Общероссийский математический портал

Ю. Л. Ершов, Абстрактная теория полей классов (финитарный подход), *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 37–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:32:59

УДК 510.53+512.52

Ю. Л. Ершов

Абстрактная теория полей классов (финитарный подход)

В работе дано определение гомоморфизма взаимности в абстрактной теории полей классов Нейкирха, использующее лишь достаточно большие, но конечные дополнительные неразветвленные расширения. Это позволит применить построенную теорию для эффективизации (алгоритмизации) как локальной, так и глобальной теории полей классов.

Комбинация подходов Нейкирха и Хазевинкеля, использованная в этой статье, проливает дополнительный свет на теорию полей классов даже на абстрактном уровне ее изложения.

Библиография: 5 названий.

Ю. Нейкирх в [1], [2] сумел выделить общую часть теории полей классов (как локальной, так и глобальной) как фрагмент теории когомологий проконечных групп в размерностях $-1, 0$ при выполнении ряда естественных аксиом. В его изложении для определения гомоморфизма взаимности используются максимальные неразветвленные расширения, являющиеся бесконечными расширениями. В настоящей работе предложен подход, основанный на подходе Нейкирха, но использующий только конечные расширения. Это позволит применять построенную теорию для эффективизации (алгоритмизации) как локальной, так и глобальной теории полей классов.

В предлагаемом изложении используется также и подход Хазевинкеля к определению (локальной) теории полей классов, описанной в книге Ивасава [3]. Комбинация этих подходов проливает дополнительный свет на теорию полей классов даже на абстрактном уровне ее изложения.

Пусть G – проконечная группа; будем предполагать, что существует поле k , его расширение Галуа $\bar{k}$ такое, что $G \simeq G(\bar{k}/k)$ (по теореме Уотерхауза [4] любая проконечная группа может быть так “реализована”). Тогда по теории Галуа существует естественное взаимно однозначное соответствие между всеми промежуточными полями $K, k \leq K \leq \bar{k}$, и замкнутыми подгруппами группы $G: K \mapsto G_K \rightleftharpoons \{\sigma \mid \sigma \in G, a^\sigma = a \text{ для всех } a \in K\}; G_k = G, G_{\bar{k}} = \langle 1 \rangle$.

Заметим, что вложение $G_L \leq G_K$ соответствует вложению $K \leq L; L (\geq K)$ – расширение Галуа поля K тогда и только тогда, когда G_L – нормальная подгруппа G_K (и тогда группа Галуа $G(L/K)$ этого расширения есть G_K/G_L); если $\sigma \in G_K$, то полю $L^\sigma \rightleftharpoons \{a \mid a \in L, a^\sigma = a\}$ соответствует подгруппа $\langle G_L, \sigma \rangle$ (замыкание подгруппы $\langle G_L, \sigma \rangle$). Заметим, что это обозначение L^σ не согласуется с обозначением L^σ в [2].

Для $\sigma \in G$ поле, соответствующее подгруппе $\sigma^{-1}G_L\sigma$, будем обозначать через $\sigma(L)$ (в [2] это поле обозначается как L^σ).

Если $M \geq L (\geq K)$ – расширения Галуа поля K , $\sigma \in G(M/K)$, то через $\sigma \upharpoonright L$ будем обозначать образ элемента σ в группе $G(L/K)$ при естественном эпиморфизме $G(M/K) (= G_K/G_M) \longrightarrow G(L/K) (= G_K/G_L)$ ($L \leq M \implies G_M \leq G_L$).

Пусть $d: G \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ – некоторый фиксированный эпиморфизм проконечных групп; через I обозначим ядро этого эпиморфизма; $I = G_{\tilde{k}}$ для подходящего поля $\tilde{k}$ ($k \leq \tilde{k} \leq \bar{k}$). Для произвольного промежуточного поля K группа $I_K \triangleq G_K \cap I$ называется *группой инерции* поля K . Пусть $f_K \triangleq [\widehat{\mathbb{Z}} : d(G_K)]$, $e_K \triangleq [I : I_K]$. Если f_K конечно (например, в случае, когда K – конечное расширение k), то определен эпиморфизм

$$d_K \triangleq f_K^{-1}d: G_K \longmapsto \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Для расширения $K \leq L$ *степень инерции* $f_{L/K}$ расширения определена как $[d(G_K) : d(G_L)]$, а *индекс ветвления* $e_{L/K}$ – как $[I_K : I_L]$.

Для башни расширений $K \leq L \leq M$ имеются очевидные соотношения $f_{M/K} = f_{L/K} \cdot f_{M/L}$ и $e_{M/K} = e_{L/K} \cdot e_{M/L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2; предложение (4.2)]. *Для любого расширения $K \leq L$ справедливо основное равенство $[L : K] = f_{L/K} \cdot e_{L/K}$.*

Расширение $K \leq L$ называется *неразветвленным*, если $e_{L/K} = 1$; *вполне разветвленным*, если $f_{L/K} = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всякое неразветвленное расширение $K \leq L$ является абелевым расширением Галуа (циклическим, если $[L : K] < \omega$).

Действительно, если $e_{L/K} = 1$, то $I_K = I_L$; $G_L/I_L \leq G_K/I_K \simeq d(G_K) \leq \widehat{\mathbb{Z}}$. Следовательно, G_L/I_L нормальна в G_K/I_K , G_L нормальна в G_K и $G(L/K) = G_K/G_L \simeq d(G_K)/d(G_L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для любого расширения $K \leq L$ существует наибольшее подрасширение L_u^K такое, что $K \leq L_u^K \leq L$, $L_u^K \geq K$ – неразветвленное, а $L \geq L_u^K$ – вполне разветвленное расширение.

Поле L_u^K соответствует замкнутой подгруппе $G_L I_K$ ($G_L \leq G_L I_K \leq G_K$). Действительно, легко видеть из определения, что $I_{L_u^K} = I_K$ ($I_{L_u^K} = G_L I_K \cap I \geq I_K$; $I_{L_u^K} = G_L I_K \cap I \leq G_K \cap I = I_K$). Следовательно, $L_u^K \geq K$ – неразветвленное расширение. Так как $I_K \leq I = \text{Ker } d$, то $d(G_L) = d(G_L I_K) = d(G_{L_u^K})$, следовательно, $f_{L/L_u^K} = 1$, т.е. $L \geq L_u^K$ – вполне разветвленное расширение.

Для $K \geq k$ пусть $\mathbb{Z}_K \triangleq \widehat{\mathbb{Z}}/d(G_K)$, и если K – расширение Галуа поля k , то существует естественный эпиморфизм $d^K: G(K/k) \longrightarrow \mathbb{Z}_K$, индуцированный эпиморфизмом d .

Для $K \leq L$ пусть $\mathbb{Z}_{L/K} \triangleq \widehat{\mathbb{Z}}/d_K(G_L)$, и если $f_K < \omega$ и L – расширение Галуа поля K , то существует естественный эпиморфизм $d_K^L: G(L/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_{L/K}$, индуцированный эпиморфизмом d_K . Ядро эпиморфизма d_K^L обозначим через I_K^L . Заметим, что группа $\mathbb{Z}_{L/K}$ естественно изоморфна группе $G(L_u^K/K)$ и $|\mathbb{Z}_{L/K}| = f_{L/K}$.

Если $K \leq L \leq M$, $f_K < \omega$, L и M – расширения Галуа поля K , то следующая

диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & I_K^M & \longrightarrow & G(M/K) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{M/K} (= G(M_u^K/K)) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \upharpoonright_L & & \downarrow \upharpoonright_L & & \downarrow \upharpoonright_{L_u^K} \\
 1 & \longrightarrow & I_K^L & \longrightarrow & G(L/K) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{L/K} (= G(L_u^K/K)) \longrightarrow 1
 \end{array} \quad (*)$$

коммутативна, где вертикальные эпиморфизмы естественно определены ($G_M \leq G_L$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если L – расширение Галуа поля K , M – неразветвленное расширение L , то M является расширением Галуа поля K .

Действительно, рассмотрение диаграммы, изображенной на рис. 1, показывает, что в случае неразветвленности расширения $M \geq L$ имеет место соотношение $M = LM_u^K = L \otimes_{L_u^K} M_u^K$; т.е. M является композитом расширений Галуа K и M_u^K поля K .

Рис. 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого K такого, что $f_K < \omega$, и любого натурального $n > 0$ существует и единственное неразветвленное расширение $L \geq K$ такое, что $f_{L/K} = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – поле такое, что $G_L = d_K^{-1}(n\widehat{\mathbb{Z}})$; нетрудно проверить, что L искомое.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $K \leq L \leq M$, $f_M < \omega$ (следовательно, и $f_K, f_{L/K} < \omega$), L и M – расширения Галуа поля K , то M является неразветвленным расширением L тогда и только тогда, когда группа $G(M/K)$ естественно изоморфна расслоенному произведению $G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$ (см. диаграмму (*)). Этот изоморфизм определен следующим образом: элементу $\sigma \in G(M/K)$ ставится в соответствие элемент $\langle \pi_L^M(\sigma), d_K^M(\sigma) \rangle = \langle \sigma \upharpoonright L, d_K^M(\sigma) \rangle \in G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$ (см. [5; §2.1, лемма 4] и замечание 3).

Далее будем предполагать, что все рассматриваемые (промежуточные) поля являются конечными расширениями поля k .

Зафиксируем образующую Φ группы $\widehat{\mathbb{Z}}$ ($\widehat{\mathbb{Z}} = \overline{\langle \Phi \rangle}$).

Пусть $K \leq L$ – расширение Галуа (по нашему соглашению L (и K) – конечное расширение k); пусть L_u^K – наибольшее неразветвленное подрасширение L ; тогда

$G(L_u^K/K) \simeq \mathbb{Z}_{L/K}$, $G(L/L_u^K) = I_K^L$. Обозначим через Φ_K^L образ элемента Φ в группе $\mathbb{Z}_{L/K} = \widehat{\mathbb{Z}}/d_K(G_L)$; Φ_K^L является образующим циклической группы $\mathbb{Z}_{L/K}$. Тогда для любого элемента $\sigma \in G(L/K)$ найдется единственное m , $0 < m \leq f_{L/K} = |\mathbb{Z}_{L/K}|$, такое, что $\sigma \upharpoonright L_u^K = (\Phi_K^L)^m$; обозначим это m через $\partial_K^L \sigma$ (иногда просто $\partial \sigma$).

Определим теперь множество $\text{Frob}(L/K) \subseteq G(L/K)$ *элементов Фробениуса* группы $G(L/K)$: для $\sigma \in G(L/K)$ $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $\langle \sigma \rangle \cap I_K^L = \langle 1 \rangle$;
- 2) $|\sigma| \times \partial \sigma = f_{L/K}$.

Из условия 1) вытекает, что $|\sigma| = |\sigma \upharpoonright L_u^K|$ и что L является неразветвленным расширением поля L^σ .

Отметим ряд просто проверяемых свойств фробениусовых элементов.

1. Для $\sigma \in G(L/K)$ $\sigma \in \text{Frob}(L/K) \iff \langle \sigma \rangle \cap I_K^L = \langle 1 \rangle$ и $\partial_K^L \sigma$ делит $f_{L/K}$.
2. Если $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$, $\tau \in G(L/K)$, то $\sigma^\tau (= \tau^{-1} \sigma \tau) \in \text{Frob}(L/K)$ (и $\partial_K^L(\sigma^\tau) = \partial_K^L \sigma$).
3. Если $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$, m делит $|\sigma|$, то $\sigma^m \in \text{Frob}(L/K)$ и $\partial_K^L \sigma^m = m \partial_K^L \sigma$.
4. Если $K \leq K' \leq L_u^K$, то $\text{Frob}(L/K') = \text{Frob}(L/K) \cap G(L/K')$ ($G(L/K') \leq G(L/K)$).
5. Если $\psi \in \text{Frob}(L/K)$, $K' = (L_u^K)^\psi$, то $\psi \in \text{Frob}(L/K')$ и $\partial_{K'}^L \psi = 1$.

Пусть $K \leq L \leq M$, L и M – расширения Галуа поля K и M – неразветвленное расширение L .

Элемент $\sigma_0 \in \text{Frob}(M/K)$ назовем *подъемом* элемента $\sigma \in G(L/K)$, если $\sigma_0 \upharpoonright L = \sigma$ и $\partial_K^M \sigma_0 = \partial_K^L \sigma$.

ЛЕММА 1. *Для элемента $\sigma \in G(L/K)$ существует не более одного подъема в $\text{Frob}(M/K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M – неразветвленное расширение L , то $G(M/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$. Отсюда следует, что отображение ограничения $\sigma \mapsto \sigma \upharpoonright L$ индуцирует изоморфизм групп I_K^M и I_K^L .

Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in \text{Frob}(M/K)$ являются подъемами элемента $\sigma \in G(L/K)$. Тогда $\partial_K^M \sigma_0 = \partial_K^M \sigma_1 (= \partial_K^L \sigma)$ и, следовательно, $\sigma_0 = \sigma_1 \tau$ для $\tau (= \sigma_1^{-1} \sigma_0) \in I_K^M$. Так как $\sigma_0 \upharpoonright L = \sigma = \sigma_1 \upharpoonright L$, то $\sigma_0 \upharpoonright L = (\sigma_1 \upharpoonright L)(\tau \upharpoonright L)$ влечет, что $\tau \upharpoonright L = 1$; отсюда $\tau = 1$ и $\sigma_0 = \sigma_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Проведенное рассуждение устанавливает более общий результат: *если $\sigma_0, \sigma_1 \in \text{Frob}(M/K)$, $\partial_K^M \sigma_0 = \partial_K^M \sigma_1$ и $\sigma_0 \upharpoonright L = \sigma_1 \upharpoonright L$, то $\sigma_0 = \sigma_1$.*

Пусть $K \leq L \leq M \leq M'$ – башня полей такая, что L , M и M' являются расширениями Галуа поля K ; M и M' являются неразветвленными расширениями L (тогда M' является неразветвленным расширением M).

ЛЕММА 2. *Если $\sigma \in G(L/K)$; $\sigma_0 \in \text{Frob}(M/K)$ и $\sigma'_0 \in \text{Frob}(M'/K)$ являются подъемами элемента σ , то $\sigma'_0 \upharpoonright M = \sigma_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M' и M являются неразветвленными расширениями L , то имеют место изоморфизмы (представления) $G(M'/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M'/K}$ и $G(M/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$, а эпиморфизм

$\pi_M^{M'} = \upharpoonright M: G(M'/K) \longrightarrow G(M/K)$ реализуется на этих представлениях так: $\pi_M^{M'}(\langle \sigma, \xi' \rangle) = \langle \sigma, \bar{\pi}_M^{M'}(\xi') \rangle$ для $\sigma \in G(L/K)$, $\xi' \in \mathbb{Z}_{M'/K}$. Заметим, что $\mathbb{Z}_{M'/K} = \langle \Phi_K^{M'} \rangle$, $\mathbb{Z}_{M/K} = \langle \Phi_K^M \rangle$, а эпиморфизм $\bar{\pi}_M^{M'}: \mathbb{Z}_{M'/K} \longrightarrow \mathbb{Z}_{M/K}$ определен на образующей $\Phi_K^{M'}$ так: $\bar{\pi}_M^{M'} \Phi_K^{M'} = \Phi_K^M$.

Воспользуемся этим для доказательства леммы. Элементу σ'_0 в представлении $G(M'/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M'/K}$ соответствует элемент $\langle \sigma'_0 \upharpoonright L, d_K^{M'}(\sigma'_0) \rangle$; но $\sigma'_0 \upharpoonright L = \sigma$, а $d_K^{M'}(\sigma'_0) = (\Phi_K^{M'})^{\partial_K^{M'}(\sigma'_0)} = (\Phi_K^{M'})^{\partial_K^L(\sigma)}$; аналогично, элементу σ_0 в представлении $G(M/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$ соответствует элемент $\langle \sigma, (\Phi_K^M)^{\partial_K^L(\sigma)} \rangle$; элементу $\pi_M^{M'}(\sigma_0) = \sigma_0 \upharpoonright M$ соответствует элемент $\langle \sigma, \bar{\pi}_M^{M'}((\Phi_K^{M'})^{\partial_K^L(\sigma)}) \rangle = \langle \sigma, (\Phi_K^M)^{\partial_K^L(\sigma)} \rangle$. Отсюда и получается, что $\sigma'_0 \upharpoonright M = \sigma_0$.

Элементы $\sigma_0, \sigma_1 \in \text{Frob}(L/K)$ назовем *когерентными*, если $\sigma_0 \sigma_1 \in \text{Frob}(L/K)$ и $\partial_K^L(\sigma_0 \sigma_1) = \partial_K^L(\sigma_0) + \partial_K^L(\sigma_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $L \geq K$ – расширение Галуа, тогда существует натуральное число $n_{L/K} > 0$ такое, что для любого неразветвленного расширения $M \geq L$ такого, что $n_{L/K}$ делит $[M : L]$, справедливы следующие свойства:

- 1) существует фробениусов элемент $\psi \in \text{Frob}(M/K)$ такой, что $\partial_K^M \psi = 1$;
- 2) для любого автоморфизма $\sigma \in G(L/K)$ существует его подъем $\sigma_0 \in \text{Frob}(M/K)$;
- 3) если $\sigma_0, \sigma_1 \in \text{Frob}(M/K)$ – подъемы элементов из $G(L/K)$, то они когерентны.

ЛЕММА 3. Пусть M – такое неразветвленное расширение L , что период $\omega(G(L/K))$ группы $G(L/K)$ делит степень $m = [M : L]$ расширения $M \geq L$. Тогда в $\text{Frob}(M/K)$ существует элемент ψ такой, что $\partial_K^M \psi = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место изоморфизм $G(M/K) \simeq G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$. Так как $d_K^L: G(L/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_{L/K}$ – эпиморфизм, то в $G(L/K)$ существует σ_0 такой, что $d_K^L(\sigma_0) = \Phi_K^L$. Заметим, что тогда элемент $\langle \sigma_0, \Phi_K^M \rangle \in G(L/K) \times_{\mathbb{Z}_{L/K}} \mathbb{Z}_{M/K}$ ($\mathbb{Z}_{M/K} = \langle \Phi_K^M \rangle$, $\mathbb{Z}_{L/K} = \langle \Phi_K^L \rangle$). Проверим, что этот элемент имеет порядок $f_{M/K}$. Действительно,

$$\langle \sigma_0, \Phi_K^M \rangle^{f_{M/K}} = \langle \sigma_0^{f_{M/K}}, (\Phi_K^M)^{f_{M/K}} \rangle = \langle 1, 1 \rangle,$$

так как $|\sigma_0|$ делит $\omega(G(L/K))$, $\omega(G(L/K))$ делит m , m делит $f_{M/K}$ ($m = f_{M/K}$) и, следовательно, $\sigma_0^{f_{M/K}} = 1$; $(\Phi_K^M)^{f_{M/K}} = 1$, так как $|\mathbb{Z}_{M/K}| = f_{M/K}$. Если $\psi \in G(M/K)$ соответствует элементу $\langle \sigma_0, \Phi_K^M \rangle$, то ψ исконый.

Установим теперь одну теоретико-групповую лемму.

Пусть G – конечная группа, $H \trianglelefteq G$ – нормальная подгруппа; $\omega(H)$ – период группы H ; $\omega(\text{Aut } H)$ – период группы всех автоморфизмов группы H ; $\Omega(H) = \omega(H) \cdot \omega(\text{Aut } H)$.

ЛЕММА 4. Если $g \in G$, $\langle g \rangle \cap H = \langle 1 \rangle$, и порядок $m = |g|$ элемента g делится на $\Omega(H)$, то для любого $h \in H$ порядок элемента gh равен m (и $\langle gh \rangle \cap H = \langle 1 \rangle$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассмотрения образов элементов g и gh в факторгруппе G/H легко следует, что $|g| = |gH| = |ghH| \leq |gh|$. Поэтому достаточно установить, что $(gh)^m = 1$. Имеем $(gh)^m = g^m \cdot h^{g^{m-1} + g^{m-2} + \dots + g + 1}$.

Пусть $n = \omega(\text{Aut } H)$ и $m = n \cdot k$; тогда $\omega(H)$ делит k . Представим выражение $g_m = g^{m-1} + g^{m-2} + \dots + g + 1$ так:

$$\begin{aligned} g_m &= (g^{n(k-1)+(n-1)} + g^{n(k-1)+(n-2)} + \dots + g^{n(k-1)+1} + g^{n(k-1)+0}) \\ &\quad + (g^{n(k-2)+(n-1)} + g^{n(k-2)+(n-2)} + \dots + g^{n(k-2)+1} + g^{n(k-2)+0}) \\ &\quad + \dots + (g^{n \cdot 0 + (n-1)} + g^{n \cdot 0 + (n-2)} + \dots + g^{n \cdot 0 + 1} + g^{n \cdot 0 + 0}). \end{aligned}$$

Далее заметим, что $h^{g^{n \cdot i + j}} = h^{g^j}$; действительно, $h^{g^{n \cdot i + j}} = (h^{g^{n \cdot i}})^{g^j}$; $h^{g^{n \cdot i}} = h^{g^{i \cdot n}} = h^{(g^i)^n} = h$, так как $n = \omega(\text{Aut } H)$ и образ элемента g^i в группе $\text{Aut } H$ имеет порядок, делящийся на n . Итак, $h^{g^{n \cdot i + j}} = (h^{g^{n \cdot i}})^{g^j} = h^{g^j}$, а

$$\begin{aligned} h^{g_m} &= h^{g^{n(k-1)+(n-1)} + \dots + g^{n(k-1)+0}} \cdot h^{g^{n(k-2)+(n-1)} + \dots + g^{n(k-2)+0}} \\ &\quad \dots h^{g^{n-1} + g^{n-2} + \dots + 1} = (h^{g^n})^k; \end{aligned}$$

но $h^{g^n} \in H$, а $\omega(H)$ делит k ; следовательно, $(h^{g^n})^k = 1$ и $h^{g_m} = 1$. Вместе с соотношением $g^m = 1$ имеем $(gh)^m = g^m h^{g_m} = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $L \geq K$ – расширение Галуа, $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$; если $\Omega(I_K^L)$ делит $|\sigma|$, то $\sigma\tau \in \text{Frob}(L/K)$ для любого элемента $\tau \in I_K^L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Для любого натурального $m > 0$ через $\langle m \rangle$ обозначим наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, m$:

$$\langle m \rangle = \prod_{p \leq m, p \text{ простое}} p^{\lfloor \log_p m \rfloor}.$$

Полагаем $n_{L/K} \doteq \langle 2 \cdot f_{L/K} \rangle \cdot \omega(G(L/K)) \cdot \Omega(I_K^L)$ и проверим, что это число удовлетворяет предложению 3.

Пусть M – неразветвленное расширение L такое, что $n_{L/K}$ делит $[M : L]$. Так как $\omega(G(L/K))$ делит $n_{L/K}$, то по лемме 3 в $\text{Frob}(M/K)$ найдется элемент σ_0 такой, что $\partial_K^M(\sigma_0) = 1$; заметим, что порядок $|\sigma_0| = f_{M/L} = f_{M/K} \cdot f_{L/K}$ элемента σ_0 делится на $n_{L/K}$.

Пусть $\sigma \in G(L/K)$, $m \doteq \partial_K^L(\sigma)$; тогда $d_K^L(\sigma) = d_K^L((\sigma_0 \upharpoonright L)^m)$; следовательно, $\sigma = (\sigma_0 \upharpoonright L)^m \tau$ для подходящего элемента $\tau \in I_K^L = \text{Ker } d_K^L$. Пусть $\tau_0 \in I_K^M$ такой, что $\tau_0 \upharpoonright L = \tau$. Тогда имеет место равенство $(\sigma_0^m \tau_0) \upharpoonright L = \sigma$. Проверим, что $\sigma_0^m \tau_0 \in \text{Frob}(M/K)$. Так как m делит порядок σ и, следовательно, $\omega(G(L/K))$, то по свойству 3 элементов Фробениуса $\sigma_0^m \in \text{Frob}(M/K)$, $|\sigma_0^m| = |\sigma| \cdot m^{-1}$. Но тогда $\Omega(I_K^L)$ делит $|\sigma_0^m|$; группы I_K^L и I_K^M изоморфны (M – неразветвленное расширение L); тогда по следствию 1 $\sigma_0^m \tau_0 \in \text{Frob}(M/K)$; кроме того, $\partial_K^M(\sigma_0^m \tau_0) = m = \partial_K^L(\sigma)$ и $\sigma_0^m \tau_0$ является подъемом элемента σ . Свойство 2) предложения установлено.

Для доказательства свойства 3) установим более общее утверждение: если $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Frob}(M/K)$ и $m_i \doteq \partial_K^M \sigma_i \leq f_{L/K}$, $i = 1, 2$, то σ_1, σ_2 когерентны. Для подходящих элементов $\tau_1, \tau_2 \in I_K^M$ имеют место равенства $\sigma_1 = \sigma_0^{m_1} \tau_1$,

$\sigma_2 = \sigma_0^{m_1} \tau_2$; тогда $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^{m_1+m_2} \tau_3$, где $\tau_3 = \tau_1^{\sigma_0^{m_2}} \tau_2 \in I_K^M$. Так как $m_1 + m_2 \leq 2f_{L/K}$, то $(m_1 + m_2)\Omega(I_K^L)$ делит $n_{L/K}$, следовательно, $\sigma_0^{m_1+m_2} \in \text{Frob}(M/K)$ и $\Omega(I_K^M) = \Omega(I_K^L)$ делит $|\sigma_0^{m_1+m_2}|$; тогда по следствию 1 $\sigma_0^{m_1+m_2} \tau_3 \in \text{Frob}(M/K)$ и $\partial_K^M(\sigma_0^{m_1+m_2} \tau_3) = \partial_K^M(\sigma_0^{m_1+m_2}) = m_1 + m_2$. Следовательно, элементы σ_1 и σ_2 когерентны.

Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Утверждение 1) предложения 3 влечет, что эпиморфизм $d_K^M: G(M/K) \rightarrow \mathbb{Z}_{M/K}$ расщепляется.

Пусть теперь задан непрерывный мультипликативный G -модуль A , т.е. мультипликативная абелева группа A , на которой элементы $\sigma \in G$ действуют как автоморфизмы справа: $a \mapsto a^\sigma$, $a \in A$, так, что выполнены соотношения:

- i) $a^1 = a$,
- ii) $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$,
- iii) $a^{\sigma\tau} = (a^\sigma)^\tau$,
- iv) $A = \bigcup_{[K:k] < \omega} A_K$, где $A_K \rightleftharpoons \{a \mid a \in A, a^\sigma = a \text{ для всех } \sigma \in G_K\}$.

Для каждого расширения $L \geq K$ имеем $A_K \leq A_L$, и если $[L:K] < \omega$, то определено отображение нормы $N_{L/K}: A_L \rightarrow A_K$:

$$N_{L/K}(a) \rightleftharpoons \prod_{\sigma} a^\sigma,$$

где σ пробегает систему представителей $G_L \setminus G_K$ ($G_K = \bigcup G_L \sigma$). Если $L \geq K$ — расширение Галуа, то A_L является $G(L/K)$ -модулем и $A_L^{G(L/K)} = A_K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $L \geq K$ — циклическое расширение, $G(L/K) = \langle \sigma \rangle$ и $n \equiv [L/K]$, то для $a \in A_L$ $N_{L/K}(a) = a^{\sigma^n} = a^{\sigma^{n-1} + \sigma^{n-2} + \dots + \sigma + 1}$.

В теории полей классов важны следующие группы (связанные с G и модулем A):

$$\begin{aligned} H^0(G(L/K), A_L) &\rightleftharpoons A_K / N_{L/K}(A_L), \\ H^{-1}(G(L/K), A_L) &\rightleftharpoons_{N_{L/K}} A_L / I_{G(L/K)} A_L, \end{aligned}$$

где $N_{L/K} A_L \rightleftharpoons \{a \mid a \in A_L, N_{L/K}(a) = 1\}$, а $I_{G(L/K)} A_L$ — подгруппа группы $N_{L/K} A_L$, порожденная всеми элементами вида $a^{\sigma-1} = a^\sigma a^{-1}$, где $a \in A_L$, $\sigma \in G(L/K)$. Если $G(L/K)$ циклическая, а σ является образующей, то

$$I_{G(L/K)} A_L = A_L^{\sigma-1} \rightleftharpoons \{a^{\sigma-1} \mid a \in A_L\},$$

а именно формальное равенство

$$\sigma^k - 1 = (\sigma^{k-1} + \dots + \sigma + 1)(\sigma - 1) = \sigma_k(\sigma - 1)$$

влечет, что $a^{\sigma^k-1} = b^{\sigma-1}$, где $b \rightleftharpoons a^{\sigma_k}$.

Гензелевым нормированием группы A_k по отношению к эпиморфизму $d: G \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ называется гомоморфизм

$$v: A_k \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}},$$

удовлетворяющий следующим свойствам:

- (i) $\Phi \in Z \rightleftharpoons v(A_k)$ и $Z/nZ \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/n\widehat{\mathbb{Z}}$ для всех $n > 0$;
- (ii) $v(N_{K/k} A_k) = f_K Z$ для всех (конечных) расширений $K \geq k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [2; предложение (4.7)]. Для каждого конечного расширения $K \geq k$ формула

$$v_K \Leftarrow f_K^{-1} v \cdot N_{K/k} : A_K \longrightarrow Z$$

определяет эпиморфизм, удовлетворяющий следующим свойствам:

- (i) $v_K = v_{\sigma(K)} \cdot \sigma$ для всех $\sigma \in G$;
- (ii) для всякого конечного расширения $L \geq K$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_L & \xrightarrow{v_L} & \widehat{\mathbb{Z}} \\ N_{L/K} \downarrow & & \downarrow f_{L/K} \\ A_K & \xrightarrow{v_K} & \widehat{\mathbb{Z}} \end{array}$$

коммутативна.

Простым элементом группы A_K называется любой $\pi_K \in A_K$ такой, что $v_K(\pi_K) = \Phi$. Полагаем $U_K \Leftarrow \{u \mid u \in A_K, v_K(u) = 0\}$.

Для неразветвленного расширения $L \geq K$ из предложения 4 следует, что $v_L \upharpoonright A_K = v_K$; в частности, простой элемент A_K будет и простым элементом A_L . Если $L \geq K$ вполне разветвлено и π_L – простой элемент A_L , то $\pi_K \Leftarrow N_{L/K}(\pi_L)$ – простой элемент A_K .

Предположим, что выполнена следующая аксиома U [2; аксиома (5.1)]:

$$H^i(G(L/K), U_L) = 1, \quad i = 0, -1,$$

для любого неразветвленного (конечного) расширения Галуа $L \geq K$.

Определим отображение Нейкирха $\nu_{L/K} : \text{Frob}(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(U_L)$ для конечного расширения Галуа $L \geq K$ следующим образом: для $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$ пусть $\Sigma \Leftarrow L^\sigma$, π_Σ – простой элемент A_Σ , тогда

$$\nu_{L/K}(\sigma) \Leftarrow N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \cdot N_{L/K}(U_L).$$

Проверим корректность определения. Пусть π'_Σ – другой простой элемент A_Σ ; тогда $\pi'_\Sigma = \pi_\Sigma u$ для $u \in U_\Sigma$. Так как L – неразветвленное расширение $\Sigma = L^\sigma$, то по аксиоме U найдется $v \in U_L$ такой, что $N_{L/\Sigma}(v) = u$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} N_{\Sigma/K}(\pi'_\Sigma) &= N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma u) = N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \cdot N_{\Sigma/K}(u) \\ &= N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) N_{\Sigma/K} N_{L/\Sigma}(v) = N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) N_{L/K}(v) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$N_{\Sigma/K}(\pi'_\Sigma) \cdot N_{L/K}(U_K) = N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \cdot N_{L/K}(U_K).$$

Корректность определения отображения $\nu_{L/K}$ проверена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $K \leq L \leq M$, L и M – расширения Галуа поля K ; пусть $\psi \in \text{Frob}(M/K)$; если $\psi \Leftarrow \psi_0 \upharpoonright L \in \text{Frob}(L/K)$, то $\nu_{L/K}(\psi) = \nu_{M/K}(\psi_0) N_{L/K}(U_L)$.

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что M^{ψ_0} – вполне разветвленное расширение L^{ψ} . Если π_0 – простой элемент $A_{M^{\psi_0}}$, то $\pi \rightleftharpoons N_{M^{\psi_0}/L^{\psi}}(\pi_0)$ – простой элемент $A_{L^{\psi}}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \nu_{L/K}(\psi) &= N_{L^{\psi}/K}(\pi) \cdot N_{L/K}(U_L) = N_{L^{\psi}/K}(N_{M^{\psi_0}/L^{\psi}}(\pi_0)) \cdot N_{L/K}(U_L) \\ &= N_{M^{\psi_0}/K}(\pi_0) \cdot N_{L/K}(U_L) = \nu_{M/K}(\psi_0) \cdot N_{L/K}(U_L). \end{aligned}$$

Заметим, что $N_{M/K}(U_M) \leq N_{L/K}(U_L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если M – неразветвленное расширение L , то $N_{M/K}(U_M) = N_{L/K}N_{M/L}(U_M) = N_{L/K}(U_L)$ и тогда (в условиях предложения 5) $\nu_{L/K}(\psi) = \nu_{M/L}(\psi_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если M – вполне разветвленное расширение, то условие предложения 5 всегда выполнено:

$$\psi_0 \in \text{Frob}(M/K) \implies \psi_0 \upharpoonright L \in \text{Frob}(L/K).$$

В предположении, что в $\text{Frob}(L/K)$ существует элемент ψ такой, что $\partial_K^L \psi = 1$, установим ряд важных свойств отображения $\nu_{L/K}$.

Пусть $\psi' \in \text{Frob}(L/K)$, $m \rightleftharpoons \partial_K^L \psi'$; тогда $\psi' = \psi^m \tau$ для подходящего $\tau (\rightleftharpoons \psi^{-m} \psi') \in H = I_K^L$. Пусть $K' \rightleftharpoons L_u^{K\psi'}$; тогда $\psi' \in \text{Frob}(L/K')$ и $\partial_{K'}^L \psi' = 1$; $G(K'/K) = \langle \psi \upharpoonright K' \rangle$; $[K' : K] = m$ и $N_{K'/K}(a) = a^{\psi^m}$ для $a \in A_{K'}$.

Так как $N_{L/K}(U_L) = N_{K'/K}N_{L/K'}(U_L)$, то $N_{K'/K}$ индуцирует гомоморфизм $\tilde{N}_{K'/K} : A_{K'}/N_{L/K'}(U_L) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(U_L)$.

ЛЕММА 5. Имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{N}_{K'/K} \nu_{L/K'}(\psi') = \nu_{L/K}(\psi').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – простой элемент A_{Σ} , где $\Sigma = L^{\psi'}$; тогда равенства $N_{L/K}(\pi) = N_{K'/K}N_{L/K'}(\pi)$, $\nu_{L/K}(\psi') = N_{L/K}(\pi)N_{L/K}(U_L)$, $\nu_{L/K'} = N_{L/K'}(\pi)N_{L/K'}(U_L)$ и влекут нужное соотношение.

Рис. 3

ЛЕММА 6. Если m делит $|\psi|$ (т.е. $\psi^m \in \text{Frob}(L/K)$), то $\nu_{L/K}(\psi^m) = \nu_{L/K}(\psi)^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π_ψ — простой элемент A_{L^ψ} ; тогда π_ψ является и простым элементом $A_L^{\psi^m}$ (L^{ψ^m} — неразветвленное расширение L^ψ , $[L^{\psi^m} : L^\psi] = m$) и $N_{L^{\psi^m}/K}(\pi_\psi) = N_{L^\psi/K} N_{L^{\psi^m}/L^\psi}(\pi_\psi) = N_{L^\psi/K}(\pi_\psi^m) = N_{L^\psi/K}(\pi_\psi)^m$. Отсюда и следует заключение леммы.

Пусть L_u^K — наибольшее неразветвленное расширение K в L ; заметим, что $L_u^K \parallel_K L^\psi$ и $L = L_u^K \otimes_K L^\psi$; полагаем $H \rightleftharpoons G(L/L_u^K)$ ($H = I_K^L$); тогда $G(L/K) = \langle \psi \rangle \ltimes H$.

Введем в рассмотрение группу $H_K^{-1}(H, U_L)$, определенную так: пусть $V_K(L/L_u^K) = \langle u^{\tau^{-1}}, v^{1-\psi} \mid u \in U_L, \tau \in H, v \in N_{L/L_u^K} U_L (= \{u \mid u \in U_L, N_{L/L_u^K}(u) = 1\}) \rangle$ и $H_K^{-1}(H, U_L) \rightleftharpoons_{N_{L/L_u^K}} U_L/V_K(L/L_u^K)$. Нетрудно видеть, что $V_K(L/L_u^K) \geq I_{G(L/L_u^K)} U_L$, так что имеется естественный эпиморфизм $H^{-1}(H, U_L) \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. На группе $H^{-1}(H, U_L)$ определено естественное действие автоморфизма ψ (на самом деле, всей группы $G(L/K)$), и группа $H_K^{-1}(H, U_L)$ является наибольшей факторгруппой $H^{-1}(H, U_L)$, на которой действие ψ становится тривиальным.

Обозначим через N норменное отображение N_{L/L_u^K} и положим $U_K^L \rightleftharpoons \{u \mid u \in U_K, \text{ существует } v \in U_L \text{ такой, что } N(v) = u\}$. Определим отображение $\rho (= \rho_K^L) : U_K^L \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$ так: для $u \in U_K^L$ пусть $\rho(u) = v^{1-\psi} V_K(L/L_u^K)$, где $v \in U_L$ такой, что $N(v) = u$.

ЛЕММА 7. Отображение ρ определено корректно, является гомоморфизмом и не зависит от выбора ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v, v' \in U_L$, $N(v) = N(v') = u$; тогда $v' = vw$, $w \in U_L$ и $N(w) = 1$; отсюда $(v')^{1-\psi} = (vw)^{1-\psi} = v^{1-\psi} w^{1-\psi}$; но $w^{1-\psi} \in V_K(L/L_u^K)$, так как $w \in N_{L/L_u^K} U_L \leq N_{L/K} U_L$. Корректность проверена.

Если $u_0, u_1 \in U_K^L$; $v_0, v_1 \in U_L$ таковы, что $N(v_i) = u_i$, то $N(v_0 v_1) = u_0 u_1$ и $(v_0 v_1)^{1-\psi} = v_0^{1-\psi} \cdot v_1^{1-\psi}$. Отсюда следует, что ρ — гомоморфизм.

Пусть $\psi' \in \text{Frob}(L/K)$, $\partial_K^L \psi' = 1$; тогда $\psi' = \psi_\tau$ для $\tau (\Leftrightarrow \psi' \psi^{-1}) \in H$; если $v \in U_L$ и $u = N(v) \in U_K$, то $v^{1-\psi'} = v^{1-\psi_\tau} = v^{1-\psi+\psi-\psi_\tau} = v^{1-\psi} (v^{-\psi})^{\tau-1}$; $v^{-\psi} \in U_L$, $(v^{-\psi})^{\tau-1} \in V_K(L/L_u^K)$; следовательно, $v^{1-\psi'} V_K(L/L_u^K) = v^{1-\psi} V_K(L/L_u^K)$.

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Ядром гомоморфизма $\rho: U_K^L \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$ является $N_{L/K}(U_L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (рис. 4 показывает диаграмму взаимодействий всех объектов из доказательства предложения). Пусть $w \in U_L$ и $u \Leftrightarrow N_{L/K}(w)$. Полагаем $v \Leftrightarrow N_{L/L^\psi}(w) \in U_{L^\psi}$; тогда $u = N_{L/K}(w) = N_{L^\psi/K} N_{L/L^\psi}(w) = N_{L^\psi/K}(v) = N(v)$ и $v^{1-\psi} = 1$, так как $v \in L^\psi$.

Отсюда $u \in U_K^L$, $\rho(u) = 1$ и $N_{L/K}(U_K) \leq \text{Ker } \rho$.

Наоборот, пусть $u = N(v) \in U_K^L$, $v \in U_L$ и $v^{1-\psi} \in V_K(L/L_u^K)$. Тогда существуют $v_i \in U_L$, $\tau_i \in H$, $i < k$, $w \in_N U_L$ такие, что $v^{1-\psi} = w^{1-\psi} \prod_{i < k} v_i^{\tau_i-1}$. Так как $N(w) = 1$, то $N(vw^{-1}) = N(v) = u$. Поэтому можно считать, что $w = 1$.

Итак, $v^{1-\psi} = \prod_{i < k} v_i^{\tau_i-1}$. Нужно показать, что $u = N(v) \in N_{L/K}(U_L)$.

Пусть M — неразветвленное расширение L такое, что $n \Leftrightarrow [L : K]$ делит f ($\Leftrightarrow [M : L]$) и в $\text{Frob}(M/K)$ существует подъем элемента ψ , т.е. такой элемент $\psi' \in \text{Frob}(M/K)$, что $\partial_K^M \psi' = \partial_K^L \psi = 1$ и $\psi' \upharpoonright L = \psi$. Предложение 3 гарантирует существование такого расширения. Пусть M_u^K — наибольшее неразветвленное расширение K в M .

Заметим, что $f_{L/K}$ делит n . Полагаем $\sigma \Leftrightarrow (\psi')^{f_{L/K}}$; тогда $\sigma \upharpoonright L = (\psi' \upharpoonright L)^{f_{L/K}} = \psi^{f_{L/K}} = \text{id}_L$. Следовательно, $L \leq M^\sigma$; имеем также соотношения $[M : M^\sigma] = |\sigma| = |\psi'| \cdot f_{L/K}^{-1}$; $[M : K] = |\psi'| \cdot [M : M_u^K] = |\psi'| \cdot [L : L_u^K] = |\psi'| |H| = [M : L] \cdot [L : K] = [M : L] \cdot f_{L/K} |H|$; отсюда $[M : L] = |\psi'| \cdot f_{L/K}^{-1} = |\sigma|$, что вместе с $L \leq M^\sigma$ дает $L = M^\sigma$.

Так как M — неразветвленное расширение L , то аксиома U гарантирует существование элементов $w, w_i \in U_M$, $i < k$, таких, что $N_{M/L}(w) = v$, $N_{M/L}(w_i) = v_i$, $i < k$. Имеем $N_{M/L}(w^{1-\psi'}) = N_{M/L}(w)^{1-\psi'} = v^{1-\psi'} = v^{1-\psi}$; $N_{M/L}(w_i^{\tau_i-1}) = N_{M/L}(w_i)^{\tau_i-1} = v_i^{\tau_i-1}$, $i < k$ (здесь предполагается отождествление групп I_K^M и $I_K^L = H$). Но тогда имеет место соотношение $w^{1-\psi'} = x \cdot \prod_{i < k} w_i^{\tau_i-1}$ для подходящего $x \in U_M$ такого, что $N_{M/L}(x) = 1$; по аксиоме U имеем $N_{M/L} U_M = I_{G(M/L)} U_M$, следовательно, существует $y \in U_M$ такой, что $x = y^{1-\sigma}$ ($L = M^\sigma$). Тогда имеют место равенства

$$w^{1-\psi'} = y^{1-\sigma} \cdot \prod w_i^{\tau_i-1} = y^{1-\psi' f_{L/K}} \cdot \prod w_i^{\tau_i-1} = (y^{\psi' f_{L/K}})^{1-\psi'} \cdot \prod w_i^{\tau_i-1}.$$

Применяя норменное отображение $N' \Leftrightarrow N_{N/M_u^K}$ (расширяющее отображение $N = N_{L/L_u^K}$) к этому равенству, получаем

$$N'(w^{1-\psi'}) = N'(w)^{1-\psi'} = N'(y^{\psi' f_{L/K}})^{1-\psi'}$$

(заметим, что $N'(w_i^{\tau_i-1}) = 1$, $i < k$); тогда для $\zeta \Leftrightarrow N'(w(y^{\psi' f_{L/K}})^{-1})$ имеем $\zeta^{1-\psi'} = 1$, т.е. $\zeta \in M^{\psi'}$; кроме того, $\zeta \in M_u^K$; отсюда $\zeta \in M^{\psi'} \cap M_u^K = K$ ($\zeta \in U_K$).

Рис. 4

Итак, $N'(w) = \zeta N'(y^{\psi'_{f_{L/K}}})$. Применим норменное отображение $N_{M/L}$ к обеим частям этого равенства.

$$\begin{aligned} N_{M/L} N'(w) &= N'(w)^{\sigma_f} = N'(w^{\sigma_f}) = N_{M/L_u^K}(w) \\ &= \zeta^f N'(y^{\psi'_{f_{L/K}}})^{\sigma_f} = \zeta^f N'(y^{\psi'_{f_{L/K}} \sigma_f}); \end{aligned}$$

но $\psi'_{f_{L/K}}(\psi'^{f_{L/K}})_f = \psi'_{ff_{L/K}} = \psi'_{f_{M/K}}$ и

$$N'(y^{\psi'_{f_{M/K}}}) = N N_{M/M^{\psi'}}(y) = N_{M/K}(y) = N_{L/K}(N_{M/K}(y)) \in N_{L/K}(U_L);$$

кроме того, имеем

$$\zeta^f \in U_K^f \leq U_K^n \leq N_{L/K}(U_L).$$

Отсюда $N(v) = NN_{M/L}(w) = N_{M/L_u^K}(w) \in N_{L/K}(U_L)$.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Гомоморфизм $\rho: U_K^L \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$ индуцирует вложение $\bar{\rho}: U_K^L/N_{L/K}(U_L) \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$.

Если M – неразветвленное расширение L , то нетрудно видеть, что $U_K^L \leq U_K^M$; $U_L \leq U_M$ индуцирует естественные гомоморфизмы $H^{-1}(I_K^L, U_L) \longrightarrow H^{-1}(I_K^L, U_M)$ и $H_K^{-1}(I_K^L, U_L) \longrightarrow H_K^{-1}(I_K^M, U_M)$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_K^L & \xrightarrow{\rho_K^L} & H_K^{-1}(I_K^L, U_L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_K^M & \xrightarrow{\rho_K^M} & H_K^{-1}(I_K^M, U_M) \end{array}$$

коммутативна.

Определим гомоморфизм Хазевинкеля

$$\bar{\chi}(= \bar{\chi}_K^L): H(= I_K^L = G(L/L_u^K)) \longrightarrow H^{-1}(H, U_L)$$

так: пусть π_L – простой элемент A_L ; тогда для $\tau \in H$ полагаем $\bar{\chi}(\tau) = \pi_L^{\tau-1} \cdot I_{G(L/L_u^K)} U_L$.

Проверим корректность этого определения. Из предложения 4 (i) следует, что $v_L(\pi_L^\tau) = v_L(\pi_L)$ и, следовательно, $v_L(\pi_L^{\tau-1}) = 1$, $\pi_L^{\tau-1} \in U_L$; кроме того, $N(\pi_L^{\tau-1}) = 1$, следовательно, $\pi_L^{\tau-1} \in N U_L$.

Проверим, что определение $\bar{\chi}$ не зависит от выбора π_L . Пусть π'_L – другой простой элемент A_L ; тогда $\pi'_L = \pi_L u$ для $u(= \pi'_L \pi_L^{-1}) \in U_L$; $(\pi'_L)^{\tau-1} = (\pi_L u)^{\tau-1} = (\pi_L)^{\tau-1} u^{\tau-1}$; но $u^{\tau-1} \in I_{G(L/L_u^K)} U_L$, следовательно, $(\pi'_L)^{\tau-1} \cdot I_{G(L/L_u^K)} U_L = \pi_L^{\tau-1} I_{G(L/L_u^K)} U_L$.

Проверим, что $\bar{\chi}$ является гомоморфизмом. Пусть $\tau_0, \tau_1 \in H$; тогда $\tau_0 \tau_1 - 1 = \tau_0 \tau_1 - \tau_0 + \tau_0 - 1 = \tau_0(\tau_1 - 1) + \tau_0 - 1$; $\pi_L^{\tau_0 \tau_1 - 1} = (\pi_L^{\tau_0})^{\tau_1 - 1} \pi_L^{\tau_0 - 1} = \pi_L^{\tau_0 - 1} (\pi_L^{\tau_0})^{\tau_1 - 1}$; но $\pi_L^{\tau_0}$ является простым элементом A_L , поэтому по доказанному выше имеем $\bar{\chi}(\tau_0 \tau_1) = \bar{\chi}(\tau_0) \cdot \bar{\chi}(\tau_1)$.

Гомоморфизм Хазевинкеля $\bar{\chi}$ индуцирует гомоморфизм $\chi_*(= \bar{\chi}_{*K}^L): H \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$. Из замечания 10 сразу вытекает, что $\chi_*(\tau^\psi) = \chi_*(\tau)$ для любого элемента $\tau \in H$ (более того, $\chi_*(\tau^\sigma) = \chi_*(\tau)$ для любых $\tau \in H, \sigma \in G(L/K)$).

Итак, имеем два гомоморфизма $\rho: U_K^L \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$ и $\chi_*: H \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$.

Пусть $H_{L/K} = \{\tau \mid \tau \in H, \chi_*(\tau) \in \rho(U_L)\}$; нетрудно видеть, что $H_{L/K} (\leq H)$ – нормальная подгруппа $G(L/K)$ и определен естественный гомоморфизм $\chi(= \chi_K^L): H_{L/K} \longrightarrow U_K^L/N_{L/K}(U_L)$ такой, что диаграмма, изображенная на рис. 5, коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} U_K^L/N_{L/K}(U_L) & \xleftarrow{\chi} & H_{L/K} \\ \searrow \bar{\rho} & & \searrow \chi_* \\ & H_K^{-1}(H, U_L) \end{array}$$

Рис. 5

Если M – неразветвленное расширение L , то $H_{L/K} \leq H_{M/K}$ и коммутативна диаграмма, изображенная на рис. 6.

Рис. 6

Отображение χ можно использовать для вычисления отображения Нейкирха.

ЛЕММА 8. Пусть $\psi \in \text{Frob}(L/K)$, $\partial_K^L \psi = 1$, $\tau \in H$ и $\psi\tau \in \text{Frob}(L/K)$ (u , следовательно, $\partial_K^L(\psi\tau) = 1$), тогда $\tau \in H_{L/K}$ и

$$\nu(\psi\tau) = \nu(\psi)\chi(\tau).$$

Заметим, что $U_K^L / N_{L/K}(U_L)$ является подгруппой $A_K / N_{L/K}(U_L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π_ψ – простой элемент A_{L^ψ} , $\pi_{\psi\tau}$ – простой элемент $A_{L^{\psi\tau}}$. Так как L является непосредственным расширением как L^ψ , так и $L^{\psi\tau}$, то $\pi_{\psi\tau}$ и π_ψ являются простыми элементами A_L . Тогда $\pi_{\psi\tau} = \pi_\psi u$ для $u (= \pi_{\psi\tau} \pi_\psi^{-1}) \in U_L$. Так как $\pi_\psi^\psi = \pi_\psi$, $\pi_{\psi\tau}^{\psi\tau} = \pi_{\psi\tau}$, то имеем $\pi_\psi u = \pi_{\psi\tau} = \pi_{\psi\tau}^{\psi\tau} = (\pi_\psi u)^{\psi\tau} = \pi_\psi^{\psi\tau} u^{\psi\tau} = \pi_\psi^\tau u^{\psi\tau}$ и $u^{1-\psi\tau} = \pi_\psi^{\tau-1}$. Проверим, что $v = N(u) = N_{L/L_u^K}(u) \in U_K$. Так как $\pi_\psi \in A_L$, $N(\pi_\psi) \in A_{L_u^K}$, то $N(\pi_\psi) \in A_{L_u^K \cap L^\psi} = A_K$; аналогично, $N(\pi_{\psi\tau}) \in A_K$; но тогда и $N(u) = N(\pi_{\psi\tau})N(\pi_\psi)^{-1} \in A_K$; и $u \in U_L$ влечет, что $N(u) \in U_K$. Итак, $v = N(u) \in U_K$ и $\rho(v) = u^{1-\psi\tau} \cdot V_K(L/L_u^K) = \pi_\psi^{\tau-1} \cdot V_K(L/L_u^K) = \chi(\tau)$. Тогда $\tau \in H_{L/K}$, $\chi_*(\tau) = v N_{L/K}(U_L)$ и имеем $N_{L^{\psi\tau}/K}(\pi_{\psi\tau}) = N(\pi_{\psi\tau}) = N(\pi_\psi u) = N(\pi_\psi) \cdot N(u) = N_{L^\psi/K}(\pi_\psi) \cdot v$, отсюда и получаем нужное соотношение $\nu(\psi\tau) = \nu(\psi) \cdot \chi(\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $M \geq L$ – неразветвленное расширение L , удовлетворяющее предположению 3, то $H_{M/K} = I_K^M (= I_K^L)$.

Гомоморфизм $\chi_K^M: H = I_K^L \longrightarrow U_K^M / N_{M/K}(U_M) \leq A_K / N_{L/K}(U_L)$ не зависит от выбора такого M ; его будем обозначать χ^L .

Пусть $\psi' \in \text{Frob}(L/K)$, $m = \partial_K^L \psi'$; тогда $\psi' = \psi^m \tau$ для подходящего $\tau (= \psi^{-m} \psi') \in H = I_K^L$ (здесь по-прежнему ψ обозначает элемент из $\text{Frob}(L/K)$ с

Рис. 7

условием $\partial_K^L \psi = 1$). Пусть $K' \rightleftharpoons (L_u^K)^{\psi'}$; тогда $\psi' \in \text{Frob}(L/K')$ и $\partial_{K'}^L \psi' = 1$; $G(K'/K) = \langle \psi \upharpoonright K' \rangle$; $[K' : K] = m$ и $N_{K'/K}(a) = a^{\psi_m}$ для $a \in A_{K'}$.

Проверим, что $N_{K'/K}(U_{K'}^L) \leq U_K^L$. Пусть $u' \in U_{K'}^L$, $u \rightleftharpoons N_{K'/K}(u')$ и $v' \in U_L$ такой, что $N(v') = u'$; пусть $v \rightleftharpoons v'^{\psi_m} \in U_L$; тогда $N(v) = N(v'^{\psi_m}) = N(v')^{\psi_m} = u'^{\psi_m} = N_{K'/K}(u') = u$; следовательно, $u = N(u') \in U_K^L$.

Имеем $H = I_K^L = I_{K'}^L$; проверим, что $V_{K'}(L/L_u^K) \leq V_K(L/L_u^K)$; для этого достаточно показать, что для $w \in_N U_L$ элемент $w^{1-\psi'}$ принадлежит $V_K(L/L_u^K)$; но имеют место следующие равенства и сравнения:

$$w^{1-\psi'} = w^{1-\psi^m \tau} = w^{1-\psi^m} (w^{\psi^m})^{1-\tau} \equiv w^{1-\psi^m} \equiv (w^{1-\psi})^m \pmod{I_{G(L/L_u^K)} U_L}.$$

Вложение $V_{K'}(L/L_u^K) \leq V_K(L/L_u^K)$ индуцирует эпиморфизм $\varepsilon: H_{K'}^{-1}(H, U_L) \longrightarrow H_K^{-1}(H, U_L)$.

Проверим, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 U_{K'}^L & \xrightarrow{\rho_{K'}^L} & H_{K'}^{-1}(H, U_L) & \xleftarrow{\chi_{*K'}^L} & H = I_{K'}^L \\
 N_{K'/K} \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \parallel \\
 U_K^L & \xrightarrow{\rho_K^L} & H_K^{-1}(H, U_L) & \xleftarrow{\chi_{*K}^L} & H = I_K^L
 \end{array} \quad (**).$$

коммутативна.

Пусть $u' \in U_{K'}^L$, $v' \in U_L$ такой, что $N(v') = u'$. Выше было показано, что для $v \rightleftharpoons v'^{\psi_m} \in U_L$ имеем $N(v) = u = N_{K'/K}(u')$. Далее,

$$\rho_{K'}^L(u') = (v')^{1-\psi'} V_{K'}(L/L_u^K)$$

и, как проверено выше,

$$(v')^{1-\psi'} \equiv (v')^{1-\psi^m} \pmod{V_{K'}(L/L_u^K)}; \quad (v')^{1-\psi^m} = ((v')^{\psi_m})^{1-\psi} = v^{1-\psi}.$$

Отсюда и следует, что $\varepsilon \rho_{K'}^L(u') = \rho_K^L N_{K'/K}(u')$. Итак, проверена коммутативность левого квадрата. Коммутативность правого квадрата очевидна.

Коммутативность диаграммы $(**)$ влечет вложение $H_{L/K'} \leq H_{L/K}$ и коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_{L/K'} & \xrightarrow{\chi_{K'}^L} & U_{K'}^L/N_{L/K'}(U_L) \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{N}_{K'/K} \\ H_{L/K} & \xrightarrow{\chi_K^L} & U_K^L/N_{L/K}(U_L). \end{array}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\psi' \in \text{Frob}(L/K)$, $\tau \in H$, $\psi'\tau \in \text{Frob}(L/K)$, тогда $\tau \in H_{L/K}$ и

$$\nu_{L/K}(\psi'\tau) = \nu_{L/K}(\psi') \cdot \chi^L(\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по лемме 8 имеем

$$\nu_{L/K'}(\psi'\tau) = \nu_{L/K'}(\psi') \cdot \chi_{K'}^L(\tau),$$

а по лемме 5 имеем

$$\begin{aligned} \nu_{L/K}(\psi'\tau) &= \tilde{N}_{K'/K}(\nu_{L/K'}(\psi'\tau)) = \tilde{N}_{K'/K}(\nu_{L/K'}(\psi') \cdot \chi_{K'}^L(\tau)) \\ &= \tilde{N}_{K'/K}(\nu_{L/K'}(\psi')) \cdot \tilde{N}_{K'/K}\chi_{K'}^L(\tau) = \nu_{L/K}(\psi) \cdot \chi_{K'}^L(\tau). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\psi_0, \psi_1 \in \text{Frob}(L/K)$ когерентны, то $\nu_{L/K}(\psi_0\psi_1) = \nu_{L/K}(\psi_0) \cdot \nu_{L/K}(\psi_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m_0 \rightleftharpoons \partial_K^L \psi_0$, $m_1 \rightleftharpoons \partial_K^L \psi_1$ и $\tau_0, \tau_1 \in H_{L/K}$ таковы, что $\psi_0 = \psi^{m_0} \tau_0$, $\psi_1 = \psi^{m_1} \tau_1$; тогда $\psi_2 \rightleftharpoons \psi_0\psi_1 = \psi^{m_2} \tau_2$, $m_2 = m_0 + m_1$, $\tau_2 = \tau_0^{\psi^{m_1}} \tau_1 \in H_{L/K}$. Имеем (используя леммы 5, 7 и следствие 4)

$$\begin{aligned} \nu_{L/K}(\psi_2) &= \nu_{L/K}(\psi^{m_2} \tau_2) = \nu_{L/K}(\psi^{m_2}) \cdot \chi_K^L(\tau_2); \\ \nu_{L/K}(\psi^{m_2}) &= \nu_{L/K}(\psi)^{m_0+m_1} = \nu_{L/K}(\psi)^{m_0} \cdot \nu_{L/K}(\psi)^{m_1} \\ &= \nu_{L/K}(\psi^{m_0}) \cdot \nu_{L/K}(\psi^{m_1}); \\ \chi_{*K}^L(\tau_2) &= \chi_{*K}^L(\tau_0^{\psi^{m_1}} \tau_1) = \chi_{*K}^L(\tau_0^{\psi^{m_1}}) \cdot \chi_{*K}^L(\tau_1) = \chi_{*K}^L(\tau_0) \cdot \chi_{*K}^L(\tau_1). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \nu_{L/K}(\psi_0\psi_1) &= \nu_{L/K}(\psi^{m_0}) \cdot \chi_{*K}^L(\tau_0) \cdot \nu_{L/K}(\psi^{m_1}) \cdot \chi_{*K}^L(\tau_1) \\ &= \nu_{L/K}(\psi^{m_0} \tau_0) \cdot \nu_{L/K}(\psi^{m_1} \tau_1) = \nu_{L/K}(\psi_0) \cdot \nu_{L/K}(\psi_1). \end{aligned}$$

Определим теперь гомоморфизм взаимности

$$r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

следующим образом: пусть $\sigma \in G(L/K)$, $M \geq L$ — неразветвленное расширение L такое, что для σ существует подъем $\psi \in \text{Frob}(M/K)$, тогда

$$r_{L/K}(\sigma) \rightleftharpoons \nu_{M/K}(\psi) \cdot N_{L/K}(A_L).$$

Отметим, что $\nu_{M/K}(\psi) \in A_K/N_{M/K}(U_M)$ и $N_{M/K}(U_M) \leq N_{L/K}(U_L) \leq N_{L/K}(A_L)$.

Из предложения 3 следует, что для любого $\sigma \in G(L/K)$ найдется неразветвленное расширение $M \geq L$ такое, что σ имеет подъем в $\text{Frob}(M/K)$.

Проверим корректность определения отображения $r_{L/K}$. Пусть $M' \geq M \geq L$ – неразветвленные расширения L , $\psi' \in \text{Frob}(M'/K)$ и $\psi \in \text{Frob}(M/K)$ – подъемы σ . Тогда по лемме 2 имеем $\psi' \upharpoonright M = \psi$ и по замечанию 8 $\nu_{M'/K}(\psi') = \nu_{M/K}(\psi)$. Заметим, что если $M_0 \geq L$, $M_1 \geq L$ – неразветвленные расширения L такие, что σ имеет подъемы ψ_i в $\text{Frob}(M_i/K)$, $i = 0, 1$, то по предложению 3 найдется неразветвленное расширение $M \geq L$ такое, что $M \geq M_i$, $i = 0, 1$, и σ имеет подъем ψ в $\text{Frob}(M/K)$. Тогда по установленному выше $\nu_{M/K}(\psi) = \nu_{M_i/K}(\psi_i)$, $i = 0, 1$. Корректность определения $r_{L/K}$ проверена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Отображение $r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ является гомоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – неразветвленное расширение L , удовлетворяющее предложению 3. Пусть $\sigma_0, \sigma_1 \in G(L/K)$, $\sigma_2 = \sigma_0\sigma_1$ и $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in \text{Frob}(M/K)$ – подъемы элементов σ_0 , σ_1 и σ_2 соответственно. Сравним элементы $\psi_0\psi_1 \in \text{Frob}(M/K)$ и ψ_2 . Имеем

$$\begin{aligned} (\psi_0\psi_1) \upharpoonright L &= (\psi_0 \upharpoonright L)(\psi_1 \upharpoonright L) = \sigma_0\sigma_1 = \sigma_2; & \psi_2 \upharpoonright L &= \sigma_2; \\ \partial_L^M(\psi_0\psi_1) &= \partial_K^M(\psi_0) + \partial_K^M(\psi_1) \end{aligned}$$

(так как ψ_0, ψ_1 когерентны); $\partial_K^M(\psi_0) = \partial_K^L(\sigma_0) \leq f_{L/K}$; $\partial_K^M(\psi_1) = \partial_K^L(\sigma_1) \leq f_{L/K}$; следовательно, $\partial_K^M(\psi_0\psi_1) \leq 2f_{L/K}$. Из определения ∂ следует, что $(\psi_0\psi_1) \upharpoonright M_u^K = (\Phi_K^M)^{\partial_K^M(\psi_0\psi_1)}$; $(\psi_0\psi_1) \upharpoonright L_u^K = (\Phi_K^M \upharpoonright L_u^K)^{\partial_K^M(\psi_0\psi_1)}$; но $(\psi_0\psi_1) \upharpoonright L_u^K = \sigma_2 \upharpoonright L_u^K = (\Phi_K^L)^{\partial_K^L(\sigma_2)} (= \partial_K^M(\psi_2))$; так как $|\Phi_K^L| = f_{L/K}$, имеет место сравнение $\partial_K^M(\psi_0\psi_1) \equiv \partial_K^M(\psi_2) \pmod{f_{L/K}}$. Это сравнение вместе с соотношениями

$$0 < \partial_K^M(\psi_0\psi_1) \leq 2f_{L/K}, \quad 0 < \partial_K^M(\psi_2) \leq f_{L/K}$$

показывает, что возможны два случая: $\partial_K^M(\psi_0\psi_1) = \partial_K^M(\psi_2) = \partial_K^L(\sigma_2)$ (и тогда $\psi_0\psi_1$ является подъемом σ_2 и $\psi_2 = \psi_0\psi_1$) и $\partial_K^M(\psi_0\psi_1) = \partial_K^M(\psi_2) + f_{L/K} = \partial_K^L(\sigma_2) + f_{L/K}$. В случае $\psi_2 = \psi_0\psi_1$ имеем

$$\begin{aligned} r_{L/K}(\sigma_2) &= \nu_{M/L}(\psi_2) \cdot N_{L/K}(A_L) = \nu_{M/L}(\psi_0\psi_1) \cdot N_{L/K}(A_L) \\ &= \nu_{M/L}(\psi_0) \cdot \nu_{M/L}(\psi_1) \cdot N_{L/K}(A_L) = r_{L/K}(\sigma_0) \cdot r_{L/K}(\sigma_1). \end{aligned}$$

В случае, когда

$$\partial_K^M(\psi_0\psi_1) = \partial_K^M(\psi_2) + f_{L/K},$$

пусть ψ – подъем единицы в $\text{Frob}(M/K)$; тогда $\psi \upharpoonright L = \text{id}_L$, $\partial_K^M\psi = \partial_K^M 1 = f_{L/K}$. Рассмотрим элементы $\psi_0\psi_1, \psi\psi_2 \in \text{Frob}(M/K)$; имеем $\partial_K^M(\psi_0\psi_1) = f_{L/K} + \partial_K^M(\psi_0\psi_2) = \partial_K^M(\psi\psi_2)$; вместе с $(\psi_0\psi_1) \upharpoonright L = \sigma_2 = (\psi\psi_2) \upharpoonright L$ и замечанием 5 это дает равенство $\psi_0\psi_1 = \psi\psi_2$ и

$$\nu_{M/K}(\psi_0\psi_1) = \nu_{M/K}(\psi_0) \cdot \nu_{M/K}(\psi_1) = \nu_{M/K}(\psi\psi_2) = \nu_{M/K}(\psi) \cdot \nu_{M/K}(\psi_2).$$

Для завершения доказательства предложения достаточно установить, что $\nu_{M/K}(\psi) \in N_{L/K}(A_L)/N_{L/K}(U_L)$. Напомним, что ψ – подъем единицы, следовательно, $\psi \upharpoonright L = \text{id}_L$; $L \leq M^\psi$; так как $\psi \in \text{Frob}(M/K)$, имеем $|\psi| \cdot \partial_K^M \psi = f_{M/K} (= f_{M/L} \cdot f_{L/K})$; но $\partial_K^M \psi = \partial_K^L 1 = f_{L/K}$, следовательно, $|\psi| = f_{M/L}$ и $[M : M^\psi] = |\psi| = f_{M/L} = [M : L]$, поскольку M – неразветвленное расширение L . Пусть π – простой элемент $A_{M^\psi} = A_L$, тогда $\nu_{M/K}(\psi) = N_{L/K}(\pi) \cdot N_{L/K}(U_L)$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для $\tau \in H = I_K^L \leq G(L/K)$ имеет место соотношение

$$r_{L/K}(\tau) = \chi^L(\tau) N_{L/K}(A_L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $M \geq L$ выбрано как в доказательстве предложения 8, $\psi \in \text{Frob}(M/K)$ – подъем единицы, то легко видеть, что $\psi\tau$ – подъем τ ($\psi\tau \upharpoonright L = (\psi \upharpoonright L)(\tau \upharpoonright L) = 1 \cdot \tau = \tau$; $\partial_K^M \psi\tau = \partial_K^M \psi = f_{L/K} = \partial_K^M \tau$ и $\psi\tau \in \text{Frob}(M/K)$). Тогда $\nu_{M/K}(\psi\tau) = \nu_{M/K}(\psi) \cdot \chi_K^M(\tau)$ по следствию 4 и $r_{L/K}(\tau) = \nu_{M/K}(\psi\tau) \cdot N_{L/K}(A_L) = \nu_{M/K}(\psi) \cdot \chi_K^M(\tau) \cdot N_{L/K}(A_L) = \chi^L(\tau) \cdot N_{L/K}(A_L)$, так как $\nu_{M/K}(\psi) \in N_{L/K}(A_L)$.

Используя идеи доказательства теоремы (6.3) из [2], установим, что гомоморфизм взаимности $r_{L/K}$ индуцирует вложение $r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ (теорема 1) и если наложить дополнительное условие (аксиома R), то вложение $r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ будет изоморфизмом (теорема 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L \geq K$ – конечное расширение Галуа, тогда гомоморфизм взаимности $r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ индуцирует вложение (которое будем обозначать так же)

$$r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L).$$

Здесь через G^{ab} обозначается факторгруппа G/G' группы G по коммутанту G' (G^{ab} – наибольшая абелева факторгруппа G).

Установим следующую лемму.

ЛЕММА 9. Пусть L – конечное расширение K , M – промежуточное поле ($L \geq M \geq K$). Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} G(L/M) & \longrightarrow & G(L/K) \\ r_{L/M} \downarrow & & \downarrow r_{L/K} \\ A_M/N_{L/M}(A_L) & \xrightarrow{N_{M/K}} & A_K/N_{L/K}(A_L); \end{array}$$

если еще M – расширение Галуа поля K , то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(L/K) & \longrightarrow & G(M/K) \\ r_{L/K} \downarrow & & \downarrow r_{M/K} \\ A_K/N_{L/K}(A_L) & \longrightarrow & A_K/N_{M/K}(A_M). \end{array}$$

Здесь верхняя стрелка первой диаграммы – это вложение $G(L/M) \leq G(L/K)$; нижняя стрелка этой диаграммы индуцирована гомоморфизмом $N_{M/K}: A_M \rightarrow A_K$ (так как $N_{M/K}N_{L/M}(A_L) = N_{L/K}(A_L)$); верхняя стрелка второй диаграммы – это отображение ограничения $\sigma \mapsto \sigma|_M$, $\sigma \in G(L/K)$; нижняя стрелка этой диаграммы индуцирована вложением $N_{L/K}(A_L) \leq N_{M/K}(A_M)$ (так как $N_{L/K}(A_L) = N_{M/K}N_{L/M}(A_L)$).

Коммутативность первой диаграммы следует из определения гомоморфизма взаимности и следующего утверждения (обобщающего лемму 5): *для $\psi \in \text{Frob}(L/M)$ ($\subseteq \text{Frob}(L/K)$) имеет место соотношение $N_{M/K}\nu_{L/M}(\psi) = \nu_{L/K}(\psi)$.*

Доказательство дословно совпадает с доказательством леммы 5.

Коммутативность второй диаграммы следует из определения гомоморфизма взаимности и предложения 5.

Пусть $K \leq M \leq L$; L, M – конечные расширения Галуа поля K . Тогда из леммы 9 следует, что диаграмма (+) коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G(L/M) & \longrightarrow & G(L/K) & \longrightarrow & G(M/K) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow r_{L/M} & & \downarrow r_{L/K} & & \downarrow r_{M/K} \\ & & A_M/N_{L/M}(A_L) & \longrightarrow & A_K/N_{L/K}(A_L) & \longrightarrow & A_K/N_{M/K}(A_M) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (+)$$

(горизонтальные последовательности в (+) точны).

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если $r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \rightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ – вложение, а $r_{L/M}: G(L/M) \rightarrow A_M/N_{L/M}(A_L)$ – эпиморфизм, то $r_{M/K}: G(M/K)^{\text{ab}} \rightarrow A_L/N_{M/L}(A_M)$ – вложение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть L_{ab} – наибольшее абелево подрасширение K в L ; тогда $G(L/L_{\text{ab}}) = G(L/K)'$ – коммутатор группы $G(L/K)$ и $G(L_{\text{ab}}/K) \simeq G(L/K)^{\text{ab}}$. Полагая $M = L_{\text{ab}}$ в диаграмме (+), легко получим, что если

$$r_{L_{\text{ab}}/K}: G(L_{\text{ab}}/K) \rightarrow A_K/N_{L_{\text{ab}}/K}(A_{L_{\text{ab}}})$$

– вложение, то и $r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \rightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$ – вложение.

Таким образом, достаточно доказать теорему для случая, когда L – абелево расширение K . Рассмотрим случай, когда L является композитом циклических подрасширений $L \geq M_0, \dots, M_n \geq K$ таких, что для любого $i \leq n$ M_i либо неразветвлено над K , либо вполне разветвлено. Заметим, что тогда $G(L/K)$ естественно вкладывается в $\prod_{i \leq n} G(M_i/K)$, и диаграмма (+) позволяет свести доказательство к двум случаям:

- 1) L – циклическое неразветвленное расширение K ;
- 2) L – циклическое вполне разветвленное расширение K .

ЛЕММА 10. *Пусть L – циклическое неразветвленное расширение K , тогда $r_{L/K}$ является изоморфизмом групп $G(L/K)$ и $A_K/N_{L/K}(A_L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{v_K} Z \longrightarrow 1;$$

“факторизуя” ее по $N_{L/K}(A_L)$, получим точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_K/U_K \cap N_{L/K}(A_L) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L) \longrightarrow Z/v_K(N_{L/K}(A_L)) \longrightarrow 1.$$

Нетрудно видеть, что $U_K \cap N_{L/K}(A_L) = N_{L/K}(U_L)$; но аксиома U для неразветвленных расширений влечет, что $N_{L/K}(U_L) = U_K$; и тогда группа $A_K/N_{L/K}(A_L)$ изоморфна группе $Z/v_K(N_{L/K}(A_L))$.

Далее, неразветвленность $L \geq K$ влечет, что $n = [L : K] = f_{L/K}$; из того, что $v(N_{L/K}(A_L)) = f_{L/K}Z = nZ$, следует, что $Z/v_K(N_{L/K}(A_L))$ – циклическая группа порядка $n = f_{L/K}$.

Итак, $A_K/N_{L/K}(A_L)$ – циклическая группа порядка n ; ее образующей является $\pi N_{L/K}(A_L)$, где π – простой элемент A_K .

Элемент $\Phi \upharpoonright L$ является образующим группы $G(L/K)$. Вычислим $r_{L/K}(\Phi \upharpoonright L)$. Так как $L^{\Phi \upharpoonright L} = K$, то $r_{L/K}(\Phi \upharpoonright L) = \pi N_{L/K}(A_L)$ и, следовательно, $r_{L/K}$ отображает $G(L/K)$ на $A_K/N_{L/K}(A_L)$; так как $n = |G(L/K)| = |A_K/N_{L/K}(A_L)|$, то $r_{L/K}$ – изоморфизм.

ЛЕММА 11. Пусть L – циклическое вполне разветвленное расширение K , тогда

$$r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11. Пусть L' – конечное неразветвленное расширение L такое, что $n \nmid [L' : K]$ делит $[L' : L]$; тогда $H \ni H_{L'/K} = H_{L/K} = G$ ($= G(L/K)$) (по лемме 8) и $H_K^{-1}(H, U_L) = H^{-1}(H, U_L)$, $H_K^{-1}(H, U_{L'}) = H^{-1}(H, U_{L'})$, так как L' – абелево расширение K .

Проверим, что гомоморфизм Хазевинкеля $\bar{\chi}: H(= G) \longrightarrow H^{-1}(H, U_L)$ является вложением.

Пусть π_L – простой элемент A_L , τ – образующая группы G , $G = \langle \tau \rangle$. Заметим, что $v_L(A_K) = nZ$ ($n = [L : K] = e_{L/K}$). Так как $f_{L/K} = 1$, то по предложению 4(ii) имеем для $a \in A_K \leq A_L$ $v_L(a) = v_K(N_{L/K}(a)) = v_K(a^n) = nv_K(a)$, и так как $v_K(A_K) = Z$, то $v_L(A_K) = nZ$.

Пусть $k \in \omega$ таково, что $\bar{\chi}(\tau^k) \in I_G U_L = U_L^{\tau-1}$, т.е. $\pi_L^{\tau^k-1} = (\pi_L^{\tau^k})^{\tau-1} = u^{\tau-1}$ для подходящего $u \in U_L$. Тогда для $a \ni \pi_L^{\tau^k}$ имеем $(au^{-1})^{\tau-1} = 1$, т.е. $(au^{-1})^\tau = au^{-1}$, $au^{-1} \in A_{L^\tau} = A_K$. Тогда $v_L(au^{-1}) \in v_L(A_K) = nZ$; но $v_L(u^{-1}) = 0$, $v_L(a) = v_L(\pi_L^{\tau^k}) = v_L(\pi_L^{\tau^{k-1}+\tau^{k-1}+\dots+\tau+1}) = kv_L(\pi_L)$. Так как $v_L(\pi_L) \cdot nZ$ – образующая группы Z/nZ , то отсюда следует, что $n \mid k$ и, следовательно, $\tau^k = 1$.

Итак, $\bar{\chi}: H \longrightarrow H^{-1}(H, U_L)$ – вложение; тогда и $\chi^L: H \longrightarrow U_K^L/N_{L/K}(U_L)$ является вложением. Коммутативная диаграмма на рис. 6 показывает, что и гомоморфизм $\chi^{L'}: H \longrightarrow U_K^{L'}/N_{L'/K}(U_L) = U_K^{L'}/N_{L/K}(U_L) \leq U_K/N_{L/K}(U_L)$ является вложением. По следствию 5 имеем $r_{L/K}(\sigma) = \chi^{L'}(\sigma)N_{L/K}(A_L)$ для $\sigma \in G = H = H_K^L = I_K^L$.

Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что $N_{L/K}(A_L) \cap U_L = N_{L/K}(U_L)$; тогда $U_K/N_{L/K}(U_L) \leq A_K/N_{L/K}(A_L)$ и $r_{L/K}$ – вложение.

Для завершения доказательства теоремы 1 рассмотрим случай произвольного (конечного) абелева расширения $M \geq K$. По предложению 3 найдется конечное неразветвленное расширение $L \geq M$ такое, что эпиморфизм $d_K^L: G(L/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_{L/K}$

расщепляется. Заметим теперь, что L – абелево расширение K и для расширения $L \geq K$ выполнено условие представления L в виде композита циклических неразветвленных и вполне разветвленных расширений. Тогда по доказанному выше

$$r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

– вложение, а по лемме 10 $r_{L/M}: G(L/M) \longrightarrow A_M/N_{L/M}(A_L)$ – эпиморфизм (даже изоморфизм). Следствие 6 показывает, что

$$r_{M/K}: G(M/K) \longrightarrow A_K/N_{M/K}(A_M)$$

является вложением. Теорема доказана.

Следующее условие назовем *аксиомой R*: для любого вполне разветвленного циклического расширения $L \geq K$ простой степени выполнено неравенство

$$|H^0(G(L/K), A_L)| \leq [L : K].$$

Пусть $d: G \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ – эпиморфизм проконечных групп, A – непрерывный G -модуль, $v: A_K \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ – гензелево нормирование (относительно d), и пусть выполнены аксиомы U и R .

Тогда для пары (d, v) справедлива *теория полей классов*, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для любых конечных расширений $(k \leq) K \leq L$ таких, что L – расширение Галуа поля K , гомоморфизм взаимности*

$$r_{L/K}: G(L/K)^{\text{ab}} \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для циклических расширений простой степени теорема справедлива. Действительно, если $L \geq K$ – неразветвленное расширение, то это следует из леммы 11. Если $L \geq K$ – вполне разветвленное расширение, то по теореме 1

$$r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

является вложением; следовательно,

$$p = |G(L/K)| \leq |A_K/N_{L/K}(A_L)| \leq p$$

влечет, что $|A_K/N_{L/K}(A_L)| = p$ и $r_{L/K}$ – изоморфизм. Используя диаграмму (+) и индукцию по числу элементов группы $G(L/K)$, легко установить справедливость теоремы 2 для всех разрешимых (или, что достаточно, нильпотентных) групп $G(L/K)$.

Для произвольной группы $G(L/K)$ ввиду теоремы 1 достаточно установить, что

$$r_{L/K}: G(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

является эпиморфизмом.

Так как $N_{L/K}(A_L) \geq A_K^{[L:K]}$, то $A_K/N_{L/K}(A_L)$ – периодическая абелева группа. Пусть p – произвольное простое число, A_p – p -примарная часть группы $A_K/N_{L/K}(A_L)$. Теперь достаточно доказать, что $A_p \leq r_{L/K}(G(L/K))$.

Пусть P – силовская p -подгруппа группы $G(L/K)$, $M = L^P$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G(L/M) & \longrightarrow & G(L/K) \\ r_{L/M} \downarrow & & \downarrow r_{L/K} \\ A_M/N_{L/M}(A_L) & \xrightarrow{N_{M/K}} & A_K/N_{L/K}(A_L). \end{array}$$

Так как $G(L/M) \simeq P$ – нильпотентная группа, то $r_{L/M}$ является эпиморфизмом и $A_M/N_{L/M}(A_L) = r_{L/M}(G(L/M))$ – абелева p -группа.

Включения $A_K \leq A_M$ и $N_{L/K}(A_L) \leq N_{M/K}N_{L/M}(A_L) \leq N_{L/M}(A_L)$ индуцируют гомоморфизм $i: A_K/N_{L/K}(A_L) \rightarrow A_M/N_{L/M}(A_L)$ такой, что $N_{M/K}i = [M : K]$. Так как $p \nmid [M : K]$, то $N_{M/K}i(A_p) = [M : K]A_p = A_p$ и

$$A_p \leq N_{M/K}(A_M/N_{L/M}(A_L)) = N_{M/K}r_{L/M}(G(L/M)) = r_{L/K}(G(L/K)),$$

что и требовалось.

Теорема 2 доказана.

Как показывает доказательство предложения (6.2) в [2], аксиомы U и R вместе эквивалентны следующей (слегка ослабленной) аксиоме полей классов:

для любого циклического расширения $L \geq K$ имеет место неравенство

$$|H^0(G(L/K), A_L)| \leq [L : K];$$

и $|H^{-1}(G(L/K), A_L)| = 1$, если L неразветвлено над K .

Установим, наконец, что определенный выше гомоморфизм взаимности $r_{L/K}$ совпадает с гомоморфизмом взаимности $r_{L/K}$, определенным Нейкирхом в [2].

Пусть $L \geq K$ – расширение Галуа, $\tilde{L}$ – наибольшее неразветвленное расширение L (здесь мы отказываемся от рассмотрения только конечных расширений k ; так, $\tilde{L} \geq k$ – бесконечное расширение).

Представим $\tilde{L}$ как объединение башни конечных расширений ($L \leq L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_n \leq \dots$ такой, что $[L_0 : L] = n_{L/K}$ (число $n_{L/K}$ – из предложения 3), $\tilde{L} = \bigcup_{n \in \omega} L_n$).

Для любого $\sigma \in G(L/K)$ в $\text{Frob}(L_n/K)$ имеется подъем σ_n и $\sigma_{n+1} \upharpoonright L_n = \sigma_n$ (по лемме 2). Тогда существует элемент $\bar{\sigma} \in G(\tilde{L}/K) = \varprojlim_{n \in \omega} G(L_n/K)$ такой, что $\bar{\sigma} \upharpoonright L_n = \sigma_n$ для всех $n \in \omega$. Тогда $\bar{\sigma}$ является фробениусовым элементом ($\bar{\sigma} \in \text{Frob}(\tilde{L}/K)$) в смысле Нейкирха, так как по построению имеет место соотношение $d_K(\bar{\sigma}) = \Phi_K^L(\sigma)$, и $\bar{\sigma} \upharpoonright L = \sigma$, т.е. $\bar{\sigma}$ является подъемом σ (в смысле Нейкирха). Если π – простой элемент $A_{\tilde{L}}^{\bar{\sigma}} = A_{L_0}^{\sigma_0}$, то $r_{L/K}(\sigma) = N_{L_0^{\sigma_0}/K}(\pi)N_{L/K}(A_L)$ совпадает со значением $N_{\tilde{L}/K}(\pi)N_{L/K}(A_L)$ гомоморфизма взаимности на σ , определенным Нейкирхом в [2; предложение (5.6)].

Заключение

Предложенная в статье теория может быть обобщена (расширена) в следующих двух направлениях.

I. Следуя идее упражнения 2 из [2; гл. IV, § 6], возможен следующий вариант абстрактной теории полей классов для про- Π -групп, где Π – произвольное множество простых чисел.

Для простого p пусть $\mathbb{Z}_p \equiv \varprojlim_{n \in \omega} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (группа $\mathbb{Z}_p$ изоморфна аддитивной группе целых p -адических чисел); $\mathbb{Z}_\Pi \equiv \prod_{p \in \Pi} \mathbb{Z}_p$.

Заметим, что если Π совпадает с множеством $\mathcal{P}$ всех простых чисел, то $\mathbb{Z}_\mathcal{P} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$.

Пусть G – про- Π -группа, $d: G \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi$ – эпиморфизм.

Большинство понятий (группа инерции, степень инерции, индекс ветвления, неразветвленное и вполне разветвленное расширение и др.) вводятся так же, как в основном тексте статьи.

Существенным является правильное определение понятия фробениусова элемента.

Натуральное число $n > 0$ называется Π -числом, если все простые делители n принадлежат Π ; Π -содержанием n_Π натурального числа $n > 0$ называется наибольший Π -делитель числа n ($0_\Pi \equiv 0$).

Если $L \geq K$ – расширение Галуа (и $[L : K] < \omega$), то элемент $\sigma \in G(L/K)$ ($\equiv G_K/G_L$) называется элементом Фробениуса ($\sigma \in \text{Frob}(L/K)$), если

- 1) $\langle \sigma \rangle \cap I_K^L = \langle 1 \rangle$,
- 2) $|\sigma| \cdot (\partial_K^L \sigma)_\Pi = f_{L/K}$.

Здесь $\partial_K^L \sigma$ имеет тот же смысл, что и в основном тексте статьи, если зафиксировать образующую Φ группы $\mathbb{Z}_\Pi$.

Важным изменением является следующий аналог свойства 3 фробениусовых элементов.

3 Π . Если $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$, $m > 0$ таково, что $m \partial_K^L \sigma \leq f_{L/K}$ и m_Π делит $|\sigma|$, то $\sigma^m \in \text{Frob}(L/K)$ и $\partial_K^L \sigma^m = m \partial_K^L \sigma$ ($|\sigma^m| = |\sigma| \cdot m_\Pi^{-1}$).

Лемма 4 для конечной Π -группы G справедлива в следующей формулировке.

ЛЕММА 4 Π . Если $g \in G$, $\langle g \rangle \cap H = \langle 1 \rangle$, и порядок $m \equiv |g|$ элемента g делится на $\Omega(H)_\Pi$, то для любого $h \in H$ порядок элемента gh равен m и $\langle gh \rangle \cap H = \langle 1 \rangle$.

Для справедливости предложения 3 в качестве числа $n_{L/K}$ нужно взять Π -содержание числа, указанного в доказательстве этого предложения в основном тексте статьи.

Определение понятия гензелева нормирования $v: A_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi$ (по отношению к $d: G \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi$) модифицируется естественным образом.

Далее все основные конструкции (отображения Нейкирха, Хазевинкеля и взаимности) и их свойства остаются справедливыми, включая последнюю теорему об изоморфизме $G(L/K)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} A_K/N_{L/K}(A_L)$ при выполнении аксиомы полей классов.

II. Возможно следующее обобщение понятия гензелева нормирования (по отношению к эпиморфизму $d: G \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$).

“Гензелевым” нормированием (мультипликативного непрерывного) G -модуля A (по отношению к эпиморфизму d) называется гомоморфизм

$$v: A_k \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$$

такой, что для $Z = v(A_k) \leq \widehat{\mathbb{Z}}$ выполнены условия:

- (i*) для любого натурального $n > 0$ $n\widehat{\mathbb{Z}} \cap Z = nZ$ и $Z/nZ = \widehat{\mathbb{Z}}/n\widehat{\mathbb{Z}}$;
- (ii) $v(N_{K/k}(A_K)) = f_K Z$ для любого K такого, что $[K:k] < \omega$.

Условие (i*) эквивалентно совокупности двух условий:

- (i') Z сервантна в $\widehat{\mathbb{Z}}$;
- (i'') $\widehat{\mathbb{Z}}/Z$ – делимая группа.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Отличие “гензелева” нормирования от гензелева нормирования состоит в следующем: не предполагается, что Z содержит (какую-нибудь) образующую группы $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Укажем, как нужно модифицировать определение отображения Нейкирха в случае “гензелева” нормирования.

Пусть $K \geq k$ – конечное расширение, $n > 0$; n -простым элементом A_K называется любой элемент $\pi \in A_K$ такой, что

$$v_K(\pi) + n\widehat{\mathbb{Z}} = \Phi + n\widehat{\mathbb{Z}}.$$

Пусть $L \geq K$ – расширение Галуа ($[L:k] < \omega$); отображение Нейкирха

$$\nu_{L/K}^*: \text{Frob}(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

определим так: пусть $\sigma \in \text{Frob}(L/K)$, $\Sigma \rightleftharpoons L^\sigma$, π_Σ – $[L:k]$ -простой элемент A_Σ ; тогда

$$\nu_{L/K}^*(\sigma) \rightleftharpoons N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \cdot N_{L/K}(A_L).$$

Нетрудно проверить корректность этого определения.

Заметим, что в основном тексте статьи отображение Нейкирха $\nu_{L/K}$ отображает $\text{Frob}(L/K)$ в $A_K/N_{L/K}(U_L)$ (а не в $A_K/N_{L/K}(A_L)$, как определял сам Нейкирх в [2]).

Это отображение $\nu_{L/K}^*$ позволяет определить гомоморфизм взаимности $r_{L/K}$ со всеми нужными свойствами.

III. Обобщения из I и II безусловно могут быть естественно реализованы совместно.

Список литературы

1. Neukirch J. Class field theory. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
2. Neukirch J. Algebraic number theory. Chapter IV: Abstract class field theory. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
3. Ивасава К. Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983.
4. Waterhouse W. C. Profinite groups are Galois groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 42. №2. P. 639–640.
5. Ершов Ю. Л. Алгоритмические проблемы в теории полей (положительные аспекты) // Справочная книга по математической логике. Часть 3: Теория рекурсии. М.: Наука, 1982. С. 269–353.