Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, Ф. Лоренц, Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:50:27

УДК 512.741

С. В. Востоков, Ф. Лоренц

Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле

На основе построенного в явном виде в предыдущей статье авторов спаривания на кривых Картье конструируется явная формула для символа Гильберта в многомерном локальном поле нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики на формальном модуле одномерной формальной группы Хонды. При доказательстве строится базис Шафаревича на формальном модуле и изучаются так называемые целые μ -модули в специального вида двумерных локальных кольцах (μ -кольцах).

Библиография: 15 названий.

Введение

В статье [1] было построено в явном виде спаривание на модуле кривых Картье формальной группы Хонды в многомерном локальном поле. В настоящей работе на основе этого спаривания мы строим спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ на формальном модуле $\mathcal{H}_F$, проверяем его основные свойства и доказываем совпадение этого спаривания со спариванием Гильберта, что дает для последнего явную формулу.

Такие явные формулы для многомерных групп Хонды над кольцом векторов Витта были получены В. Абрашкиным в [2] при некоторых ограничениях, а для одномерных групп Хонды в произвольном неразветвленном расширении одномерного локального поля – в работе [3]. Подробную библиографию по явным формулам для символа Гильберта можно найти в [4] или [5].

Первый параграф работы носит вспомогательный характер – в нем вводятся основные обозначения и определения.

Во втором параграфе строится спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ и формулируются основные результаты работы (теоремы 1 и 2).

В третьем параграфе мы проверяем корректность построенного спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ (см. п. 3.1); далее проверяем независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по второму аргументу от разложения элементов спаривания в ряды по локальным униформизирующим (см. п. 3.2); в п. 3.3 вычисляем значения спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ на базисе Шафаревича; в следующем п. 3.4 доказываем инвариантность спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ от выбора системы локальных униформизирующих; и наконец, в последнем п. 3.5 третьего параграфа проверяем независимость нашего спаривания по первому аргументу.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00140, 01-01-00997) и Министерства образования РФ (грант № РД02-1.1-37).

Основные теоремы 1 и 2 доказываются в § 4.

Авторы благодарны Sonderforschungsbereich *Geometrische Strukturen* Университета г. Мюнстер за поддержку.

§ 1. Обозначения и вспомогательные утверждения

1.1. Пусть k – n -мерное локальное поле, т.е. конечная последовательность полей $k^{(0)}, k^{(1)}, \dots, k^{(n)} = k$, где $k^{(0)} = \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, и $k^{(i)}$ для $1 \leq i \leq n$ – полное дискретно нормированное поле, для которого $k^{(i-1)}$ является полем вычетов.

Интенсивное изучение таких полей началось в семидесятых годах в работах А. Паршина и К. Като. В настоящее время эти поля уже достаточно исследованы (см., например, [6]).

Для n -мерного локального поля k имеют место следующие структуры:

- 1) дискретное нормирование $v: k^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ранга 1;
- 2) дискретное нормирование $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v): k^* \rightarrow \mathbb{Z}^n$ ранга n .

Все n -мерные локальные поля, которые рассматриваются в статье, предполагаются нулевой характеристики, а простое число $p \neq 2$.

Пусть $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_k$ – кольцо целых относительно нормирования $\bar{v}$, а $t_1, \dots, t_{n-1}$, $t_n = \pi$ – система локальных параметров для $\bar{v}$. Через $\mathfrak{R}$ обозначаем систему представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_q$ в $\mathfrak{o}$. Произвольный элемент $\alpha \in k$ имеет единственное разложение

$$\alpha = \sum_{\bar{\tau} \in I} \theta_{\bar{\tau}} t_1^{r_1} \cdots t_{n-1}^{r_{n-1}} \pi^{r_n}, \quad \theta_{\bar{\tau}} \in \mathfrak{R},$$

где $\bar{\tau} = (r_1, \dots, r_n)$ пробегает некоторый допустимый набор индексов $I = I(\alpha)$ в $\mathbb{Z}^n$. При этом $I \subset \mathbb{Z}^n$ называем допустимым, если для заданных $i_{l+1}, \dots, i_n$ в $\mathbb{Z}$, $l \leq n$, существует $i \in \mathbb{Z}$, для которого выполнено следующее свойство: если $\bar{\tau} = (r_1, \dots, r_l, i_{l+1}, \dots, i_n) \in I$, то $r_l \geq i$ (см. [6]). Мы рассматриваем также разложения вида

$$\alpha = \sum_{\bar{\tau} \in I} a_{\bar{\tau}} t_1^{r_1} \cdots t_{n-1}^{r_{n-1}} \pi^{r_n}$$

с коэффициентами $a_{\bar{\tau}}$ в $\mathfrak{o}_0 := W(\mathbb{F}_q)$, где $W(\mathbb{F}_q)$ – кольцо векторов Витта над $\mathbb{F}_q$; это разложение уже не будет единственным для α .

1.2. Пусть k'/k – конечное неразветвленное расширение n -мерного локального поля k , и пусть Δ обозначает автоморфизм Фробениуса в k'/k . Определим оператор Фробениуса $\blacktriangle$ на кольце $k'((x))$ следующим образом:

$$\blacktriangle : f(x) = \sum c_i x^i \mapsto \blacktriangle f = \sum c_i^\Delta x^{qi}.$$

Пусть $\mathfrak{o}'$ – кольцо целых поля k' относительно n -мерного нормирования $\bar{v}'$.

Обозначим через $\mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]$ некоммутативное кольцо степенных рядов $\sum a_i \blacktriangle^i$, $a_i \in \mathfrak{o}'$, с правилом

$$\blacktriangle a = a^\Delta \blacktriangle, \quad a \in \mathfrak{o}'.$$

1.3. Пусть k'/k – неразветвленное расширение одномерного локального поля k (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$), и пусть $\mathfrak{m}'$ – максимальный идеал кольца целых $\mathfrak{o}'$ поля k' . Одномерную формальную группу F над $\mathfrak{o}'$ называем *группой Хонды*, если существует специальный элемент

$$u = \pi + a_1 \blacktriangle + a_2 \blacktriangle^2 + \dots \in \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]],$$

который для логарифма $\lambda := \lambda(x)$ группы F удовлетворяет условию

$$(u \circ \lambda)(x) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (1)$$

(см. [7]). Если u имеет это свойство, то будем говорить, что группа Хонды F (и соответствующий ей логарифм λ) имеет *тип u* .

Ряд u можно заменить на любой элемент $\tilde{u} = \varepsilon u$, где $\varepsilon = 1 + b_1 \blacktriangle + \dots \in \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]$. Поэтому по подготовительной лемме Вейерштрасса для группы F можно получить следующий канонический тип:

$$u_0 = \begin{cases} \pi, & \text{если } \text{ht } F = \infty, \\ \pi - a_1 \blacktriangle - \dots - a_h \blacktriangle^h, & \text{если } \text{ht } F < \infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_1, \dots, a_{h-1} \in \mathfrak{m}'$, $a_h \in \mathfrak{o}'^\times$ и $\text{ht } F$ – высота группы F . При этом $\text{ht } F$ будет равна h .

Этим каноническим типом группа F однозначно определена (с точностью до изоморфизма). Кроме того, согласно [7; теорема 3]

$$\text{End}_{\mathfrak{o}'}(F) \approx \mathfrak{o}.$$

Если $k = \mathbb{Q}_p$, то любая формальная группа над $\mathfrak{o}'$ является группой Хонды.

Для групп Хонды над $\mathfrak{o}'$ имеют место классификационные теоремы Демченко (см. [8]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть F – группа Хонды над $\mathfrak{o}'$ с логарифмом λ и каноническим типом u_0 (см. (2)). Тогда F имеет также тип

$$\tilde{u} := C^{-1}u_0 = \pi - a_h \blacktriangle^h - a_{h+1} \blacktriangle^{h+1} - \dots,$$

где $C := \pi^{-1}(u_0 + a_h \blacktriangle^h)$.

Запишем $\tilde{u} = \pi - a_h B_1 \blacktriangle^h$. Тогда

1) $\lambda_1 = B_1 \circ \lambda^{\Delta^h}$ – логарифм группы Хонды F_1 над $\mathfrak{o}'$ типа $\tilde{u}_1 = a_h^{-1} \tilde{u} a_h$ и канонического типа $u_1 := a_h^{-1} u_0 a_h$,

2) $f := [\pi/a_h]_{F, F_1} \in \text{Hom}_{\mathfrak{o}'}(F, F_1)$, и $f(x) \equiv x^{q^h} \pmod{\pi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (обратное к предложению 1). Пусть $f(x)$ – произвольный ряд из $\mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]$, удовлетворяющий условиям

$$f(x) \equiv x^{q^h} \pmod{\pi}, \quad f(x) \equiv a_h^{-1} \pi \pmod{x^2}$$

с фиксированной единицей a_h из $\mathfrak{o}'$. Пусть, далее, задан $u_0 = \pi - a_1 \blacktriangle - \dots - a_h \blacktriangle^h$, $a_1, \dots, a_{h-1} \in \mathfrak{m}'$, и пусть $\tilde{u} := C^{-1}u_0$, где $C := \pi^{-1}(u_0 + a_h \blacktriangle^h)$.

Тогда существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа Хонды F типа $\tilde{u}$ и канонического типа u_0 такая, что $f = [\pi/a_h]_{F, F_1}$ – изогения F в формальную группу Хонды F_1 , которая определяется однозначно по F в соответствии с предложением 1.

Для группы Хонды над $\mathfrak{o}'$ получаем отображение

$$\mathcal{A}: F \mapsto F_1$$

и последовательность гомоморфизмов f_m групп Хонды $F_m := \mathcal{A}^m F$:

$$F \xrightarrow{f} F_1 \xrightarrow{f_1} F_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{N-1} \xrightarrow{f_{N-1}} F_N. \quad (3)$$

Обозначим через λ_m логарифм F_m и через B_m – оператор из предложения 1, который соответствует λ_m . Канонический тип F_m обозначаем через

$$u_m = \pi - a_1^{(m)} \blacktriangle - \dots - a_h^{(m)} \blacktriangle^h.$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= \frac{\pi}{a_h}, \quad \pi_m := \pi_1^{\Delta^{h(m-1)}} = \frac{\pi}{a_h^{\Delta^{h(m-1)}}}, \\ \pi_1^{(m)} &= \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m = \frac{\pi^m}{a_h^{1+\Delta^h+\dots+\Delta^{h(m-1)}}}, \\ f^{(m)} &= f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \dots \circ f_1 \circ f. \end{aligned} \quad (4)$$

1.4. Многомерный символ Гильберта для групп Хонды. Пусть k_c – одномерное локальное поле, и предположим, что k – n -мерное локальное поле типа $k = k_c\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$. Пусть k'_c и k' – неразветвленные расширения полей k_c и k соответственно; пусть $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{m}$ – кольцо целых и максимальный идеал в k_c . Фиксируем группу Хонды F над кольцом целых $\mathfrak{o}'$ поля k'_c .

Положим

$$W_F^N := \{\alpha \in F(\widehat{\mathfrak{M}}); [\pi^N]_F(\alpha) = 0\} = \text{Ker}[\pi^N]_F,$$

где $F(\widehat{\mathfrak{M}})$ – формальный $\mathfrak{o}$ -модуль группы F на максимальном идеале $\widehat{\mathfrak{M}}$ кольца целых пополнения $\widehat{\Omega}$ алгебраического замыкания поля k .

Обозначим далее:

K – конечное расширение поля k' , содержащее W_F^N ;

$\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ – n -мерное нормирование на K ;

$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал относительно нормирования $\bar{v}$;

Π – простой элемент в K относительно v_n ;
 e – индекс ветвления K/k относительно v_n ;
 $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – индекс ветвления K/k относительно $\bar{v}$;
 $\bar{e}_i = \bar{e} / ((q^h - 1)q^{h(i-1)})$ для $1 \leq i \leq N$;
 $\bar{e}_* = (e_1^*, \dots, e_n^*) = q^h \bar{e} / (q^h - 1)$;
 $T = k_c^{nr} \cap K$;
 $\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T ;
 Tr – оператор следа в T/k_c ;
 $T_0 = \text{Quot}(W(K^{(0)}))$ – поле отношений кольца векторов Витта, Δ_0, Δ – автоморфизмы Фробениуса в $T_0/\mathbb{Q}_p$, k'/k соответственно; при этом $\Delta|_{T_0} = \Delta_0^f$, где $p^f = q$;
 $\Psi_K: K_n^{\text{top}}(K) \rightarrow \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ – отображение взаимности à la Паршин–Като из топологической группы Милнора в группу Галуа максимального абелева расширения поля K (см. [9]–[11]).
 Модуль W_F^N изоморфен $(\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^N)^h$ и имеет, таким образом, h образующих (см. [12; §1] и [13; теорема 1]). Фиксируем систему образующих $z_1, \dots, z_h$ $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N . Для каждого $z = z_i$ имеем

$$\bar{v}(z) = \frac{\bar{e}}{(q^h - 1)q^{(N-1)h}} = \bar{e}_N$$

(см. [1; 1.5, лемма 3]).

Пусть $\mathcal{H}_F$ – модуль кривых Картье для группы F (см. [1; 1.8]) и

$$\begin{aligned} \eta_F: \mathcal{H}_F &\rightarrow F(\mathfrak{M}), \\ \alpha(X) &\mapsto \alpha(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi), \end{aligned}$$

– гомоморфизм $\mathfrak{o}$ -модулей. Для каждого $\alpha \in F(\mathfrak{M})$ выбираем прообраз $\underline{\alpha} \in \mathcal{H}_F$ такой, что $\underline{\alpha}(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi) = \alpha$.

Рассмотрим следующие элементы из $\mathfrak{o}_T[[X]]$:

$$\begin{aligned} s_m &:= f^{(m)} \circ \underline{z}, \quad 1 \leq m \leq N; \\ \text{Eis}_F(X) &:= s_N / s_{N-1} = V \circ \underline{z}, \quad \text{где } V = f^{(N)} / f^{(N-1)}; \\ W^{(m)} &:= \pi_1^{(m)} \lambda \circ \underline{z}, \quad W := W^{(N)}, \quad W_i := \pi_1^{(N)} \lambda \circ \underline{z}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим многомерный символ Гильберта для группы Хонды F следующим образом:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) &= (\cdot, \cdot)_{F,K}^N: K_n^{\text{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \rightarrow W_F^N, \\ (\alpha, \beta)_{F,K}^N &= \Psi_K(\alpha)(\tilde{\beta}) -_F \tilde{\beta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{\beta} \in \widehat{\mathfrak{M}}$ удовлетворяет $[\pi^N]_F(\tilde{\beta}) = \beta$.

Символ Гильберта имеет следующие свойства.

Н.1. $(\cdot, \cdot)_{F,K}^N$ аддитивен по первому аргументу и $\mathfrak{o}$ -линеен по второму.

Н.2. $(\alpha, \beta)_{F,K}^N = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – норма в $K_n^{\text{top}}(K(\tilde{\beta}))$.

Н.3. Если L/K – конечное расширение, то

- 1) $(\alpha, \beta)_{F,L}^N = (\alpha, \text{Nm}_{L/K}^{(F)}(\beta))_{F,K}^N$ для $\alpha \in K_n^{\text{top}}(K)$, $\beta \in F(\mathfrak{M}_L)$, где $\text{Nm}_{L/K}^{(F)}(\beta) := \sum_{\sigma \in (F)} \sigma(\beta)$;
- 2) $(\alpha, \beta)_{F,L}^N = (\text{Nm}_{L/K}(\alpha), \beta)_{F,K}^N$ для $\alpha \in K_n^{\text{top}}(L)$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$.

Н.4. Если G – группа, изоморфная F , и $f(x) \in \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]$, $f(0) = 0$, – изоморфизм, т.е. $G = f(F(f^{-1}(x), f^{-1}(y)))$, то

$$(\alpha, \beta)_{G,K}^N = f((\alpha, f^{-1}(\beta))_{F,K}^N), \quad \alpha \in K_n^{\text{top}}(K), \quad \beta \in G(\mathfrak{M}).$$

Доказательства для одномерного случая можно найти в [14], а в многомерном случае они аналогичны.

Нам нужно также обобщение символа Гильберта, которое использует изогению $f^{(N)}$ (см. (4) и [1; 1.4]). А именно рассмотрим спаривание

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}_F &= \{\cdot, \cdot\}_{F,K}^N : K_n^{\text{top}}(K) \times F_N(\mathfrak{M}) \rightarrow W_F^N, \\ \{\alpha, \beta\}_{F,K}^N &= \Psi_K(\alpha)(\overline{\beta}) -_F \overline{\beta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f^{(N)}(\overline{\beta}) = \beta$.

Нетрудно проверить свойства Н.1–Н.3 для нашего спаривания. Свойство Н.4 будет выглядеть несколько иначе. Пусть $\mathfrak{E}: G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп Хонды и $\mathfrak{E}_N$ – соответствующий гомоморфизм групп G_N и F_N из последовательности (3) для G и F , т.е. $\mathfrak{E}_N \circ g^{(N)} = f^{(N)} \circ \mathfrak{E}_N$. Тогда имеем

Н.4'. $\{\alpha, \mathfrak{E}_N(\beta)\}_F = \mathfrak{E}(\{\alpha, \beta\}_G)$.

Кроме того, имеется свойство, которое связывает два спаривания $(\cdot, \cdot)_F$ и $\{\cdot, \cdot\}_F$:

Н.5. $(\alpha, \beta)_F = \{\alpha, [\pi_1^{(N)}/\pi_N]_{F,F_N}(\beta)\}_F$.

Это свойство вытекает из определений обоих спариваний и равенств

$$\begin{aligned} [a]_{F,F_N} &= \lambda_N^{-1} \circ a \circ \lambda, \quad a \in \mathfrak{o}', \\ f^{(N)} &= \lambda_N^{-1} \circ \pi_1^{(N)} \circ \lambda. \end{aligned}$$

§ 2. Формулировка результатов

Спаривание $[\cdot, \cdot]_{F,\mathscr{P}}$ в теореме 1 работы [1] было определено для произвольного примарного ряда $\mathscr{P}$. Нам нужно выбрать теперь ряд $\mathscr{P}$ так, чтобы получившееся спаривание индуцировало символ Гильберта над K . Для этого возьмем в качестве $\mathscr{P}$ ряд W (см. (5)). В п. 3.1.6 ниже мы показываем, что W – примарный ряд в смысле [1; 2.2, определение 6].

Пусть $z_1, \dots, z_h$ – образующие $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N и $W_i := \pi_1^{(N)} \lambda \circ \underline{z}_i$, где $\underline{z}_i = z_i(X)$ – ряд из $\mathfrak{o}_T[[X]]_0$ такой, что $\underline{z}_i(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi) = z_i$ (см. (5)). Рассмотрим матрицу

$$A = (\blacktriangle^{i-1} W_j)_{1 \leq i, j \leq h}.$$

Положим

$$\Gamma_j = (\det A)^{-1} (-1)^{j+1} A_{j1},$$

где A_{j1} – минор матрицы A .

В предложении 3 мы покажем, что Γ_j – примарный ряд. Определим теперь спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_F: K_n(\mathcal{H}_m) \times \mathcal{H}_{F_N} \rightarrow W_F^N \quad (8)$$

по формуле

$$\langle \alpha, \beta \rangle_F = \sum_{j=1}^h {}_{(F)}[\mathrm{Tr}[\alpha, \beta]_{F, \Gamma_j}]_F(z_j),$$

где Tr – оператор следа в T/k . Пусть $\mathcal{H}_{\mathrm{Eis}}$ – подгруппа в $K_n(\mathcal{H}_m)$, порожденная символами $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, для которых хотя бы один из элементов α_i лежит в U_{Eis} (см. [1; 1.6, (16)]). Пусть, далее, U_{F_N} обозначает подгруппу из $\mathcal{H}_{F_N}$, определенную в [1; 1.8, предложение 4].

ТЕОРЕМА 1. *Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ индуцирует спаривание*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_F: K_n(\mathcal{H}_m)/(\mathcal{H}_{\mathrm{Eis}} + p^N K_n(\mathcal{H}_m)) \times \mathcal{H}_{F_N}/(U_{F_N} + {}_{F_N}f^{(N)}(\mathcal{H}_{F_N})) \rightarrow W_F^N,$$

и это спаривание невырождено по второму аргументу.

Используя теорему 1, мы проверим главный результат работы.

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$, и пусть $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n$ – прообразы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в $\mathcal{H}_m$, а $\underline{\beta}$ – прообраз β в $\mathcal{H}_F$ (см. [1; 1.6, (15)] и [1; 1.8, (19)]). Пусть $u = \pi - a_1 \blacktriangle - \dots - a_h \blacktriangle^h$ – канонический тип формальной группы F (см. (2)). Используем функции

$$l_F(\underline{\beta}) = \left(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\right) (\lambda \circ \underline{\beta}),$$

$$l_j(\underline{\alpha}_i) = \frac{1}{q^j} \log \frac{\underline{\alpha}_i^{q^j}}{\underline{\alpha}_i^{\blacktriangle^j}}$$

(см. [1; 1.9] и [1; 2.3, (35)]). Кроме того, для образующих $z_1, \dots, z_h$ $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N рассмотрим

$$S_j = \lambda([\pi^N]_F(z_j)).$$

ТЕОРЕМА 2. *Для обобщенного символа Гильберта имеет место следующая явная формула:*

$$(\alpha, \beta)_F = \sum_{k=1}^h {}_{(F)}[\mathrm{Tr} \, \mathrm{res}_{X_1, \dots, X_n} \Phi(X) V_k(X)]_F(z_k),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(X) &:= l_F(\underline{\beta}) \underline{\alpha}_1^{-1} d\underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_n^{-1} d\underline{\alpha}_n \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h a_j l_j(\underline{\alpha}_i) \underline{\alpha}_1^{-1} d\underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_{i-1}^{-1} d\underline{\alpha}_{i-1} \\ &\quad \wedge \frac{1}{q^j} d\blacktriangle^j \lambda(\underline{\beta}) \wedge \frac{1}{q^j} \underline{\alpha}_{i+1}^{-\blacktriangle^j} d\underline{\alpha}_{i+1}^{\blacktriangle^j} \wedge \dots \wedge \frac{1}{q^j} \underline{\alpha}_n^{-\blacktriangle^j} d\underline{\alpha}_n^{\blacktriangle^j}, \\ V_k(X) &= (-1)^{k+1} \frac{B_{k1}}{\det B}, \\ B &= (\blacktriangle^{i-1} S_j)_{1 \leq i, j \leq h}. \end{aligned}$$

§ 3. Свойства спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$

3.1. Корректность определения спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$.

3.1.1. Прежде чем доказывать теорему 1, мы должны проверить, что спаривание (8) корректно задано. Мы уже убедились, что ряд $\Phi_N(\alpha, \beta)$, входящий в определение спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, имеет целые коэффициенты (см. [1; 2.3, лемма 8]). Следующим шагом будет проверка следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Ряд*

$$\Gamma_j = (-1)^{j+1} \frac{A_{j1}}{\det A} \quad (9)$$

является примарным в каждом μ -целом модуле

$$X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu, \quad \frac{1}{q^h} \leq \mu < \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}}.$$

(Определения колец $\mathcal{L}$ и L см. в [1; 2.1].)

Это предложение не является тривиальным, и мы должны предварительно доказать несколько вспомогательных результатов.

3.1.2. Главными объектами нашего исследования являются ряды (и обратные им) вида

$$D \blacktriangle^k W^{(\varkappa)}, \quad D \equiv 1 \pmod{\blacktriangle \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]},$$

где $W^{(\varkappa)} = \lambda_\varkappa(s_\varkappa)$ (см. (5)). Для $\varkappa = 0$: $\lambda_0 = \lambda$, $s_0 = z$ и $W^{(0)} = \lambda(z)$.

ЛЕММА 1. 1) *Ряды $D \blacktriangle^k W^{(\varkappa)}$ и $(D \blacktriangle^k W^{(\varkappa)})^{-1}$ являются главными единицами в кольце $L_{\mu q^{h(N-\varkappa)-k}}$ степеней $\bar{e}_*/q^{h(N-\varkappa)-k}$ и $-\bar{e}_*/q^{h(N-\varkappa)-k}$ соответственно для $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^h} \right)$. Кроме того, модули*

$$X^{\bar{e}_*/q^{h(N-\varkappa)-k}} \mathcal{L}_{\mu q^{h(N-\varkappa)-k}} \quad \text{и} \quad X^{-\bar{e}_*/q^{h(N-\varkappa)-k}} \mathcal{L}_{\mu q^{h(N-\varkappa)-k}}$$

являются μ -целыми μ -собственными модулями рядов $D \blacktriangle^k W^{(\varkappa)}$ и $(D \blacktriangle^k W^{(\varkappa)})^{-1}$ соответственно (см. определения в [1; 2.1]).

2) *Пусть $W_i^{(\varkappa)} = \lambda_\varkappa(s_\varkappa^{(i)})$ (см. (5)). Тогда ряды*

$$\frac{D \blacktriangle^k W_i^{(\varkappa)}}{D \blacktriangle^k W_j^{(\varkappa)}}, \quad 1 \leq i, j \leq h,$$

являются главными единицами в кольце

$$\mathcal{L}_{\mu q^{h(N-\varkappa)-k}}, \quad \mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^h} \right), \quad (10)$$

и мы назовем кольцо (10) μ -целым модулем этих рядов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва ряд $W := W^{(N)} = \pi_1^{(N)} \lambda(z)$ (см. (5)), где $\pi_1^{(N)} = \pi^N / a_h^{1+\Delta^h+\dots+\Delta^{h(N-1)}}$.

Обозначим $1/a_h^{1+\Delta^h+\dots+\Delta^{h(N-1)}}$ через $a \in \mathfrak{o}^\times$, тогда согласно [1; 1.4, лемма 2] ряд W можно представить в виде

$$W = a\pi^N \lambda(z) = a(\pi^N c_0 z + \pi^{N-1} c_1 z^{q^h} + \pi^{N-2} c_2 z^{q^{2h}} + \dots),$$

где $c_i \in \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]^\times$. Отсюда

$$\begin{aligned} W &= az^{q^{Nh}} \left(c_N + \pi c_{N-1} z^{q^{(N-1)h} - q^{Nh}} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \pi c_0 z^{1 - q^{Nh}} + \sum_{k \geq 1} \frac{c_{N+k}}{\pi^k} z^{q^{(N+k)h} - q^{Nh}} \right) = az^{q^{Nh}} \cdot \varepsilon(X). \end{aligned}$$

Согласно [1; 1.5, лемма 3] имеем

$$az^{q^{Nh}} = b_0(X) X^{e_*}, \quad (11)$$

где $b_0 \in \mathfrak{o}_T[[X]]^\times$ и $e_* = \frac{q^h e}{q^h - 1}$.

Непосредственно проверяем, что все ряды

$$\pi^k c_{N-k} z^{q^{(N-k)h} - q^{Nh}}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

принадлежат кольцам $\mathcal{L}_\mu$ для $\mu \geq 1/q^h$, причем нормирование ν на этих рядах положительно (см. [1; 2.1.1, (31)]). А ряды

$$\frac{c_{N+k}}{\pi^k} z^{q^{(N+k)h} - q^{Nh}}, \quad k \geq 1,$$

лежат в кольцах $\mathcal{L}_\mu$, $\mu \leq 1$. Поэтому ряд $\varepsilon(X)$ является главной единицей в кольцах $\mathcal{L}_\mu$ для $\mu \in [1/q^h, 1]$ согласно [1; 2.1.1, определение 2]. Поэтому с учетом (11) ряд W будет главной единицей порядка e_* в кольцах $\mathcal{L}_\mu$, $\mu \in [1/q^h, 1]$. Так как главные единицы в кольце $\mathcal{L}_\mu$ образуют мультипликативную группу, то ясно, что ряд W^{-1} будет главной единицей порядка $-e_*$ в тех же кольцах $\mathcal{L}_\mu$, $\mu \in [1/q^h, 1]$.

Если при этом $\mu < \frac{q^h - 1}{q^h}$, то модуль $X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$ является μ -целым, так как

$$\mu \bar{e}_* < \frac{q^h - 1}{q^h} \bar{e}_* = \bar{e}$$

(см. [1; 2.1.2, лемма 6]), и мы проверили второе условие нашей леммы.

Докажем наше утверждение для рядов DW и $(DW)^{-1}$, $D \equiv 1 \pmod{\blacktriangle \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]}$. Записав ряд $c\blacktriangle^k W$, $c \in \mathfrak{o}'$, в виде

$$c\blacktriangle^k W = X^{\bar{e}_*} f(X),$$

нетрудно убедиться, что ряд $f(X) \in \mathcal{L}_\mu$, $\mu \in [1/q^h, 1]$, и при этом свободный член ряда $f(X)$ делится на π . Поэтому $(1 + c\blacktriangle^k)W$ и, аналогично, DW представим в виде

$$DW = X^{\bar{e}_*} \varepsilon(X),$$

$\varepsilon(X)$ — главная единица в кольцах $\mathcal{L}_\mu$, $\mu \in [1/q^h, 1]$, а значит,

$$(DW)^{-1} = X^{-\bar{e}_*} \varepsilon(X)^{-1}$$

— главная единица порядка $-\bar{e}_*$ в кольцах $\mathcal{L}_\mu$.

Общий случай леммы проверяется аналогично.

3.1.3. В нашем исследовании ряды

$$W^{(\varkappa)} = \lambda_\varkappa(s_\varkappa), \quad 0 \leq \varkappa \leq N,$$

будут играть особую роль.

Используя связь между логарифмами $\lambda_\varkappa$ и $\lambda_{\varkappa-1}$:

$$\lambda_\varkappa \circ f_{\varkappa-1} = \pi_\varkappa \circ \lambda_{\varkappa-1}, \quad \pi_\varkappa = \frac{\pi}{a_h^{\Delta^h(\varkappa-1)}}$$

(см. п. 2) предложения 1 и (4)), мы получим соотношения

$$W^{(N)} = \pi_N W^{(N-1)} = \pi_N \pi_{N-1} W^{(N-2)} = \dots = \pi_N \pi_{N-1} \dots \pi_1 W^{(0)}, \quad (12)$$

где $W^{(0)} = \lambda(z)$. Пусть

$$W_i := W_i^{(N)} = \lambda_N(s_N^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq h,$$

где $s_N^{(i)} = f^{(N)}(\underline{z}_i)$ и $z_1, \dots, z_h$ — образующие $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N . Пусть

$$\varphi_{ij} = \frac{W_i}{W_j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq h. \quad (13)$$

Тогда из леммы 1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Ряды $\blacktriangle^k W_i$, $1/\blacktriangle^k W_i$, $0 \leq k \leq h-1$, являются главными единицами степеней $q^k \bar{e}_*$ и $-q^k \bar{e}_*$ соответственно в кольцах L_{μ/q^k} , $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^h}\right)$. Кроме того, μ -собственные модули $X^{q^k \bar{e}_*} \mathcal{L}_{\mu/q^k}$ и $X^{-q^k \bar{e}_*} \mathcal{L}_{\mu/q^k}$ являются μ -целыми.

2) Ряды $\blacktriangle^k \varphi_{ij}$ являются главными единицами в кольцах $\mathcal{L}_{\mu/q^k}$, $0 \leq k \leq h-1$, $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^h}\right)$.

3) Ряды $\blacktriangle^k W_i$, $1/\blacktriangle^k W_i$, $\blacktriangle^k \varphi_{ij}$, $0 \leq k \leq h-1$, $1 \leq i \neq j \leq h$, являются главными единицами в кольцах L_μ , $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^{2h-1}}\right)$. Кроме того, все эти ряды являются μ -целыми в смысле [1; 2.1.2, определение 4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ряд W может принадлежать различным типам модулей. Например, согласно (12) имеем

$$W = \pi_N \cdots \pi_{\varkappa+1} W^{(\varkappa)} \in \pi^{N-\varkappa} X^{\bar{e}_*/q^h(N-\varkappa)} \mathcal{L}_{\mu q^h(N-\varkappa)},$$

где $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^h} \right)$. Однако при этом он не будет главной единицей в соответствующем кольце $L_{\mu q^h(N-\varkappa)}$. Поэтому мы рассматриваем для ряда W только его μ -собственные подмодули.

3.1.4. Пусть $B_1, B_2, \dots$ – операторы, соответствующие формальным группам $F, F_1, \dots$ (см. предложение 1 и (3)). Пусть λ_m – логарифм формальной группы F_m и $W^{(m)} = \lambda_m(s_m)$.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие сравнения:*

- 1) $W^{(m)} \equiv B_{m-1} \blacktriangle^h W^{(m-1)} \pmod{\pi^m \mathfrak{o}_T[[X]]},$
- 2) $(u_N \pi^{-1}) W_i \equiv 0 \pmod{\pi^N \mathfrak{o}_T[[X]]}, 1 \leq i \leq h,$

где u_N – канонический тип формальной группы F_N (см. (3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Тип $\tilde{u}_{m-1} = \pi - (\pi/\pi_m) B_{m-1} \blacktriangle^h$ соответствует каноническому типу u_{m-1} формальной группы F_{m-1} и является эквивалентным ему (см. предложение 1). Поэтому

$$\begin{aligned} \pi_1^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h \pi_1^{(m-1)} &= (\pi_m - B_{m-1} \blacktriangle^h) \pi_1^{(m-1)} = \frac{\pi_m}{\pi} \cdot \tilde{u}_{m-1} \circ \pi_1^{(m-1)} \\ &= \frac{\pi_m}{\pi} \cdot \pi_1^{(m-1)} \tilde{u} \end{aligned}$$

(см. [1; 1.4, лемма 1, п. (3)]). Остается заметить, что

$$W^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h W^{(m-1)} = (\pi_1^{(m)} - B_{m-1} \blacktriangle^h \pi_1^{(m-1)}) \lambda \circ z = \frac{\pi_m}{\pi} \cdot \pi_1^{(m-1)} (\tilde{u} \circ \lambda) \circ z$$

и

$$\tilde{u} \circ \lambda \equiv 0 \pmod{\pi \mathfrak{o}'[[X]]}.$$

2) Так как u_N эквивалентен типу $\tilde{u}_N = \pi - (\pi/\pi_{N+1}) B_N \blacktriangle^h$, то достаточно проверить, что

$$(\pi_{N+1} - B_N \blacktriangle^h) W^{(N)} \equiv 0 \pmod{\pi^{N+1}}.$$

С другой стороны,

$$\pi_{N+1} W^{(N)} = \pi_{N+1} \pi_1^{(N)} \lambda \circ z = \pi_1^{(N+1)} \lambda \circ z = W^{(N+1)},$$

и наше утверждение следует из п. 1).

3.1.5. Пусть k_h – неразветвленное расширение степени h поля k_c , Пусть $\mathfrak{o}_h$ – кольцо целых и $\mathfrak{R}_h$ – система Тейхмюллера в поле k_h . Пусть $z_1, \dots, z_h$ – образующие $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N . Аналогично лемме 1.2 из [12] (см. также лемму 4 в [13]) можно проверить следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Существуют элементы $\theta_{ij} \in \mathfrak{R}_h$, $1 \leq i, j \leq h$, такие, что

$$z_i \equiv \theta_{ij} z_j \pmod{\Pi^{2e'_n} \mathfrak{o}_K} \quad \text{для всех } i, j,$$

где $e'_n = e_n / ((q^h - 1)q^{h(N-1)})$ (см. [1; 1.5]). Кроме того, для каждого j элементы $\theta_{1j}, \dots, \theta_{hj}$ образуют базис $\mathfrak{o}$ -модуля $\mathfrak{o}_h$. Кроме того, $k_h \subset T$. Наконец,

$$\theta_{ik} \theta_{kj} = \theta_{ij}.$$

ЛЕММА 4. Найдутся элементы $v_1, \dots, v_h \in \mathfrak{o}_h$ такие, что для всех $1 \leq i, j \leq h$ выполнено равенство

$$\mathrm{Tr}_h(v_i \theta_{ji}) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — функция Мёбиуса, а $\mathrm{Tr}_h := \mathrm{Tr}_{k_h/k}$. Кроме того,

1) матрица $\Theta_k = (\theta_{jk}^{\Delta^{i-1}})_{1 \leq i, j \leq h}$ обратима и обратной к ней является матрица

$$\Theta_k^{-1} = ((\theta_{ki} v_i)^{\Delta^{j-1}})_{1 \leq i, j \leq h}; \quad (14)$$

2) для любого $b \in \mathfrak{o}_T$

$$\mathrm{Tr}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) = \delta_{ij} \cdot \mathrm{Tr} b,$$

где $\widehat{b} = b + b^\Delta + \dots + b^{\Delta^{h-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент v_i является i -м элементом двойственного базиса к $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \dots, \theta_{hi}$ относительно спаривания

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_h(xy)$$

(по предыдущей лемме $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \dots, \theta_{hi}$ образуют базис кольца $\mathfrak{o}_h$).

Далее, по построению элементов θ_{ji} для всех $1 \leq i, j, k \leq h$ мы имеем $\theta_{ji} \theta_{ik} = \theta_{jk}$, поэтому

$$\sum_{m=1}^{h-1} (\theta_{ik}^{\Delta^m} v_k^{\Delta^m}) \theta_{ji}^{\Delta^m} = \sum_{m=0}^{h-1} (\theta_{jk} v_k)^{\Delta^m} = \mathrm{Tr}_h(\theta_{jk} v_k) = \delta_{kj}.$$

Таким образом, матрица (14) является обратной к Θ_k . Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) &= \mathrm{Tr}_h \circ \mathrm{Tr}_{T/k_h}(v_i \theta_{ji} \widehat{b}) = \mathrm{Tr}_h(v_i \theta_{ji} \mathrm{Tr}_{T/k_h} \widehat{b}) \\ &= \mathrm{Tr}_h(v_i \theta_{ji} \mathrm{Tr} b) = \mathrm{Tr} b \cdot \mathrm{Tr}_h(v_i \theta_{ji}) = \delta_{ij} \mathrm{Tr} b. \end{aligned}$$

3.1.6. Начиная с этого места, мы фиксируем интервал для μ :

$$\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}} \right). \quad (15)$$

Чтобы проверить корректность задания ряда Γ_j (см. (9)), нам нужна следующая

ЛЕММА 5. Для любого ряда φ_{ij} (см. (13)) и любого k , $0 \leq k \leq h-1$, в кольце $\mathcal{L}_\mu$ выполнены сравнения:

$$\blacktriangle^k \varphi_{ij} \equiv \theta_{ij}^{\Delta^k} \pmod{(X\mathcal{L}_\mu^+; \pi^N \mathcal{L}_\mu)},$$

где $\theta_{ij} \in \mathfrak{R}^\times$, т.е. существуют ряды $\psi_k \in X\mathcal{L}_\mu^+$, $\deg \psi_k > \bar{0}$, и $\Lambda_k \in \mathcal{L}_\mu$, такие, что

$$\blacktriangle^k \varphi_{ij} = \theta_{ij} + \psi_k + \pi^N \Lambda_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $D \equiv 1 \pmod{\blacktriangle \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]}$ – некоторый оператор в кольце $\mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]$. Рассмотрим дробь

$$\frac{D\blacktriangle^{hk}W_i}{D\blacktriangle^{hk}W_j}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Вообще говоря, мы можем, используя (12), представить эту дробь различным образом и получать при этом главные единицы в кольцах $\mathcal{L}_{\mu q^{h(N-\varkappa-k)}}$ (см. лемму 1). Но мы должны использовать только те кольца L_μ и соответствующие им модули, в которых ряды W_i и W_j являются главными единицами. Это возможно тогда и только тогда, когда $\varkappa + k = N$. Поэтому, используя (12), получаем

$$\begin{aligned} D\blacktriangle^{hk}W_i &= D\blacktriangle^{hk}\pi_N\pi_{N-1}\cdots\pi_{N-k+1}W_i^{(N-k)} \\ &= \pi^k\varepsilon \cdot \lambda_{N-k}(D\blacktriangle^{hk}s_{N-k}^{(i)}) = \pi^k\varepsilon \cdot D\blacktriangle^{hk}W_i^{(N-k)}, \end{aligned}$$

где $\pi^k\varepsilon = D\blacktriangle^{hk}(\pi_N\pi_{N-1}\cdots\pi_{N-k+1})$ и ε – единица в кольце $\mathfrak{o}'$ (см. определение π_N).

Применяя лемму 1, имеем

$$D\blacktriangle^{hk}W_i^{(N-k)} = X^{\bar{e}_*}\varepsilon_i(X),$$

где $\varepsilon_i(X)$ – главная единица $\mathcal{L}_\mu$. Поэтому

$$\frac{D\blacktriangle^{hk}W_i}{D\blacktriangle^{hk}W_j} = \frac{\pi^k\varepsilon \cdot X^{\bar{e}_*}\varepsilon_i(X)}{\pi^k\varepsilon \cdot X^{\bar{e}_*}\varepsilon_j(X)} = \frac{\varepsilon_i(X)}{\varepsilon_j(X)} \in \mathcal{L}_\mu^\times. \quad (16)$$

Аналогично

$$\frac{D\blacktriangle^hW_i}{\pi_{N+1}W_j} = \frac{X^{\bar{e}_*}\varepsilon_i(X)}{X^{\bar{e}_*}\eta_j(X)} = \frac{\varepsilon_i(X)}{\eta_j(X)} \in \mathcal{L}_\mu^\times. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что произведение

$$\frac{D\blacktriangle^hW_i}{D\blacktriangle^hW_j} \cdot \frac{D\blacktriangle^hW_j}{\pi_{N+1}W_j} = \frac{D\blacktriangle^hW_i}{\pi_{N+1}W_j}$$

корректно определено в кольце $\mathcal{L}_\mu$. Полагая $D := B_N$ (см. предложение 1 и (3)), получаем, что следующее равенство корректно определено в кольце $\mathcal{L}_\mu$:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} = \frac{W_i}{W_j} &= \frac{B_N \blacktriangle^h W_i}{B_N \blacktriangle^h W_j} \cdot \left(1 + \frac{B_N \blacktriangle^h W_j - \pi_{N+1} W_j}{\pi_{N+1} W_j} \right) \\ &+ \frac{\pi_{N+1} W_i - B_N \blacktriangle^h W_i}{\pi_{N+1} W_j}. \end{aligned} \quad (18)$$

2) По определению ряда W_j (см. (5)) имеем

$$\pi_{N+1} W_j = \pi_{N+1} \cdot \pi^{(N)} \lambda \circ \underline{z}_j = \pi^{(N+1)} \lambda \circ \underline{z}_j = W_j^{(N+1)}.$$

Учитывая сравнение 1) леммы 2 и определение π_{N+1} (см. (4)), получаем

$$\frac{B_N \blacktriangle^h W_j - \pi_{N+1} W_j}{\pi_{N+1}} = \frac{B_N \blacktriangle^h W_j - W_j^{(N+1)}}{\pi_{N+1}} \in \pi^N \mathfrak{o}_T[[X]].$$

В этом равенстве ряд

$$\frac{B_N \blacktriangle^h W_j}{\pi_{N+1}} \in X^{\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu,$$

так как

$$B_N \blacktriangle^h W_j = B_N \blacktriangle^h \pi_N W_j^{(N-1)} = \pi \varepsilon \cdot B_N \blacktriangle^h W_j^{(N-1)}$$

и

$$B_N \blacktriangle^h W_j^{(N-1)} \in X^{\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$$

(см. п. 1) леммы 1). Кроме того, $\frac{\pi_{N+1} \cdot W_j}{\pi_{N+1}} = W_j \in X^{\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$. Поэтому

$$\frac{B_N \blacktriangle^h W_j - \pi_{N+1} W_j}{\pi_{N+1}} \in X^{\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu \cap \pi^N \mathfrak{o}_T[[X]].$$

Отсюда, используя тот факт, что $1/W_j \in X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$ (см. п. 1) леммы 1), получаем

$$\frac{B_N \blacktriangle^h W_j - \pi_{N+1} W_j}{\pi_{N+1} W_j} \in \pi^N \mathcal{L}_\mu.$$

Аналогично

$$\frac{\pi_{N+1} W_i - B_N \blacktriangle^h W_i}{\pi_{N+1} W_j} \in \pi^N \mathcal{L}_\mu.$$

Отсюда и из (18) следует

$$\varphi_{ij} - \frac{B_N \blacktriangle^h W_i}{B_N \blacktriangle^h W_j} \in \pi^N \mathcal{L}_\mu.$$

Действуя далее таким же образом, получаем

$$\frac{B_N \blacktriangle^h W_i}{B_N \blacktriangle^h W_j} - \frac{B_{N+1} \blacktriangle^h (B_N \blacktriangle^h W_i)}{B_{N+1} \blacktriangle^h (B_N \blacktriangle^h W_j)} \in \pi^N \mathcal{L}_\mu.$$

В результате таких операций имеем

$$\varphi_{ij} - \frac{B_{2N} B_{2N-1}^{\Delta^h} \cdots B_N^{\Delta^{hN}} \blacktriangle^{hN} W_i}{B_{2N} B_{2N-1}^{\Delta^h} \cdots B_N^{\Delta^{hN}} \blacktriangle^{hN} W_j} = \varphi_{ij} - \frac{D \blacktriangle^{hN} W_i}{D \blacktriangle^{hN} W_j} \in \pi^N \mathcal{L}_\mu \quad (19)$$

(напомним, что $\blacktriangle B_m = B_m^{\Delta} \blacktriangle$). Кроме того, $D \equiv 1 \pmod{\blacktriangle \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]}$, так как $B_m \equiv 1 \pmod{\blacktriangle \mathfrak{o}'[[\blacktriangle]]}$.

Из равенства (12) получаем

$$D \blacktriangle^{hN} W_i = \pi^N \varepsilon \cdot D \blacktriangle^{hN} W_i^{(0)} = \pi^N \varepsilon \cdot D \blacktriangle^{hN} \lambda(z_i),$$

где $\pi^N \varepsilon = D \blacktriangle^{hN} (\pi_N \pi_{N-1} \cdots \pi_1)$ и ε — единица в $\mathfrak{o}'$. По лемме 1

$$D \blacktriangle^{hN} \lambda(z_i) \in X^{\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu.$$

Более того, из доказательства этой леммы следует

$$D \blacktriangle^{hN} \lambda(z_i) = z_i^{q^{hN}} \cdot \varepsilon_i(X),$$

где $\varepsilon_i(X)$ — главная единица кольца $\mathcal{L}_\mu$. Кроме того,

$$\varepsilon_i(X) \in 1 + X \mathcal{L}_\mu^+.$$

Поэтому

$$\frac{D \blacktriangle^{hN} W_i}{D \blacktriangle^{hN} W_j} = \left(\frac{z_i}{z_j} \right)^{q^{hN}} \cdot \frac{\varepsilon_i(X)}{\varepsilon_j(X)} \equiv \left(\frac{z_i}{z_j} \right)^{q^{hN}} \pmod{X \mathcal{L}_\mu^+}.$$

Учитывая лемму 3, выберем разложение элементов z_i и z_j в ряды по локальным униформизирующим поля K так, что

$$z_i \equiv \theta_{ij} z_j \pmod{X_n^{e'_n} z_j}.$$

Тогда

$$\frac{D \blacktriangle^{hN} W_i}{D \blacktriangle^{hN} W_j} = \theta_{ij} + \psi, \quad \text{где } \psi \in X \mathcal{L}_\mu^+, \quad \deg \psi > \bar{0}.$$

Отсюда и из (19) следует утверждение леммы для ряда φ_{ij} . Аналогично проверяются соответствующие утверждения для $\blacktriangle^k \varphi_{ij}$, $0 \leq k \leq h-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. 1) Проверим сперва, что модули

$$X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu, \quad \mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}} \right), \quad (20)$$

являются μ -собственными модулями для рядов

$$\Gamma_j = (\det A)^{-1}(-1)^{j+1}A_{j1}.$$

Пусть

$$\tilde{A}^{(j)} = \begin{pmatrix} \varphi_{1j} & \cdots & \varphi_{hj} \\ \blacktriangle \varphi_{1j} & \cdots & \blacktriangle \varphi_{hj} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \blacktriangle^{h-1} \varphi_{1j} & \cdots & \blacktriangle^{h-1} \varphi_{hj} \end{pmatrix},$$

где φ_{ij} взяты из (13). Тогда Γ_j можно представить в виде

$$\Gamma_j = \frac{(-1)^{j+1}}{W_j} \cdot \frac{\tilde{A}_j^{(j)}}{\det \tilde{A}^{(j)}}. \quad (21)$$

Из леммы 5 следует, что $\det \tilde{A}^{(j)}$ и $\tilde{A}_{j1}^{(j)}$ принадлежат кольцу $\mathcal{L}_\mu$. Кроме того,

$$\det \tilde{A}^{(j)} \equiv \det \Theta_j \pmod{(X\mathcal{L}_\mu^+; \pi^N \mathcal{L}_\mu)}, \quad (22)$$

где Θ_j определен в лемме 4. Согласно лемме 4 $\det \Theta_j$ обратим в кольце $\mathfrak{o}_T$. Поэтому $\det \tilde{A}^{(j)}$ обратим в кольце $\mathcal{L}_\mu$. Отсюда, учитывая, что $X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$ являются μ -целыми μ -собственными модулями для рядов $1/W_j$ согласно лемме 1, мы получаем наше утверждение.

2) Проверим теперь, что ряд Γ_j является примарным в каждом μ -целом μ -собственном модуле $X^{-\tau_*} \mathcal{L}_\mu$. Для этого докажем прежде всего следующую лемму.

ЛЕММА 6. Ряд W является примарным в каждом μ -целом μ -собственном модуле $X^{-\bar{c}_*} \mathcal{L}_\mu$. Кроме того, последовательность

$$(W)^{(\varkappa)} = DW^{(\varkappa)}, \quad 0 \leq \varkappa \leq N, \quad (23)$$

где $D = B_{N-1}^{\Delta-(N-\varkappa)h} \cdot B_{N-2}^{\Delta-(N-\varkappa-1)h} \cdots B_{\varkappa}^{\Delta-h}$, примарна для ряда W (операторы B_m определены в предложении 1 и (3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие а) из определения для последовательности (23) (см. [1; 2.2, определение 6]) выполнено согласно лемме 1. Докажем условие б) [1]. Из равенства (12) следует, что

$$(W)^{(\varkappa)} = D(\pi_{\varkappa} \pi_{\varkappa-1} \cdots \pi_1 \lambda(z)) = \pi^{\varkappa} \varepsilon \cdot D\lambda(z),$$

где $\pi_{\mathcal{K}} \varepsilon = D(\pi_{\mathcal{K}} \cdots \pi_1)$ и ε — единица в $\mathfrak{o}'$.

По определению операторов B_m оператор D можно представить в виде $D = \sum_{m \geq 0} d_m \blacktriangle^m$, $d_0 = 1$, $d_i \in \mathfrak{o}'$. Тогда, используя равенство [1; 2.3, (36)], получаем

$$\begin{aligned} X_i \frac{\partial}{\partial X_i} ((W)^{(\varkappa)}) &= \frac{\partial}{\partial X_i} (\pi^\varkappa \varepsilon D \lambda(z)) = \pi^\varkappa \varepsilon \sum_{m \geq 0} d_m q^m \blacktriangle^m \left(X_i \frac{\partial}{\partial X_i} (\lambda(z)) \right) \\ &\equiv 0 \pmod{\pi^\varkappa \mathfrak{o}_T[[X]]}, \end{aligned} \quad (24)$$

так как производная логарифма имеет целые коэффициенты. Таким образом, условие b) [1] выполнено.

Проверим, наконец, условие c) [1]. Используя сравнение

$$W^{(\varkappa)} \equiv B_{\varkappa-1} \blacktriangle^h W^{(\varkappa-1)} \pmod{\pi^\varkappa \mathfrak{o}_T[[X]]}$$

(см. п. 1) леммы 2), получаем

$$\blacktriangle^\varkappa (W)^{(\varkappa)} = B_{N-1}^{\Delta^{-(N-\varkappa)h}} \cdots B_\varkappa^{\Delta^{-h}} (B_{\varkappa-1} \blacktriangle^h W^{(\varkappa-1)}) \equiv (W)^{(\varkappa)} \pmod{\pi^\varkappa \mathcal{L}_\mu}$$

(напомним, что $\blacktriangle B_m = B_m \blacktriangle$).

Примарность ряда Γ_j следует из этой леммы и [1; 2.2, предложение 8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\Gamma_j^{(\varkappa)}$ – примарная последовательность для ряда Γ_j (см. (9)). Тогда

$$X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \Gamma_j^{(\varkappa)} = \sum_{m=0}^{h-1} \pi^{\varkappa+m} X^{-\bar{e}_*(1+q^m)/q^{h(N-\varkappa)}} f_m(X),$$

где $f_m(X) \in \mathcal{L}_{\mu q^{h(N-\varkappa)}}$, $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^{2h-1}} \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем предложение в случае $\varkappa = N$, т.е. для ряда Γ_j . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Ясно, что

$$X_i \partial_i \Gamma_j = -\Gamma_j \frac{1}{\det A} X_i \partial_i (\det A) + \frac{1}{\det A} \cdot X_i \partial_i A_{j1}, \quad (25)$$

где $\partial_i := \partial/\partial X_i$.

По определению матрицы A имеем

$$\det A = \sum_{(\alpha) \in S_n} (-1)^{J(\alpha)} W_{\alpha_1} W_{\alpha_2}^\blacktriangle \cdots W_{\alpha_h}^{\blacktriangle^{h-1}}.$$

Рассмотрим

$$\psi_{(\alpha)} = \frac{1}{\det A} X_i \partial_i (W_{\alpha_1} W_{\alpha_2}^\blacktriangle \cdots W_{\alpha_h}^{\blacktriangle^{h-1}}) = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^h X_i \partial_i W_{\alpha_j}^{\blacktriangle^{j-1}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^h W_{\alpha_k}^{\blacktriangle^{k-1}}.$$

Вынесем ряд W_1 из первой строки $\det A$, ряд W_1^Δ – из второй строки и т.д. Тогда получим

$$\psi_{(\alpha)} = \frac{1}{\det \tilde{A}} \sum_{j=1}^h X_i \partial_i W_{\alpha_j}^{\Delta^{j-1}} \cdot \frac{1}{W_1^{\Delta^{j-1}}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^h \varphi_{\alpha_k, 1}^{\Delta^{k-1}}, \quad (26)$$

где $\varphi_{ij} = W_i/W_j$, $\tilde{A} = (\varphi_{i1}^{\Delta^{j-1}})_{1 \leq i, j \leq h}$.

Было доказано, что $(\det \tilde{A})^{-1} \in \mathcal{L}_\mu$ (см. (22)), $\varphi_{ij}^{\Delta^m} \in \mathcal{L}_\mu$, $0 \leq m \leq h-1$ (см. предложение 4), $1/W_1^{\Delta^{j-1}} \in X^{-q^{j-1}\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$ (см. предложение 4).

Кроме того,

$$X_i \partial_i W^{\Delta^{j-1}} = q^{j-1} (X_i \partial_i W)^{\Delta^{j-1}} \equiv 0 \pmod{\pi^{N+j-1} \mathfrak{o}_T[[X]]}$$

(см. (24)). Поэтому j -й член в (26) принадлежит $\pi^{N+j-1} X^{-q^{j-1}\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$. Вспоминая, что $\Gamma_j \in X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu$ (см. предложение 3), получаем, наконец,

$$\Gamma_j \frac{1}{\det A} \cdot X_i \partial_i (\det A) = \sum_{m=0}^{h-1} \pi^{N+m} X^{-\bar{e}_*(1+q^m)} g_m(X), \quad (27)$$

где $g_m(X) \in \mathcal{L}_\mu$.

Действуя аналогично со вторым членом в (25) и применяя при этом определение A_{j1} , получаем

$$\frac{1}{\det A} X_i \partial_i (A_{j1}) = \sum_{m=0}^{h-1} \pi^{N+m} X^{-\bar{e}_*(1+q^m)} h_m(X), \quad (28)$$

где $h_m(X) \in \mathcal{L}_\mu$. Утверждение предложения следует теперь из (27) и (28).

3.2. Независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по второму аргументу. В этом пункте мы проверим, что модуль $U_{F_N} +_{F_N} f^{(N)}(\mathcal{H}_{F_N})$ содержится в правой части ядра спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ (см. (8)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\beta(X) \in U_{F_N}$, $\alpha(X) \in K_n(\mathcal{H}_m)$. Тогда

$$\langle \alpha(X), \beta(X) \rangle_F = 0. \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы называем это свойство спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ *независимостью*. Это название обосновано следующими соображениями. Спаривание (8) естественным образом задает спаривание на множестве $K_n^{\text{top}}(K) \times F_N(\mathfrak{M})$. А именно пусть $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in K_n^{\text{top}}(K)$ и $\beta \in F_N(\mathfrak{M})$, и пусть $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n$ и $\underline{\beta}$ – прообразы элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и β в $\mathcal{H}_m$ и $\mathcal{H}_{F_N}$ соответственно. Определим тогда

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{F_N} := \langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle_F.$$

Чтобы проверить, что спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F_N}$ корректно определено, мы должны показать, что его значение на элементах $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и β не зависит от выбора прообразов. Поэтому мы называем это свойство независимостью спаривания от способа разложения элементов в степенные ряды по локальным унифицирующим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. По предположению $\beta(X) \in U_{F_N}$, поэтому

$$\beta(X) = \text{Eis}_F(X) \cdot \varphi(X), \quad \varphi \in \mathfrak{o}_T[[X]], \quad \varphi(0) = 0$$

(см. [1; 1.8, предложение 4]). Обозначим временно

$$\mathcal{E}_F := \text{Eis}_F(X) \implies \beta = \mathcal{E}_F \cdot \varphi.$$

Заметим, что наименьшая степень монома ряда $\mathcal{E}_F$ и соответственно ряда β с обратимым в кольце $\mathfrak{o}_T[[X]]$ коэффициентом не менее $\bar{e}$ (см. [1; 1.5, лемма 3] и [1; 1.8, (22)]).

1) Начнем с проверки следующего сравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть

$$[\alpha, \beta]_{F, \Gamma_\varkappa} = \text{res } \Phi_N(\alpha, \beta) \cdot \Gamma_\varkappa, \quad 1 \leq \varkappa \leq h$$

(см. [1; 2.3]). Тогда

$$\begin{aligned} & \text{res } \Phi_N(\alpha, \beta) \cdot \Gamma_\varkappa \\ & \equiv \text{res } X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \left(\lambda_N(\beta) D \cdot \Gamma_\varkappa - \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D \cdot \Gamma_\varkappa) \right) \pmod{\pi^N}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\blacktriangle) &= b_1 \blacktriangle + \cdots + b_h \blacktriangle^h, \\ D &= \det (X_j \alpha_i^{-1} \partial_j \alpha_i)_{1 \leq i, j \leq n}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Gamma_\varkappa = \frac{(-1)^{\varkappa-1} A_{\varkappa 1}}{\det A} \in X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu, \quad (31)$$

а ряд $\Phi_N(\alpha, \beta)$ определен в [1; 2.3].

ЛЕММА 7. Имеет место сравнение

$$\text{res } \frac{(-1)^{n-i} b_j}{\pi q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \cdot \Gamma_\varkappa \equiv - \text{res } \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) D'_{ij} \cdot \Gamma_\varkappa \pmod{\pi^N}, \quad (32)$$

где D_{ij} определены в [1; 2.31], а

$$D'_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1} \partial_1 \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{-1} \partial_n \alpha_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i-1}^{-1} \partial_1 \alpha_{i-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{-1} \partial_n \alpha_{i-1} \\ \partial_1 l_j(\alpha_i) & \cdots & \partial_n l_j(\alpha_i) \\ X_1^{-1} (X_1 \alpha_{i+1}^{-1} \partial_1 \alpha_{i+1})^{\blacktriangle^j} & \cdots & X_n^{-1} (X_n \alpha_{i+1}^{-1} \partial_n \alpha_{i+1})^{\blacktriangle^j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1^{-1} (X_1 \alpha_n^{-1} \partial_1 \alpha_n)^{\blacktriangle^j} & \cdots & X_n^{-1} (X_n \alpha_n^{-1} \partial_n \alpha_n)^{\blacktriangle^j} \end{vmatrix}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сравнение

$$\operatorname{res} l_j(\alpha_i) \partial_k \left(\frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \right) \cdot \Gamma_{\mathfrak{x}} \equiv - \operatorname{res} \partial_k l_j(\alpha_i) \cdot \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\mathfrak{x}} \pmod{\pi^N}. \quad (34)$$

Заменим сперва ряд $\Gamma_{\mathfrak{x}} \pmod{\pi^N}$ на $(\Gamma_{\mathfrak{x}}^{(N-1)})^{\blacktriangle^h}$ (см. [1; 2.2, определение 6, п. с)). Это можно сделать, так как согласно [1; 2.3, лемма 8]

$$l_j(\alpha_i) \partial_k \left(\frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \right) \in \mathfrak{o}_T[[X]].$$

Далее, очевидное равенство $\operatorname{res} \partial_k (f(X)g(X)h(X)) = 0$, верное для любых рядов f, g, h , показывает, что сравнение (34) равносильно следующему сравнению

$$\operatorname{res} l_j(\alpha_i) \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \partial_k ((\Gamma_{\mathfrak{x}}^{(N-1)})^{\blacktriangle^h}) \equiv 0 \pmod{\pi^N}. \quad (35)$$

Из [1; 2.3, (36)] получаем тогда

$$\begin{aligned} & l_j(\alpha_i) \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \partial_k ((\Gamma_{\mathfrak{x}}^{(N-1)})^{\blacktriangle^h}) \\ &= X_k^{-1} \left(\frac{q^h}{p} l_j(\alpha_i) \right) \frac{p}{\pi} \cdot \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot (\pi X_k \partial_k (\Gamma_{\mathfrak{x}}^{(N-1)}))^{\blacktriangle^h}. \end{aligned}$$

Имеем два случая: а) $1 \leq j \leq h-1$; б) $j = h$.

Рассмотрим более сложный случай б) (в случае а) все коэффициенты b_j/π являются целыми, поэтому он проще). В этом случае $\frac{q^h}{p} l_j(\alpha_i) \in \mathfrak{o}_T[[X]]$ (см. [1; 2.3, лемма 8]) и $\frac{p}{\pi} b_j \in \mathfrak{o}_T$. Поэтому достаточно проверить, что ряд

$$\Psi = \frac{\lambda_N(\beta)}{\pi} \cdot \frac{\pi X_k \partial_k (\Gamma_{\mathfrak{x}}^{(N-1)})}{\pi^N} \quad (36)$$

является μ -целым в смысле [1; 2.1.2, определение 4].

По предложению 5 получаем

$$\Psi = \frac{\lambda_N(\beta)}{\pi} \sum_{m=0}^{h-1} \pi^m X^{-\overline{e} \frac{q^{m+1}}{q^h-1}} f_m(X),$$

где $f_m \in \mathcal{L}_{\mu q^h}$, $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h-1}{q^{2h-1}} \right)$.

Осталось доказать, что для каждого m , $0 \leq m \leq h-1$, ряд

$$\pi^{m-1} \lambda_N(\beta) \cdot X^{-\overline{e} \frac{q^{m+1}}{q^h-1}} f_m(X) \quad (37)$$

является μ -целым.

Наименьшая степень монома $\mathcal{E}_F$ и, соответственно, ряда $\beta = \mathcal{E}_F \cdot \varphi$ с обратимым в кольце $\mathfrak{o}_T[[X]]$ коэффициентом не меньше чем $\bar{e}$, поэтому согласно [1; 1.4, лемма 2] (см. [1; 1.4, (9)]) ряд $\lambda_N(\beta)$ можно представить в виде

$$\pi^{m-1}\lambda_N(\beta) = \pi^m a_0 + \sum_{l \geq 1} \pi^{m-l} a_l x^{q^{h(l-1)}\bar{e}},$$

где $a_i \in \mathfrak{o}_T[[X]]$.

Пусть $f_m(X) = \sum d_{\bar{T}} X^{\bar{T}} \in \mathcal{L}_{\mu q^h}$. Ряд (37) является μ -целым, если

$$\text{a) } \pi^m d_{\bar{T}} \in \mathfrak{o}_T, \quad \bar{r} < \bar{e} \frac{q^m + 1}{q^h - 1}, \quad 0 \leq m \leq h-1, \quad (38)$$

$$\text{b) } \pi^{m-l} d_{\bar{T}} \in \mathfrak{o}_T, \quad \bar{r} < \bar{e} \left(\frac{q^m + 1}{q^h - 1} - q^{h(l-1)} \right), \quad 0 \leq m \leq h-1, \quad l \geq 1. \quad (39)$$

Заметим, что для $c \in \mathfrak{o}_T((\pi))$ выполнено условие

$$c \in \mathfrak{o}_T \iff v(c) \geq 0. \quad (40)$$

Пусть $\mu = 1/q^h$. Докажем условие (38). По определению кольца $\mathcal{L}_{\mu q^h}$ имеем при $q \geq 3$

$$\begin{aligned} v(\pi^m d_{\bar{T}})\bar{e} &= m\bar{e} + v(d_{\bar{T}})\bar{e} \geq m\bar{e} - \mu q^h \bar{r} \\ &= m\bar{e} - \bar{r} > \bar{e} \left(m - \frac{q^m + 1}{q^h - 1} \right) \geq -\frac{2\bar{e}}{q^h - 1} > -\bar{e}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} v(\pi^{m-l} d_{\bar{T}})\bar{e} &= (m-l)\bar{e} + v(d_{\bar{T}})\bar{e} \geq (m-l)\bar{e} - \bar{r} \\ &> \bar{e} \left(q^{h(l-1)} - l + m - \frac{q^m + 1}{q^h - 1} \right) \geq -\frac{2\bar{e}}{q^h - 1} > -\bar{e}. \end{aligned}$$

Таким образом, во всех случаях имеем

$$v(\pi^{m-l} d_{\bar{T}})\bar{e} > -\bar{e}, \quad l, m \geq 0.$$

Поэтому $v(\pi^{m-l} d_{\bar{T}}) \geq 0$ и, значит, выполнены оба условия (38) и (39), тем самым ряд Ψ (см. (36)) является μ -целым.

Первый случай рассматривается аналогично. Тем самым сравнение (35) и, соответственно, (34) проверены.

Проверим теперь сравнение леммы. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-i} b_j}{\pi q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \cdot \Gamma_{\varkappa} \\ &= (-1)^{n-i} l_j(\alpha_i) \cdot \Gamma_{\varkappa} \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1} \partial_1 \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1} \partial_n \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-1}^{-1} \partial_1 \alpha_{i-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{-1} \partial_n \alpha_{i-1} \\ \frac{1}{q^j} \alpha_{i+1}^{-\blacktriangle^j} \partial_1 \alpha_{i+1}^{\blacktriangle^j} & \dots & \frac{1}{q^j} \alpha_{i+1}^{-\blacktriangle^j} \partial_n \alpha_{i+1}^{\blacktriangle^j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{q^j} \alpha_n^{-\blacktriangle^j} \partial_1 \alpha_n^{\blacktriangle^j} & \dots & \frac{1}{q^j} \alpha_n^{-\blacktriangle^j} \partial_n \alpha_n^{\blacktriangle^j} \\ \partial_1 \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) & \dots & \partial_n \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Переставим последнюю строку последовательно на i -е место и разложим затем определитель по полученной i -й строке. Тогда имеем

$$\frac{(-1)^{n-i} b_j}{\pi q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \cdot \Gamma_{\varkappa} = (-1)^{n-i} \sum_{k=1}^n l_j(\alpha_i) \partial_k \left(\frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \right) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot \Delta_k,$$

где Δ_k — минор k -го элемента i -й строки. Из [1; 2.3, (36)] получаем

$$\frac{1}{q^j} \alpha^{-\blacktriangle^j} \partial_k \alpha^{\blacktriangle^j} = X_k^{-1} (X_k \alpha^{-1} \partial_k \alpha)^{\blacktriangle^j} \in \mathfrak{o}_T[[X]]. \quad (41)$$

Поэтому $\Delta_k \in \mathfrak{o}_T[[X]]$. Чтобы закончить доказательство леммы, осталось, используя сравнение (34), разложить определитель в правой части (31) по i -й строке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Рассмотрим первый член ряда $\Phi_N \cdot \Gamma_{\varkappa}$:

$$l_{F_N}(\beta) D_{n+1} \Gamma_{\varkappa}.$$

Используя определение ряда l_{F_N} (см. [1; 1.9]), мы можем написать

$$l_{F_N}(\beta) D_{n+1} \Gamma_{\varkappa} = X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \lambda_N(\beta) D \Gamma_{\varkappa} - \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_{n+1},$$

где D определен в (30). Осталось показать, что

$$\begin{aligned} & \text{res} \left(\frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_{n+1} + \frac{\Gamma_{\varkappa}}{\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h \frac{(-1)^{n-i} b_j}{q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \right) \\ & \equiv \text{res} X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D \Gamma_{\varkappa}) \pmod{\pi^N}. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда будет немедленно следовать сравнение предложения 7.

Из сравнения леммы 7 вытекает, что второй член в (42) можно переписать в виде

$$\text{res} \frac{\Gamma_{\varkappa}}{\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h \frac{(-1)^{n-i} b_j}{q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \equiv - \text{res} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) D'_{ij} \cdot \Gamma_{\varkappa} \pmod{\pi^N}, \quad (43)$$

где D'_{ij} задан в (33).

Из [1; 2.3, (36)] следует, что

$$\alpha^{-1} \partial_k \alpha - \partial_k l_j(\alpha) = X_k^{-1} (X_k \alpha^{-1} \partial_k \alpha)^{\blacktriangle^j}. \quad (44)$$

Таким образом,

$$\frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_{n+1} - \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D'_{nj} = \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_n^{(j)},$$

где

$$D_n^{(j)} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1} \partial_1 \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1} \partial_n \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}^{-1} \partial_1 \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{-1} \partial_n \alpha_{n-1} \\ X_1^{-1} (X_1 \alpha_n^{-1} \partial_1 \alpha_n)^{\blacktriangle^j} & \dots & X_n^{-1} (X_n \alpha_n^{-1} \partial_n \alpha_n)^{\blacktriangle^j} \end{vmatrix}.$$

Далее, используя снова [1; 2.3, (36)], получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_n^{(j)} - \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D'_{n-1,j} \\ &= \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_{n-1}^{(j)}, \end{aligned}$$

где

$$D_{n-1}^{(j)} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1} \partial_1 \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1} \partial_n \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-2}^{-1} \partial_1 \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_{n-2}^{-1} \partial_n \alpha_{n-2} \\ X_1^{-1} (X_1 \alpha_{n-1}^{-1} \partial_1 \alpha_{n-1})^{\blacktriangle^j} & \dots & X_n^{-1} (X_n \alpha_{n-1}^{-1} \partial_n \alpha_{n-1})^{\blacktriangle^j} \\ X_1^{-1} (X_1 \alpha_n^{-1} \partial_1 \alpha_n)^{\blacktriangle^j} & \dots & X_n^{-1} (X_n \alpha_n^{-1} \partial_n \alpha_n)^{\blacktriangle^j} \end{vmatrix}.$$

Продолжая процесс, получаем

$$\begin{aligned} & \text{res} \left(\frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} \lambda_N(\beta) \cdot \Gamma_{\varkappa} \cdot D_{n+1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h \frac{b_j \blacktriangle^j}{\pi} \lambda_N(\beta) D'_{ij} \cdot \Gamma_{\varkappa} \right) \\ & \equiv \text{res } X_1^{-1} \dots X_n^{-1} \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D \Gamma_{\varkappa}) \pmod{\pi^N}, \end{aligned}$$

что дает нам сравнение предложения 7.

2) Очевидно, что ряды $R_{\varkappa} := \Phi_N(\alpha, \beta) \Gamma_{\varkappa}$ являются решениями системы уравнений

$$A(R_1, \dots, R_h)^T = (\Phi_N(\alpha, \beta), 0, \dots, 0)^T$$

(см. определение $\Gamma_{\varkappa}$ в §2). Мы займемся сейчас преобразованием этой системы.

Рассмотрим следующую систему

$$A(\xi_1, \dots, \xi_h)^T = (\lambda_N(\beta) D, (\lambda_N(\beta) D)^{\blacktriangle}, \dots, (\lambda_N(\beta) D)^{\blacktriangle^{h-1}})^T. \quad (45)$$

ЛЕММА 8. 1) Решения $\xi_1, \dots, \xi_h$ системы (45) являются μ -целыми рядами в кольцах L_{μ} , $\mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}} \right)$.

2) Ряды $\xi_1^{\blacktriangle}, \dots, \xi_h^{\blacktriangle}$ являются μ -целыми рядами в кольцах $L_{\mu/q}$ (здесь $L_{\mu} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} X^m \mathcal{L}_{\mu}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наименьшая степень монома ряда $\mathcal{E}_F$ с обратимым в кольце $\mathfrak{o}_T[[X]]$ коэффициентом равна $\bar{e}$ (см. [1; 1.5, лемма 3] и [1; 1.8, (22)]). Поэтому точно так же, как в доказательстве леммы 1, доказываем, что

$$\lambda_N(\beta)^{\blacktriangle^m} = \lambda_N(\mathcal{E}_F \varphi)^{\blacktriangle^m} \in X\mathcal{L}_\mu^+, \quad \mu \geq \frac{1}{q^n}.$$

Все ряды $(X_k \alpha^{-1} \partial_k \alpha)^{\blacktriangle^m}$ имеют целые коэффициенты из $\mathfrak{o}_T$. Поэтому $D^{\blacktriangle^m} \in \mathfrak{o}_T[[X]]$ и, значит, все ряды в правой части системы (45) принадлежат кольцу $X\mathcal{L}_\mu^+$. Тогда, например,

$$\xi_1 = \sum_{m=0}^{h-1} (-1)^{m+1} (\lambda(\beta) D)^{\blacktriangle^m} \cdot \frac{A_{1m}}{\det A}.$$

Действуя точно так же, как при доказательстве предложения 3, мы получаем

$$\frac{A_{1m}}{\det A} = \frac{1}{W_1^{\blacktriangle^m}} \cdot \frac{\tilde{A}_{1m}}{\det \tilde{A}}, \quad \tilde{A} = (\varphi_{i1}^{\blacktriangle^k})_{\substack{1 \leq i \leq h \\ 0 \leq k \leq h-1}}.$$

При этом

$$\frac{\tilde{A}_{1m}}{\det \tilde{A}} \in \mathcal{L}_\mu^\times, \quad \mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}} \right). \quad (46)$$

Таким образом,

$$\frac{A_{1m}}{\det A} \in X^{-q^m \bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu^\times$$

и все модули $X^{-q^m \bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu^\times$, $0 \leq m \leq h-1$, являются μ -целыми согласно [1; 2.1.2, лемма 6] и условию на μ . Поэтому

$$\xi_1 = \sum_{m=0}^{h-1} X^{-q^m \bar{e}_*} f_m, \quad f_m \in \mathcal{L}_\mu,$$

и все ряды $X^{-q^m \bar{e}_*} f_m$ являются μ -целыми, т.е. ряд ξ_1 является также μ -целым. Аналогично, $\xi_2, \dots, \xi_h$ — μ -целые ряды в кольце L_μ .

Второе утверждение леммы следует из [1; 2.1.2, замечание 11].

Подействуем на первое уравнение системы (45) оператором $b_1 \blacktriangle / \pi$, на второе уравнение — оператором $b_2 \blacktriangle / \pi$ и т.д., наконец, на последнее уравнение — оператором $b_h \blacktriangle / \pi$ и сложим все уравнения. Тогда получим

$$\frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi}(W_1)\xi_1^{\blacktriangle} + \dots + \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi}(W_h)\xi_1^{\blacktriangle} = \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi}(\lambda_N(\beta)D). \quad (47)$$

По определению (см. [1; 1.9])

$$l_{FN}(X) = \lambda_N(X) - \frac{\mathcal{A}(\blacktriangle)}{\pi}(\lambda_N(X)). \quad (48)$$

Поэтому из (47) следует

$$W_1 \xi_1^\bullet + \dots + W_h \xi_h^\bullet = \frac{\mathcal{A}(\bullet)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D) + \sum_{i=1}^h l_{F_N}(s_i) \xi_i^\bullet. \quad (49)$$

Подействуем на первое, второе и т.д., на $(h-1)$ -е уравнение системы (45) оператором $\bullet$ и объединим с уравнением (49). Тогда получим систему

$$A \begin{pmatrix} \xi_1^\bullet \\ \xi_2^\bullet \\ \dots \\ \xi_h^\bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}(\bullet)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D) + \sum_{i=1}^h l_{F_N}(s_i) \xi_i^\bullet \\ (\lambda_N(\beta) D)^\bullet \\ \dots \\ (\lambda_N(\beta) D)^{\bullet^{h-1}} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Вычтем из системы (45) систему (50):

$$\begin{aligned} & A(\xi_1 - \xi_1^\bullet, \dots, \xi_h - \xi_h^\bullet)^T \\ &= \left(\lambda_N(\beta) D - \frac{\mathcal{A}(\bullet)}{\pi} (\lambda_N(\beta) D) - \sum_{i=1}^h l_{F_N}(s_i) \xi_i^\bullet, 0, \dots, 0 \right)^T. \end{aligned} \quad (51)$$

Из (48) и равенства $\lambda_N(s_i) = \pi_1^{(N)} \lambda(\underline{z}_i)$ (см. (5)) следует, что

$$\frac{l_{F_N}(s_i)}{\pi^N} \in \mathfrak{o}_T[[X]]. \quad (52)$$

Поэтому решения $r_{1j}, \dots, r_{hj}$ системы

$$A(r_{1j}, \dots, r_{hj})^T = \left(X_1^{-1} \dots X_n^{-1} \frac{l_{F_N}(s_i)}{\pi^N}, 0, \dots, 0 \right)^T \quad (53)$$

принадлежат μ -целому модулю

$$X^{-\bar{e}_*} \mathcal{L}_\mu, \quad \mu \in \left[\frac{1}{q^h}, \frac{q^h - 1}{q^{2h-1}} \right)$$

(см. предложение 3).

Из системы (53) следует

$$A(\pi^N r_{1j} \xi_j^\bullet, \dots, \pi^N r_{hj} \xi_j^\bullet)^T = (X_1^{-1} \dots X_n^{-1} l_{F_N}(s_i) \xi_j^\bullet, 0, \dots, 0)^T.$$

Поэтому мы имеем систему

$$A \left(\pi^N \sum_{j=1}^h r_{1j} \xi_j^\bullet, \dots, \pi^N \sum_{j=1}^h r_{hj} \xi_j^\bullet \right)^T = \left(X_1^{-1} \dots X_n^{-1} \sum_{j=1}^h l_{F_N}(s_j) \xi_j^\bullet, 0, \dots, 0 \right)^T. \quad (54)$$

Складывая (51) и (54), получаем

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\xi_1 - \xi_1^\Delta) + \pi^N \sum_{j=1}^h r_{1j} \xi_j^\Delta \\ \vdots \\ X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\xi_h - \xi_h^\Delta) + \pi^N \sum_{j=1}^h r_{hj} \xi_j^\Delta \\ X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\lambda_N(\beta)D - \frac{\mathcal{A}(\Delta)}{\pi}(\lambda_N(\beta)D)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\lambda_N(\beta)D - \frac{\mathcal{A}(\Delta)}{\pi}(\lambda_N(\beta)D)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Из полученной системы, определения ряда $\Gamma_\varkappa$ и сравнения предложения 7 следует

$$\text{res } \Phi_N(\alpha, \beta) \cdot \Gamma_\varkappa \equiv \text{res} \left(X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\xi_\varkappa - \xi_\varkappa^\Delta) + \pi^N \sum_{i=1}^h r_{i\varkappa} \xi_i^\Delta \right) \pmod{\pi^N}.$$

При этом все ряды ξ_i , ξ_i^Δ , $r_{i\varkappa}$ являются μ -целыми. Таким образом,

$$\text{Tr res } \Phi_N(\alpha, \beta) \cdot \Gamma_\varkappa \equiv \text{Tr res } X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}(\xi_\varkappa - \xi_\varkappa^\Delta) = 0 \pmod{\pi^N}$$

и доказательство предложения 6 закончено.

3.3. Вычисление спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ на базисе Шафаревича. Пусть

$$\omega(b)(X) = E_{F_N}(\widehat{b}\lambda_N(s)) \quad (56)$$

— ряд, с помощью которого строится примарный элемент $\omega(b)$ в [1; 1.10, предложение 6], и пусть $\mathcal{E}_N^0$ и $\mathcal{E}_N^{\rho, a}$ — изоморфизмы, определенные в [1; 1.9, (24)]. Из точной последовательности [1; 1.8, предложение 4] и из [1; 1.10, предложение 7] следует, что элементы

$$\begin{aligned} & \omega_i(b)(X), \quad b \in \mathfrak{o}_T, \quad 1 \leq i \leq h, \\ & \mathcal{E}_N^0(\theta X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}), \quad \theta \in \mathfrak{R}, \quad 0 < \bar{i} < \bar{e}_*, \quad p \nmid \bar{i}, \quad \text{где } \bar{i} = (i_1, \dots, i_n), \\ & \mathcal{E}_N^{\rho, a}(\theta X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}), \quad \theta \in \mathfrak{R}, \quad a \in \mathfrak{o}_T, \quad 1 \leq \rho < fh, \quad 0 < \bar{i} < \bar{e}_*, \quad p \nmid \bar{i}, \end{aligned} \quad (57)$$

порождают систему образующих $\mathfrak{o}$ -модуля $\mathcal{H}_{F_N} \pmod{(U_{F_N} + F_N f^{(N)}(\mathcal{H}_{F_N}))}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1) Для любых $\alpha_i \in \mathcal{H}_m$ имеет место

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \omega(b)(X) \rangle_F = [\delta \text{Tr } b]_F(z), \quad (58)$$

где δ определен в [1; 1.10, предложение 6]. Кроме того, если один из элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ является единицей в $\mathcal{H}_m$, т.е. он лежит в $\mathfrak{o}_T^\times U_m$, в частности $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}_{\text{Eis}}$, то спаривание тривиально.

2) Имеют место равенства

$$\begin{aligned} & \langle X_1, \dots, X_n, \mathcal{E}_N^0(\theta X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) \rangle_F = 0, \\ & \langle X_1, \dots, X_n, \mathcal{E}_N^{\rho, a}(\theta X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) \rangle_F = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

если $p \nmid \bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва, что

$$\langle X_1, \dots, X_n, \omega(b)(X) \rangle_F = [\mathrm{Tr} \, b]_F(z). \quad (60)$$

По определению в [1; 2.3] имеем

$$\Phi_N(X_1, \dots, X_n, \omega(b)(X)) = X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \widehat{b} \lambda_N(s).$$

В системе образующих $\mathfrak{o}$ -модуля W_F^N в качестве первой образующей z_1 возьмем z . Тогда получим

$$\langle X_1, \dots, X_n, \omega(b)(X) \rangle_F = \sum_{i=1}^h \mathrm{Tr} \, \mathrm{res}(X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \widehat{b} \lambda_N(s) \Gamma_i),$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{(-1)^{i+1} A_{i1}}{\det A} = \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_N(s)} \cdot \frac{\widetilde{A}_{i1}}{\det \widetilde{A}}, \\ \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{h1} \\ \varphi_{11}^\bullet & \cdots & \varphi_{h1}^\bullet \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{11}^{\bullet^{h-1}} & \cdots & \varphi_{h1}^{\bullet^{h-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

(см. (21), доказательство предложения 3).

Имеет место следующее сравнение:

$$\det \widetilde{A} \equiv \det \Theta_1 \pmod{(X\mathcal{L}_\mu^+, \pi^N \mathcal{L}_\mu)} \quad (62)$$

(см. (22)), где Θ_1 определен в лемме 4. Обозначив

$$R_i := \mathrm{res} \, X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \widehat{b} \lambda_N(s) \Gamma_i,$$

мы получим, используя (62),

$$R_i \equiv \widehat{b} \frac{(-1)^{i+1} \Theta_{i1}}{\det \Theta_1} \pmod{\pi^N}.$$

Поэтому $R_1, \dots, R_h$ являются решениями системы

$$\Theta_1(R_1, \dots, R_h)^T \equiv (\widehat{b}, 0, \dots, 0)^T \pmod{\pi^N}.$$

По лемме 4

$$\Theta_1^{-1} = \begin{pmatrix} \theta_{11} v_1 & (\theta_{11} v_1)^\bullet & \cdots & (\theta_{11} v_1)^{\bullet^{h-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{h1} v_h & (\theta_{h1} v_h)^\bullet & \cdots & (\theta_{h1} v_h)^{\bullet^{h-1}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$(R_1, \dots, R_h) \equiv (\theta_{11} v_1 \widehat{b}, \dots, \theta_{h1} v_h \widehat{b}) \pmod{\pi^N}.$$

Осталось заметить, что по лемме 4

$$\mathrm{Tr} \theta_{ik} v_i \widehat{b} = \delta_{ik} \mathrm{Tr} b,$$

откуда

$$R_1 \equiv \mathrm{Tr} b, \quad R_2 \equiv \dots \equiv R_h \equiv 0 \pmod{\pi^N},$$

что завершает доказательство равенства (60).

Пусть теперь один из рядов $\alpha_1(X), \dots, \alpha_n(X)$, например $\alpha_1(X) = \varepsilon(X)$, является единицей в $\mathcal{H}_m$, т.е. $\varepsilon(X) \in U_m$ (см. [1; 1.6]). Проверим, что

$$\langle \varepsilon, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \omega(b)(X) \rangle_F = 0. \quad (63)$$

По формуле из [1; 2.3] для спаривания (8) имеем

$$\Phi_N \cdot \Gamma_k = s \cdot D_{n+1} \cdot \Gamma_k - \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h \frac{(-1)^{n-i} b_j}{q^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i) D_{ij} \right) \Gamma_k.$$

Для первого слагаемого получаем

$$s \cdot D_{n+1} \cdot \Gamma_k = D_{n+1} \cdot \frac{(-1)^{k+1} \widetilde{A}_{k1}}{\det \widetilde{A}}$$

(см. (61)). Как уже говорилось (см. (22)),

$$\frac{\widetilde{A}_{k1}}{\det \widetilde{A}} \equiv \frac{\widetilde{A}_{k1}}{\det \Theta_1} \pmod{(X\mathcal{L}_\mu^+, \pi^N \mathcal{L}_\mu)}.$$

Далее, элементами первой строки определителя D_{n+1} будут ряды $\alpha_1 \partial_j \alpha_1 = \partial_j \log \varepsilon \in \mathfrak{o}_T[[X]]$. Поэтому из остальных $n-1$ строк определителя D_{n+1} невозможно получить произведение $X_1^{-1} \dots X_n^{-1}$ и, значит,

$$\mathrm{res} s \cdot D_{n+1} \cdot \Gamma_k \equiv 0 \pmod{\pi^N}. \quad (64)$$

В остальных определителях D_{ij} все ряды в последней строке делятся на π^N в кольце $\mathfrak{o}_T[[X]]$, так как

$$\partial_i (\blacktriangle^j \lambda_N(\omega(b)(X))) \equiv X_i^{-1} (q^i X_i \partial_i \lambda_N(\omega(b)(X)))^{\blacktriangle^i}$$

и

$$\partial_i \lambda_N(\omega(b)(X)) \equiv 0 \pmod{\pi^N \mathfrak{o}_T[[X]]}$$

(см. [1; 2.3, (36)]). Отсюда и из (64) следует

$$\mathrm{res} \Phi_N \cdot \Gamma_k \equiv 0 \pmod{\pi^N},$$

что заканчивает доказательство равенства (63).

Равенство (58) следует из (60) и (63) так же, как в доказательстве утверждения [1; 1.10, предложение 6], с использованием [1; 2.4, предложение 9].

Осталось доказать (59). Пусть $\alpha = \theta X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, $\theta \in \mathfrak{R}$, $p \nmid \bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$. Тогда по [1; 2.4, предложение 9] получаем

$$\langle X_1, \dots, X_n, \mathcal{E}_N^0(\alpha) \rangle_F = \langle X_1, \dots, X_{n-1}, \alpha, \mathcal{E}_N^0(\alpha) \rangle_F$$

(мы предполагаем для простоты, что $p \nmid i_n$, в противном случае надо будет поместить элемент α на k -е место, для которого $p \nmid i_k$). Далее мы применяем символьное свойство [1; 2.4, предложение 9].

Второе равенство проверяется аналогично.

3.4. Инвариантность спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Инвариантность спаривания означает, что его значение не зависит от выбора локальных униформизирующих. Тем самым мы должны проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ – некоторый набор переменных, и пусть $X_1 = g_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, X_n = g_n(Y_1, \dots, Y_n)$. Тогда

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle_{F, X} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle_{F, Y}, \quad (65)$$

где $\alpha_i \in \mathcal{H}_m$, $\beta \in \mathcal{H}_{F_N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\alpha_1 = X_1, \dots, \alpha_n = X_n$. Используя независимость спаривания от разложения элементов в ряды, мы можем взять разложение элемента $\beta \in \mathcal{H}_{F_N}$ по базису Шафаревича (57) и проверить равенство (65) на образующих базиса Шафаревича.

Пусть сперва $\beta = \omega(b)(X)$ – примарный элемент (56). Тогда

$$\langle X_1, \dots, X_n, \omega(b)(X) \rangle_{F, X} = [\text{Tr } b]_F(z)$$

(см. (60)). Заметим, что $\omega(b)(X)$ остается примарным элементом в

$$\mathcal{H}_{F_N} \mod (U_{F_N + F_N} f^{(N)}(\mathcal{H}_{F_N}))$$

для любого набора переменных (см. [1; 1.10, предложение 6]). Поэтому

$$\langle g_1(Y), \dots, g_n(Y), \omega(b)(Y) \rangle_{F, Y} = [\text{Tr } b]_F(z),$$

так как $v_{(Y)}(g_1(Y)) = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_{(Y)}(g_n(Y)) = (0, \dots, 0, 1)$. Значит,

$$\langle X_1, \dots, X_n, \omega(b)(X) \rangle_{F, X} = \langle g_1(Y), \dots, g_n(Y), \omega(b)(Y) \rangle_{F, Y}.$$

Далее,

$$\langle X_1, \dots, X_n, \mathcal{E}_N^0(\theta X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) \rangle_{F, X} = \langle X_1, \dots, X_n, \mathcal{E}_N^{\rho, a}(\theta X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) \rangle_{F, X} = 0,$$

где $\theta \in \mathfrak{A}$, $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n) > \bar{0}$, $p \nmid \bar{i}$ (см. [1; 1.10, предложение 6]). По символьному свойству (см. [1; 2.4, предложение 9, п. 5]) имеем

$$\begin{aligned} & \langle g_1(Y), \dots, g_n(Y), \mathcal{E}_N^0(\theta g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n}) \rangle_{F, Y} \\ &= \langle g_1(Y), \dots, g_n(Y), \mathcal{E}_N^{\rho, a}(\theta g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n}) \rangle_{F, Y} = 0, \end{aligned}$$

так как $p \nmid \bar{i}$. Тем самым (65) проверено для $X_1, \dots, X_n$. Заметим, что в доказательстве мы на самом деле использовали независимость спаривания по второму аргументу, так как при переходе к другому набору переменных мы должны были использовать разложение $\beta(Y)$ как формальной суммы образующих $\omega(b)(Y)$, $\mathcal{E}_N^0(\theta g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n})$, $\mathcal{E}_N^{\rho, a}(\theta g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n})$.

2) Общий случай. Символ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ как элемент K -группы можно представить в виде конечной суммы

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \sum_{\bar{Z}} a_{\bar{Z}} \{Z_1, \dots, Z_n\},$$

где $\bar{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ – наборы переменных.

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle_{F, X} &= \sum_{\bar{Z}} a_{\bar{Z}} \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, X}, \\ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle_{F, Y} &= \sum_{\bar{Z}} a_{\bar{Z}} \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, Y} \end{aligned}$$

(наборы индексов те же самые). По доказанному выше

$$\begin{aligned} \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, X} &= \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, Z}, \\ \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, Y} &= \langle Z_1, \dots, Z_n, \beta \rangle_{F, Z}, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует равенство (65). Утверждение доказано.

3.5. Независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по первому аргументу. В этом пункте мы проверим, что группа $\mathcal{H}_{\text{Eis}} + p^n K_n(\mathcal{H}_m)$ содержится в левой части ядра спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ (см. (8)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}_{\text{Eis}}$. Тогда для любого $\beta \in \mathcal{H}_{F_N}$ выполнено:

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta \rangle_F = 0. \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по второму аргументу (см. предложение 6), достаточно в качестве β брать элементы из системы образующих.

Для $\beta = \omega(b)(X)$ равенство (66) следует из предложения 8, так как по крайней мере один из элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ лежит в $\mathfrak{o}^\times U_m$.

Пусть теперь $\beta := \mathcal{E}_N^0(\theta X^{\bar{t}})$, где $\theta \in \mathfrak{A}$, $X^{\bar{t}} = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ и $p \nmid \bar{t}$.

Случай 1. $(X_1, \dots, \varepsilon(X), \dots, X_n)$, где $\varepsilon(X) \in U_{\text{Eis}}$ стоит на r -м месте (относительно U_{Eis} см. [1; 1.6, (16)]).

Рассмотрим новую систему локальных униформизирующих:

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n), \quad \text{где } Y_i = X_i \text{ при } i \neq r, \quad Y_r = X_r \varepsilon(X).$$

Пусть $X_r = g(Y) = Y \cdot \eta(Y)$, где $\eta(Y) \in U_m$. Тогда из инвариантности и из предложения 8 получаем

$$\begin{aligned} &\langle (\dots, \varepsilon(X), \dots), \mathcal{E}_N^0(\theta X^{\bar{t}}) \rangle_{F, X} \\ &= \langle (\dots, X_r \varepsilon(X), \dots), \mathcal{E}_N^0(\theta X^{\bar{t}}) \rangle_{F, X} -_F \langle (\dots, X_r, \dots), \mathcal{E}_N^0(\theta X^{\bar{t}}) \rangle_{F, X} \\ &= \langle (Y_1, \dots, Y_n), \mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots g(Y)^{i_r} \dots Y_n^{i_n}) \rangle_{F, Y}. \end{aligned} \quad (67)$$

Пусть $X_i \rightarrow t_i$, $Y_i \rightarrow t'_i$, $1 \leq i \leq n$, при гомоморфизме [1; 1.6, (14)] (при этом $t'_i = t_i$, $i \neq r$). Тогда $t'_r = t_r \varepsilon(t_1, \dots, t_n) = t_r$, так как $\varepsilon(X) \in U_{\text{Eis}}$. Поэтому

$$\eta_m(g(Y)) = t_r \quad \text{и} \quad \eta_m(Y_r) = t_r.$$

Значит,

$$\mathcal{E}_N^0(\theta Y^{\mathfrak{T}})|_{Y=(t'_1, \dots, t'_n)} = \mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots g(Y)^{i_r} \dots Y_n^{i_n})|_{Y=(t'_1, \dots, t'_n)}.$$

Тогда из [1; 1.8, лемма 5] следует

$$\mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots g(Y)^{i_r} \dots Y_n^{i_n}) = \mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots Y_r^{i_r} \dots Y_n^{i_n}) +_F \text{Eis}_F(Y) \cdot \varphi(Y).$$

Используя теперь независимость спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по второму аргументу (см. предложение 6), мы получаем

$$\begin{aligned} \langle Y_1, \dots, Y_n, \mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots g(Y)^{i_r} \dots Y_n^{i_n}) \rangle_{F, Y} \\ = \langle Y_1, \dots, Y_n, \mathcal{E}_N^0(\theta Y_1^{i_1} \dots Y_r^{i_r} \dots Y_n^{i_n}) \rangle_{F, Y}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства равна нулю согласно предложению 8. Поэтому, учитывая (67), имеем

$$\langle (X_1, \dots, \varepsilon(X), \dots, X_n), \mathcal{E}_N^0(\theta X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) \rangle_{F, X} = 0,$$

если $p \nmid i = (i_1, \dots, i_n)$ и $\varepsilon(X) \in U_{\text{Eis}}$.

Значит,

$$\langle (X_1, \dots, \varepsilon(X), \dots, X_n), \beta(X) \rangle_{F, X} = 0$$

для любого $\varepsilon(X) \in U_{\text{Eis}}$ и любого $\beta(X) \in \mathcal{H}_{F_N}$.

Случай 2. $\langle (\alpha_1, \dots, \varepsilon(X), \dots, \alpha_n), \beta \rangle_F$.

Представляя символ $\{\alpha_1, \dots, \varepsilon(X), \dots, \alpha_n\}$ в K -группе в виде суммы

$$\sum_Z a_Z \{Z_1, \dots, \varepsilon(Z), \dots, Z_n\}$$

(переноса ε в подходящее место, если нужно) и используя инвариантность, мы приходим к случаю 1.

§ 4. Явные формулы

4.1. Доказательство теоремы 1. Первая часть теоремы 1 следует из независимости спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по обоим аргументам, что было проверено в предложениях 6 и 10.

Мы не будем доказывать невырожденность спаривания по второму аргументу, так как она не используется при доказательстве явной формулы для спаривания Гильберта и доказательство невырожденности аналогично доказательству соответствующего утверждения в мультипликативном случае (см. [15]).

4.2. Спаривание на формальном модуле $F(\mathfrak{M})$. Из теоремы 1 непосредственно следует, что можно корректно определить следующее спаривание:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_F : K_n^{\text{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \rightarrow W_F^N.$$

А именно пусть $\alpha \in K_n^{\text{top}}(K)$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$, и пусть $\underline{\alpha} \in K_n(\mathcal{H}_m)$, $\underline{\beta} \in \mathcal{H}_F$ — их прообразы (см. [1; 1.6, (15)] и [1; 1.8, (19)]). Положим

$$\langle \alpha, \beta \rangle_F := \langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle_F.$$

Из теоремы 1, а также из независимости и инвариантности спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ (см. предложение 9) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ корректно определено, удовлетворяет свойствам 1)–5) [1; 2.4, предложение 9], не зависит от разложения элементов в ряды по локальным параметрам и инвариантно относительно выбора системы локальных параметров.*

4.3. Явная формула для символа Гильберта $\{ \cdot, \cdot \}_F^N$.

ТЕОРЕМА 3. *Символ Гильберта*

$$\{ \cdot, \cdot \}_F^N : K_n^{\text{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \rightarrow W_F^N$$

(см. [1; 1.5]) совпадает со спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ и тем самым выражается в явном виде с помощью формулы (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, докажем совпадение $\{ \cdot, \cdot \}_F^N$ со спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ на множестве $\{t_1, \dots, t_n, \beta\}$, где $\beta \in F(\mathfrak{M})$, а $t_1, \dots, t_n$ — система локальных параметров поля K . Ввиду независимости спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ по второму аргументу наше утверждение достаточно проверить на элементах базиса Шафаревича. Последнее следует из [1; 1.10, предложение 7] и предложения 8.

Общий случай. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in K_n^{\text{top}}(K)$. Тогда

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \sum_{\vec{i}} \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

— конечная сумма локальных параметров. Далее используем инвариантность спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ и первый случай.

4.4. Доказательство теоремы 2. Применяя свойство Н.5 и теорему 3, получаем

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)_{F,K}^N &= \left\{ \alpha, \left[\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right]_{F, F_N} (\beta) \right\}_F = \left\langle \alpha, \left[\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right]_{F, F_N} (\beta) \right\rangle_F \\ &= \sum_{k=1}^h (F) \left[\text{Tr res}_{X_1, \dots, X_n} \Phi_N \left(\underline{\alpha}, \left[\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right]_{F, F_N} (\underline{\beta}) \cdot \Gamma_k \right) \right]_F (z_k), \end{aligned} \quad (68)$$

где Φ_N определен в [1; 2.3], а Γ_k — в (9).

Докажем два равенства

$$\Phi_N = \frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \cdot \Phi, \quad (69)$$

$$\Gamma_k = \frac{\pi^N}{\pi_1^{(N)}} \cdot V_k. \quad (70)$$

Из этих двух равенств и (68) немедленно следует утверждение теоремы.

1) Проверка (69). Из определения l_{F_N} (см. [1; 1.9]) и равенств $u_N \pi_1^{(N)} = \pi_1^{(N)} u$ (см. [1; 1.4, лемма 1, п. (3)]) и $[a]_{F, F_N} = \lambda_{F_N}^{-1}(a \lambda_F)$ следует

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{b_h}{\pi} \blacktriangle^h\right) \pi_1^{(N)} &= (u_N \pi^{-1}) \pi_1^{(N)} \\ &= \pi_1^{(N)} (u \pi^{-1}) = \pi_1^{(N)} \left(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \dots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\right) u. \end{aligned}$$

Тогда

$$l_{F_N} \left(\left[\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right]_{F, F_N} (\underline{\beta}) \right) = \frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} l_F(\underline{\beta}).$$

Кроме того, $b_j \blacktriangle^j \pi_1^{(N)} = \pi_1^{(N)} a_j \blacktriangle^j$ (см. [1; 1.4, лемма 1, п. (3)]), значит,

$$\begin{aligned} b_j d \blacktriangle^j \lambda_N \left(\left[\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right]_{F, F_N} (\underline{\beta}) \right) &= d b_j \blacktriangle^j \left(\frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} \right) \lambda(\underline{\beta}) \\ &= d \frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} a_j \blacktriangle^j \lambda(\underline{\beta}) = \frac{\pi_1^{(N)}}{\pi^N} a_j d \blacktriangle^j \lambda(\underline{\beta}). \end{aligned}$$

Отсюда и из определения Φ_N и Φ следует (69).

2) Проверка (70). Напомним, во-первых, что

$$\frac{\pi^N}{\pi_1^{(N)}} W_i = \pi^N \lambda \circ \underline{z}_i = \lambda([\pi^N]_F(\underline{z}_i)) = S_i$$

(см. (5)). Значит,

$$\left(\frac{\pi^N}{\pi_1^{(N)}} \right)^{\Delta^m} (\blacktriangle^m W_i) = \blacktriangle^m \left(\frac{\pi^N}{\pi_1^{(N)}} W_i \right) = \blacktriangle^m S_i.$$

Поэтому, умножая числитель ряда Γ_k на $(\pi^N / \pi_1^{(N)})^{\Delta + \dots + \Delta^{h-1}}$, а знаменатель на $(\pi^N / \pi_1^{(N)})^{1 + \Delta + \dots + \Delta^{h-1}}$, получаем (70).

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Lorenz F., Vostokov S. V.* Honda groups and explicit pairing on the modules of Cartier curves // Algebraic number theory and algebraic geometry / ed. S. Vostokov, Yu. Zarhin. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. P. 143–170.
2. *Абрашкин А. В.* Явная формула для символа Гильберта формальной группы Хонды над векторами Витта // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 3–56.
3. *Востоков С. В., Демченко О. В.* Явная формула для символа Гильберта формальных групп Хонды // Записки научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 86–128.
4. *Fesenko I., Vostokov S.* Local fields and their extensions: a constructive approach. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Transl. Math. Monogr. V. 121.)
5. *Vostokov S. V.* Explicit formulas for the Hilbert symbol // Invitation to higher local fields. Geom. Topol. Monogr. 2000. V. 3. P. 81–90.
6. *Востоков С. В., Жуков И. Б., Фесенко И. Б.* К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 4. С. 91–118.
7. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. V. 22. P. 213–243.
8. *Демченко О. В.* Новое соотношение между формальными группами Любина–Тейта и формальными группами Хонды // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 10. С. 77–84.
9. *Паришин А. Н.* Теория полей классов и алгебраическая K -теория // УМН. 1975. Т. 30. С. 253–254.
10. *Паришин А. Н.* Локальная теория полей классов // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 143–170.
11. *Kato K.* A generalisation of local class field theory by using K -groups. I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. 1979. V. 26. P. 303–376; II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. 1980. V. 27. P. 603–683.
12. *Бенуа Д. Г., Востоков С. В.* Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 6. С. 69–97.
13. *Демченко О. В.* Формальные группы Хонды: арифметика группы точек // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 1. С. 132–149.
14. *Колывагин В. А.* Формальные группы и символ норменного вычета // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. С. 1054–1120.
15. *Востоков С. В.* Явная конструкция теории полей классов для многомерных локальных полей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 283–308.

Санкт-Петербургский государственный университет;

University of Münster, Germany

E-mail: sergei@vostokov.usr.pu.ru; lorenz@math.uni-muenster.de

Поступила в редакцию

04.06.2002