Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О многомерных скалярных законах сохранения, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 1, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:37:03

УДК 517.9

С. И. Похожаев

О многомерных скалярных законах сохранения

Рассматривается новый подход для установления градиентной катастрофы решений многомерных скалярных законов сохранения, основанный на априорных оценках.

Выводятся верхние оценки для времени возникновения градиентной катастрофы. Приводится контрпример, показывающий неулучшаемость асимптотики полученной оценки для общего класса рассматриваемых задач.

Библиография: 8 названий.

§ 0. Введение

Эта статья посвящена априорным оценкам и отсутствию глобальных гладких решений задачи Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N a_i(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (0.2)$$

Вопросам разрушения решений нелинейных гиперболических уравнений посвящена обширная литература (см., например, [1]–[7], а также приведенную там литературу).

При этом можно выделить два основных типа разрушения.

1) Сильное, или грубое, разрушение, обычно имеющее место, когда уравнение имеет строго положительную нелинейную правую часть. В этом случае решение обращается в бесконечность за конечное время. При этом в зависимости от множества, на котором решение обращается в бесконечность, характер разрушения является разным.

2) Слабое, или мягкое, разрушение, обычно имеющее место, когда правая часть нелинейного уравнения тождественно равна нулю. В этом случае само решение остается ограниченным, но производная решения обращается в бесконечность за конечное время, т.е. возникает так называемая градиентная катастрофа. При этом существуют градиентные катастрофы высшего порядка.

Естественно, что это – грубое описание характера возможных разрушений, без указания всех условий их появления.

При этом используются разные методы для анализа возникновения особенностей, т.е. разрушения решений рассматриваемых нелинейных уравнений.

Основной целью предлагаемой статьи является дальнейшее развитие и демонстрация метода нелинейной емкости (см. [6]) для уравнений вида (0.1). Этот метод позволяет, в частности, установить разрушение, “*blow-up*”, решений как для многомерных гиперболических уравнений любого порядка с нелинейной главной частью, так и для систем таких уравнений и неравенств (см. [7]).

Обычно этот метод применяется для уравнений с нелинейной строго положительной правой частью. В этом случае мы получаем разрушение решения за конечное время или на конечном расстоянии. Это разрушение происходит в функциональном пространстве, порожденном непосредственно нелинейным оператором — так сказать, “грубое” разрушение.

Для задачи (0.1), (0.2) при регулярных условиях, т.е. условиях ограниченности и минимальной гладкости, существуют глобальные априорные оценки $|u|_\infty$ (см., например, [8]).

Таким образом, разрушение решения задачи (0.1), (0.2), если оно имеет место, носит более тонкий характер.

Для одномерных ($N = 1$) законов сохранения можно получить условия “градиентной” катастрофы с помощью инвариантов и квазиинвариантов Римана (см. [5] и [2], [3]). В многомерном случае ($N > 1$) этот подход, к сожалению, оказывается неприменимым.

Мы предлагаем иной и более простой подход к исследованию “градиентной катастрофы”, основанный на идее нелинейной емкости.

Непосредственно этот метод неприменим к уравнению вида (0.1), поскольку правая часть этого уравнения тождественно равна нулю.

Однако этот метод можно применить к неравенствам со строго положительной нелинейной правой частью, которые являются следствиями уравнений вида (0.1).

Таким способом можно получить достаточные условия существования градиентной катастрофы любого порядка для соответствующих нелинейных задач.

Мы рассматриваем здесь случай градиентной катастрофы первого порядка, т.е. обращение в бесконечность градиента первого порядка для ограниченных решений уравнения вида (0.1).

Содержание статьи следующее.

Сначала, во введении, описывается основная идея модификации метода нелинейной емкости.

В § 1 доказывается существование градиентной катастрофы.

В § 2 выводятся верхние оценки для области, в частности, для времени существования гладкого решения.

В § 3 рассматриваются некоторые приложения, приводится контрпример, на котором показывается неулучшаемость показателя общей асимптотической оценки в рассматриваемом классе задач.

Сущность предложенного подхода состоит в следующем.

Пусть для некоторой нестационарной задачи мы имеем неравенство вида

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \geq W \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1} \quad (0.3)$$

с начальным условием

$$G|_{t=0} = G_0(x). \quad (0.4)$$

Здесь G , H_i , $i = 1, \dots, N$, и W суть C^1 -функции, зависящие от t , x , решения u и производных порядка $k \geq 0$. При этом предполагается, что из равенства $W = 0$ п.в. в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ следует, что $u = 0$ п.в. в $\mathbb{R} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : t > 0, x \in \mathbb{R}^N\}$.

Пусть эти функции удовлетворяют неравенству

$$W \geq C_0 \left(|G|^q + \sum_{i=1}^N |H_i|^{q_i} \right) \quad (0.5)$$

с некоторой постоянной $C_0 > 0$ и некоторыми $q > 1$, $q_i > 1$, $i = 1, \dots, N$, при всех значениях входящих аргументов.

Тогда исходная задача при выполнении условий (0.12), (0.13) не допускает глобального нетривиального решения во всем $\mathbb{R}_+^{N+1}$ с производными k -го порядка такими, что соответствующие функции G , H_i , $i = 1, \dots, N$, и W являются локально интегрируемыми в пространстве $\mathbb{R}_+^{N+1}$.

Доказательство является очевидным.

В самом деле, умножим неравенство (0.3) на пробную неотрицательную C^1 -функцию $\varphi(t, x)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}_+^{N+1}$. Тогда при условии, что

$$\begin{cases} G, H_i, W \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^{N+1}); \\ G_0 \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0.6)$$

получаем

$$- \int G \varphi|_{t=0} dx - \iint G \varphi_t dt dx + \sum_{i=1}^N \iint H_i \varphi_{x_i} dt dx \geq \iint W \varphi dt dx.$$

Отсюда в силу (0.5) находим

$$\iint W \varphi dt dx \leq C_1 \left(\iint \frac{|\varphi_t|^{q'}}{|\varphi|^{q'-1}} dt dx + \sum_{i=1}^N \iint \frac{|\varphi_{x_i}|^{q'_i}}{|\varphi|^{q'_i-1}} dt dx \right) - C_2 \int G \varphi|_{t=0} dx. \quad (0.7)$$

Здесь C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие от предыдущих параметров $C_0 > 0$, q , $q_1, \dots, q_N$ и N .

Введем теперь новые независимые переменные (τ, ξ) по формулам

$$\begin{cases} t = R\tau; \\ x_i = R^{\theta_i} \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (0.8)$$

где $\theta_i = q'/q'_i$.

Рассмотрим пробную функцию $\varphi(t, x)$ вида

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\rho^2) \quad (0.9)$$

с $\rho^2 = \tau^2 + |\xi|^2$. Здесь неотрицательная функция $\varphi_0 \in C^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем имеет вид

$$\varphi_0(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \eta \leq 1; \\ 0 & \text{при } \eta \geq 2 \end{cases}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\int_1^2 \frac{|\varphi'_0(\eta)|^s}{(\varphi_0(\eta))^{s-1}} d\eta < \infty$$

с $s = \max\{q', q'_1, \dots, q'_N\}$.

Используя новые переменные (τ, ξ) в правой части неравенства (0.7), находим, что

$$\iint W\varphi dt dx \leq C_3 R^\theta - C_2 \int G\varphi|_{t=0} dx, \quad (0.10)$$

где положительная постоянная C_3 зависит от предыдущих постоянных,

$$\theta = \sum_{i=1}^N \frac{q'}{q'_i} + 1 - q'. \quad (0.11)$$

Предположим теперь, что

$$\int G|_{t=0} dx \geq 0, \quad (0.12)$$

$$\theta \leq 0. \quad (0.13)$$

Тогда исходная нестационарная задача не допускает глобального нетривиального решения в рассматриваемом классе функций, определяемом условиями (0.6).

Для доказательства достаточно предположить противное и перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$ в неравенстве (0.10). Тогда при $\theta < 0$ получим очевидное противоречие со сделанным предположением, поскольку

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \iint W\varphi dt dx \leq 0.$$

В случае $\theta = 0$ доказательство использует дополнительные аргументы, основанные на абсолютной непрерывности несобственного сходящегося интеграла (см. аналогичные доказательства для предельного значения критического показателя в [6]).

Отметим дополнительно, что при $\theta < 0$ и $\int G|_{t=0} dx > 0$ из неравенства (0.8) следует оценка сверху для границы области в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, в которой может существовать глобальное нетривиальное решение в рассматриваемом классе, т.е. это решение заведомо не существует за пределами этой области.

В самом деле, для получения этой оценки достаточно найти значение R_∞ , при котором левая часть неравенства (0.7) заведомо обращается в нуль, т.е.

$$R_\infty = \left(\frac{C_2}{C_3} \int G|_{t=0} dx \right)^{1/\theta}.$$

Тогда из формул (0.8) получаем, что при

$$\begin{cases} t > \sqrt{2} R_\infty; \\ x_i \geq \sqrt{2} R_\infty^{\theta_i}, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

исходная нестационарная задача не имеет нетривиального решения в указанном классе функций.

§ 1. Градиентная катастрофа

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N a_i(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1} \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.2)$$

Мы предполагаем, что

$$(i) \quad \begin{cases} a_i \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, N; \\ u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Основной целью этого параграфа является получение достаточных условий, обеспечивающих отсутствие глобального нетривиального решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) в классе $C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$.

Вывод этих условий основан на построении неравенства вида (0.3) на решении уравнения (1.1).

С этой целью введем функции вида

$$\begin{aligned} G &= G(t, x, u, p_1, \dots, p_N), \\ H_i &= a_i(t, x, u)G(t, x, u, p_1, \dots, p_N), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и вычислим функцию

$$W = \frac{dG}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{dH_i}{dx_i}, \quad p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

на решении $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ уравнения (1.1).

Прямые вычисления приводят к следующей формуле:

$$W = \sum_i \sum_k p_k \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{da_k}{dx_i} - G \sum_i \frac{da_i}{dx_i} - \sum_i a_i G_{x_i} + G_t.$$

Здесь $\frac{da_i}{dx_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial u} p_i$ с $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, G_{x_i} и G_t — частные производные по независимым переменным x_i и t соответственно.

Положим теперь

$$G(t, x, u, p_1, \dots, p_N) = (G_0(t, x, u, p_1, \dots, p_N))^\gamma, \quad (1.5)$$

где $\gamma > 1$ есть “нечетный” показатель, т.е. $(-1)^\gamma = -1$, который будет выбран ниже.

Тогда

$$W = \gamma G_0^{\gamma-1} W_0 + (\gamma - 1) G_0^\gamma \sum \frac{da_i}{dx_i},$$

где

$$W_0 = \sum_i \sum_k p_k \frac{\partial G_0}{\partial p_i} \frac{da_k}{dx_i} - G_0 \sum_i \frac{da_i}{dx_i} - \sum_i a_i G_{0x_i} + G_{0t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.0. Отметим, что выбор функций H_i и G в виде (1.3) и (1.5) основан на анализе общей формулы для функции W и решений соответствующих определяющих уравнений.

Выберем теперь функцию G_0 следующим образом:

$$G_0 = \sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dx_i} = \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial a_i}{\partial u} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \quad (1.6)$$

Тогда

$$W = \gamma G_0^{\gamma-1} W_0 + (\gamma - 1) G_0^{\gamma+1}, \quad (1.7)$$

где

$$W_0 = \sum \sum p_k \frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{da_k}{dx_i} - \sum a_i x_k \sum \frac{da_i}{dx_i} - \sum \frac{\partial a_k}{\partial u} p_k \sum \frac{da_i}{dx_i} - \sum a_i G_{0x_i} + G_{0t}.$$

После несложных вычислений находим, что

$$\begin{aligned} W_0 = & \sum \sum p_k \left(\frac{\partial a_i}{\partial u} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial a_k}{\partial u} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial u} \right) \\ & + \sum p_k \frac{\partial^2 a_k}{\partial t \partial u} + \sum \frac{\partial^2 a_k}{\partial t \partial x_k} - \sum \sum a_i \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_k} - \left(\sum \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Предположим теперь, что существует положительная постоянная $q_0 < 1$ такая, что

$$(ii) \quad W_0 \geq -q_0 G_0^2 \quad (1.9)$$

при всех рассматриваемых значениях входящих аргументов.

Тогда в силу (1.4) получаем

$$W \geq \gamma G_0^{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} - q_0 \right).$$

Таким образом,

$$W \geq \varepsilon_0 |G_0|^{\gamma+1}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad (1.10)$$

при

$$\gamma > \frac{1 + \varepsilon_0}{1 - q_0}. \quad (1.11)$$

Умножим теперь соотношение (1.3) на пробную неотрицательную функцию $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$ с компактным носителем. Тогда в предположении, что $W, G, H_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^{N+1})$ при $i = 1, \dots, N$ и $G|_{t=0} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, получим

$$\iint W \varphi \, dt \, dx = - \iint G \varphi_t \, dt \, dx + \sum_{i=1}^N \iint H_i \varphi_{x_i} \, dt \, dx - \int G \varphi|_{t=0} \, dx. \quad (1.12)$$

Отсюда в силу (1.3), (1.5) и (1.10) на основании параметрических неравенств Юнга находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{2} \iint |G_0|^{\gamma+1} \varphi \, dt \, dx &\leq C_0 \iint \frac{|\varphi_t|^{\gamma+1}}{\varphi^\gamma} \, dt \, dx \\ &+ \sum_{i=1}^N C_i \iint \frac{|a_i \varphi_{x_i}|^{\gamma+1}}{\varphi^\gamma} \, dt \, dx - \int G_0^\gamma \varphi|_{t=0} \, dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

с соответствующими положительными постоянными $C_0, C_1, \dots, C_N$, зависящими от $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 1$.

Введем новые независимые переменные по формулам

$$\begin{cases} t = R\tau; \\ x_i = R^{\zeta_i} \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.14)$$

где показатели ζ_i будут определены ниже.

Введем следующее обозначение:

$$a_{M,i}^*(\tau, \xi; R) \equiv \sup_{|u| \leq M} |a_i(R\tau, R^{\zeta_1} \xi_1, \dots, R^{\zeta_n} \xi_n, u)|.$$

Рассмотрим пробную функцию $\varphi(t, x)$ вида (0.9) с переменными, определенными формулами (1.14).

Предположим, что существуют числа $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, такие, что после подстановки (1.14) при любом $M > 0$ выполнены неравенства

$$(iii) \quad \iint \frac{|a_i \varphi_{x_i}|^{\gamma+1}}{\varphi^\gamma} \, dt \, dx \leq \tilde{C}_i R^{\Lambda-\gamma} \iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|a_{M,i}^* \varphi_{0\xi_i}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^{\gamma+1}} \, d\tau \, d\xi < \infty \quad (1.15)$$

при $|u| \leq M$ и $\forall R \geq R_0 > 0$. Здесь $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$.

При этом относительно пробной функции φ_0 предполагается, что интегралы

$$\iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|\varphi_{0\tau}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} \, d\tau \, d\xi, \quad \iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|a_{M,i}^* \varphi_{0\xi_i}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} \, d\tau \, d\xi$$

являются конечными при любом $M > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Выбор анизотропных переменных (1.14) и сделанные предположения позволяют учесть особенность поведения коэффициентов $a_i(t, x, u)$ относительно переменных t и x .

В частности, для ограниченных по t и x коэффициентов, т.е. если

$$\sup_{|u| \leq M} |a_i(t, x, u)| < \infty$$

при любом положительном M , достаточно воспользоваться изотропными переменными (1.14) с $\zeta_i = 1$.

В этом случае соотношение (1.15) выполняется автоматически.

В общем случае необходимо выбирать переменные (1.14) в соответствии с асимптотикой поведения коэффициентов $a_i(t, x, u)$ относительно $t \rightarrow \infty$ и $|x| \rightarrow \infty$.

Выберем теперь γ так, чтобы

$$\gamma > \max \left\{ \frac{1 + \varepsilon}{1 - q_0}, \Lambda \right\} \quad (1.16)$$

с $\varepsilon > 0$, и перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$ в неравенстве (1.13).

Тогда получим

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iint_{\mathbb{R}^N} |G_0|^{\gamma+1} dt dx \leq \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left(- \int_{|x| \leq R} G_0^\gamma \varphi|_{t=0} dx \right). \quad (1.17)$$

Отсюда при начальном условии $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ таком, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} \left(\sum_{i=1}^N \frac{da_i(0, x, u_0)}{dx_i} \right)^\gamma dx \geq 0, \quad (1.18)$$

получаем

$$\sum_{i=1}^N \left| \frac{da_i(t, x, u)}{dx_i} \right| = 0 \quad \text{п.в. в } \mathbb{R}_+^{N+1}. \quad (1.19)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия (i)–(iii). Пусть u есть глобальное C^2 -решение задачи Коши (1.1), (1.2) с начальным условием, удовлетворяющим неравенству (1.18) с γ из неравенства (1.16). Тогда это решение u удовлетворяет соотношению (1.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При дополнительном предположении, что задача Коши (1.1), (1.2) допускает априорную оценку

$$|u(t, x)| \leq M_0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1},$$

любое $M > 0$ в условиях (i)–(iii) можно заменить на M_0 .

Относительно существования такой априорной оценки см., например, [6].

Из неравенства (1.17) следует теорема отсутствия глобального решения.

ТЕОРЕМА 1.2 (отсутствия). Пусть выполнены условия (i)–(iii), а начальная функция u_0 удовлетворяет неравенству

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} \left(\sum_{i=1}^N \frac{da_i(0, x, u_0)}{dx_i} \right)^\gamma dx > 0 \quad (1.20)$$

с показателем γ из неравенства (1.16). Тогда не существует C^2 -глобального решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Для доказательства от противного достаточно перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$ в неравенстве (1.17). В результате мы получим противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Утверждение теоремы 1.2 сохраняется, если в неравенстве (1.20) нижний предел заменить на верхний предел.

§ 2. Оценка области существования гладкого решения

Рассмотрим оценки для области существования C^2 -решения задачи Коши (1.1), (1.2).

С этой целью введем следующее обозначение:

$$K_M = \left(C_0 \iint \frac{|\varphi_{0\tau}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} d\tau d\xi + \sum_{i=1}^N C_i^* \iint \frac{|a_{M,i}^* \varphi_{0\xi_i}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} d\tau d\xi \right)^{1/\gamma}$$

с $C_i^* = C_i \tilde{C}_i$ при $i = 1, \dots, N$. Здесь все интегралы берутся по носителю производной функции φ_0 , т.е. $\{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : 1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (i)–(iii), а начальная функция u_0 удовлетворяет неравенству

$$\int \left(\sum_{i=1}^N \frac{da_i(0, x, u_0)}{dx_i} \right)^\gamma \varphi(0, x) dx \geq a_0^\gamma R^\varkappa \quad (2.1)$$

с некоторыми $a_0 > 0$ и $\varkappa + \gamma - \Lambda > 0$ при $R > R_0$. Тогда не существует C^2 -решения задачи Коши (1.1), (1.2), удовлетворяющего неравенству

$$|u(t, x)| \leq M \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1} \quad (2.2)$$

в области

$$Q_R = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : \frac{t^2}{R^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{R^{\xi_i}} \right)^2 \leq 2 \right\}$$

при

$$R > R_M = \max \left\{ \left(\frac{K_M}{a_0} \right)^{\gamma/(\gamma+\varkappa-\Lambda)}, R_0 \right\}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (1.13) в силу условия теоремы имеем

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iint |G_0|^{\gamma+1} \varphi dt dx \leq K_M^\gamma R^{\Lambda-\gamma} - a_0^\gamma R^\varkappa$$

для C^2 -решения $u(t, x)$, удовлетворяющего неравенству (2.2).

Отсюда при любом $R > R_M$ с $\varkappa + \gamma - \Lambda > 0$ получаем противоречие

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iint |G_0|^{\gamma+1} \varphi dt dx < 0$$

с предположением о существовании такого решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При условии существования априорной оценки для $|u|_\infty$ в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ предположение об ограниченности $|u|_\infty \leq M$ можно заменить на $|u(t, x)| \leq |u|_\infty$ в $\mathbb{R}_+^{N+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. При условии ограниченности коэффициентов $a_i(t, x, u)$ относительно $u \in \mathbb{R}$ коэффициенты $a_{M,i}^*$ заменяются на

$$a_i^* = a_i^*(\tau, \xi; R) = |a_i(R\tau, R^{\zeta_1}\xi_1, \dots, R^{\zeta_N}\xi_N)|.$$

В силу замены переменных (1.14) и выбора пробной функции φ_0 получаем следующую характеристику области $\Omega_M \subset \mathbb{R}_+^{N+1}$, в которой не существует C^2 -решения задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющего предположениям теоремы 2.1, а именно

$$\Omega_M = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : R_M^{-2} t^2 + \sum R_M^{-2\lambda_i} x_i^2 > 2 \right\}.$$

В частности, для времени T_M существования такого решения имеем оценку сверху

$$T_M \leq \sqrt{2} R_M.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Наличие в формуле для R_M свободного параметра γ

$$\gamma > \max\{\Lambda, \Lambda - \varkappa\} \quad (2.4)$$

позволяет улучшить оценку для R_M , если рассмотреть наименьшую величину R_M при указанных ограничениях.

§ 3. Некоторые приложения

В качестве приложения рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^N a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1} \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varepsilon u_0(x) \quad \text{на } \mathbb{R}^N \quad (3.2)$$

с $\varepsilon > 0$.

В предположении, что $a_i \in C^2(\mathbb{R})$, мы изучаем задачу (3.1), (3.2) в классе функций $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ при условии, что

$$u_0 \in C^1(\mathbb{R}), \quad |u_0(x)| \leq M_0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Тогда, рассматривая левую часть уравнения (3.1) как полную производную решения $u(t, x)$ вдоль характеристики $dx_i/dt = -a_i(u)$, получаем

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = 0.$$

Отсюда следует априорная оценка (3.2)

$$|u(t, x)| \leq \varepsilon_0 M_0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}.$$

Таким образом, первое условие (i) теоремы 2.1 выполнено.

Для анализа второго условия (ii), т.е. неравенства (1.9), подсчитаем выражения G_0 и W_0 для уравнения (3.1).

Имеем

$$G_0 = \sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dx_i} = \sum_{i=1}^N a'_i(u) p_i.$$

Здесь $a'_i(u) = da_i/du$.

Тогда для W_0 имеем

$$W_0 = \sum \sum p_k a'_i(u) a'_k(u) p_i - \sum a'_i(u) p_i \sum a'_i(u) p_i = 0.$$

Следовательно, неравенство (1.9) и вместе с ним условие (ii) выполняется с любым $q_0 \geq 0$.

Для функции W , определяемой формулой (1.7), имеем

$$W = (\gamma - 1) G_0^{\gamma+1} = (\gamma - 1) |G_0|^{\gamma+1}. \quad (3.3)$$

Напомним, что показатель $\gamma > 1$ есть “нечетное” число, т.е. $(-1)^\gamma = -1$, так что $G_0^{\gamma+1} = |G_0|^{\gamma+1}$.

Обратимся теперь к условию (iii) теоремы 2.1.

В силу независимости коэффициентов $a_i = a_i(u)$ от переменных $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^N$ выбираем изотропную замену переменных (1.14), т.е. $\lambda_i = 1$.

Тогда неравенства (1.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \iint \frac{|a_i \varphi_{x_i}|^{\gamma+1}}{\varphi^\gamma} dt dx &\leq \tilde{C}_i a_i^* R^{N-\gamma} \iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|\varphi_{0\xi_i}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^{\gamma+1}} d\tau d\xi, \\ \iint \frac{|a_i \varphi_{x_i}|^{\gamma+1}}{\varphi^\gamma} dt dx &\leq a_i^*(\varepsilon) R^{N-\gamma} A_i^\gamma, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^*(\varepsilon) &= \max_{|u| \leq M_0} |a_i(\varepsilon u)|, \\ A_i^\gamma &= \iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|\varphi_{0\xi_i}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (1.13) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \iint |G_0|^{\gamma+1} \varphi dt dx \leq R^{N-\gamma} K^\gamma(\varepsilon) - \int G_0^\gamma \varphi|_{t=0} dx. \quad (3.5)$$

Здесь

$$K^\gamma(\varepsilon) = C_0 A_0^\gamma + \sum_{i=1}^N a_i^*(\varepsilon) A_i^\gamma,$$

$$A_0^\gamma = \iint_{1 \leq \tau^2 + |\xi|^2 \leq 2} \frac{|\varphi_{0\tau}|^{\gamma+1}}{\varphi_0^\gamma} d\tau d\xi, \quad G_0^\gamma = \varepsilon^\gamma \left(\sum_{i=1}^N a_i'(\varepsilon u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^\gamma.$$

Отсюда, при условии, что

$$\sum_{i=1}^N a_i'(\varepsilon u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \geq 0,$$

$$\int_{|x| \leq R} \left(\sum_{i=1}^N a_i'(\varepsilon u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^\gamma dx \geq a_0^\gamma(\varepsilon_0) R^\varkappa \quad (3.6)$$

на $\mathbb{R}^N$ с $a_0(\varepsilon) > 0$ и $\gamma - N + \varkappa > 0$, из неравенства (3.5) получаем верхнюю оценку для радиуса R^* полушара $B_R^+ \subset \mathbb{R}_+^{N+1}$ с центром в начале координат, в котором может существовать гладкое решение задачи Коши (3.1), (3.2), а именно

$$R^* = R^*(\gamma) = \left(\frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon a_0(\varepsilon)} \right)^{\gamma/(\gamma-N+\varkappa)}. \quad (3.7)$$

Это означает, что в области B_R^+ с $R > R^*$, в частности, при $t > R^*$, не существует гладкого решения задачи Коши при условии (3.6).

Наличие свободного параметра $\gamma > N - \varkappa$ позволяет оптимизировать оценку для R^* , а именно

$$R_* = \inf_{\gamma > N - \varkappa} R^*(\gamma).$$

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим задачу (3.1), (3.2) с коэффициентами

$$a_i(u) = k_i u^{p_i}, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad p_i \geq 2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

В этом случае неравенства (3.6) принимают вид

$$\sum_{i=1}^N p_i k_i (\varepsilon_0 u_0)^{p_i-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \geq 0,$$

$$\int_{|x| \leq R} \left(\sum_{i=1}^N p_i k_i (\varepsilon_0 u_0)^{p_i-1} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^\gamma dx \geq (\varepsilon^{p_0-1} a_0)^\gamma R^\varkappa \quad (3.9)$$

на $\mathbb{R}^N$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с $p_0 = \min\{p_1, \dots, p_N\}$ и $a_0 = \text{const} > 0$.

Тогда оценка (3.7) принимает вид

$$R^*(\gamma) = \left(\frac{K_0}{\varepsilon^{p_0} a_0} \right)^{\gamma/(\gamma-N+\kappa)}$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > N - \kappa$. Здесь $K_0^\gamma = G_0 A_0^\gamma + 1$.

Для получения лучшей оценки R^* следует рассмотреть

$$R_* = \inf_{\gamma > N-\kappa} R^*(\gamma) = \frac{K_0}{\varepsilon^{p_0} a_0}. \quad (3.10)$$

Таким образом, в области $B_R^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : t^2 + |x|^2 \leq R^2, t > 0\}$ с $R > R_*$ задача Коши (3.1), (3.2) с коэффициентами (3.8) при условии (3.9) не имеет C^2 -решения.

В частности, не существует гладкого решения этой задачи при

$$T_\infty > \frac{K_0}{a_0} \varepsilon^{-p_0}. \quad (3.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценка (3.11) является неулучшаемой относительно ε^{-p_0} .

Это вытекает из следующего контрпримера.

КОНТРПРИМЕР 3.2. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t - k_1 u^p u_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u|_{t=0} = \varepsilon u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.12)$$

с $k_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, $p > 1$ и начальной функцией $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей неравенствам

$$u_0(x) > 0, \quad u'_0(x) \geq 0, \quad u'_0(x) \not\equiv 0. \quad (3.13)$$

В частности, $u_0(x) = \pi + \arctg x$.

Определим время “жизни” гладкого решения $u(t, x)$ этой задачи.

С этой целью воспользуемся “квазиинвариантами” Римана. А именно, введем функцию $R(t, x) = \partial u(t, x) / \partial x$. Тогда для этой функции в силу (3.12) получим

$$\frac{\partial R}{\partial t} - k_1 u^p \frac{\partial R}{\partial x} = k_1 p u^{p-1} R^2,$$

т.е.

$$\frac{dR}{dt} = k_1 p u^{p-1} R^2 \quad (3.14)$$

вдоль характеристики

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 u^p. \quad (3.15)$$

Здесь $u = u(t, x)$ есть C^2 -положительное решение задачи (3.12).

Рассмотрим характеристику, исходящую из точки $(0, x_0)$, где

$$u_0(x_0) > 0, \quad u'_0(x_0) > 0,$$

так что

$$R_0 = R|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=0} = \varepsilon u'_0(x_0) > 0. \quad (3.16)$$

Вдоль этой характеристики в силу уравнения (3.12) имеем

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \text{т.е.} \quad u(t, x(t)) = u|_{t=0} = \varepsilon u_0(x_0).$$

Следовательно, уравнение (3.14) принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon^{p-1} a_0 R^2, \quad R|_{t=0} = \varepsilon u'_0(x_0) > 0.$$

Здесь $a_0 = k_1 p u_0^{p-1}(x_0)$.

Отсюда получаем, что

$$R = \frac{R_0}{1 - \varepsilon^{p-1} a_0 R_0 t},$$

т.е.

$$R = \frac{\varepsilon u'_0(x_0)}{1 - \varepsilon^p a_0 u'_0(x_0) t}. \quad (3.17)$$

Таким образом, время существования C^2 -решения задачи Коши (3.12) вдоль этой характеристики определяется формулой

$$T_\infty = \frac{1}{\varepsilon^p a_0 u'_0(x_0)}.$$

Сравнение этой формулы с общей формулой (3.10) показывает, что показатель $p_0 = p$ в формуле (3.10) нельзя заменить на меньший при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Этот результат можно также получить из представления в неявной форме решения $u(t, x)$ задачи (3.12) при условиях (3.13), а именно

$$u = \varepsilon u_0(x + k_1 u^p t).$$

Список литературы

1. *Alinhac S.* Blow-up for nonlinear hyperbolic equations. Boston: Birkhäuser, 1995. (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. V. 17.)
2. *John F.* Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. P. 371–405.
3. *John F.* Nonlinear wave equations, formation of singularities. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Univ. Lecture Ser. V. 2.)
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
6. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234.
7. *Pohozaev S. I., Veron L.* Blow-up results for nonlinear wave hyperbolic inequalities // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). 2001. V. 29. №2. P. 393–420.
8. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). №2. С. 228–255.