Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Игнаточкина, Многообразия Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 61–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:24:39

УДК 514.76

Л. А. Игнаточкина

Многообразия Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны

В работе доказано, что в размерности выше 4 класс многообразий Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны совпадает с классом локально конформно приближенно келеровых многообразий и класс W_4 совпадает с классом локально конформно келеровых многообразий. Получены классификации конформно-плоских и конформно-паракелеровых многообразий Вайсмана–Грея.

Библиография: 16 названий.

В современной дифференциальной геометрии важное место занимает изучение конформно-инвариантных свойств римановых многообразий, в том числе – римановых многообразий, наделенных дополнительной структурой. Сюда относятся, в частности, исследования конформно-инвариантных свойств почти эрмитовых многообразий, начатые в работе А. Грея и Хервеллы [1]. В этой работе авторы выделили классы почти эрмитовых многообразий, инвариантные относительно конформных преобразований метрики. Один из таких классов, класс W_4 в классификации Грея–Хервеллы, содержит многообразия, локально конформные келеровым многообразиям. Эти многообразия подробно изучены в работах Вайсмана [2], [3], А. Грея и Ванхекке [4], В. Ф. Кириченко [5], [6] и других авторов.

В классификации Грея и Хервеллы конформно-инвариантным обобщением класса W_4 является класс $W_1 \oplus W_4$ – класс многообразий Вайсмана–Грея [7]. Он содержит класс локально конформно приближенно келеровых многообразий.

Исходя из утверждения, что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны, А. Грей [8] выделил, в частности, класс почти эрмитовых многообразий с J -инвариантным тензором Римана–Кристоффеля, обозначаемый R_3 (или RK [9]), и доказал, что класс приближенно келеровых многообразий содержится в классе R_3 [8].

Имея в виду этот результат, интересно рассмотреть роль J -инвариантного тензора конформной кривизны. Рассмотрим класс почти эрмитовых многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны. В классе многообразий Вайсмана–Грея класс многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны является расширением класса многообразий с J -инвариантным тензором Римана–Кристоффеля. В настоящей работе исследовано соотношение между классом многообразий Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны, классом локально конформно приближенно келеровых многообразий и классами, задаваемыми конформными инвариантами многообразий Вайсмана–Грея. Показано, что в размерности выше 4 класс многообразий Вайсмана–Грея с J -инвариантным тензором конформной кривизны совпадает с классом локально конформно

приближенно келеровых многообразий. В частности, из этого следует, что в размерности выше 4 класс W_4 совпадает с классом локально конформно келеровых многообразий. Кроме этого получены классификации конформно-плоских и конформно-паракелеровых многообразий Вайсмана–Грея.

Пусть $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти эрмитово многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M , $J^2 = -\text{id}$, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M , $\dim M = 2n$, ∇ – риманова связность метрики g , d – оператор внешнего дифференцирования на M , δ – оператор кодифференцирования на M , R – тензор Римана–Кристоффеля. Волна “ $\sim$ ” обозначает объекты на многообразии с конформно преобразованной метрикой. Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Хорошо известно, что задание почти эрмитовой структуры на M равносильно заданию G -структуры на M со структурной группой $U(n)$, элементами пространства которой являются так называемые A -реперы, состоящие из попарно сопряженных собственных векторов структурного эндоморфизма J и унитарные в естественной эрмитовой метрике комплексификации соответствующего касательного пространства [10]. Эта G -структура называется *присоединенной*. Будем предполагать, что индексы $i, j, k, l, \dots$ пробегает значения от 1 до $2n$, индексы a, b, c, d, f, g, h – от 1 до n . Положим $\hat{a} = a + n$. Пусть $\{m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}\}$, $m \in M$, – A -репер. Обозначим $\varepsilon_{\hat{a}} = \varepsilon^a$. Аналогично для корепера $\{m, \omega_a, \omega_{\hat{a}}\}$: $\omega_{\hat{a}} = \omega_a$. Как обычно, по индексам, заключенным в квадратные скобки, производится альтернация, в круглые – симметризация.

Очевидно, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензоров g и J имеют вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_n \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n .

Отсюда легко видеть, что операция опускания и поднятия индексов на пространстве присоединенной G -структуры примет вид: $t_{\dots \hat{a} \dots} = t_{\dots}^a \dots$, $t^{\dots \hat{a} \dots} = t^{\dots}{}_a \dots$.

Напомним [1], что почти эрмитово многообразие называется

- 1) *многообразием Вайсмана–Грея* (короче – VG -многообразием [7]) или многообразием класса $W_1 \oplus W_4$, если

$$\nabla_X(F)(X, Y) = -\frac{1}{2(n-1)}\{\langle X, X \rangle \delta F(Y) - \langle X, Y \rangle \delta F(X) - \langle JX, Y \rangle \delta F(JX)\},$$

- 2) *приближенно келеровым многообразием*, если $\nabla_X(F)(X, Y) = 0$,
- 3) *многообразием класса W_4* , если

$$\begin{aligned} \nabla_X(F)(Y, Z) = & -\frac{1}{2(n-1)}\{\langle X, Y \rangle \delta F(Z) - \langle X, Z \rangle \delta F(Y) \\ & - \langle X, JY \rangle \delta F(JZ) + \langle X, JZ \rangle \delta F(JY)\}, \end{aligned}$$

- 4) *эрмитовым*, если $\nabla_X(F)(Y, Z) - \nabla_{JX}(F)(JY, Z) = 0$,
- 5) *келеровым*, если $\nabla F = 0$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Здесь $F(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$ – *келерова форма*.

Для любого почти эрмитова многообразия, в частности для VG -многообразия, определена [1] *форма Ли* ω по формуле:

$$\omega = -\frac{1}{n-1}\delta F \circ J.$$

Почти эрмитово многообразие $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *локально конформно приближенно келеровым* (соответственно *локально конформно келеровым*) тогда и только тогда, когда для каждой $m \in M$ существует окрестность V точки m такая, что $(V, J, \tilde{g} = e^{2f}g)$ является приближенно келеровым (соответственно келеровым) для некоторой функции f на V . Если функция f определена глобально на M , то многообразие называется *глобально конформно приближенно келеровым* (соответственно *глобально конформно келеровым*).

Будем называть VG -многообразие (соответственно приближенно келерово многообразие) *собственным*, если оно не является многообразием класса W_4 (соответственно келеровым многообразием).

Нетрудно видеть, что первая группа структурных уравнений римановой связности VG -многообразия на пространстве присоединенной G -структуры, называемая *первой группой структурных уравнений VG -многообразия*, имеет вид [11], [12]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \alpha^{[a} \delta_c^{b]} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \alpha_{[a} \delta_b^{c]} \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

Используя стандартную процедуру дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений VG -многообразия, получаем *вторую группу структурных уравнений VG -многообразия* [11]:

$$\begin{aligned} d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (2B^{adh} B_{hbc} + A_{bc}^{ad}) \omega^c \wedge \omega_d + (\alpha^{[a} \delta_{[c}^{h]} B_{d]bh} + A_{bcd}^a) \omega^c \wedge \omega^d \\ &\quad + (-\alpha_{[b} \delta_{h]}^{[c} B^{d]ah} + A_b^{acd}) \omega_c \wedge \omega_d. \end{aligned}$$

Здесь $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{A_{cd}^{ab}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами (комплексных) чистых тензоров на M , называемых *структурными тензорами первого, второго и третьего рода* соответственно; $\{\alpha^a, \alpha_b\}$ – компоненты формы Ли; $\{A_{bcd}^a\}$, $\{A_a^{bcd}\}$ – некоторые системы функций на пространстве присоединенной G -структуры. При этом структурные тензоры первого и второго рода кососимметричны по любой паре верхних либо нижних индексов и комплексно сопряжены [12], компоненты формы Ли также комплексно сопряжены: $B^{abc} = \overline{B}_{abc}$; $\alpha^a = \overline{\alpha}_a$.

Стандартная процедура дифференциального продолжения обеих групп структурных уравнений VG -многообразия позволяет получить следующие тождества [11]:

$$d\alpha^a - \alpha^b \omega_b^a = \alpha_a^b \omega^b + \alpha^{ab} \omega_b, \quad (11)$$

$$d\alpha_a + \alpha_b \omega_a^b = \alpha_a^b \omega_b + \alpha_{ab} \omega^b, \quad (12)$$

$$dB^{abc} - B^{dbc} \omega_d^a - B^{adc} \omega_d^b - B^{abd} \omega_d^c = B^{abcd} \omega_d + B^{abc}{}_d \omega^d, \quad (13)$$

$$dB_{abc} + B_{dbc} \omega_a^d + B_{adc} \omega_b^d + B_{abd} \omega_c^d = B_{abcd} \omega^d + B_{abc}{}^d \omega_d, \quad (14)$$

где $\{B^{abcd}, B^{abc}{}_d\}$, $\{B_{abcd}, B_{abc}{}^d\}$, $\{\alpha^a{}_b, \alpha_a{}^b, \alpha^{ab}, \alpha_{ab}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами ковариантного дифференциала в присоединенной связности структурных тензоров первого и второго рода и формы Ли соответственно (напомним, что *присоединенной связностью* (обобщенного) почти эрмитова многообразия называется связность $\hat{\nabla} = \nabla + T$, где T – композиционный тензор присоединенной Q -алгебры [12]),

$$B_{acd}{}^b = -\frac{1}{2}\alpha^b{}_c B_{acd} + \frac{1}{2}\alpha^h{}_c B_{h[ac}\delta_{d]}^b + \alpha_{[ac}\delta_{d]}^b, \quad (2)$$

$$A_{bc}^{[ad]} = -\alpha_{[b}^{[a}\delta_{c]}^{d]} + \frac{1}{2}(\alpha_{[b}\delta_{h]}^a\alpha^{[d}\delta_c^{h]} - \alpha_{[b}\delta_h^d\alpha^{[a}\delta_c^{h]}). \quad (3)$$

Так как форма Ли является тензором типа $(1, 0)$, ее компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют дифференциальным уравнениям $d\alpha_i + \alpha_j\omega_i^j = \alpha_{i,j}\omega^j$, где $\{\omega^j\}$, $\{\omega_j^i\}$ и $\{\alpha_{i,j}\}$ – компоненты формы смещения, формы римановой связности и ковариантного дифференциала формы Ли в римановой связности. Откуда на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (1₁) и (1₂) получаем соотношения между компонентами ковариантных дифференциалов формы Ли в римановой и присоединенной связностях [11]:

$$\alpha_{a,c} = \alpha_{ac} - \alpha^h{}_c B_{hac}, \quad (4_1)$$

$$\alpha^a{}_{,c} = \alpha^a{}_c + \frac{1}{2}\alpha^h{}_c\alpha_h\delta_c^a - \frac{1}{2}\alpha^a{}_c\alpha_c, \quad (4_2)$$

$$\alpha^{a,c} = \alpha^{ac} - \alpha_h B^{hac}, \quad (4_3)$$

$$\alpha_{a,}{}^c = \alpha_a{}^c + \frac{1}{2}\alpha^h{}_a\alpha_h\delta_a^c - \frac{1}{2}\alpha_a{}^c\alpha^c. \quad (4_4)$$

Исследуем свойства симметрии компонент ковариантного дифференциала формы Ли в присоединенной и римановой связностях.

ЛЕММА 1. *Для любого VG -многообразия имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{\alpha}^a{}_c &= \alpha_a{}^c, & 2) \quad \overline{\alpha}^{ac} &= \alpha_{ac}, & 3) \quad \overline{B}^{abcd} &= B_{abcd}, \\ 4) \quad \overline{B}^{abc}{}_d &= B_{abc}{}^d, & 5) \quad \overline{A}_{bc}^{ad} &= A_{ad}^{bc}, \end{aligned} \quad (5)$$

где черта обозначает оператор комплексного сопряжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оператор комплексного сопряжения к (1₁) с учетом комплексной сопряженности компонент формы Ли и сравнивая его с (1₂), получаем тождества 1), 2). Аналогично, используя (1₃), (1₄), получаем 3), 4) и, используя вторую группу структурных уравнений, находим 5).

ЛЕММА 2. *Пусть M – VG -многообразие, $\dim M > 4$. Тогда $\alpha^a{}_c = \alpha_c{}^a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя вторую группу структурных уравнений VG -многообразия, нетрудно найти выражение компонент тензора R на пространстве присоединенной G -структуры (т.е. в A -репере). В частности, $R_{\widehat{a}bcd} = A_{bc}^{ad} + B^{adh}B_{hbc} - \alpha^{[a}\delta_c^{h]}\alpha_{[h}\delta_b^d]$. По свойствам симметрии тензора Римана–Кристоффеля $R_{\widehat{a}bcd} = R_{\widehat{d}cb\widehat{a}}$. Отсюда с учетом кососимметричности структурных тензоров первого и второго рода получаем $A_{bc}^{ad} - A_{cb}^{da} = \frac{1}{4}(\alpha^d\alpha_c\delta_b^a - \alpha^a\alpha_b\delta_c^d)$. Сворачивая это тождество по индексам a и c , имеем

$$A_{ba}^{ad} = A_{ab}^{da}. \quad (6)$$

Свернем (3) по индексам a и c :

$$A_{ba}^{ad} = A_{ba}^{da} + \frac{1}{2}((n-2)\alpha_b^d + \alpha_a^a\delta_b^d) + \frac{1}{4}((2n-3)\alpha_b\alpha^d + (2-n)\alpha^h\alpha_h\delta_b^d).$$

Рассмотрим выражение, комплексно сопряженное предыдущему. Тогда, переобозначая индексы b и d и учитывая (5) и (6), получаем

$$A_{ba}^{ad} = A_{ba}^{da} + \frac{1}{2}((n-2)\alpha^d_b + \alpha^a_a\delta_b^d) + \frac{1}{4}((2n-3)\alpha_b\alpha^d + (2-n)\alpha^h\alpha_h\delta_b^d).$$

Сравнивая два последних выражения, имеем $(n-2)\alpha_d^b + \alpha_a^a\delta_d^b = (n-2)\alpha^b_d + \alpha^a_a\delta_d^b$. Сворачивая это равенство по индексам b и d , получаем $\alpha^a_a = \alpha_a^a$, и, так как $n > 2$, из предпоследнего тождества следует, что $\alpha^b_d = \alpha_b^d$.

ЛЕММА 3. Пусть M – VG -многообразие ($\dim M > 4$). Тогда $\alpha^a_{,c} = \alpha_c^a$.

Доказательство легко получить из (4₂), (4₄) и леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 2 позволяет ввести обозначение $\alpha_c^a = \alpha^a_c = \alpha_c^a$.

Хорошо известно [13], что если на многообразии M заданы две римановы метрики g и $\tilde{g}$, связанные зависимостью $\tilde{g} = e^{2f}g$, где $f \in C^\infty(M)$, то говорят, что на многообразии M задано *конформное преобразование метрики g* . При этом [13] на произвольном римановом многообразии (в частности, на почти эрмитовом многообразии), размерность которого больше двух, внутренним образом определен конформно-инвариантный тензор C^i_{jkl} типа $(3, 1)$, называемый *тензором конформной кривизны*. На пространстве присоединенной G -структуры произвольного почти эрмитова многообразия этот тензор определяет четыре *основных конформных инварианта* $C_0 = \{C_{abcd}\}$, $C_1 = \{C_{\widehat{a}bcd}\}$, $C_2 = \{C_{\widehat{a}\widehat{b}cd}\}$ и $C_3 = \{C_{\widehat{a}bcd}\}$ (остальные компоненты тензора конформной кривизны выражаются через названные в силу его свойств симметрии). Их обращение в нуль задает соответственно четыре конформно-инвариантных класса, обозначаемых C_0 , C_1 , C_2 и C_3 . Для VG -многообразий эти классы рассматривались в [7]. Исследуем подробнее геометрический смысл обращения в нуль конформных инвариантов для VG -многообразий. Для этого сначала рассмотрим более общий случай почти эрмитова многообразия и установим связь между классом C_1 и классом почти эрмитовых многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Почти эрмитово многообразие M ($\dim M > 2$) имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны (т.е. $\langle C(JX, JY)JZ, JW \rangle = \langle C(X, Y)Z, W \rangle$ для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$) тогда и только тогда, когда M принадлежит классу C_1 (т.е. $C_1 = \{C_{\bar{a}bcd}\} = 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – почти эрмитово многообразие с J -инвариантным тензором конформной кривизны. Тогда положим $W = \varepsilon_{\bar{a}}$, $X = \varepsilon_b$, $Y = \varepsilon_c$, $Z = \varepsilon_d$. Имеем $\langle C(\varepsilon_c, \varepsilon_d)\varepsilon_b, \varepsilon_{\bar{a}} \rangle = \langle C(J\varepsilon_c, J\varepsilon_d)J\varepsilon_b, J\varepsilon_{\bar{a}} \rangle$. Так как $J\varepsilon_a = \sqrt{-1}\varepsilon_a$ и $J\varepsilon_{\bar{a}} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\bar{a}}$, то $C_1 = \{C_{\bar{a}bcd}\} = 0$. По определению это условие задает класс C_1 .

Обратно, пусть $C_1 = \{C_{\bar{a}bcd}\} = 0$. Введем обозначение $\langle C(Z, W)Y, X \rangle = C(X, Y, Z, W)$. Тогда для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ имеем:

$$C(X + \sqrt{-1}JX, Y - \sqrt{-1}JY, Z - \sqrt{-1}JZ, W - \sqrt{-1}JW) = 0.$$

Расписывая это выражение по линейности, получаем два эквивалентных равенства. Рассмотрим одно из них:

$$\begin{aligned} & C(X, Y, Z, W) + C(JX, JY, Z, W) + C(JX, Y, JZ, W) + C(JX, Y, Z, JW) \\ & - C(X, JY, JZ, W) - C(X, JY, Z, JW) - C(X, Y, JZ, JW) \\ & - C(JX, JY, JZ, JW) = 0. \end{aligned}$$

Переобозначив $X \leftrightarrow Z$, $Y \leftrightarrow W$ и сложив полученное равенство с предыдущим, получим

$$C(X, Y, Z, W) + C(JX, Y, JZ, W) - C(X, JY, Z, JW) + C(JX, JY, JZ, JW) = 0.$$

Переобозначив $X \leftrightarrow Y$, $Z \leftrightarrow W$ и сложив полученное равенство с предыдущим, имеем условие J -инвариантности тензора конформной кривизны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что любое VG -многообразие с J -инвариантным тензором Римана–Кристоффеля имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны, следовательно, класс VG -многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны является расширением класса VG -многообразий с J -инвариантным тензором Римана–Кристоффеля, обозначенного в [8] через R_3 . Кроме того, класс VG -многообразий с J -инвариантным тензором Римана–Кристоффеля выделяется в классе VG -многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны требованием J -инвариантности тензора Риччи r , т.е. $r(JX, JY) = r(X, Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. В самом деле, используя хорошо известное выражение тензора конформной кривизны через тензор Римана–Кристоффеля, тензор Риччи и скалярную кривизну, на пространстве присоединенной G -структуры для компонент $C_{\bar{a}bcd}$ получаем

$$C_{\bar{a}bcd} = R_{\bar{a}bcd} + \frac{1}{2(n-1)}(r_{bd}\delta_c^a - r_{bc}\delta_d^a).$$

Откуда легко видеть, что для VG -многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны J -инвариантность тензора Римана–Кристоффеля равносильна тождеству $r_{bc} = 0$. Как и в доказательстве предложения 4, можно показать, что это тождество равносильно J -инвариантности тензора Риччи.

Объединяя предложение 4 с критерием принадлежности VG -многообразия классу C_1 [7], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *VG -многообразие M ($\dim M > 2$) имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны тогда и только тогда, когда $\alpha_{[bc]} = \alpha^h B_{hbc}$.*

На основе теоремы 5 рассмотрим некоторые свойства введенных многообразий. Пусть M – VG -многообразие с J -инвариантным тензором конформной кривизны. Альтернируя (4₁) и (4₃) по индексам a и c , с учетом теоремы 5 получаем $\alpha_{[a,c]} = 0$ и $\alpha^{[a,c]} = 0$. В силу леммы 3 это равносильно тому, что $\alpha_{[i,j]} = 0$, т.е. $\nabla_X(\omega)Y = \nabla_Y(\omega)X$ и $\text{Alt}(\nabla\omega) = 0$. Так как $d\omega = 2 \text{Alt}(\nabla\omega)$, то $d\omega = 0$. Обратное очевидно. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 6. *VG -многообразие M ($\dim M > 4$) имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны тогда и только тогда, когда его форма Ли замкнута.*

Напомним, что согласно теореме 4.3 из [1] многообразие класса $W_1 \oplus W_4$ имеет замкнутую форму Ли тогда и только тогда, когда оно является локально конформно приближенно келеровым. Объединяя этот результат и теорему 6, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *В размерности выше 4 класс локально конформно приближенно келеровых многообразий совпадает с классом VG -многообразий с J -инвариантным тензором конформной кривизны.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для многообразий размерности выше 4 класс W_4 и класс локально конформно келеровых многообразий совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – многообразие класса W_4 , $\dim M > 4$. Тогда для него согласно [12]

$$B_{abc} = B^{abc} = 0, \quad (7)$$

и для класса W_4 критерий J -инвариантности тензора конформной кривизны VG -многообразия примет вид: многообразие класса W_4 имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны тогда и только тогда, когда

$$\alpha_{[ac]} = 0. \quad (8)$$

Так как класс W_4 входит в класс VG -многообразий [1], из (7), (1₃), (1₄) и (2) следует, что для любого многообразия M класса W_4 имеет место тождество: $\alpha_{[bc]}\delta_a^d = 0$. Свернем его по индексам d и b : $(n-2)\alpha_{[ac]} = 0$. Так как $\dim M = 2n > 4$, то получаем $\alpha_{[ac]} = 0$. Тогда из (8) следует, что M имеет J -инвариантный тензор конформной кривизны. В силу теоремы 7 это равносильно принадлежности M классу локально конформно приближенно келеровых многообразий. Осталось доказать, что M , принадлежащее классу W_4 , не может быть локально конформно эквивалентно собственному приближенно келерову многообразию. Предположив противное, приходим к противоречию с тем, что класс W_4 конформно инвариантен и пересекается с классом приближенно келеровых многообразий только по классу келеровых многообразий. Следовательно, M – локально конформно келерово. Обратное очевидно.

Исследуем свойства локально конформно приближенно келеровых многообразий, принадлежащих классам C_0 , C_2 и C_3 . В силу тождества Риччи (верного, как хорошо известно, и для тензора конформной кривизны) обращение в нуль инварианта $C_3 = \{C_{\widehat{abcd}}\}$ влечет обращение в нуль инварианта $C_2 = \{C_{\widehat{abcd}}\}$, т.е. $C_3 \subset C_2$. Докажем, что для VG -многообразий размерности выше 4 аналогичное включение верно для двух других классов.

ТЕОРЕМА 8. *Для VG -многообразий размерности выше 4 $C_1 \subset C_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существует многообразие M , принадлежащее классу C_1 и не принадлежащее классу C_0 , т.е. в силу предложения 4 и теоремы 7 M является локально конформно приближенно келеровым и не принадлежит классу C_0 . Тогда существует точка p многообразия M и окрестность этой точки U такие, что

1) U конформно эквивалентно приближенно келеру многообразию и, следовательно [14], $C_{abcd} = 0$ на пространстве присоединенной G -структуры над U ;

2) $C_{abcd} \neq 0$ на пространстве присоединенной G -структуры над некоторой окрестностью V точки p в силу определения класса C_0 .

На пересечении окрестностей U и V из 1) и 2) получаем противоречие. То есть любое VG -многообразие класса C_1 принадлежит классу C_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорему 8 можно сформулировать в другом виде: любое VG -многообразие с J -инвариантным тензором конформной кривизны размерности выше 4 принадлежит классу C_0 .

Используя теорему 8, докажем, что для собственных связных локально конформно приближенно келеровых многообразий локальную конформную эквивалентность можно заменить глобальной. А именно верна

ТЕОРЕМА 9. *Связное локально конформно приближенно келеро многообразие M ($\dim M > 4$) либо глобально конформно эквивалентно собственному приближенно келеру многообразию, либо локально конформно эквивалентно келеру многообразию.*

Для доказательства теоремы 9 нам потребуются несколько лемм.

ЛЕММА 10. *Пусть M – VG -многообразие с J -инвариантным тензором конформной кривизны. Тогда*

$$B_{abc}{}^d = -\frac{1}{2}\alpha^d B_{abc} + \frac{3}{2}\alpha^h B_{h[ab}\delta_{c]}^d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из (2) и теоремы 5.

Обозначим полную свертку структурных тензоров через $B = B^{abc}B_{abc}$.

ЛЕММА 11. *Пусть M – собственное VG -многообразие с J -инвариантным тензором конформной кривизны, $\dim M > 4$. Тогда $dB = -B\omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя внешним образом полную свертку структурных тензоров с учетом (13), (14), получаем

$$dB = (B^{abcd}\omega_d + B^{abc}{}_d\omega^d)B_{abc} + B^{abc}(B_{abcd}\omega^d + B_{abc}{}^d\omega_d).$$

Применяя лемму 10, лемму 1 и в силу замечания 3 критерий принадлежности VG -многообразия классу C_0 , т.е. следующее тождество [7]: $B_{abcd} = -\alpha_{[a}B_{b]cd} - \alpha_{(c}B_{d)ab}$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 12. Пусть M – произвольное почти эрмитово многообразие, и пусть задано конформное преобразование метрики $\tilde{g} = e^{2f}g$. Тогда структурные тензоры первого и второго рода преобразуются по формулам:

$$\tilde{B}_{abc} = e^{-f}B_{abc}, \quad \tilde{B}^{abc} = e^{-f}B^{abc}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $N: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ по формуле $N(X, Y) = B^{abc}X_bY_c\varepsilon_a + B_{abc}X^bY^c\varepsilon^a$ для произвольных $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Записывая отображение N в инвариантном виде и используя определение структурных тензоров [12], получаем, что N , определенное таким образом, с точностью до константы совпадает с тензором Нейенхейса, а следовательно, является конформно-инвариантным тензором. Напомним [15], что тензор Нейенхейса имеет вид $N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $[\cdot, \cdot]$ – скобка Ли. При конформном преобразовании римановой метрики эрмитова метрика $H = g - \sqrt{-1}F$, очевидно, преобразуется по закону $\tilde{H} = e^{2f}H$. Следовательно, A -базисы будут связаны соотношениями $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}\varepsilon_a$, $\tilde{\varepsilon}^a = e^{-f}\varepsilon^a$, а дуальные им базисы $-\tilde{\omega}_a = e^f\omega_a$, $\tilde{\omega}^a = e^f\omega^a$. Тогда в силу конформной инвариантности N имеем

$$\begin{aligned} & \tilde{B}^{abc}\tilde{\omega}_b(X)\tilde{\omega}_c(Y)\tilde{\varepsilon}_a + \tilde{B}_{abc}\tilde{\omega}^b(X)\tilde{\omega}^c(Y)\tilde{\varepsilon}^a \\ &= B^{abc}\omega_b(X)\omega_c(Y)\varepsilon_a + B_{abc}\omega^b(X)\omega^c(Y)\varepsilon^a. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение формулы преобразования базисных векторов и ковекторов, а также учитывая линейную независимость базисных векторов и произвольность выбора векторных полей X и Y , получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из леммы 12 следует, что функция B с точностью до константы совпадает с нормой тензора Нейенхейса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Напомним, что

$$B = B^{abc}B_{abc} = \sum_{a,b,c=1}^n |B_{abc}|^2 \geq 0.$$

Очевидно, B можно рассматривать как функцию на многообразии M . Для функции B возможны два случая.

1) $B \equiv 0$ на M . Тогда $B_{abc} = B^{abc} = 0$ и, значит, M одновременно является эрмитовым многообразием [12] и VG -многообразием, следовательно, принадлежит

классу W_4 . В силу следствия теоремы 8 M является локально конформно келеровым.

2) $B \neq 0$. Обозначим $N = \{p \in M : B(p) \neq 0\}$. Тогда из непрерывности функции B следует, что $N \subset M$ – открытое подмногообразие. Докажем, что N является также и замкнутым. В самом деле, по условию M является локально конформно приближенно келеровым многообразием и, значит, для каждой точки $p \in N$ существует окрестность, конформно эквивалентная приближенно келерову многообразию $\tilde{N}$. При этом в силу леммы 12 если $\tilde{g} = e^{2f}g$, то структурные тензоры первого и второго рода преобразуются по формулам $\tilde{B}_{abc} = e^{-f}B_{abc}$ и $\tilde{B}^{abc} = e^{-f}B^{abc}$. В силу [14; лемма 1] $\tilde{B} = \tilde{B}^{abc}\tilde{B}_{abc} = c = \text{const}$.

Рассмотрим последовательность точек $\{p_k\}$ многообразия N , сходящуюся к точке p , и докажем, что p принадлежит N . Действительно, так как $p_k \in N$, то по определению N : $c = \tilde{B}(p_k) = e^{-2f}B(p_k) \neq 0$. Таким образом, $c \neq 0$. Тогда $B(p) = e^{2f}\tilde{B}(p) = ce^{2f}(p) \neq 0$. Следовательно, p принадлежит N и, значит, N замкнуто. В силу связности многообразия M имеем $N = M$.

По лемме 11 $dB = -B\omega$. Так как $B \neq 0$ на всем M , то $\omega = d(-\ln B)$. Следовательно, форма Ли многообразия M точна, и по теореме 4.3 из [1] M глобально конформно эквивалентно приближенно келерову многообразию, причем со структурными тензорами, отличными от нуля, т.е. глобально конформно эквивалентно собственному приближенно келерову многообразию.

Нетрудно видеть, что пересечение классов C_0, C_1, C_2 и C_3 образует класс конформно-плоских VG -многообразий. Напомним, что для VG -многообразий размерности выше 4 $C_1 \subset C_0$ и $C_3 \subset C_2$, следовательно, в размерности выше 4 класс конформно-плоских VG -многообразий совпадает с пересечением классов C_1 и C_3 , в частности входит в класс локально конформно приближенно келеровых многообразий.

Используя классификацию конформно-плоских приближенно келеровых многообразий [14], теорему 8 и предложение 4, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13. *VG -многообразие M ($\dim M > 4$) конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно локально конформно эквивалентно одному из следующих многообразий:*

- 1) *комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$,*
- 2) *многообразию S_k^6 , $k > 0$,*
- 3) *многообразию $S_k^6 \times S_{-k}^2$, $k > 0$,*

снабженных канонической $N\mathcal{H}$ -структурой. Здесь символ S_k^m обозначает m -мерное пространство постоянной кривизны k .

С аналогичной точки зрения интересно рассмотреть более широкий класс локально конформно приближенно келеровых многообразий класса C_2 , который является обобщением класса конформно-плоских VG -многообразий. На основе результатов настоящей работы можно получить классификации таких многообразий размерности выше 4.

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям предложения 4, критерий принадлежности почти эрмитова многообразия пересечению классов C_1 и C_2 можно записать в следующем виде.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть M – произвольное почти эрмитово многообразие ($\dim M > 2$); M принадлежит пересечению классов C_1 и C_2 тогда и только тогда, когда его тензор конформной кривизны удовлетворяет тождеству $\langle C(X, Y)Z, W \rangle = \langle C(JX, JY)Z, W \rangle$ для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

В связи с этим введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем почти эрмитово многообразие M *конформно-паракелеровым*, если его тензор конформной кривизны C удовлетворяет тождеству $\langle C(X, Y)Z, W \rangle = \langle C(JX, JY)Z, W \rangle$ для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Используя классификацию конформно-паракелеровых приближенно келеровых многообразий [14], теорему 8 и предложение 4, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 15. VG -многообразие M ($\dim M > 4$) является конформно-паракелеровым тогда и только тогда, когда оно локально конформно эквивалентно одному из следующих многообразий:

- 1) *риччи-плоскому келерову многообразию;*
- 2) *собственному 6-мерному приближенно келерову многообразию;*
- 3) *произведению 6-мерного собственного приближенно келерова многообразия и 2-мерного келерова многообразия постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{3}\tilde{B}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Класс конформно-паракелеровых VG -многообразий не является расширением класса паракелеровых VG -многообразий. (Напомним [16], [8], что почти эрмитово многообразие называется *паракелеровым* или *многообрази-ем класса R_1* , если его тензор Римана–Кристоффеля удовлетворяет тождеству $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)Z, W \rangle$ для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.) В качестве примера можно привести комплексное проективное пространство со стандартной келеровой структурой. Оно является паракелеровым [8], но не является конформно-паракелеровым по теореме 15.

Список литературы

1. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1980. V. 123. P. 35–58.
2. Vaisman I. On locally and globally conformal Kähler manifold // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 262. P. 533–542.
3. Vaisman I. Some curvature properties of locally conformal Kähler manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 259. P. 439–447.
4. Gray A., Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // Cas. Pest. Mat. 1979. V. 104. P. 170–179.
5. Кириченко В. Ф. Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 354–363.
6. Кириченко В. Ф. Конформно плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №5. С. 57–66.
7. Кириченко В. Ф., Ежова Н. А. Конформные инварианты многообразий Вайсмана–Грея // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 163–164.
8. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. (2). 1976. V. 28. P. 601–612.
9. Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with J -invariant Riemannian curvature tensor // Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino. 1975. V. 34. P. 487–498.

10. *Кириченко В. Ф.* Дифференциальная геометрия K -пространств // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 139–161.
11. *Щипкова Н. Н.* Дифференциальная геометрия многообразий Вайсмана–Грея // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МПГУ, 1994.
12. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–72.
13. *Раиеский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1976.
14. *Игнаточкина Л. А., Кириченко В. Ф.* Конформно-инвариантные свойства приближенно келеровых многообразий // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 653–663.
15. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
16. *Rizza G. B.* Varieta parakähleriane // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1974. V. 98. № 4. P. 47–61.

Московский педагогический
государственный университет

Поступила в редакцию
22.11.1999 и 18.09.2000