Общероссийский математический портал

Л. С. Панкратов, В. А. Рыбалко, Асимптотический анализ модели двойной пористости с тонкими трещинами, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 121–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:45:33

УДК 517.946

Л. С. Панкратов, В. А. Рыбалко

Асимптотический анализ модели двойной пористости с тонкими трещинами

Рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения

$$\Phi^\varepsilon(x)u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

с разрывным тензором диффузии $A^\varepsilon(x)$. Предполагается, что этот тензор вырождается при $\varepsilon \rightarrow 0$ всюду в области Ω за исключением множества $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ асимптотически малой меры. Показано, что поведение решений u^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается усредненной моделью с памятью.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Задачи усреднения равномерно эллиптических дифференциальных операторов, а также соответствующих им эволюционных уравнений относятся к классическим и хорошо изученным вопросам теории усреднения (см., например, [1]–[5], где содержится обширная библиография). Другой интересный для приложений класс задач образуют модели, описываемые уравнениями с неравномерно эллиптическими дифференциальными операторами (под *неравномерно эллиптическим оператором* мы понимаем оператор с асимптотически вырождающейся на некотором множестве матрицей коэффициентов). Эти модели активно изучаются в настоящее время. Типичным примером такой модели служит хорошо известная модель двойной пористости, которая и является предметом настоящего исследования.

В работе мы рассматриваем начально-краевую задачу для параболического уравнения, описывающего однофазное течение слабосжимаемой жидкости через пористую среду, состоящую из двух типов пород с контрастными транспортными свойствами. Такие среды нередко возникают в гидрологии и в нефтяной инженерии, когда пористые пласты состоят из пород с контрастными петрографическими характеристиками или пронизаны трещинами. Для описания таких сред обычно используется модель двойной пористости. В рамках этой модели пористая среда состоит из высокопроводящего связанного множества трещин $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ и множества $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ (матрицы), образованного слабопроводящими непересекающимися включениями (блоками). Здесь ε – характерный размер блоков. Задача состоит в макроскопическом (усредненном) описании течения жидкости в системе, когда параметр ε мал.

Заметим, что модель течения жидкости через среду с двойной пористостью впервые была получена в [6] в предположении квазистационарности обмена между блоками и трещинами. В более общем случае, когда процесс обмена нельзя рассматривать как установившийся, макроскопическое описание этого процесса приводит к моделям с памятью (см., например, [7]–[11]).

Работа первого автора поддержана Украинским научно-техническим центром (грант № 1498).

В рамках классической модели двойной пористости предполагается, что толщина трещин имеет тот же порядок, что и размеры включений. Эта задача рассматривалась многими авторами. В дополнение к упомянутым выше работам отметим также статьи [12]–[16], в которых рассмотрены близкие вопросы. В настоящей работе в отличие от процитированной литературы мы предполагаем, что толщина трещин много меньше размеров блоков.

Перейдем к математической постановке задачи. Пусть $\Omega = \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cup \mathcal{M}^{(\varepsilon)} \cup \partial\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, и пусть

$$\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Кроме того, в работе мы предполагаем, что множества $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ асимптотически распределены регулярно в области Ω , т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого шара $V(y, r) = \{x : |x - y| < r\}$ с центром в точке $y \in \Omega$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0(r)$,

$$C^{-1}r^n \geq \mu^\varepsilon \text{meas}(\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap V(y, r)) \geq Cr^n, \quad (1.2)$$

где

$$\mu^\varepsilon = \frac{\text{meas } \Omega}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \text{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon(x), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_{A^\varepsilon}}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.5)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.6)$$

где $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$, $\partial/\partial \nu_{A^\varepsilon}$ – производная по конормали к $\partial\Omega$, а функция $\Phi^\varepsilon(x)$ имеет вид

$$\Phi^\varepsilon(x) = \Phi_m \cdot \mathbb{I}_m^\varepsilon(x) + \Phi_f \cdot \mathbb{I}_f^\varepsilon(x). \quad (1.7)$$

В (1.7) Φ_m, Φ_f – строго положительные постоянные, а $\mathbb{I}_m^\varepsilon(x), \mathbb{I}_f^\varepsilon(x)$ – характеристические функции областей $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ и $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ соответственно. Предполагается, что тензор проводимости $A^\varepsilon(x) = \{a_{ij}^\varepsilon(x)\}$ симметричен, $a_{ij}^\varepsilon = a_{ji}^\varepsilon$, и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 0 < C_1 |\xi|^2 &\leq (A^\varepsilon(x) \xi, \xi) \leq C_2 |\xi|^2 & \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)}, \\ 0 < c_1^\varepsilon |\xi|^2 &\leq (A^\varepsilon(x) \xi, \xi) \leq c_2^\varepsilon |\xi|^2 & \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \in \mathcal{M}^{(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

причем

$$\mu^\varepsilon c_2^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В условии (1.8) порядок малости постоянных $c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon$, вообще говоря, различен. Так величина $c_2^\varepsilon/c_1^\varepsilon$ может быть ограниченной, как в рассматриваемом ниже модельном случае (см. § 7), так и неограниченной.

Известно (см., например, [17]), что для любого $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u^\varepsilon(x, t)$ задачи (1.4)–(1.6), принадлежащее пространству $C([0, T]; H^1(\Omega))$. Изучается асимптотическое поведение решений $u^\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будет показано, что усреднение задачи (1.4)–(1.6) приводит (как и в случае классической модели двойной пористости) к макроскопической модели с памятью.

Работа построена следующим образом. В § 2 вводится понятие сходимости в областях вырождающейся меры, т.е. удовлетворяющих (1.1). В § 3 сформулирован основной результат работы (см. теорему 3.1). Эта теорема доказывается в §§ 4–6. В § 7 рассматривается случай периодического распределения блоков, для которого коэффициенты усредненной модели получены в явном виде.

§ 2. Сходимость в областях вырождающейся меры

Пусть семейство областей $\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \subset \Omega, \varepsilon > 0$, удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). В этом параграфе, следуя [18] (см. также [19] или [20]), вводится понятие сходимости в областях $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Примем следующие обозначения: $\|\cdot\|_Q$ и $\|\cdot\|_{1,Q}$ – нормы в пространствах $L^2(Q)$ и $H^1(Q)$ соответственно; $\text{Lip}(M, Q)$ – класс непрерывных в Q функций u таких, что

$$|u(x)| \leq M, \quad |u(x) - u(y)| \leq M|x - y|$$

для любых $x, y \in Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Последовательность функций $\{u^\varepsilon \in L^2(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})\}$ $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к функции $u \in L^2(\Omega)$, если существует аппроксимирующая последовательность $\{u_M \in \text{Lip}(M, \Omega), M = 1, 2, \dots\}$, сходящаяся сильно в $L^2(\Omega)$ к функции u при $M \rightarrow \infty$, и

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \|u^\varepsilon - u_M\|_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}^2 = 0. \quad (2.1)$$

Заметим, что если выполнено условие (1.2), то предельная функция u в определении 2.1 не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{u_M, M = 1, 2, \dots\}$ (см. [18]).

Естественным образом определяется компактность относительно введенной $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Последовательность $\{u^\varepsilon \in L^2(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})\}$ является $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -компактным множеством, если из любой ее подпоследовательности можно извлечь $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходящуюся подпоследовательность.

В дальнейшем, мы главным образом будем иметь дело с последовательностями функций $u^\varepsilon \in H^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})$, удовлетворяющих условию

$$\|u^\varepsilon\|_{1, \mathcal{F}^{(\varepsilon)}}^2 \leq C \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее C – постоянная, не зависящая от ε . Кроме того, в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением областей $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющих так называемому условию “сильной связности” (SC -условию).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что семейство областей $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет SC -условию, если для любой последовательности $\{u^\varepsilon \in C^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})\}$, удовлетворяющей (2.2), и любого $M, M = 1, 2, \dots$, существует семейство подмножеств $G_M^{(\varepsilon)} \subset \mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ таких, что

$$u^\varepsilon \in \text{Lip}(M, \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_M^{(\varepsilon)})$$

и

$$\begin{aligned} \text{meas } G_M^{(\varepsilon)} &= o\left(\frac{1}{M^2}\right) \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}, \\ \|u^\varepsilon\|_{G_M^{(\varepsilon)}}^2 &= o(1) \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \end{aligned}$$

для достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon \leq \varepsilon_0(M)$, и $M \rightarrow \infty$.

Заметим, что SC -условие является обобщением понятия сильной связности, введенного в [21], на области вырождающейся меры. Сформулируем теперь достаточное условие $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -компактности в классе областей $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющих (1.2) и SC -условию. Справедлива следующая теорема (см. [18]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть семейство областей $\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \subset \Omega$ удовлетворяет *SC-условию*. Тогда любая последовательность $\{u^\varepsilon \in H^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})\}$, удовлетворяющая (2.2), является $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -компактным множеством.

§3. Формулировка основного результата

В данном параграфе вводятся локальные энергетические характеристики множеств $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ и $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$, связанные с начально-краевой задачей (1.4)–(1.6), и формулируется основной результат работы.

Прежде всего, будем предполагать, что

(C.1) существует непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\rho(x) > 0$ такая, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon h^{-n} \text{meas}(\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap K_h^x) = \rho(x)$$

для любого открытого куба K_h^x с центром в точке $x \in \Omega$ и ребрами длины $h > 0$;

(C.2) семейство множеств $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяет *SC-условию* (см. определение 2.3).

Пусть K_h^z – открытый куб с центром в точке $z \in \Omega$ и ребрами длины $h > 0$, $h \ll 1$. Введем локальную энергетическую характеристику множества $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ (системы трещин)

$$E^{\varepsilon, h}(z; l) = \inf_{v^\varepsilon} \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \left((A^\varepsilon(x) \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) + h^{-2-\gamma} |v^\varepsilon - (x - z, l)|^2 \right) dx, \quad (3.1)$$

где $\gamma > 0$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, а инфимум берется в классе $v^\varepsilon \in H^1(K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)})$. Легко видеть, что функционал $E^{\varepsilon, h}(z; l)$ квадратичен по $l \in \mathbb{R}^n$ и

$$E^{\varepsilon, h}(z; l) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon, h}(z) l_i l_j,$$

где

$$a_{ij}^{\varepsilon, h}(z) = \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \left((A^\varepsilon(x) \nabla v_{ih}^{z\varepsilon}, \nabla v_{jh}^{z\varepsilon}) + h^{-2-\gamma} ((v_{ih}^{z\varepsilon} - (x_i - z_i))(v_{jh}^{z\varepsilon} - (x_j - z_j))) \right) dx. \quad (3.2)$$

Здесь $v_{kh}^{z\varepsilon}$ – минимизант функционала в (3.1) при $l = e_k$, где e_k – единичный вектор оси x_k . Введем, далее, локальную характеристику

$$b_\lambda^{\varepsilon, h}(z) = \inf_{w^\varepsilon} \mu^\varepsilon \int_{K_h^z} \left((A^\varepsilon(x) \nabla w^\varepsilon, \nabla w^\varepsilon) + \lambda \Phi_m \mathbb{I}_m^\varepsilon |w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma} \mathbb{I}_f^\varepsilon |w^\varepsilon - 1|^2 \right) dx, \quad (3.3)$$

где $\mathbb{I}_m^\varepsilon = \mathbb{I}_m^\varepsilon(x)$, $\mathbb{I}_f^\varepsilon = \mathbb{I}_f^\varepsilon(x)$ – характеристические функции множеств $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ и $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, а инфимум берется в классе функций $w^\varepsilon \in H^1(K_h^z)$. В рамках рассматриваемой модели эта характеристика описывает локальные свойства системы, связанные с процессом обмена между трещинами ($\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$) и матрицей ($\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$).

Сформулируем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (С.1), (С.2), а также нижеследующие условия.

(С.3) Для некоторого $\gamma = \gamma_0$, $0 < \gamma_0 < 2$, и всех $x \in \Omega$ существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{-n} a_{ij}^{\varepsilon, h}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{-n} a_{ij}^{\varepsilon, h}(x) = a_{ij}^*(x),$$

где $a_{ij}^* \in C(\overline{\Omega})$. Кроме того, тензор $A^*(x) = \{a_{ij}^*(x)\}$ (усредненный тензор проводимости) положительно определен с постоянной коэрцитивности $a_0 > 0$, не зависящей от $x \in \Omega$.

(С.4) Для некоторого $\gamma = \gamma_1$, $0 < \gamma_1 < 2$, и любого $\lambda > 0$ существует функция $b(x, \lambda)$, $b(\cdot, \lambda) \in C(\overline{\Omega})$, такая, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{-n} b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{-n} b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(x) = b(x, \lambda)$$

и $b(x, \lambda) = O(\lambda^{\delta})$, $\delta < 1$, при $\lambda \rightarrow +\infty$.

(С.5) Функция $f^{\varepsilon}(x)$ равна нулю на $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ и $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится (в смысле определения 2.1) к некоторой функции $f \in L^2(\Omega)$.

Тогда для любого $t \in (0, T)$ решение $u^{\varepsilon}(x, t)$ задачи (1.4)–(1.6) $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к решению $u(x, t)$ следующей начально-краевой задачи:

$$\rho(x) \Phi_f \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A^*(x) \nabla u) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t B(x, t - \tau) u(x, \tau) d\tau = \rho(x) f(x), \quad x \in \Omega_T, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A^*}}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.6)$$

где

$$B(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} e^{\lambda t} \frac{\tilde{b}(x, \lambda)}{\lambda} d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad (3.7)$$

а $\tilde{b}(x, \lambda)$ – аналитическая по $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$ функция, совпадающая с $b(x, \lambda)$ для вещественных $\lambda > 0$ и $x \in \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В § 6 будет показано, что функция $b(x, \lambda)$, определяемая условием (С.4) для $\lambda > 0$, действительно имеет аналитическое продолжение $\tilde{b}(x, \lambda)$ по λ в комплексную плоскость с разрезом по отрицательной полуоси, $\mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$, и $\tilde{b}(x, \lambda) = O(|\lambda|^{\delta})$, $\delta < 1$, при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и $|\arg \lambda - \pi| \geq \theta_0 > 0$. Это означает, что предел в (3.7) существует, не зависит от $\sigma > 0$ и определяет локально суммируемую по t функцию на $[0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В теореме 3.1 предполагается, что условия (С.3), (С.4) выполнены для некоторых $\gamma_0, \gamma_1 \in (0, 2)$. При этом условии доказано, в частности, неравенство (4.28). Однако, используя идеи работы [21], можно показать, что если (С.3), (С.4) выполняются для некоторых $\gamma_0, \gamma_1 \in (0, 2)$, то они выполнены при любых $\gamma > 0$.

Теорема 3.1 доказывается сведением задачи (1.4)–(1.6) с помощью преобразования Лапласа к стационарной краевой задаче для уравнения

$$-\operatorname{div}(A^{\varepsilon}(x) \nabla u^{\varepsilon}) + \lambda \Phi^{\varepsilon}(x) u^{\varepsilon} = \lambda^{-1} f^{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Стационарная версия теоремы 3.1 при $\lambda > 0$ (теорема 5.1) доказана в § 5 вариационными методами с использованием предварительных результатов, установленных в § 4. Доказательство теоремы 3.1 завершается в § 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для простоты теорема 5.1 будет доказана в предположении, что коэффициенты a_{ij}^ε ($A^\varepsilon = \{a_{ij}^\varepsilon\}$) и правая часть f^ε в уравнении (1.4) являются достаточно гладкими функциями на множестве $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, например, $a_{ij}^\varepsilon, f^\varepsilon \in C^2(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})$. В этом случае решение u^ε стационарной задачи (5.1) (см. §5) и минимизант v^ε функционала в (3.1) принадлежат классам $C^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})$ и $C^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap K_h^\varepsilon)$ соответственно. Этот факт будет использован в доказательстве леммы 4.2 и в §5, там где применяется лемма 4.4. В общем случае в соответствующих местах следует перейти к гладким аппроксимациям этих функций.

§ 4. Предварительные результаты

В этом параграфе доказываются вспомогательные результаты, которые будут затем использованы при доказательстве теоремы 3.1 и ее стационарной версии (теоремы 5.1, см. §5).

Покроем область Ω кубами $K_h^\alpha = \{x : |x_j - x_j^\alpha| < h/2\}$ с ребрами длины $h > 0$, ориентированными вдоль осей координат и с центрами в точках x^α . Центры x^α образуют периодическую решетку с периодом $h' = h - h^{1+\gamma/2}$. Свяжем с этим покрытием разбиение единицы $\{\varphi_h^\alpha(x)\}$, которое удовлетворяет следующим условиям: $0 \leq \varphi_h^\alpha(x) \leq 1$; $\varphi_h^\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_h^\alpha$; $\varphi_h^\alpha(x) = 1$ при $x \in K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \neq \beta} K_h^\beta$; $\sum_\alpha \varphi_h^\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$ и $|\nabla \varphi_h^\alpha| \leq Ch^{-1-\gamma/2}$.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия (C.1), (C.4) теоремы 3.1. Тогда для любого $h > 0$ существуют множества $G_h^{(\varepsilon)} \subset \mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ и функции $Y_h^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такие, что

- (A) $0 \leq Y_h^\varepsilon(x) \leq 1, x \in \Omega$;
- (B) $Y_h^\varepsilon(x) = 1, x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_h^{(\varepsilon)}$;
- (C) $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \text{meas } G_h^{(\varepsilon)} = O(h^\gamma)$ при $h \rightarrow 0$;
- (D) для любой функции $\eta \in C(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\Omega} \eta^2 \left((A^\varepsilon \nabla Y_h^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon) + \lambda \Phi^\varepsilon(x) |Y_h^\varepsilon|^2 \right) dx \\ & \leq \int_{\Omega} (b(x, \lambda) + \lambda \rho(x) \Phi_f) \eta^2 dx + o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $w_h^{\varepsilon\alpha}$ минимизирует функционал в (3.3) при $z = x^\alpha$. Из условия (C.4) следует, что при $h \rightarrow 0$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha} \left((A^\varepsilon(x) \nabla w_h^{\varepsilon\alpha}, \nabla w_h^{\varepsilon\alpha}) + \lambda \mathbb{I}_m^\varepsilon \Phi_m |w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 \right) dx = o(h^n), \quad (4.1)$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha} \mathbb{I}_f^\varepsilon |w_h^{\varepsilon\alpha} - 1|^2 dx = o(h^{n+2+\gamma}). \quad (4.2)$$

В дополнение к этому, пользуясь условиями (C.1) и (C.4), получаем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha} \left((A^\varepsilon(x) \nabla w_h^{\varepsilon\alpha}, \nabla w_h^{\varepsilon\alpha}) + \lambda \Phi^\varepsilon(x) |w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 \right) dx \\ & \leq h^n (b(x^\alpha, \lambda) + \lambda \rho(x^\alpha)) + o(h^n) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Кроме того, так как $w_h^{\varepsilon\alpha}$ минимизирует функционал в (3.3), то $0 \leq w_h^{\varepsilon\alpha}(x) \leq 1$ и

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mu^\varepsilon \text{ meas } \widehat{B}_h^{\varepsilon\alpha} \leq C h^{n+\gamma}, \quad (4.4)$$

где $\widehat{B}_h^{\varepsilon\alpha} = \{x \in K_h^\alpha \cap \mathcal{F}^\varepsilon : w_h^{\varepsilon\alpha}(x) \leq 1-h\}$.

Рассмотрим теперь функции

$$\widehat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) = \frac{1}{1-h} \times \begin{cases} 1-h, & w_h^{\varepsilon\alpha}(x) \geq 1-h; \\ w_h^{\varepsilon\alpha}(x) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Легко видеть, что $|\widehat{w}_h^{\varepsilon\alpha} - 1| \leq |w_h^{\varepsilon\alpha} - 1|$ и функции $\widehat{w}_h^{\varepsilon\alpha}$ удовлетворяют оценкам (4.1)–(4.3). Положим

$$G_h^{(\varepsilon)} = \bigcup_{\alpha} \widehat{B}_h^{\varepsilon\alpha}, \quad Y_h^\varepsilon(x) = \sum_{\alpha} \widehat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) \varphi_h^\alpha(x).$$

Тогда, используя свойства функций $\widehat{w}_h^{\varepsilon\alpha}$ и разбиения единицы $\{\varphi_h^\alpha\}$ и принимая во внимание оценку (4.4), нетрудно показать, что функции $Y_h^\varepsilon(x)$ и множества $G_h^{(\varepsilon)}$ удовлетворяют условиям (A)–(D) леммы 4.1. Лемма 4.1 доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены условия (C.2), (C.3) теоремы 3.1, и пусть η – гладкая в $\overline{\Omega}$ функция. Тогда для любого $h > 0$ и $M \in \{1, 2, \dots\}$ существуют функции $W_{Mh}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ такие, что

- (A) $|W_{Mh}^\varepsilon(x) - \eta(x)| \leq C M h, x \in \Omega;$
- (B) $|W_{Mh}^\varepsilon(x) - W_{Mh}^\varepsilon(y)| \leq C M |x - y|, x, y \in \Omega;$
- (C) $\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} (A^\varepsilon(x) \nabla W_{Mh}^\varepsilon, \nabla W_{Mh}^\varepsilon) dx \leq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla \eta, \nabla \eta) dx.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_{kh}^{\alpha\varepsilon}$ – функция, минимизирующая функционал в (3.1) при $l = e_k$, где e_k – орт оси x_k . Будем предполагать, что $v_{kh}^{\alpha\varepsilon}(x) = x_k - x_k^\alpha$, если $K_h^\alpha \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset$. Поскольку $v_{kh}^{\alpha\varepsilon}$ минимизирует функционал в (3.1),

$$\sup_{x \in K_h^\alpha \cap \mathcal{F}(\varepsilon)} |v_{kh}^{\alpha\varepsilon}(x)| \leq \frac{h}{2}. \quad (4.6)$$

Кроме того, в силу условия (C.3) для достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon \leq \widehat{\varepsilon}(h)$, имеем

$$\mu^\varepsilon \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \mathcal{F}(\varepsilon)} |\nabla v_{kh}^{\alpha\varepsilon}|^2 dx = o(h^n), \quad (4.7)$$

$$\mu^\varepsilon \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \mathcal{F}(\varepsilon)} |v_{kh}^{\alpha\varepsilon} - (x_k - x_k^\alpha)|^2 dx = o(h^{n+2+\gamma}), \quad (4.8)$$

$$\mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha \cap \mathcal{F}(\varepsilon)} (A^\varepsilon(x) \nabla v_{ih}^{\alpha\varepsilon}, \nabla v_{jh}^{\alpha\varepsilon}) dx \leq h^n a_{ij}(x^\alpha) + o(h^n) \quad (4.9)$$

при $h \rightarrow 0$. Оценки (4.7)–(4.9) равномерны по x^α на любом компактном подмножестве Ω .

Рассмотрим функции

$$w_h^\varepsilon(x) = \sum_{\alpha} \left(\eta(x^\alpha) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k}(x^\alpha) v_{kh}^{\alpha\varepsilon}(x) \right) \varphi_h^\alpha(x). \quad (4.10)$$

Заметим, что правую часть (4.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} w_h^\varepsilon(x) &= \eta(x) + \sum_{\alpha} \left(\eta(x^\alpha) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k}(x^\alpha)(x - x_k) - \eta(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_k}(x^\alpha)(v_{kh}^{\alpha\varepsilon}(x) - (x - x_k)) \right) \varphi_h^\alpha(x). \end{aligned}$$

Тогда, пользуясь (4.7)–(4.9) и свойствами функций φ_h^α , получаем

$$\mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} (A^\varepsilon(x) \nabla w_h^\varepsilon, \nabla w_h^\varepsilon) dx \leq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla \eta, \nabla \eta) dx + o(1) \quad (4.11)$$

при $\varepsilon \leq \widehat{\varepsilon}(h)$ и $h \rightarrow 0$. Кроме того, согласно (4.6) и (4.10) имеем

$$\sup_{x \in \mathcal{F}(\varepsilon)} |w_h^\varepsilon(x) - \eta(x)| \leq Ch. \quad (4.12)$$

Поскольку области $\mathcal{F}(\varepsilon)$ удовлетворяют SC -условию (см. определение 2.3), для любого $M = 1, 2, \dots$ существуют множества $Q_{Mh}^{(\varepsilon)}$ и функции $W_{Mh}^\varepsilon \in \text{Lip}(M, \Omega)$ такие, что $W_{Mh}^\varepsilon = w_h^\varepsilon$ в $\mathcal{F}(\varepsilon) \setminus Q_{Mh}^{(\varepsilon)}$ и

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} M^2 \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \text{meas } Q_{Mh}^{(\varepsilon)} = 0. \quad (4.13)$$

Предположим, что

$$(\mathcal{F}(\varepsilon) \setminus Q_{Mh}^{(\varepsilon)}) \cap K_h^\alpha \neq \emptyset \quad (4.14)$$

выполнено для любого α . Тогда утверждения леммы следуют из (4.11), (4.12) и свойств функций W_{Mh}^ε .

Предположим теперь, что условие (4.14) не выполнено для α из некоторого множества Υ . Пусть $\{\phi_h^\alpha\}$ – разбиение единицы такое, что $0 \leq \phi_h^\alpha \leq 1$, $\phi_h^\alpha(x) = 0$ при $x \notin \{x : |x_j - x_j^\alpha| \geq h\}$, $\sum_{\alpha} \phi_h^\alpha = 1$, $|\nabla \phi_h^\alpha| \leq C h^{-1}$. Переопределим функции W_{Mh}^ε и множества $Q_{Mh}^{(\varepsilon)}$, введенные выше, следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{Mh}^\varepsilon(x) &:= W_{Mh}^\varepsilon(x) + (\eta(x) - W_{Mh}^\varepsilon(x)) \sum_{\alpha \in \Upsilon} \phi_h^\alpha(x), \\ Q_{Mh}^{(\varepsilon)} &:= Q_{Mh}^{(\varepsilon)} \cup \left(\mathcal{F}(\varepsilon) \cap \bigcup_{\alpha \in \Upsilon \cup \Upsilon'} K_h^\alpha \right), \end{aligned}$$

где Υ' – множество α' таких, что $K_h^{\alpha'}$ является ближайшим соседним с кубом K_h^α для некоторого $\alpha \in \Upsilon$. Заметим, что $|\nabla W_{Mh}^\varepsilon| \leq CM$ для достаточно малых ε и h , а множества $Q_{Mh}^{(\varepsilon)}$ удовлетворяют (4.13). Таким образом, утверждения леммы выполнены и в этом случае (по тем же соображениям, что и выше). Лемма 4.2 доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены условия (С.1) и (С.4) теоремы 3.1. Тогда для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ существует последовательность $\{w^\varepsilon \in C^1(\Omega)\}$, которая $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходится к w , причем

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I^{(\varepsilon)}[w^\varepsilon] \equiv \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\Omega} \left((A^\varepsilon(x) \nabla w^\varepsilon, \nabla w^\varepsilon) + \lambda \Phi^\varepsilon(x) |w^\varepsilon|^2 \right) dx \leq \nu \|w\|_{1,\Omega}^2, \quad (4.15)$$

где $\nu > 0$ не зависит от w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $w \in C^\infty(\Omega)$. Тогда последовательность $\{w^\varepsilon\}$ строится следующим образом. Рассмотрим функцию

$$w_h^\varepsilon(x) = w(x) Y_h^\varepsilon(x),$$

где функция $Y_h^\varepsilon(x)$ определена в лемме 4.1. Согласно лемме 4.1 существуют множества $G_h^{(\varepsilon)} (\subset \mathcal{F}^{(\varepsilon)})$ такие, что $\text{meas } G_h^{(\varepsilon)} \leq Ch^\gamma \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(h)$), $w_h^\varepsilon(x) = w(x)$ при $x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_h^{(\varepsilon)}$ и

$$\begin{aligned} \int_{G_h^{(\varepsilon)}} |w_h^\varepsilon - w|^2 dx &\leq \int_{G_h^{(\varepsilon)}} |w|^2 dx, \\ I^{(\varepsilon)}[w_h^\varepsilon] &\leq \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_h^{(\varepsilon)}} |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} (b(x, \lambda) + \lambda \rho(x)) |w|^2 dx + \xi(h), \quad \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}(h), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $\xi(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Причем в силу условий (С.1) и (1.2)

$$\mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla w|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho(x) |\nabla w|^2 dx, \quad \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho(x) |w|^2 dx, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.17)$$

Ясно, что найдется последовательность $\{\hat{\varepsilon}_j\}$, $\hat{\varepsilon}_j \downarrow 0$, такая, что $\hat{\varepsilon}_j \leq \tilde{\varepsilon}(1/j)$. Положим

$$w^\varepsilon = w_h^\varepsilon|_{h=1/j} \quad \text{при} \quad \hat{\varepsilon}_j \geq \varepsilon > \hat{\varepsilon}_{j+1}.$$

Из (4.16), (4.17) следует, что последовательность $\{w^\varepsilon\}$ удовлетворяет (4.15), где $\nu = C \sup_{x \in \Omega} (b(x, \lambda) + \rho(x))$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w^\varepsilon - w|^2 dx = 0.$$

Очевидно, что функции w^ε могут быть аппроксимированы гладкими функциями так, чтобы (4.15) и последнее соотношение оставались справедливыми.

Пусть теперь w — произвольная функция из $H^1(\Omega)$. Аппроксимируем w гладкими функциями $w_M \in \text{Lip}(M, \Omega)$, $M = 1, 2, \dots$, таким образом, что

$$\|w - w_M\|_{1, \Omega} \leq \frac{1}{k(M)}, \quad k(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Согласно предыдущему для любого фиксированного $M \in \{1, 2, \dots\}$ найдется последовательность $\{w_M^\varepsilon\}$, удовлетворяющая следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w_M^\varepsilon - w_M|^2 dx &\leq \frac{1}{M}, \\ I^{(\varepsilon)}[w_M^\varepsilon] &\leq \nu \left(1 + \frac{1}{k(M)}\right) \|w\|_{1, \Omega}^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

при $\varepsilon \leq \delta(M)$, где $\delta(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Причем вследствие (1.2) $\delta(M)$ может быть выбрано таким образом, чтобы при $\varepsilon \leq \delta(M)$

$$\frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w_M - w_S|^2 dx \leq C \|w_M - w_S\|_{\Omega}^2, \quad \forall S = 1, \dots, M-1, \quad (4.20)$$

где постоянная C не зависит от M . Выберем последовательность $\{\widehat{\delta}_j\}$, $\widehat{\delta}_j \downarrow 0$, такую, что $\widehat{\delta}_j \leq \delta(j)$, и определим

$$w^\varepsilon = w_M^\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (\widehat{\delta}_{M+1}, \widehat{\delta}_M].$$

Легко видеть, что $\{w^\varepsilon\}$ удовлетворяет (4.15). Кроме того,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w^\varepsilon - w_{M_0}|^2 dx \\ & \leq \frac{2}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w_M^\varepsilon - w_M|^2 dx + 2C \|w_M - w_{M_0}\|_\Omega^2 \end{aligned}$$

для любых M_0 и любого $\varepsilon \in (\widehat{\delta}_{M+1}, \widehat{\delta}_M]$. Здесь C — постоянная, фигурирующая в (4.20). Следовательно, согласно (4.18)–(4.20) последовательность $\{w^\varepsilon\}$ $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к w . Лемма 4.3 доказана.

ЛЕММА 4.4. Пусть выполнены условия (C.1)–(C.3) теоремы 3.1, и пусть последовательность $\{v^\varepsilon \in C^1(\mathcal{F}^{(\varepsilon)})\}$ удовлетворяет (2.2). Тогда существует семейство непрерывных в Ω функций $\{v_M^\varepsilon\}$, $M = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (A) $\lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \text{meas}\{x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} : v^\varepsilon(x) \neq v_M^\varepsilon(x)\} = 0$;
- (B) существует постоянная $C > 0$, которая не зависит от ε и M , такая, что $v_M^\varepsilon \in \text{Lip}(CM, \Omega)$;
- (C) для любого M существует подпоследовательность $\{v_M^{\varepsilon_j}\}$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, равномерно сходящаяся в Ω к некоторой функции $v_M \in \text{Lip}(CM, \Omega)$;
- (D) для любой последовательности множеств $G_M^{(\varepsilon)} \subset \mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ таких, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \text{meas } G_M^{(\varepsilon)} = 0, \quad (4.21)$$

имеем

$$\begin{aligned} & \underline{\lim}_{\varepsilon = \varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_M^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) dx \\ & \geq \int_\Omega (A^*(x) \nabla v_M, \nabla v_M) dx - \xi(M), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\xi(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{G_M^{(\varepsilon)}}^2 = 0 \quad (4.23)$$

для любой последовательности множеств $G_M^{(\varepsilon)} \subset \mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющих (4.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (С.2) следует, что функции v^ε принадлежат классу $\text{Lip}(M, \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus Q_M^{(\varepsilon)})$ на некотором множестве $\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus Q_M^{(\varepsilon)}$, причем

$$\mu^\varepsilon \text{meas } Q_M^{(\varepsilon)} = o\left(\frac{1}{M^2}\right), \quad \mu^\varepsilon \|v^\varepsilon\|_{Q_M^{(\varepsilon)}}^2 = o(1)$$

при $\varepsilon \leq \varepsilon_0(M)$, $M \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что соотношение (4.23) выполнено. Кроме того, согласно теореме Уитни (см. [22]) функции v^ε имеют продолжения $v_M^\varepsilon \in \text{Lip}(CM, \Omega)$ такие, что $v^\varepsilon(x) = v_M^\varepsilon(x)$ при $x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus Q_M^{(\varepsilon)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от ε и M . Это означает, что множество $\{v_M^\varepsilon\}$ компактно в $C(\overline{\Omega})$ для любого фиксированного M ; следовательно, найдется подпоследовательность $\{v_M^{\varepsilon_j}\}$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, сходящаяся равномерно в Ω к некоторой функции $v_M \in \text{Lip}(CM, \Omega)$. Таким образом, семейство функций $\{v_M^\varepsilon\}$ удовлетворяет условиям (А)–(С).

Остается доказать утверждение (D). Пусть $v_{M\delta}$ – гладкая в Ω функция такая, что

$$\|v_{M\delta} - v_M\|_{1,\Omega} < \delta, \quad \delta > 0. \quad (4.24)$$

Построим последовательность $\{v_{M\delta}^\varepsilon\}$, удовлетворяющую соотношениям

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \|v_{M\delta}^\varepsilon\|_{1,\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}^2 \leq C\delta^2, \quad (4.25)$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \|v_{M\delta}^\varepsilon - (v_{M\delta} - v_M)\|_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}^2 = 0. \quad (4.26)$$

Для этого введем гладкие функции w_k такие, что

$$\int_{\Omega} |\nabla w_k|^2 dx \leq \delta^2 + \frac{1}{k}, \quad \int_{\Omega} |w_k - (v_{M\delta} - v_M)|^2 dx \leq \frac{1}{k}$$

для любого $k = 1, 2, \dots$.

Тогда, поскольку w_k , $|\nabla w_k|$, $v_{M\delta}$ и v_M непрерывны в Ω , из (1.2) и условия (С.1) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla w_k|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla w_k|^2 \rho(x) dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w_k - (v_{M\delta} - v_M)|^2 dx &= \int_{\Omega} |w_k - (v_{M\delta} - v_M)|^2 \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что существует последовательность $\{\widehat{\varepsilon}_k\}$, $\widehat{\varepsilon}_k \downarrow 0$, такая, что

$$\begin{aligned} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla w_k|^2 dx &\leq C \left(\delta^2 + \frac{1}{k} \right), \\ \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |w_k - (v_{M\delta} - v_M)|^2 dx &\leq C \frac{1}{k} \end{aligned}$$

при $\varepsilon < \widehat{\varepsilon}_k$. Определим $v_{M\delta}^\varepsilon = w_k$ при $\widehat{\varepsilon}_{k+1} \leq \varepsilon < \widehat{\varepsilon}_k$, тогда последовательность $\{v_{M\delta}^\varepsilon\}$ удовлетворяет (4.25), (4.26). Согласно (4.25) имеем

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v_M^\varepsilon, \nabla v_M^\varepsilon) dx \\ \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla (v_M^\varepsilon + v_{M\delta}^\varepsilon), \nabla (v_M^\varepsilon + v_{M\delta}^\varepsilon)) dx + \xi_1(\delta), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $\xi_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Покроем область Ω непересекающимися во внутренних точках кубами $\tilde{K}_h^\alpha = \{x : |x_l - \tilde{x}_l^\alpha| \leq h/2\}$. Пусть $\tilde{K}_h^\alpha \cap \partial\Omega = \emptyset$ и $\psi_{M\delta}^\varepsilon(x) = v_M^\varepsilon(x) + v_{M\delta}^\varepsilon(x) - v_{M\delta}^\varepsilon(\tilde{x}^\alpha)$, тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap \tilde{K}_h^\alpha} (A^\varepsilon \nabla \psi_{M\delta}^\varepsilon, \nabla \psi_{M\delta}^\varepsilon) dx \\ &= \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap \tilde{K}_h^\alpha} \left((A^\varepsilon \nabla \psi_{M\delta}^\varepsilon, \nabla \psi_{M\delta}^\varepsilon) \right. \\ & \quad \left. + h^{-2-\gamma} |\psi_{M\delta}^\varepsilon - (\nabla v_{M\delta}(\tilde{x}^\alpha), x - \tilde{x}^\alpha)|^2 \right) dx - \xi_2^\alpha(\varepsilon, h, M), \\ & \quad \overline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \xi_2^\alpha(\varepsilon, h, M) = O(h^{n+2-\gamma}), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (4.26) и тем фактом, что функции $v_M^{\varepsilon_j}$ равномерно в Ω сходятся к v_M при $\varepsilon_j \rightarrow 0$. Следовательно, из условия (С.3) теоремы 3.1 вытекает, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla (v_M^\varepsilon + v_{M\delta}^\varepsilon), \nabla (v_M^\varepsilon + v_{M\delta}^\varepsilon)) dx \\ & \geq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla v_{M\delta}, \nabla v_{M\delta}) dx. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Переходя теперь к пределу в (4.28) при $\delta \rightarrow 0$ и используя (4.24), (4.27), получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v_M^\varepsilon, \nabla v_M^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla v_M, \nabla v_M) dx. \quad (4.29)$$

Наконец, легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_M^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) dx \\ & \geq \lim_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v_M^\varepsilon, \nabla v_M^\varepsilon) dx - \xi(M), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$\xi(M) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{G_M^{(\varepsilon)} \cup Q_M^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla v_M^\varepsilon, \nabla v_M^\varepsilon) dx = o(1), \quad M \rightarrow \infty.$$

Утверждение (D) леммы 4.4 следует из (4.29) и (4.30). Лемма 4.4 доказана.

§ 5. Стационарная версия теоремы 3.1

В этом параграфе мы установим стационарную версию теоремы 3.1. Этот результат является базовым для доказательства основной теоремы 3.1.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + \lambda \Phi^\varepsilon(x) u^\varepsilon &= \lambda^{-1} f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_A} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$\lambda > 0$. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ задачи (5.1). Изучим асимптотическое поведение функций u^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда последовательность решений $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (5.1) $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходится к решению $u = u(x, \lambda)$ следующей краевой задачи:*

$$-\operatorname{div}(A^*(x)\nabla u) + \Phi_f \lambda \rho(x)u + b(x, \lambda)u = \rho(x)\lambda^{-1}f(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что решение $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (5.1) минимизирует функционал

$$J^{(\varepsilon)}[u] = \mu^\varepsilon \int_{\Omega} \left((A^\varepsilon(x)\nabla u, \nabla u) + \lambda \Phi^\varepsilon |u|^2 - 2\lambda^{-1}f^\varepsilon u \right) dx \quad (5.4)$$

в классе функций $u \in H^1(\Omega)$. Поскольку $J^{(\varepsilon)}[u^\varepsilon] \leq J^{(\varepsilon)}[0] = 0$, то в силу неравенства Коши и условия (С.5) имеем

$$\mu^\varepsilon \int_{\Omega} \left((A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) + \lambda \Phi^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 \right) dx \leq \frac{C}{\lambda} \mu^\varepsilon \|f^\varepsilon\|_{\mathcal{F}(\varepsilon)}^2 \leq C. \quad (5.5)$$

Из (5.5) и (1.8) следует, что

$$\mu^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{1, \mathcal{F}(\varepsilon)} \leq C. \quad (5.6)$$

Это означает, что $\{u^\varepsilon\} - D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -компактное множество, и значит можно извлечь подпоследовательность (за которой мы сохраним обозначение $\{u^\varepsilon\}$), $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходящуюся к некоторой функции $u \in L^2(\Omega)$. Покажем, что $u = u(x, \lambda)$ – решение задачи (5.2), (5.3). Доказательство этого факта будет проведено в два шага.

Шаг 1. Пусть η – произвольная гладкая в Ω функция, и пусть $Y_h^\varepsilon(x)$, $W_{Mh}^\varepsilon(x)$, $G_h^{(\varepsilon)}$ – функции и множества, определенные в леммах 4.1 и 4.2. Покажем, что

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[\vartheta_{Mh}^\varepsilon] \leq J_b[\eta], \quad (5.7)$$

где $\vartheta_{Mh}^\varepsilon(x) = Y_h^\varepsilon(x)W_{Mh}^\varepsilon(x)$ и

$$J_b[\eta] = \int_{\Omega} \left((A^*(x)\nabla \eta, \nabla \eta) + (\Phi_f \lambda \rho(x) + b(x, \lambda))\eta^2 - 2\lambda^{-1}\rho(x)f(x)\eta \right) dx. \quad (5.8)$$

Очевидно, имеем $\vartheta_{Mh}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ и

$$\begin{aligned} J^{(\varepsilon)}[\vartheta_{Mh}^\varepsilon] &= \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x)\nabla \vartheta_{Mh}^\varepsilon, \nabla \vartheta_{Mh}^\varepsilon) dx \\ &+ \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (\lambda \Phi^\varepsilon |\vartheta_{Mh}^\varepsilon|^2 - 2\lambda^{-1}f^\varepsilon \vartheta_{Mh}^\varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Оценим правую часть (5.9). Из условий (С.1), (С.5) теоремы, утверждений (В), (С) леммы 4.1 и (А) леммы 4.2 следует, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\Omega} f^\varepsilon \vartheta_{Mh}^\varepsilon dx = \int_{\Omega} f \eta \rho(x) dx. \quad (5.10)$$

Из утверждений (D) леммы 4.1 и (A) леммы 4.2 несложно также получить

$$\mu^\varepsilon \int_{\Omega} \lambda \Phi^\varepsilon(x) |\vartheta_{Mh}^\varepsilon|^2 dx \leq \mu^\varepsilon \int_{\Omega} \lambda \Phi^\varepsilon(x) \eta^2(x) |Y_h^\varepsilon|^2 dx + CMh(1 + Mh) \quad (5.11)$$

при $h \rightarrow 0$.

Перепишем первый член в правой части (5.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla \vartheta_{Mh}^\varepsilon, \nabla \vartheta_{Mh}^\varepsilon) dx \\ &= \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla W_{Mh}^\varepsilon, \nabla W_{Mh}^\varepsilon) |Y_h^\varepsilon|^2 dx \\ &+ \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla Y_h^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon) |W_{Mh}^\varepsilon|^2 dx \\ &+ 2\mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla W_{Mh}^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon) W_{Mh}^\varepsilon Y_h^\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части (5.12). Из (1.8), (1.9), утверждений (A) леммы 4.1 и (C) леммы 4.2 следует, что

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla W_{Mh}^\varepsilon, \nabla W_{Mh}^\varepsilon) |Y_h^\varepsilon|^2 dx \leq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla \eta, \nabla \eta) dx. \quad (5.13)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (5.12). Из утверждений (D) леммы 4.1 и (A) леммы 4.2 следует неравенство

$$\begin{aligned} & \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla Y_h^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon) |W_{Mh}^\varepsilon|^2 dx \\ & \leq \mu^\varepsilon \int_{\Omega} (A^\varepsilon(x) \nabla Y_h^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon) \eta^2 dx + CMh(1 + Mh). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Рассмотрим, наконец, третье слагаемое в правой части (5.12). Из (1.8), (1.9), утверждений (A)–(D) леммы 4.1 и (A), (B) леммы 4.2 имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\Omega} |(A^\varepsilon(x) \nabla W_{Mh}^\varepsilon, \nabla Y_h^\varepsilon)| |W_{Mh}^\varepsilon| |Y_h^\varepsilon| dx = 0. \quad (5.15)$$

Тогда из (5.10)–(5.15) и утверждения (D) леммы 4.1 получаем (5.7). Поскольку u^ε минимизирует функционал (5.4), из (5.7) следует, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[u^\varepsilon] \leq J_b[\eta] \quad (5.16)$$

для любой гладкой функции η . Очевидно, что (5.16) выполняется и для любой функции $\eta \in H^1(\Omega)$.

Шаг 2. Пусть $\{u^\varepsilon\}$ – некоторая последовательность решений задачи (5.1), $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходящаяся к функции u . Покажем, что

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[u^\varepsilon] \geq J_b[u]. \quad (5.17)$$

Согласно лемме 4.4 существует семейство функций $\{u_M^\varepsilon \in \text{Lip}(CM, \Omega), M = 1, 2, \dots\}$ таких, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \|u^\varepsilon - u_M^\varepsilon\|_{\mathcal{F}(\varepsilon)} = 0. \quad (5.18)$$

Кроме того, для любого M найдется подпоследовательность $\{u_M^{\varepsilon_j}\}$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, сходящаяся равномерно в Ω к некоторой функции u_M , и

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} (A^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) dx \geq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla u_M, \nabla u_M) dx - \xi(M), \quad (5.19)$$

где $\xi(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Поскольку последовательность $\{u^\varepsilon\}$ $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходится к u , а $\{u_M^{\varepsilon_j}\}$ сходится равномерно к u_M , из (5.18) следует, что функции u_M сходятся в $L^2(\Omega)$ к u при $M \rightarrow \infty$. Вместе с этим вследствие (5.19) последовательность $\{u_M, M = 1, 2, \dots\}$ ограничена в $H^1(\Omega)$ (тензор $A^*(x)$ положительно определен). Таким образом, $u \in H^1(\Omega)$.

Аппроксимируем u гладкими в Ω функциями u_δ , $\delta > 0$,

$$\|u_\delta - u\|_{1,\Omega}^2 \leq \delta, \quad (5.20)$$

и положим $w_\delta(x) = u_\delta(x) - u(x)$. В силу леммы 4.3 существует последовательность $\{w_\delta^\varepsilon\}$, $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходящаяся к w_δ и такая, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I^{(\varepsilon)}[w_\delta^\varepsilon] \leq C\delta, \quad (5.21)$$

где C — постоянная, которая не зависит от u_δ , а функционал $I^{(\varepsilon)}$ определен в (4.15). Тогда последовательность $\{u_\delta^\varepsilon = w_\delta^\varepsilon + u^\varepsilon\}$ $D_{\mathcal{F}(\varepsilon)}$ -сходится к u_δ и ввиду (5.21)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[u_\delta^\varepsilon] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[u^\varepsilon] + C\delta, \quad (5.22)$$

где постоянная C не зависит от u_δ (переходя в случае необходимости к подпоследовательности, мы можем предполагать, что предел в левой части (5.22) существует). Поскольку $u_\delta(x)$ — гладкая в Ω функция, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} |u_\delta^\varepsilon - u_\delta|^2 dx = 0. \quad (5.23)$$

Из неравенства (5.22) и леммы 4.4 следует, что существуют функции $u_{\delta M}^\varepsilon \in \text{Lip}(CM, \Omega)$, $M = 1, 2, \dots$, и множества $G_M^{(\varepsilon)}$ такие, что $u_{\delta M}^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x)$ для $x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus G_M^{(\varepsilon)}$ и $\mu^\varepsilon \text{meas } G_M^{(\varepsilon)} = o(1/M^2)$, $\mu^\varepsilon \|u_\delta^\varepsilon\|_{G_M^{(\varepsilon)}}^2 = o(1)$ для достаточно малых ε и $M \rightarrow \infty$. Кроме того, для каждого фиксированного $M \in \{1, 2, \dots\}$ можно выделить подпоследовательность $u_{\delta M}^{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$, равномерно в Ω сходящуюся к некоторой функции $u_{\delta M} \in \text{Lip}(CM, \Omega)$. В то же время, функции $u_{\delta M}$ сходятся в пространстве $L^2(\Omega)$ к u_δ при $M \rightarrow \infty$, поскольку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_{\delta M} - u_\delta|^2 dx \\ & \leq C \overline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_j \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} (|u_{\delta M} - u_{\delta M}^\varepsilon|^2 + |u_{\delta M}^\varepsilon - u_\delta^\varepsilon|^2 + |u_\delta^\varepsilon - u_\delta|^2) dx \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Из (5.23) следует, что существует последовательность $\{r^\varepsilon > 0\}$, $r^\varepsilon \rightarrow 0$, и множества $B_M^{(\varepsilon)}$ такие, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \text{meas } B_M^{(\varepsilon)} = 0, \\ & |u_{\delta M}^\varepsilon(x) - u_\delta(x)| \leq r^\varepsilon, \quad x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus \tilde{G}_M^{(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{G}_M^{(\varepsilon)} = G_M^{(\varepsilon)} \cup B_M^{(\varepsilon)}$. Определим функции

$$v_{\delta M}^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\delta(x) + r^\varepsilon, & u_{\delta M}^\varepsilon(x) > u_\delta(x) + r^\varepsilon; \\ u_{\delta M}^\varepsilon(x), & |u_{\delta M}^\varepsilon(x) - u_\delta(x)| \leq r^\varepsilon; \\ u_\delta(x) - r^\varepsilon, & u_{\delta M}^\varepsilon(x) < u_\delta(x) - r^\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $v_{\delta M}^\varepsilon \in \text{Lip}(CM, \Omega)$ при достаточно больших M . Кроме того, функции $v_{\delta M}^\varepsilon$ равномерно в Ω сходятся к u_δ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку $v_{\delta M}^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x)$ для $x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus \tilde{G}_M^{(\varepsilon)}$, имеем

$$\begin{aligned} I^{(\varepsilon)}[u_\delta^\varepsilon] &= \mu^\varepsilon \left(\int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{v}_{\delta M}^\varepsilon, \nabla \tilde{v}_{\delta M}^\varepsilon) dx \right. \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}^{(\varepsilon)}} \left((A^\varepsilon(x) \nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) + \lambda \Phi_m |u_\delta^\varepsilon|^2 \right) dx \Big) \\ &\quad + \mu^\varepsilon \left(\int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \setminus \tilde{G}_M^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) dx + \lambda \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \Phi_{\mathcal{F}} |u_\delta^\varepsilon|^2 dx \right) \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap \tilde{G}_M^{(\varepsilon)}} \left(2(A^\varepsilon(x) \nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla v_{\delta M}^\varepsilon) - (A^\varepsilon(x) \nabla v_{\delta M}^\varepsilon, \nabla v_{\delta M}^\varepsilon) \right) dx \\ &\equiv \Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $\tilde{v}_{\delta M}^\varepsilon = u_\delta^\varepsilon - v_{\delta M}^\varepsilon$. Оценим снизу каждое из слагаемых Ξ_i в (5.24).

Рассмотрим подобласть $\Omega_\zeta = \{x \in \Omega : |u_\delta(x)| > 2\zeta\}$ области Ω , где $\zeta > 0$. Поскольку Ω_ζ кубами $K_h^\alpha = \{x : |x_l - x_l^\alpha| \leq h/2\}$, непересекающимися во внутренних точках. Для достаточно малых ε и h имеем $|v_{\delta M}^\varepsilon(x)| > \zeta$, когда $x \in K_h^\alpha$, и после простых вычислений, используя (1.9), получаем

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) (A^\varepsilon(x) \nabla (u_\delta^\varepsilon - v_{\delta M}^\varepsilon), \nabla (u_\delta^\varepsilon - v_{\delta M}^\varepsilon)) \\ &\geq |v_{\delta M}^\varepsilon|^2 \left(A^\varepsilon(x) \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon}, \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right) - (1 + \eta) \left| \frac{\nabla v_{\delta M}^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right|^2 |u_\delta^\varepsilon - v_{\delta M}^\varepsilon|^2 C_2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

при $x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap K_h^\alpha$ и

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) (A^\varepsilon(x) \nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) \\ &\geq |v_{\delta M}^\varepsilon|^2 \left(A^\varepsilon(x) \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon}, \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right) - (1 + \eta) \left| u_\delta^\varepsilon \frac{\nabla v_{\delta M}^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right|^2 c_2^\varepsilon \end{aligned} \quad (5.26)$$

при $x \in \mathcal{M}^{(\varepsilon)} \cap K_h^\alpha$. В этих неравенствах η – произвольная положительная постоянная. Воспользуемся теперь соотношением (5.23), определением и свойствами функции $v_{\delta M}^\varepsilon(x)$. Полагая $\eta = 1/h$ в (5.25), (5.26), для любого $K_h^\alpha \subset \Omega_\zeta$ получаем

$$\begin{aligned} &\mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (A^\varepsilon(x) \nabla \tilde{v}_{\delta M}^\varepsilon, \nabla \tilde{v}_{\delta M}^\varepsilon) dx \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{K_h^\alpha \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} \left((A^\varepsilon(x) \nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) + \lambda \Phi_{\mathcal{M}} |u_\delta^\varepsilon|^2 \right) dx \\ &\geq |u_\delta(x^\alpha)|^2 \mu^\varepsilon \left(\int_{K_h^\alpha} \left(A^\varepsilon(x) \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon}, \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_{K_h^\alpha \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} \Phi_{\mathcal{M}} \left(\frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right)^2 dx \right) + o(h^n) \end{aligned} \quad (5.27)$$

при достаточно малых ε ($\varepsilon \leq \widehat{\varepsilon}(h)$) и $h \rightarrow 0$. Кроме того, используя условие (C.4), выводим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \left(\int_{K_h^\alpha} \left(A^\varepsilon(x) \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon}, \nabla \frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right) dx \right. \\ \left. + \lambda \int_{K_h^\alpha \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} \Phi \mathcal{M} \left(\frac{u_\delta^\varepsilon}{v_{\delta M}^\varepsilon} \right)^2 dx \right) \geq h^n b(x^\alpha, \lambda) + o(h^n) \end{aligned} \quad (5.28)$$

при $h \rightarrow 0$. Из (5.27), (5.28) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Xi_1 \geq \int_{\Omega_\zeta} b(x, \lambda) |u_\delta|^2 dx. \quad (5.29)$$

Пользуясь определением подобласти Ω_ζ и переходя к пределу при $\zeta \rightarrow 0$ в (5.29), получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Xi_1 \geq \int_{\Omega} b(x, \lambda) |u_\delta|^2 dx. \quad (5.30)$$

Для получения оценки снизу для слагаемого Ξ_2 в (5.24) мы поступаем следующим образом. Применяя лемму 4.4 и используя (5.23) и условие (C.1), получаем

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_j \rightarrow 0} \Xi_2 \geq \int_{\Omega} (A^*(x) \nabla u_{\delta M}, \nabla u_{\delta M}) dx + \int_{\Omega} \lambda \Phi_{\mathcal{F}} |u_\delta|^2 \rho(x) dx - \xi(M), \quad (5.31)$$

где $\xi(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Поскольку первое слагаемое в правой части (5.31) является слабо полунепрерывным снизу функционалом в $H^1(\Omega)$ и функции $u_{\delta M}$ сходятся в $L^2(\Omega)$ к u_δ при $M \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon = \varepsilon_j \rightarrow 0} \Xi_2 \geq \int_{\Omega} \left((A^*(x) \nabla u_\delta, \nabla u_\delta) + \lambda \Phi_{\mathcal{F}} \rho(x) |u_\delta|^2 \right) dx. \quad (5.32)$$

Наконец, для последнего слагаемого в правой части (5.24) легко получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Xi_3| = 0. \quad (5.33)$$

Таким образом, из (5.30), (5.32), (5.33) и (5.23) с учетом условий (C.1), (C.5) теоремы 3.1 имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^{(\varepsilon)}[u_\delta^\varepsilon] \geq J_b[u_\delta]. \quad (5.34)$$

Из этого неравенства, (5.20) и (5.22) немедленно следует (5.17).

Неравенства (5.16), (5.17) означают, что если некоторая подпоследовательность решений задачи (5.1) $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к функции $u = u(x, \lambda)$, то u минимизирует функционал (5.8) в пространстве $H^1(\Omega)$, т.е. $u(x, \lambda)$ – решение задачи (5.2), (5.3). Поскольку $\lambda > 0$ и $b(x, \lambda) \geq 0$, эта задача имеет единственное решение и вся последовательность решений задачи (5.1) $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к функции $u = u(x, \lambda)$. Теорема 5.1 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3.1

Рассмотрим краевую задачу (5.1) при комплексных λ таких, что $\arg \lambda \neq \pi$. Известно, что решение $u^\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (5.1) является аналитической по λ функцией в разрезанной комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$, и из условия (С.5) следует, что

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \lambda)\|_{\mathcal{F}(\varepsilon)}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|^4} \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}, \quad |\arg \lambda - \pi| \geq \theta_0 > 0. \quad (6.1)$$

Кроме того, решение $u^\varepsilon(x, t)$ задачи (1.4)–(1.6) может быть представлено с помощью обратного преобразования Лапласа в следующем виде:

$$u^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} u^\varepsilon(x, \lambda) d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad (6.2)$$

где $u^\varepsilon(x, \lambda)$ – решение задачи (5.1). С другой стороны, стандартным образом (см., например, [17]) легко получить оценку

$$\max_{t \in [0, T]} \|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{1, \mathcal{F}^\varepsilon}^2 + \int_0^T \|u_t^\varepsilon(\cdot, t)\|_\Omega^2 dt \leq C(T) \text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}. \quad (6.3)$$

Из этого неравенства следует, что для любого $t \in (0, T)$ $\{u^\varepsilon\}$ – $D_{\mathcal{F}^\varepsilon}$ -компактное множество и существует подпоследовательность, за которой сохраним обозначение $\{u^\varepsilon\}$, $D_{\mathcal{F}^\varepsilon}$ -сходящаяся к некоторой функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$. Причем из условия (С.1) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} u^\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx = \int_\Omega \tilde{u}(x, t) \varphi(x) \rho(x) dx \quad (6.4)$$

для любой функции $\varphi \in C(\Omega)$. Покажем, что $\tilde{u}(x, t)$ – решение задачи (3.4)–(3.6).

Из (6.1), (6.2) следует, что

$$\mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} u^\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_\lambda^{(\varepsilon)}[\varphi] d\lambda, \quad (6.5)$$

где

$$F_\lambda^{(\varepsilon)}[\varphi] = \mu^\varepsilon \int_{\mathcal{F}(\varepsilon)} u^\varepsilon(x, \lambda) \varphi(x) dx.$$

В силу теоремы 5.1 для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\lambda^{(\varepsilon)}[\varphi] = \int_\Omega u(x, \lambda) \varphi(x) \rho(x) dx, \quad (6.6)$$

где $u(x, \lambda)$ – решение задачи (5.2), (5.3). Ввиду (6.1) функционалы $F_\lambda^{(\varepsilon)} : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно ограничены по λ на любом компактном подмножестве области $\Gamma_{\theta_0} = \{\lambda : |\arg \lambda - \pi| > \theta_0\}$, $\theta_0 > 0$, и зависят аналитически от параметра $\lambda \in \Gamma_{\theta_0}$. Следовательно, согласно теореме Витали последовательность $\{F_\lambda^{(\varepsilon)}\}$ сходится по норме к некоторому функционалу F_λ равномерно по λ на любом компактном подмножестве области Γ_{θ_0} . Причем функционал F_λ аналитически зависит от параметра λ и в силу оценки (6.1)

$$\|F_\lambda[\varphi]\| \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|\varphi\|_\Omega.$$

Таким образом, вследствие теоремы Рисса и равенства (6.6) представление

$$F_\lambda[\varphi] = \int_{\Omega} u(x, \lambda) \varphi(x) \rho(x) dx$$

имеет место для любого $\lambda \in \{\lambda : |\arg \lambda - \pi| \geq \theta_0 > 0\}$, причем $u(x, \lambda)$ – аналитическая по λ функция, удовлетворяющая оценке

$$\|u(\cdot, \lambda)\|_{\Omega}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|^4}, \quad \lambda \in \Gamma_{\theta_0}. \quad (6.7)$$

Таким образом, соотношение (6.6) справедливо для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$.

Перейдем теперь в краевой задаче (5.2), (5.3) к комплексным λ . Для этого воспользуемся следующим результатом, который доказывается таким же образом, как лемма 3 в работе [23].

ЛЕММА 6.1. *Функция $b(x, \lambda)$, определенная в условии (С.4) для $\lambda > 0$, имеет аналитическое по λ продолжение $\tilde{b}(x, \lambda)$ в разрезанную комплексную плоскость $\mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$, причем $\tilde{b}(x, \lambda) = O(|\lambda|^\delta)$, $\delta < 1$, при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и $|\arg \lambda - \pi| \geq \theta_0 > 0$.*

Продолжим функцию $b(x, \lambda)$, полагая $b(x, \lambda) = \tilde{b}(x, \lambda)$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, и рассмотрим задачу (5.2), (5.3) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$. Функция $u(x, \lambda)$ является решением (5.2), (5.3) при вещественных $\lambda > 0$, она аналитична по $\lambda \in \Gamma_{\theta_0}$ (для любого $\theta_0 > 0$) и удовлетворяет (6.7). Поскольку тензор $A^*(x)$ положительно определен, $b(x, \lambda) \geq 0$ при $\lambda > 0$ и $b(x, \lambda)$ – аналитическая по λ функция в разрезанной комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$, то краевая задача (5.2)–(5.3) имеет единственное решение $u(x, \lambda)$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\arg \lambda = \pi\}$.

Заметим, что вследствие леммы 6.1 формула (3.7) действительно определяет локально интегрируемую по $t \geq 0$ функцию $B(x, t)$, которая не зависит от $\sigma > 0$. Тогда решение $u(x, t)$ задачи (3.4)–(3.6) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} u(x, \lambda) d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad (6.8)$$

и из (6.7), (6.8) следует, что

$$\int_{\Omega} u(x, t) \rho(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \left(\int_{\Omega} u(x, \lambda) \rho(x) \varphi(x) dx \right) d\lambda. \quad (6.9)$$

Тогда из (6.1), (6.5)–(6.7) и (6.9) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x, t) \mathbb{I}_f^\varepsilon \varphi(x) dx = \int_{\Omega} u(x, t) \rho(x) \varphi(x) dx. \quad (6.10)$$

Наконец, в силу (6.4) и (6.10) мы заключаем, что $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)$. Теорема 3.1 доказана.

§ 7. Периодическая модель двойной пористости с тонкими трещинами

Пусть $\Omega = \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cup \mathcal{M}^{(\varepsilon)} \cup \partial\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Будем предполагать, что система трещин $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$, т.е. материал с высокой проводимостью, распределен в тонких ортогональных слоях толщины

$$d_\varepsilon = d\varepsilon^{\theta/2}, \quad d > 0, \quad \theta > 2, \quad (7.1)$$

а матрица $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ состоит из слабопроводящих кубических блоков $\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}$ с центрами в точках $x^{i,\varepsilon} \in \Omega$. Центры кубов $x^{i,\varepsilon}$ периодически, с периодом ε , распределены в Ω . Рассмотрим начально-краевую задачу (1.4)–(1.6), где $A^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)I$, I – единичная матрица и

$$a^\varepsilon(x) = a\varepsilon^\theta \cdot \mathbb{I}_m^\varepsilon(x) + 1 \cdot \mathbb{I}_f^\varepsilon(x). \quad (7.2)$$

Рис. 1

Рис. 2

Покажем, что в этом случае условия теоремы 3.1 выполнены и получим коэффициенты усредненной модели в явном виде. Прежде всего ясно, что

$$\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)} = \frac{\text{meas } \Omega}{\varepsilon^3} (\varepsilon^3 - (\varepsilon - d_\varepsilon)^3) = 3 \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \text{meas } \Omega + o\left(\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \quad (7.3)$$

и, следовательно,

$$\mu^\varepsilon \simeq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon} = \frac{1}{3d} \varepsilon^{(2-\theta)/2}. \quad (7.4)$$

Легко видеть теперь, что условие (С.1) теоремы 3.1 выполнено и

$$\rho(x) = 1. \quad (7.5)$$

Далее, как и в [24] (см. также [18]), можно показать, что семейство множеств $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет SC -условию, условие (С.3) теоремы 3.1 выполнено и

$$a_{ij}^*(x) = \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad (7.6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Остается проверить условие (С.4). Для этого рассмотрим краевую задачу

$$\Delta W^\varepsilon - \lambda \Phi_m \beta_\varepsilon W^\varepsilon = 0, \quad x \in \mathcal{M}, \quad (7.7)$$

$$W^\varepsilon = 1, \quad x \in \partial \mathcal{M}, \quad (7.8)$$

где $\lambda > 0$,

$$\beta^\varepsilon = \frac{(\varepsilon - d_\varepsilon)^2}{a\varepsilon^\theta} \simeq \frac{1}{a}\varepsilon^{2-\theta} \quad (7.9)$$

и $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < 1/2\}$.

В нашем случае функционал (3.3) имеет вид

$$b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(z) = \inf_{w^\varepsilon} \mu^\varepsilon \int_{K_h^z} (a^\varepsilon(x) |\nabla w^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m \mathbb{I}_m^\varepsilon |w^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma} \mathbb{I}_f^\varepsilon |w^\varepsilon - 1|^2) dx, \quad (7.10)$$

где инфимум берется в классе функций $v \in H^1(K_h^z)$. Будем искать функцию $w^\varepsilon(x)$, минимизирующую (7.10), в виде

$$w^\varepsilon(x) = \vartheta^\varepsilon(x) + \zeta^\varepsilon(x), \quad (7.11)$$

где

$$\vartheta^\varepsilon(x) = \begin{cases} W^\varepsilon \left(\frac{x - x^{i, \varepsilon}}{\varepsilon - d_\varepsilon} \right), & x \in \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)} \cap K_h^z; \\ 1, & x \in \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cap K_h^z. \end{cases} \quad (7.12)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(z) &= \mu^\varepsilon \int_{K_h^z} (a^\varepsilon(x) |\nabla \vartheta^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m \mathbb{I}_m^\varepsilon |\vartheta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} (a\varepsilon^\theta |\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (|\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma} |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + 2\mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} (a\varepsilon^\theta (\nabla \vartheta^\varepsilon, \nabla \zeta^\varepsilon) + \lambda \vartheta^\varepsilon \zeta^\varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Покажем, что функция $\zeta^\varepsilon(x)$ дает исчезающий вклад (при $\varepsilon \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$) в (7.10). Из (7.7), (7.8), (7.12) и (7.13) следует, что ζ^ε минимизирует функционал

$$\begin{aligned} I^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon] &= \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} (a\varepsilon^\theta |\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (|\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma} |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + 2\mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} a^\varepsilon(x) \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \zeta^\varepsilon d\sigma. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Поскольку $I^{(\varepsilon)}[0] = 0$, имеем

$$\begin{aligned} I_1^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon] &\equiv \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} (a\varepsilon^\theta |\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\quad + \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} (|\nabla \zeta^\varepsilon|^2 + h^{-2-\gamma} |\zeta^\varepsilon|^2) dx \\ &\leq 2a\varepsilon^\theta \mu^\varepsilon \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} \left| \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \right| |\zeta^\varepsilon| d\sigma. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Нетрудно показать, что для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}^{(\varepsilon)}} |v|^2 d\sigma \leq C \left(\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |v|^2 dx + d_\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla v|^2 dx \right). \quad (7.16)$$

Тогда из (7.15), (7.16) получаем

$$\begin{aligned} I_1^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon] &\leq C \mu^\varepsilon \varepsilon^\theta \left(\sum_i \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}} \left| \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\sum_i \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}} |\zeta^\varepsilon|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq C \mu^\varepsilon \varepsilon^\theta \left(\sum_i \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}} \left| \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{d_\varepsilon} \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\zeta^\varepsilon|^2 dx + d_\varepsilon \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla \zeta^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Для того чтобы оценить нормальную производную функции $\vartheta^\varepsilon(x)$, воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 7.1. Пусть функция ϑ^ε определяется равенством (7.12), где W^ε — решение задачи (7.7), (7.8). Тогда

$$\left| \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \right| \leq C(\lambda) \varepsilon^{-\theta/2}, \quad x \in \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}. \quad (7.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты будем предполагать, что $\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_k < (\varepsilon - d_\varepsilon)\}$. Из (7.7), (7.8) следует что $\vartheta^\varepsilon(x)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \vartheta^\varepsilon - \lambda \Phi_m \widetilde{\beta}_\varepsilon \vartheta^\varepsilon = 0, \quad x \in \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}, \quad (7.19)$$

$$\vartheta^\varepsilon = 1, \quad x \in \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}, \quad (7.20)$$

где $\widetilde{\beta}^\varepsilon = a^{-1} \varepsilon^{-\theta}$. Рассмотрим функцию

$$v^\varepsilon = \exp(-\sqrt{\lambda \Phi_m \widetilde{\beta}_\varepsilon} x_1). \quad (7.21)$$

Очевидно, что $v^\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению (7.19) и $v^\varepsilon(x) = 1$ на грани $\{x_1 = 0\}$. Тогда в соответствии с принципом максимума функция $\vartheta^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x)$ достигает положительный максимум (или отрицательный минимум) на $\partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}$. Поскольку

функция $\vartheta^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x)$ равна нулю на грани $\{x_1 = 0\}$ и положительна на других гранях куба $\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}$, мы имеем

$$\vartheta^\varepsilon - v^\varepsilon \geq 0, \quad x \in \overline{\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}}. \quad (7.22)$$

С другой стороны, $\vartheta^\varepsilon \leq 1$ в $\overline{\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}}$. Тогда из (7.22) следует, что

$$1 - v^\varepsilon \geq 1 - \vartheta^\varepsilon \geq 0, \quad x \in \overline{\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}}, \quad (7.23)$$

и, поскольку $v^\varepsilon(0, x_2, x_3) = \vartheta^\varepsilon(0, x_2, x_3) = 1$, мы получаем

$$\frac{v^\varepsilon(0, x_2, x_3) - v^\varepsilon(\delta, x_2, x_3)}{\delta} \geq \frac{\vartheta^\varepsilon(0, x_2, x_3) - \vartheta^\varepsilon(\delta, x_2, x_3)}{\delta} \geq 0, \quad \delta > 0. \quad (7.24)$$

Переходя к пределу в (7.24) при $\delta \rightarrow 0$, мы получаем

$$0 \leq \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \leq \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu}, \quad x \in \{x_1 = 0\},$$

причем

$$\left. \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu} \right|_{x_1=0} = \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \varepsilon^{-\theta/2}.$$

Ясно, что нормальная производная ϑ^ε на других гранях $\mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}$ оценивается так же. Лемма 7.1 доказана.

Из (7.18) теперь имеем

$$\sum_i \int_{K_h^z \cap \partial \mathcal{M}_i^{(\varepsilon)}} \left| \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \leq C \frac{h^3}{\varepsilon^{\theta+1}}. \quad (7.25)$$

Тогда, используя (7.1), (7.4) и (7.17), получаем

$$\begin{aligned} I_1^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon] &\leq Ch^{3/2} \mu_\varepsilon \varepsilon^{(\theta-1)/2} (d_\varepsilon)^{-1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\zeta^\varepsilon|^2 dx + d_\varepsilon^2 \int_{K_h^z \cap \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} |\nabla \zeta^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq Ch^{5/2+\gamma/2} (\mu_\varepsilon)^{1/2} \varepsilon^{(\theta-1)/2} (d_\varepsilon)^{-1/2} (I_1^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon])^{1/2} \\ &\leq Ch^{5/2+\gamma/2} (I_1^{(\varepsilon)}[\zeta^\varepsilon])^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Это означает, что функция $\zeta^\varepsilon(x)$ вносит исчезающий вклад в функционал (7.10), т. е.

$$b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(z) = \mu^\varepsilon \int_{K_h^z} (a\varepsilon^\theta |\nabla \vartheta^\varepsilon|^2 + \lambda \Phi_m |\vartheta^\varepsilon|^2) \mathbb{I}_m^\varepsilon(x) dx + o(h^\varepsilon) \quad (7.27)$$

при $h \rightarrow 0$ и достаточно малых ε . Таким образом, в силу (7.7), (7.8) и (7.27) получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-3} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-3} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{\lambda}^{\varepsilon, h}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu^\varepsilon \lambda \Phi_m \int_{\mathcal{M}} W^\varepsilon(x) dx \quad (7.28)$$

при условии, что последний предел существует.

Остается только вычислить асимптотику интеграла в (7.28).

ЛЕММА 7.2. Пусть $W^\varepsilon(x)$ – решение краевой задачи (7.7), (7.8). Тогда

$$\int_{\mathcal{M}} W^\varepsilon(x) dx = \frac{6}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\Phi_m \beta_\varepsilon}} (1 + o(1)) \quad (7.29)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В кубе $\mathcal{M}$ рассмотрим функции

$$V_{\varepsilon j}^\pm(x) = \exp\left(\pm \sqrt{\lambda \Phi_m \beta_\varepsilon} \left(x_j \mp \frac{1}{2}\right)\right), \quad j = 1, 2, 3, \quad (7.30)$$

и

$$U^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^3 (V_{\varepsilon j}^+(x) + V_{\varepsilon j}^-(x)). \quad (7.31)$$

Они удовлетворяют (7.7), причем $V_{\varepsilon j}^\pm(x) \leq 1$ при $x \in \partial\mathcal{M}$, а $U^\varepsilon(x) \geq 1$ при $x \in \partial\mathcal{M}$. Тогда в силу принципа максимума

$$V_{\varepsilon j}^\pm(x) \leq W^\varepsilon(x) \leq U^\varepsilon(x). \quad (7.32)$$

Введем в рассмотрение множества

$$M_{\varepsilon j}^\pm = \left\{ x \in \mathcal{M} : -\frac{1}{2} \leq \mp x_j \leq \frac{1}{2} + (\beta_\varepsilon)^{-1/4}, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} + (\beta_\varepsilon)^{-1/4} \leq x_k \leq \frac{1}{2} - (\beta_\varepsilon)^{-1/4}, j \neq k \right\}.$$

Ясно, что $M_{\varepsilon j}^\pm \cap M_{\varepsilon k}^\pm = \emptyset$ при $j \neq k$ и достаточно малых ε . Тогда из (7.32) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^3 \left(\int_{M_{\varepsilon j}^+} V_{\varepsilon j}^+(x) dx + \int_{M_{\varepsilon j}^-} V_{\varepsilon j}^-(x) dx \right) \leq \int_{\mathcal{M}} W^\varepsilon(x) dx \leq \int_{\mathcal{M}} U^\varepsilon(x) dx. \quad (7.33)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^3 \left(\int_{M_{\varepsilon j}^+} V_{\varepsilon j}^+(x) dx + \int_{M_{\varepsilon j}^-} V_{\varepsilon j}^-(x) dx \right) = \frac{6}{\sqrt{\lambda \Phi_m \beta_\varepsilon}} (1 + o(\beta_\varepsilon^{-1/4})) \quad (7.34)$$

и

$$\int_{\mathcal{M}} U^\varepsilon(x) dx = \frac{6}{\sqrt{\lambda \Phi_m \beta_\varepsilon}} (1 + o(\beta_\varepsilon^{-1/4})). \quad (7.35)$$

Утверждение леммы следует из (7.33), (7.34), и (7.35). Лемма 7.2 доказана.

Таким образом, в силу (7.28), (7.29)

$$b(x, \lambda) = b(\lambda) = \frac{2\sqrt{a\Phi_m}}{d} \sqrt{\lambda}$$

и

$$B(x, t) = B(t) = \frac{\sqrt{a\Phi_m}}{\pi i d} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{a\Phi_m}}{\sqrt{\pi} d} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Поэтому условие (С.4) выполнено и, значит, доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\Omega = \mathcal{F}^{(\varepsilon)} \cup \mathcal{M}^{(\varepsilon)} \cup \partial\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим, что система трещин $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ распределена в тонких ортогональных слоях толщины d_ε , $d_\varepsilon = d\varepsilon^{\theta/2}$, $d > 0$, $\theta > 2$, а матрица $\mathcal{M}^{(\varepsilon)}$ – множество кубов, периодически, с периодом ε , распределенных в Ω .

Тогда для любого $t \in (0, T)$ решение $u^\varepsilon(x, t)$ начально-краевой задачи задачи (1.4)–(1.6) с $A^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)I$, где I – единичная матрица, а $a^\varepsilon(x) = a\varepsilon^\theta \cdot \mathbb{I}_m^\varepsilon(x) + 1 \cdot \mathbb{I}_f^\varepsilon(x)$, $D_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}$ -сходится к решению $u(x, t)$ следующей задачи

$$\begin{aligned} \Phi_f u_t - \frac{2}{3} \Delta u + \frac{2\sqrt{a\Phi_m}}{\sqrt{\pi}d} \int_0^t \frac{u_t(x, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau &= f(x), \quad x \in \Omega_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Причем, так как $u(x, t)$ – гладкая в Ω функция, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{meas } \mathcal{F}^{(\varepsilon)}} \|u^\varepsilon - u\|_{\mathcal{F}^{(\varepsilon)}}^2 = 0. \quad (7.36)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Соотношения (7.1), (7.2) определяют критическую толщину трещин в случае, когда обмен между матрицей и трещинами нельзя не учитывать. Если коэффициент диффузии $a^\varepsilon(x)$ по-прежнему определяется соотношением (7.2), но толщина d_ε много больше чем $\sqrt{a^\varepsilon(x)}$ при $x \in \mathcal{M}^\varepsilon$, тогда процесс переноса определяется только системой трещин. А именно, для любого $t \in (0, T)$ решение $u^\varepsilon(x, t)$ сходится в смысле (7.36) к решению $u(x, t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \Phi_f u_t - \frac{2}{3} \Delta u &= f(x), \quad x \in \Omega_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T); \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Заметим, что такой же усредненный тензор для рассматриваемой структуры множества $\mathcal{F}^{(\varepsilon)}$ (сотовая или альвеолярная структура) получен в [25] другими методами.

В заключение авторы выражают благодарность профессорам А. Буржа, М. Б. Панфилову и Е. Я. Хруслову за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
3. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
5. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелко-зернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
6. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Основы теории течения однородной жидкости в пористых средах // Межвуз. тематич. сб. Прикл. матем. и мех. 1960. Т. 24. С. 852–854.

7. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 21. P. 823–826.
8. Bourgeat A., Goncharenko M., Panfilov M., Pankratov L. A general double porosity model // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. Ib. 1999. V. 327. P. 1245–1250.
9. Bourgeat A., Luckhaus S., Mikelić A. Convergence of the homogenization process for a double porosity model of immiscible two phase flow // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 27. P. 1520–1543.
10. Сандраков Г. В. Осреднение параболических уравнений с контрастными коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 4. С. 17–224.
11. Hornung U. (ed.) Homogenization and porous media. New York: Springer-Verlag, 1997.
12. Жиков В. В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
13. Жиков В. В. О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 27–58.
14. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
15. Auriault J. L. Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites // Int. J. Heat Mass Transfer. 1983. V. 26. № 6. P. 861–869.
16. Bourgeat A., Mikelić A., Piatnitski A. Modèle de double porosité aléatoire // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 327. P. 99–104.
17. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
18. Свищева Е. В. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи в областях убывающего объема // Теория операторов и субгармонические функции. Киев: Наукова думка, 1991. С. 126–134.
19. Фенченко В. М., Хрусов Е. Я. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений в частных производных с сильно осциллирующей матрицей коэффициентов, которая не удовлетворяет условию равномерной ограниченности // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 4. С. 23–27.
20. Khruslov E. Ya. Homogenized models of composite media // Composite media and homogenization theory / ed. G. Dal Maso, G. F. Dell'Antonio. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 159–182. (Progr. Nonlinear Differential Equations. Appl. V. 5.)
21. Хрусов Е. Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Матем. сб. 1978. Т. 106. № 4. С. 603–621.
22. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
23. Boutet de Monvel L., Khruslov E. Ya. Averaging of the diffusion equation on Riemannian manifolds of complex microstructure // Trans. Moscow Math. Soc. 1997. P. 138–161.
24. Фенченко В. Н. Асимптотика решений дифференциальных уравнений в частных производных с сильно осциллирующей и неограниченной матрицей коэффициентов // Препринт. № 30. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1980.
25. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization of reticulated structures. New York: Springer-Verlag, 1999. (Appl. Math. Sci. V. 136.)

Физико-технический институт
 низких температур им. Б. И. Веркина,
 г. Харьков

E-mail: pankratov@ilt.kharkov.ua, vrybalko@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
 18.12.2001 и 14.08.2002