие A_1 на $\Lambda(L_1)$. Согласно теореме 2.14 мы можем найти такую подгруппу $A_2 \subset A_1$ конечного индекса и такое A_1 -инвариантное подпространство $V_1 \subset L_1$ конечной коразмерности, что $(\mathbb{k}A_2)^+ \cdot V_1$ конечномерно. Поскольку A_1 действует тривиально на L_0 , операторы из $\text{ad } L_0$ перестановочны с действием A_1 на L_1 , так что согласно замечанию 2.18 мы можем считать V_1 $\text{ad } L_0$ -инвариантным. Далее, положим

$$A = \bigcap_{g \in G} gA_2g^{-1},$$

тогда по построению A – нормальная абелева подгруппа в G конечного индекса, действующая тривиально на L_0 , причем $(\mathbb{k}A)^+ \cdot V_1$ конечномерно для выбранного нами V_1 .

Применим теперь “процесс усреднения” к V_1 , полагая

$$M = \sum_{g \in G} g \cdot V_1.$$

Тогда M – G - и L_0 -инвариантное подпространство L_1 конечной коразмерности, причем вышеуказанная сумма имеет на самом деле лишь конечное число различных слагаемых, поскольку подгруппа A конечного индекса оставляет V_1 инвариантным. Следовательно, подпространство $(\mathbb{k}A)^+ \cdot M \subset M$ все еще конечномерно и, более того, в силу нормальности A в G оно является G -инвариантным. Наконец, из перестановочности операторов из $\text{ad } L_0$ с действием A вытекает, что $(\mathbb{k}A)^+ \cdot M$ будет и L_0 -инвариантным. Остается положить

$$N = [L_0, M] + (\mathbb{k}A)^+ \cdot M.$$

Тогда подпространство $N \subset M$ конечномерно, G - и L_0 -инвариантно и по построению A и L_0 действуют тривиально на M/N , что и завершает доказательство теоремы.

В заключение автор выражает благодарность Ю. А. Бахтуруину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math. V. 82.)
2. *Passman D. S.* Infinite crossed products. Boston: Academic Press, 1989. (Pure Appl. Math. V. 135.)
3. *Bahturin Yu., Petrogradsky V.* Polynomial identities in smash products // J. Lie Theory. 2002. V. 12. № 2. P. 369–395.
4. *Бахтуруин Ю. А.* Тождества универсальной обертывающей алгебры для супералгебры Ли // Матем. сб. 1985. Т. 127 (169). № 3 (7). С. 384–397.
5. *Passman D.* Group rings satisfying a polynomial identity // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 103–117.

6. *Петроградский В. М.* О существовании тождества в ограниченной обертывающей // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №1. С. 84–93.
7. *Petrogradski V. M.* Identities in the enveloping algebras for modular Lie superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 145. №1. P. 1–21.
8. *Kochetov M.* On identities for coalgebras and Hopf algebras // Comm. Algebra. 2000. V. 28. №3. P. 1211–1221.
9. *Handelman D., Lawrence J., Schelter W.* Skew group rings // Houston J. Math. 1978. V. 4. №2. P. 175–197.
10. *Kochetov M.* PI Hopf algebras of prime characteristic // J. Algebra (to appear).
11. *Neumann P.* An improved bound for BFC groups // J. Austral. Math. Soc. 1970. V. 11. P. 19–27.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mkotchetov@hotmail.com

Поступила в редакцию
25.04.2002