Общероссийский математический портал

Л. Д. Кудрявцев, Почти нормированные пространства функций с полиномиальной асимптотикой, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 103–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:14:17

УДК 517.911

Л. Д. Кудрявцев

Почти нормированные пространства функций с полиномиальной асимптотикой

Рассматривается линейное пространство функций, асимптотически приближающихся к полиномам не выше данной степени, когда аргумент стремится к бесконечности. При определенной гладкости функций, входящих в эти пространства, их не удастся нормировать. Поэтому вводится понятие почти нормированных пространств и доказывается, что указанные пространства функций как асимптотически, так и сильно асимптотически приближающихся к полиномам, являются почти нормированными. Доказывается также полнота этих пространств в метрике, порожденной их почти нормой, изучается связь асимптотического приближения функций к полиномам с сильно асимптотическим приближением к ним, дается новое (более короткое по сравнению с известным) доказательство критерия асимптотического приближения функций к полиномам.

Библиография: 5 названий.

§1. Асимптотическое приближение функций к полиномам

Пусть $x(t)$ – r -мерная вектор-функция, m раз дифференцируемая на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$, где t_0 – некоторое действительное число: $x(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \geq t_0$, и $p_m(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathbb{R}$, – r -мерный вектор-полином степени не выше m (т.е. его координатные функции в декартовой системе координат являются полиномами степени не выше m).

Прежде всего докажем более простым образом, чем это было сделано раньше в [1], критерий полиномиальной асимптотики функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $x(t)$ называется *асимптотически приближающейся* при $t \rightarrow +\infty$ к полиному $p_m(t)$, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x^{(k)}(t) - p_m^{(k)}(t)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (1)$$

В этом случае будем писать

$$x(t) \sim p_m(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

$$p_m(t) = p_{x,m}(t) = \sum_{j=0}^m a_{x,j} t^j, \quad a_{x,j} \in \mathbb{R}^r, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (3)$$

($a_{x,j}$ – r -мерные векторы).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n^T(x)(t) &= \int_t^T dt_1 \int_{t_1}^T dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^T x(t_n) dt_n, \\ \mathcal{J}_n(x)(t) &= \mathcal{J}_n^{+\infty}(x)(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Если функция $x(t)$ имеет при $t \geq t_0$ локально интегрируемую обобщенную производную [2] порядка $m + 1$ и $x(t) \sim p_m(t)$, $t \rightarrow +\infty$, то интеграл

$$\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0) \quad (5)$$

сходится (и, следовательно, сходятся все его внутренние интегралы), для коэффициентов a_k многочлена $p_m(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ имеют место формулы

$$a_k = \frac{1}{k!} \left(x^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} t^i + (-1)^{m-k} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t) \right) \quad (6)$$

(и, тем самым, правые части этих равенств не зависят от значений $t \geq t_0$) и

$$x^{(k)}(t) - p_m^{(k)}(t) = (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$p_m^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} t^i. \quad (8)$$

По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$x^{(m)}(T) = x^{(m)}(t) + \int_t^T x^{(m+1)}(t_1) dt_1, \quad t_0 \leq t < T < +\infty. \quad (9)$$

Отсюда в силу (1) и (8) при $T \rightarrow +\infty$ получим

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} x^{(m)}(T) \stackrel{(1)}{=} p_m^{(m)}(t) \stackrel{(8)}{=} m! a_m.$$

Поэтому из равенства (9) следует, что существует конечный предел

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_t^T x^{(m+1)}(t_1) dt_1,$$

т.е. интеграл $\int_t^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1$ сходится и справедливо равенство

$$\int_t^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1 = m! a_m - x^{(m)}(t) = p^{(m)}(t) - x^{(m)}(t). \quad (10)$$

Таким образом, равенства (6) и (7) доказаны при $k = m$.

Пусть эти равенства имеют место при некотором k , $0 < k \leq m$, и, следовательно, интеграл $\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t)$ сходится. Покажем, что в этом случае равенства (6) и (7) верны и при $k - 1$.

В силу (1)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(x^{(k-1)}(t) - \sum_{i=0}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t^i \right) \\ \stackrel{(8)}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^{(k-1)}(t) - p_m^{(k-1)}(t)) \stackrel{(1)}{=} 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Проинтегрируем теперь равенство

$$(x^{(k-1)}(t_1) - p_m^{(k-1)}(t_1))' = x^{(k)}(t_1) - p_m^{(k)}(t_1) \stackrel{(7)}{=} (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t_1)$$

по переменной t_1 в пределах от t до $T > t$. Заметив, что

$$\int_t^T \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t_1) dt_1 = \mathcal{J}_{m-k+2}^T(x^{(m+1)})(t), \quad (12)$$

будем иметь

$$x^{(k-1)}(t_1) - p_m^{(k-1)}(t_1) \Big|_t^T = (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+2}^T(x^{(m+1)})(t). \quad (13)$$

В силу равенства (11) левая часть равенства (13) имеет при $T \rightarrow +\infty$ конечный предел $p_m^{(k-1)}(t) - x^{(k-1)}(t)$. Следовательно, этот же предел имеет и правая часть равенства (12), т.е. интеграл $\mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t)$ сходится и справедливо равенство

$$x^{(k-1)}(t) - p_m^{(k-1)}(t) = (-1)^{m-k} \mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t).$$

Таким образом, формула (7) доказана при $k-1$. В силу (8) ее можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^m \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t^i = x^{(k-1)}(t) + (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t).$$

Разрешив это равенство относительно коэффициента a_{k-1} , получим

$$\begin{aligned} a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \left(x^{(k-1)}(t) - \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t^i \right. \\ \left. + (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t) \right), \end{aligned}$$

т.е. формула (6) также доказана при $k-1$.

Итак, формулы (6) и (7) имеют место при всех $k = 0, 1, \dots, m$, а интегралы $\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t)$ при этих значениях k сходятся. При $k = 0$ и $t = t_0$ интеграл $\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t)$ превращается в интеграл $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t)$.

ЛЕММА 2. Если функция $x(t)$ имеет при $t \geq t_0$ локально суммируемую обобщенную произвольную порядка $m+1$ и интеграл $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0)$ сходится, то функция $x(t)$ асимптотически приближается при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому полиному степени не выше m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сходимости интеграла $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0)$, очевидно, следует и сходимость интеграла $\int_T^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1$, $T \geq t_0$. Поэтому согласно равенству (9) существует конечный предел

$$a_m \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{x^{(m)}(T)}{m!} = \frac{1}{m!} \left(x^{(m)}(t) + \int_t^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1 \right), \quad t_0 \leq t < T < +\infty.$$

Отсюда имеем

$$x^{(m)}(t) - m!a_m = - \int_t^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1. \quad (14)$$

Пусть теперь для некоторого k , $0 < k \leq m$, определены числа $a_k, \dots, a_{k+m}$ такие, что имеет место равенство

$$x^{(k)}(t) - \sum_{i=0}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} t^i = (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t) \quad (15)$$

(при $k = m$ это равенство превращается в равенство (14)).

Проинтегрировав равенство

$$\begin{aligned} & \left(x^{(k-1)}(t_1) - \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t_1^i \right)' \\ &= x^{(k)}(t_1) - \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t_1^{i-1} \\ &= x^{(k)}(t) - \sum_{i=0}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} t_1^i \stackrel{(15)}{=} (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t_1) \end{aligned}$$

по переменной t_1 в пределах от t до T , получим

$$x^{(k-1)}(t_1) - \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} t_1^i \Big|_t^T = (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+2}^T(x^{(m+1)})(t). \quad (16)$$

Согласно условиям леммы 2 интеграл $\mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t)$ сходится. Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (16) при $T \rightarrow +\infty$, получим, что существует конечный предел

$$a_{k-1} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-1)!} \left(x^{(k-1)}(T) - \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} T^i \right)$$

и что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (k-1)!a_{k-1} - x^{(k-1)}(t) + \sum_{i=1}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} \\ &= (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t), \end{aligned}$$

из которого следует

$$x^{(k-1)}(t) - \sum_{i=0}^{m-k+1} \frac{(k+i-1)!}{i!} a_{k+i-1} = (-1)^{m-k} \mathcal{J}_{m-k+2}(x^{(m+1)})(t).$$

Таким образом, в предположениях леммы 2 формула (15) имеет место при всех $k = 0, 1, \dots, m$.

Положим

$$p_m(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j.$$

Тогда равенство (15) примет вид

$$x^{(k)}(t) - p_m^{(k)}(t) = (-1)^{m-k+1} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t).$$

Правая часть равенства в силу сходимости интеграла $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ для всех $k = 0, 1, \dots, m$. Это означает, что

$$x(t) \sim p_m(t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы функция $x(t)$, имеющая при $t \geq t_0$ локально интегрируемую обобщенную производную порядка $m+1$, асимптотически приближалась при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому полиному $p_m(t)$ (степени не выше m), необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0)$.*

При этом для коэффициентов полинома $p_m(t)$ имеют место рекуррентные формулы (6), а отклонения производных функции $x(t)$ порядков $k = 0, 1, \dots, m$ от производных соответственно тех же порядков многочлена $p_m(t)$ задаются формулами (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из рекуррентных формул (6) для коэффициентов полинома $p_{x,m}(t)$ (см. [3]) следует формула, выражающая эти коэффициенты через значения производных порядков $k = 0, 1, \dots, m$ функции $x(t)$ в некоторой точке и интегралы от этих производных. Именно, при фиксированном m для каждого $k = 0, 1, \dots, m$ существуют такие постоянные $b_{k,j}$ и $c_{k,j}$, $j = 0, 1, \dots, m-k$, что если

$$x(t) \sim \sum_{k=0}^m a_k t^k, \quad t \rightarrow +\infty,$$

то

$$a_k = \sum_{j=0}^{m-k} (b_{k,j} x^{(k+j)}(t) + c_{k,j} \mathcal{J}_{m-k-j+1}(x^{(m+1)})(t)) t^j, \quad t \geq t_0 \quad (17)$$

(точные значения постоянных $b_{k,j}$ и $c_{k,j}$ вычислены в статье [1]). Для $k = m$ формула (17) превращается в формулу (см. (10))

$$a_m = \frac{1}{m!} \left(x^{(m)}(t) + \int_t^{+\infty} x^{(m+1)}(t_1) dt_1 \right), \quad b_{m,0} = c_{m,0} = \frac{1}{m!}.$$

Пусть при всех $i = 1, 2, \dots, m - k$ для коэффициентов a_{k+i} справедлива формула (17), т.е.

$$a_{k+i} = \sum_{j=0}^{m-k-i} (b_{k+i,j} x^{(k+i+j)}(t) + c_{k+i,j} \mathcal{J}_{m-k-i-j+1}(x^{(m+1)})(t)) t^j.$$

Подставив эти значения a_{k+i} в формулу (6), получим

$$a_k = \frac{1}{k!} \left(x^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} t^i \sum_{j=0}^{m-k-i} (b_{k+i,j} x^{(k+i+j)}(t) + c_{k+i,j} \mathcal{J}_{m-k-i-j+1}(x^{(m+1)})(t)) t^j + (-1)^{m-k} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t) \right).$$

Положив $i + j = l$ и заметив, что

$$\sum_{i=1}^{m-k} \sum_{j=0}^{m-k-i} = \sum_{l=1}^{m-k} \sum_{i=1}^{m-k},$$

будем иметь

$$a_k = \frac{1}{k!} x^{(k)}(t) + \sum_{l=1}^{m-k} \left(x^{(k+l)}(t) \left(-\frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} b_{k+i,l-i} \right) + \mathcal{J}_{m-k-l+1}(x^{(m+1)})(t) \right) t^l + \frac{(-1)^{m-k}}{k!} \mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t).$$

Положив здесь

$$\begin{aligned} b_{k,0} &= \frac{1}{k!}, & c_{k,0} &= \frac{(-1)^{m-k}}{k!}, \\ b_{k,l} &= -\frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} b_{k+i,l-i}, & c_{k,l} &= -\frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{m-k} \frac{(k+i)!}{i!} c_{k+i,l-i}, \\ & k = 0, 1, \dots, m, & l &= 1, 2, \dots, m - k, \end{aligned}$$

получим формулу (17).

§ 2. Почти нормированные пространства

В пространстве m раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $[t_0, +\infty)$ r -мерных вектор-функций $x(t)$, асимптотически приближающихся при $t \rightarrow +\infty$ к полиномам $p_{x,m}(t)$ степеней не выше m , можно ввести норму (см. [4])

$$\|x\|_{PA_m^m} = \|x - p_{x,m}\|_{C^m[t_0, +\infty)} + |a_x|, \quad (18)$$

где

$$\|x - p_{x,m}\|_{C^m[t_0, +\infty)} = \sum_{i=0}^m \sup_{[t_0, +\infty)} |(x - p_{x,m})^{(i)}|, \quad (19)$$

$$a_x = (a_{x,0}, a_{x,1}, \dots, a_{x,m}), \quad |a_x| = \sum_{j=0}^m |a_{x,j}|. \quad (20)$$

Это пространство является банаховым [4] и обозначается $PA_m^m = PA_m^m[t_0, +\infty)$. Как показывает теорема 1, асимптотическое приближение функции $x(t)$, имеющей производную порядка $m+1$, к многочлену $p_m(t)$ степени не выше m зависит только от свойств этой производной. Наличие у функции $x(t)$ производных более высокого порядка никак не влияет ни на существование асимптотического приближения, ни на его скорость, т.е. на разности $(x(t) - p_m(t))^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, m$, которые также выражаются через интегралы от производной $x^{(m+1)}(t)$ (см. (7)).

Поэтому использовать пространства PA_m^m , например, в теории асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений не очень удобно, так как пространства PA_m^m содержат много “лишних” функций, а именно, функций, не имеющих производных порядка выше m .

Линейное же подпространство $PA_m^{m+1} = PA_m^{m+1}[t_0, +\infty)$ пространства PA_m^m , состоящее из функций, имеющих обобщенные локально интегрируемые производные порядка $m+1$, для которых сходятся интегралы $\mathcal{J}_{m+1}(x^{(m+1)})(t_0)$, не является замкнутым по норме (18), а следовательно, не является и банаховым пространством.

Трудность задачи о введении метрики в пространстве PA_m^{m+1} , в которой оно оказалось бы полным метрическим пространством, состоит в том, что оно описывается сходящимся (вообще говоря, не абсолютно) интегралом. Покажем, что пространство PA_m^{m+1} является в определенном смысле “почти” нормированным пространством, что и позволит решить указанную задачу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал $\|\cdot\|$ на линейном пространстве X называется *почти нормой*, если для любых элементов этого пространства выполняются следующие условия:

- 1°. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2°. $\|-x\| = \|x\|$;
- 3°. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство, в котором определена почти норма, называется *почти нормированным пространством*.

Ясно, что всякое нормированное пространство является и почти нормированным.

ЛЕММА 3. В почти нормированном пространстве бифункционал

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X, \quad (21)$$

является метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\rho(x, y) = \|x - y\| \stackrel{1^\circ}{\geq} 0$. Если $\rho(x, y) = 0$, т.е. $\|x - y\| = 0$, то $x \stackrel{1^\circ}{=} y$. Далее,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \stackrel{2^\circ}{=} \|y - x\| = \rho(y, x), \quad \rho(x, y) \stackrel{3^\circ}{\leq} \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, почти нормированное пространство является линейным метрическим пространством, в котором метрика $\rho(x, y)$ четная и удовлетворяет условию $\rho(x + y, 0) \leq \rho(x, 0) + \rho(y, 0)$.

Напомним, что *полунормой* называется функционал $\|\cdot\|$ на линейном пространстве, удовлетворяющий всем аксиомам, которым удовлетворяет норма, кроме, быть может, аксиомы невырожденности: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Если неотрицательный функционал $\|\cdot\|$ на линейном пространстве X является четным: $\|-x\| = \|x\|$, $x \in X$, и удовлетворяет неравенству треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$, то он называется *почти полунормой*.

Очевидно, что сумма нормы и почти полунормы является почти нормой.

Заметим еще, что если неотрицательный функционал F на линейном пространстве X удовлетворяет неравенству треугольника

$$F(x + y) \leq F(x) + F(y),$$

то, как это легко проверить, функционал $F(x)/(1 + F(x))$ также удовлетворяет неравенству треугольника

$$\frac{F(x + y)}{1 + F(x + y)} \leq \frac{F(x)}{1 + F(x)} + \frac{F(y)}{1 + F(y)}, \quad (22)$$

а следовательно, если он четный, то и неравенству

$$\left| \frac{F(x)}{1 + F(x)} - \frac{F(y)}{1 + F(y)} \right| \leq \frac{F(x - y)}{1 + F(x - y)}. \quad (23)$$

ЛЕММА 4. Если на линейном пространстве X задана последовательность полунорм $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$, то функционал

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|^{(n)}}{1 + \|x\|^{(n)}}, \quad x \in X, \quad (24)$$

является почти полунормой на пространстве X и последовательность точек этого пространства, фундаментальная по почти полунорме (24), будет фундаментальной и по каждой полунорме $\|\cdot\|^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\|x\| \geq 0$ и $\|-x\| = \|x\|$, $x \in X$. Из неравенства (22), примененного к каждому слагаемому правой части равенства (24), следует, что $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Таким образом, функционал (24) действительно почти полунорма.

Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная по почти полунорме (24) последовательность точек пространства X . Прежде всего заметим, что для любого ε ,

$$0 < \varepsilon < 1, \quad (25)$$

из неравенств

$$\frac{t}{1+t} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geq 0, \quad (26)$$

следует неравенство

$$t < \varepsilon. \quad (27)$$

Действительно, из (26) имеем $t < \varepsilon/(2 - \varepsilon)$, где $2 - \varepsilon > 1$, поэтому $t < \varepsilon$.

Зафиксируем произвольно номер n_0 . Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{x_k\}$ для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует такой номер k_0 , что для всех номеров $k_1 > k_0$ и $k_2 > k_0$ выполняется неравенство

$$\|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}},$$

иначе говоря (см (24)),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n)}}{1 + \|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n)}} < \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}}.$$

Откуда

$$\frac{1}{2^{n_0}} \frac{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n_0)}}{1 + \|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n_0)}} < \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}},$$

т.е.

$$\frac{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n_0)}}{1 + \|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n_0)}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому согласно (26) и (27) для всех $k_1 > k_0$ и $k_2 > k_0$ выполняется неравенство

$$\|x_{k_2} - x_{k_1}\|^{(n_0)} < \varepsilon.$$

Это означает фундаментальность последовательности $\{x_k\}$ по полунорме $\|x\|^{(n_0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в дополнение к условиям леммы 4 предположить, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{0\}, \quad (28)$$

где $X_n = \{x \in X : \|x\|^{(n)} = 0\}$, $n = 1, 2, \dots$, то почти полунорма (24) будет почти нормой.

В самом деле, из условия $\|x\| = 0$ в силу равенства (24) следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место равенство $\|x\|^{(n)} = 0$, т.е. $x \in X_n$ и, следовательно, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, откуда согласно (28) имеем $x = 0$.

Для r -мерной вектор-функции $x = x(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ введем обозначение

$$\|x\|_1^{(n)} = \|x\|_{L_1[t_0, +\infty)} = \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| dt.$$

Если $x(t) \in PA_m^{m+1}[t_0, +\infty)$, т.е. имеет на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$ локально суммируемую обобщенную производную порядка $m+1$ и асимптотически приближается при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому полиному степени не выше m , то функционал (см. (18))

$$\|x\|_{PA_m^{m+1}} = \|x\|_{PA_m^m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}}{1 + \|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}} \quad (29)$$

принимает, очевидно, на пространстве PA_m^{m+1} только конечные значения.

ТЕОРЕМА 2. *Функционал $\|x\|_{PA_m^{m+1}}$ является почти нормой на пространстве PA_m^{m+1} .*

Это следует из того, что первое слагаемое в правой части равенства (29) является нормой в пространстве PA_m^m и, следовательно, нормой в пространстве $PA_m^{m+1} \subset PA_m^m$, а второе слагаемое

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}}{1 + \|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}} \quad (30)$$

согласно лемме 4 есть почти полунорма в пространстве PA_m^{m+1} , так как $\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}$ — полунорма в этом пространстве.

ЛЕММА 5. *При фиксированных t_0 , m и $T > t_0$ существует такая постоянная $c > 0$, что для любой функции $x(t) \in PA_m^m[t_0, +\infty)$ выполняется неравенство*

$$\|x\|_{C^m[t_0, T]} \leq c \|x\|_{PA_m^m[t_0, +\infty)}, \quad (31)$$

где $C^m[t_0, T]$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых r -мерных вектор-функций с равномерной нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in PA_m^m$, $x \sim p_m(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$, $t \rightarrow +\infty$, $C^m = C^m[t_0, T]$. Заметив, что

$$\|p_m\|_{C^m} \leq \sum_{k=0}^m |a_k| \|t^k\|_{C^m},$$

положим $c_1 = \sum_{k=0}^m \|t^k\|_{C^m}$ (c_1 зависит только от t_0 , m и T). Тогда $\|p_m\|_{C^m} \leq c_1 |a_x|$ и, следовательно, (20)

$$\|x\|_{C^m} \leq \|x - p_m\|_{C^m} + \|p_m\|_{C^m} \leq \|x - p_m\|_{C^m} + c_1 |a_x| \leq c \|x\|_{PA_m^m},$$

где, например, $c = c_1 + 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $PA_m^{(m+1)} = PA_m^{(m+1)}[t_0, +\infty)$ является полным метрическим пространством относительно метрики (21), порожденной почти нормой (29).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства $PA_m^{(m+1)}$. Тогда в силу равенства (29) она является фундаментальной по почти полунорме (30), а следовательно, согласно лемме 4 она фундаментальна в пространстве $PA_m^{(m+1)}$ и по полунормам $\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}$. Поэтому последовательность $\{x_k^{(m+1)}\}$ является фундаментальной в лебеговых пространствах $L_1[t_0, t_0 + n]$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

В силу неравенства (31) из фундаментальности последовательности $\{x_k\}$ в пространстве $PA_m^{(m+1)}$, а следовательно, и в пространстве PA_m^m , вытекает ее фундаментальность в пространстве $C^m[t_0, t_0 + n]$. Таким образом, последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в соболевском пространстве $W_1^m[t_0, t_0 + n]$, а поэтому согласно выше сказанному и в пространстве $W_1^{m+1}[t_0, t_0 + n]$.

Поскольку это пространство полно, то в нем существует предел

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + n, \quad (32)$$

который имеет обобщенную производную порядка $m + 1$.

Последовательность $\{x_k\}$ равномерно сходится в пространстве $C[t_0, t_0 + n]$, и поскольку функции этой последовательности непрерывны, то их предел (32) непрерывен на отрезке $[t_0, t_0 + n]$. Отсюда следует, что если $n_1 < n_2$, то $x(t) = x(t)$, $t \in [t_0, t_0 + n_1]$. Поэтому последовательность функций $x(t)$, $n = 1, 2, \dots$, однозначно определяет на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$ такую функцию $x(t)$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$x(t) = x(t) \in W_1^{m+1}[t_0, t_0 + n].$$

Итак, функция $x(t)$ имеет обобщенную производную порядка $m + 1$, суммируемую на любом отрезке $[t_0, t_0 + n]$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. локально суммируемую на бесконечном промежутке.

Последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна по почти норме $\|\cdot\|_{PA_m^{m+1}}$ и, следовательно, в силу определения (29) фундаментальна в пространстве PA_m^m . Это пространство полное, и из сходимости по его норме следует равномерная сходимость на всех отрезках $[t_0, t_0 + n]$ (см. (31)). Поэтому последовательность $\{x_k\}$ сходится в пространстве PA_m^m и ее пределом является уже найденная функция $x(t)$. Таким образом, функция $x(t)$ асимптотически приближается к некоторому полиному степени не выше m .

Докажем теперь, что последовательность $\{x_k\}$ сходится к функции $x(t)$ по почти норме (29). Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0 так, чтобы

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости последовательности $\{x_k\}$ в пространствах $W_1^{m+1}[t_0, t_0 + n]$, $n = 1, 2, \dots, n_0$, к функции $x(t)$ существует такой номер k' , что для всех номеров $k > k'$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{n_0} \|x_k^{(m+1)} - x^{(m+1)}\|_1^{(n)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, в силу сходимости последовательности $\{x_k\}$ в пространстве PA_m^m к той же функции $x(t)$ существует такой номер k'' , что при всех $k > k''$ имеет место неравенство

$$\|x_k - x\|_{PA_m^m} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

При $k > \max\{k', k''\}$ получим

$$\|x_k - x\|_{PA_m^{m+1}} \stackrel{(29)}{\leq} \|x_k - x\|_{PA_m^m} + \sum_{n=1}^{n_0} \|x_k - x\|_1^{(n)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Заметим, что функции $x(t)$, составляющие пространство PA_m^{m+1} , определяются только одним условием: для них сходится (вообще говоря, не абсолютно) интеграл $\mathcal{J}_{m+1}(x^{m+1}(t_0))$. Для интегралов, сходящихся, но не абсолютно, нет нетривиальных теорем типа: “предел последовательности интегралов равен интегралу от предела последовательности подынтегральных функций”. Именно поэтому полнота пространства PA_m^{m+1} достаточно содержательна.

Норма (18) в пространстве PA_m^m и почти норма (29) в пространстве PA_m^{m+1} не всегда удобны для применения из-за того, что в их определения входит не только сама функция, но и полином, к которому она асимптотически приближается. Этого неудобства можно избежать: в пространствах PA_m^m и PA_m^{m+1} существуют соответственно норма и почти норма, эквивалентные норме (18) и почти норме (29), в выражения которых входит только сама функция.

Две почти нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^*$ линейного пространства X по аналогии с нормами называются *эквивалентными*, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех точек $x \in X$ выполняются неравенства

$$c_1 \|x\|^* \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|^*.$$

ТЕОРЕМА 4. В пространстве $PA_m^m[t_0, +\infty)$ норма (18) эквивалентна норме

$$\|x\|_{PA_m^m}^* = \sum_{i=0}^m (|x^{(i)}(t_0)| + \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}). \quad (33)$$

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве $PA_m^{m+1}[t_0, +\infty)$ почти норма (29) эквивалентна почти норме

$$\|x\|_{PA_m^{m+1}}^* = \|x\|_{PA_m^m}^* + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}}{1 + \|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}}. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t) \sim p_m(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j$, $t \rightarrow +\infty$. Из равенства (7) имеем

$$|x^{(k)}(t) - p_m^{(k)}(t)| = |\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t)|$$

и, следовательно,

$$\|x^{(k)} - p_m^{(k)}\|_{C[t_0, +\infty)} = \|\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Суммируя эти равенства по k от 0 до m , получаем

$$\|x - p_m\|_{C^m[t_0, +\infty)} = \sum_{i=0}^m \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}. \quad (35)$$

Из формулы (17) при $t = t_0$, положив $c_1 = \max_{j,k=0,1,\dots,m} \{b_{k,j}t_0^j, c_{k,j}t_0^j\}$, получим

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq c_1 \sum_{j=0}^{m-k} (|x^{(k+j)}(t_0)| + |\mathcal{J}_{m-k-j+1}(x^{(m+1)})(t_0)|) \\ &\leq (m+1)c_1 \sum_{i=0}^m (|x^{(i)}(t_0)| + |\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})(t_0)|). \end{aligned}$$

Поэтому, введя обозначения $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ (a_k — r -мерные векторы, $k = 0, 1, \dots, m$) и $|a| = \sum_{k=0}^m |a_k|$, будем иметь

$$|a| \leq (m+1)^2 c_1 \sum_{i=0}^m (|x^{(i)}(t_0)| + \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}). \quad (36)$$

Из (35) и (36) следует, что

$$\begin{aligned} \|x\|_{PA_m^m} &\stackrel{(18)}{=} \|x - p_m\|_{C^m[t_0, +\infty)} + |a| \\ &\leq c_2 \sum_{i=0}^m (|x^{(i)}(t_0)| + \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}) = c_2 \|x\|_{PA_m^m}^*, \end{aligned} \quad (37)$$

где, например, $c_2 = (m+1)^2 c_1 + 1$.

Из равенства (7) при $t = t_0$ следует, что

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(t_0)| &\leq |p_m^{(k)}(t_0)| + |\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})(t_0)| \\ &\leq \sum_{j=0}^m |a_j| t_0^j + \|\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Положив $c_3 = \max\{1, t_0, t_0^2, \dots, t_0^m\}$, будем иметь

$$|x^{(k)}(t_0)| \leq c_3 (|a| + \|\mathcal{J}_{m-k+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}).$$

Суммируя эти неравенства по k от 0 до m , получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m |x^{(k)}(t_0)| &\leq (m+1)c_3 \left(|a| + \sum_{i=0}^m \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)} \right) \\
 &\stackrel{(35)}{=} (m+1)c_3 (|a| + \|x - p_m\|_{C^m[t_0, +\infty)}) \\
 &= (m+1)c_3 \|x\|_{PA_m^m}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Из (35) и (38) имеем

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{PA_m^m}^* &= \sum_{i=0}^m (|x^{(i)}(t_0)| + \|\mathcal{J}_{i+1}(x^{(m+1)})\|_{C[t_0, +\infty)}) \\
 &\leq (m+1)c_3 \|x\|_{PA_m^m} + \|x\|_{PA_m^m} \leq c_4 \|x\|_{PA_m^m},
 \end{aligned} \tag{39}$$

где, например, $c_4 = (m+1)c_3 + 1$.

Из неравенств (37), (39) и следует эквивалентность норм $\|x\|_{PA_m^m}$ и $\|x\|_{PA_m^m}^*$. Эквивалентность почти норм $\|x\|_{PA_m^{m+1}}$ и $\|x\|_{PA_m^{m+1}}^*$ вытекает из того, что они получаются из норм $\|x\|_{PA_m^m}$ и $\|x\|_{PA_m^m}^*$ добавлением одного и того же слагаемого.

ЗАМЕЧАНИЕ. В пространстве $PA_0^0 = PA_0^0[t_0, +\infty)$ функций $x(t)$, непрерывных на промежутке $[t_0, +\infty)$, имеющих конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c_x$, нормы

$$\|x\|_{C[t_0, +\infty)} = \sup_{t \geq t_0} |x(t)|, \quad \|x\|_{PA_0^0} = \|x - c_x\|_{C[t_0, +\infty)} + |c_x|$$

равносильны.

Действительно, очевидно, что

$$\|x\|_{C[t_0, +\infty)} \leq \|x - c_x\|_{C[t_0, +\infty)} + |c_x| = \|x\|_{PA_0^0}.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что $|c_x| \leq \|x\|_{C[t_0, +\infty)}$. Поэтому

$$\|x\|_{PA_0^0} \leq \|x\|_{C[t_0, +\infty)} + 2|c_x| \leq 3\|x\|_{C[t_0, +\infty)}.$$

В силу этого из следствия теоремы 4 при $m = 0$ вытекает, что почти норма $\|x\|_{PA_0^1}$ равносильна почти норме

$$\|x\|^{**} = \|x\|_{C[t_0, +\infty)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x'\|_1^{(n)}}{1 + \|x'\|_1^{(n)}}.$$

§ 3. Сильное асимптотическое приближение функций к полиномам

Данное выше определение асимптотического приближения функций к полиномам непосредственно не обобщается содержательно на асимптотическое приближение к функциям многих классов. Например, из определения асимптотического приближения функций, аналогичного определению 1, к функциям вида se^{-t} (s — произвольная постоянная) не следует однозначный выбор числа s . Поэтому введем еще одно определение полиномиального асимптотического приближения функций $x(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, допускающее широкое обобщение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Представление функции $x(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$, дифференцируемой m раз, в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^m a_k(t)t^k, \quad a_k(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (40)$$

где коэффициенты $a_k(t)$ таковы, что выполняются условия

$$x^{(i)}(t) = \sum_{k=i}^m k(k-1) \cdots (k-i+1) a_k(t)t^{k-i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (41)$$

(т.е. при дифференцировании m раз равенства (40) коэффициенты $a_k(t)$ ведут себя как постоянные), называется *L -полиномиальным (лагранжевым полиномиальным) представлением*.

ЛЕММА 6. Для любой m раз дифференцируемой на промежутке $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, функции существует и притом единственное ее L -полиномиальное представление.

Это следует из того, что координаты $a_k^j(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$, вектора $a_k(t) = (a_k^1(t), \dots, a_k^r(t))$ в силу условия (41) удовлетворяют системе уравнений

$$x^{j(i)}(t) = \sum_{k=0}^m k(k-1) \cdots (k-i+1) a_k^j(t)t^{k-i},$$

$$i = 0, 1, \dots, m, \quad x(t) = (x^1(t), \dots, x^r(t)),$$

с треугольной матрицей, диагональные элементы которой при $t \neq 0$ все отличны от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $x(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$, m раз дифференцируемая на промежутке $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, называется *L -асимптотически приближающейся* при $t \rightarrow +\infty$ к вектор-полиному $p_m(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$, если для коэффициентов $a_k(t)$ ее L -полиномиального представления выполняются условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a_k(t) = a_k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (42)$$

В этом случае будем писать

$$x(t) \underset{L}{\sim} p_m(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (43)$$

Пространство m раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, функций, L -асимптотически приближающихся при $t \rightarrow +\infty$ к вектор-полиномам степени не выше m , обозначается $LPA_m^m = LPA_m^m[t_0, +\infty)$.

В работе [4] при $r = 1$, т.е. для скалярных функций, доказано, что если $x(t) \underset{L}{\sim} \sum_{k=0}^m a_{x,k} t^k$, $x(t) = \sum_{k=0}^m a_{x,k}(t) t^k$ — L -полиномиальное представление функции $x(t)$ и $a_x(t) = (a_{x,0}(t), \dots, a_{x,m}(t))$, то в пространстве LPA_m^m скалярных функций функционал

$$\|x\|_{LPA_m^m} = \|a_x\|_{C_{m+1}[t_0, +\infty)} \quad (44)$$

($C_{m+1}[t_0, +\infty)$ — пространство непрерывных $(m+1)$ -мерных вектор-функций) является нормой в пространстве LPA_m^m и с этой нормой оно является банаховым.

Ясно, что отсюда следует, что если $x(t)$ — r -мерная вектор-функция, $x(t) \underset{L}{\sim} \sum_{k=0}^m a_{x,k} t^k$, $x(t) = \sum_{k=0}^m a_{x,k}(t) t^k$ — ее L -полиномиальное представление, $a_{x,k}(t) = (a_{x,k}^1(t), \dots, a_{x,k}^r(t))$ и

$$a_x = (a_{x,k}^j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (45)$$

— матрица $r \times (m+1)$, то функционал

$$\|x\|_{LPA_m^m} = \|a_x\|_{C_{r \times (m+1)}[t_0, +\infty)} \quad (46)$$

является нормой в пространстве LPA_m^m r -мерных вектор-функций и оно является полным по этой норме.

Через $LPA_m^{m+1} = LPA_m^{m+1}[t_0, +\infty)$ обозначим пространство функций $x(t) \in LPA_m^m$, имеющих локально интегрируемые обобщенные производные порядка $m+1$. Это пространство не является замкнутым по норме (46) и потому не полно.

ТЕОРЕМА 5. Функционал

$$\|x\|_{LPA_m^{m+1}} = \|x\|_{LPA_m^m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}}{1 + \|x^{(m+1)}\|_1^{(n)}} \quad (47)$$

является почти нормой в пространстве LPA_m^{m+1} .

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.

ТЕОРЕМА 6. Пространство LPA_m^{m+1} является полным метрическим пространством относительно метрики, порожденной почти нормой (47).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_k(t)\}$ — фундаментальная в пространстве LPA_m^{m+1} последовательность функций. Тогда в силу формулы (45) она является фундаментальной и в полном пространстве LPA_m^m и, следовательно, сходится в нем к некоторой функции $x(t)$.

Согласно формуле (45) для каждого $j = 1, 2, \dots, r$ последовательности $a_{x_k,j}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, равномерно сходятся на промежутке $[t_0, +\infty)$, а тогда в силу формулы (41) для каждого $i = 0, 1, \dots, m$ последовательности $\{x_k^{(i)}(t)\}$ равномерно сходятся на любом отрезке $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$, к функции $x^{(i)}(t)$. Отсюда аналогично доказательству теоремы 3 следует, что при любом натуральном n последовательность функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к функции $x(t)$ в соболевском пространстве $W_1^{m+1}[t_0, t_0 + n]$. Таким образом, функция $x(t)$ принадлежит пространству LPA_m^m и имеет обобщенную локально интегрируемую производную порядка $m+1$, т.е. $x(t) \in LPA_m^{m+1}$.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы вектор-функция $x(t)$, имеющая при $t \geq t_0$ локально интегрируемую обобщенную производную порядка $m + 1$, L -асимптотически приближалась к вектор-полиному степени не выше m , необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^m x^{(m+1)}(t) dt. \quad (48)$$

Эта теорема непосредственно следует из соответствующей теоремы для скалярного случая, доказанной в работе [4].

ТЕОРЕМА 8. Если вектор-функция, имеющая при $t \geq t_0$ локально интегрируемую обобщенную производную порядка $m + 1$, L -асимптотически приближается к некоторому вектор-полиному степени не выше m , то она и асимптотически приближается к этому полиному.

Это следует из того, что из сходимости интеграла (48) следует сходимость интеграла $\mathcal{I}_{m+1}(x^{(m+1)}(t_0))$ (для скалярного случая это доказано в работе [1]), и из теоремы 1.

В силу теоремы 8 вместо термина L -асимптотическое приближение к полиномам естественно также употреблять и термин сильное асимптотическое приближение к полиномам.

Понятие вложения нормированных пространств по аналогии обобщается на почти нормированные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Почти нормированное пространство X называется *вложенным в почти нормированное пространство Y* , если $X \subset Y$ и существует такая постоянная $c > 0$, что для любой точки $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X. \quad (49)$$

В этом случае будем писать $X \hookrightarrow Y$.

ТЕОРЕМА 9. Имеет место вложение

$$LPA_m^{m+1} \hookrightarrow PA_m^m.$$

Действительно, согласно теореме 8 выполняется включение $LPA_m^{m+1} \subset LPA_m^m$. Кроме того, выполняется неравенство

$$\|x\|_{LPA_m^{m+1}} \leq c\|x\|_{LPA_m^m},$$

где

$$c = 2^{m+2} \sum_{k=0}^m \frac{k!}{2^k} + 1.$$

В скалярном случае, из которого непосредственно следует векторный, оно доказано в [4; теорема 10].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространства функций, асимптотически приближающихся к полиномам, могут быть использованы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть

$$x' = f(t, x), \quad (50)$$

где

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad x: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

а f – непрерывная функция, – асимптотически линейная нормальная система дифференциальных уравнений, т.е. такая система, что существует ограниченная суммируемая на промежутке $[t_0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$, для которой при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq \varphi(t)|y - x|.$$

Решение этой системы при условии

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - p(t)) = 0, \quad (51)$$

где $p(t)$ – некоторый вектор-полином, равносильно решению интегрального уравнения

$$x(t) = p(t) - \int_t^{+\infty} (f(u, x(u)) - p'(u)) du, \quad (52)$$

причем выполнение условия (51) равносильно сходимости интеграла, стоящего в правой части равенства (52).

Поэтому если $p(t)$ – многочлен степени не выше m , а интегральный оператор A , определяемый равенством

$$(Ax)(t) = p(t) - \int_t^{+\infty} (f(u, x(u)) - p'(u)) du, \quad (53)$$

отображает полное метрическое пространство PA_m^{m+1} в себя и является сжимающим, то в пространстве PA_m^{m+1} существует решение уравнения $Ax = x$ и притом единственное. Это решение асимптотически приближается к полиному $p(t)$, что следует из того, что полином $p(t)$ однозначно определяется условием (51). Поэтому в случае, когда функция $x(t)$ принадлежит пространству PA_m^{m+1} , из условия (51) следует выполнение всех условий (1).

Линейная асимптотичность системы (50) обеспечивает возможность продолжения любого ее решения с конечного отрезка $[t_0, T]$ на весь бесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$.

Список литературы

1. Kudryavtsev L. D. Criterion of polynomial increase of a function and its derivatives // Anal. Math. 1992. V. 18. № 3. P. 223–236.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. Кудрявцев Л. Д. Пространство функций, асимптотически приближающихся к полиномам // Докл. АН. 2000. Т. 375. № 5. С. 588–591.
4. Кудрявцев Л. Д. Полиномиальная стабилизация и ее приложения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1486–1503.
5. Кудрявцев Л. Д. О стабилизации функций в бесконечности к решениям дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 332–357.