Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Каримов, Ф. М. Мухамедов, Индивидуальная эргодическая теорема относительно равномерной последовательности и принцип Банаха в йордановых алгебрах, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 73–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 05:19:43

УДК 517.98

А. К. Каримов, Ф. М. Мухамедов

**Индивидуальная эргодическая теорема
относительно равномерной последовательности
и принцип Банаха в йордановых алгебрах**

В работе дается неассоциативный аналог принципа Банаха для измеримых элементов относительно JBW -алгебры. На основе этого принципа доказана индивидуальная эргодическая теорема для подпоследовательностей, порождаемых равномерными последовательностями.

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение

Понятие сходимости почти всюду последовательности операторов в алгебре фон Неймана было впервые рассмотрено в известной работе Сигала [1]. Изучению сходимости почти всюду средних Чезаро траекторий положительного отображения алгебры фон Неймана в себя посвящено большое число работ (см., например, [2]–[5]).

Йордановы банаховы алгебры [6], [7] являются неассоциативным вещественным аналогом алгебр фон Неймана. Существование исключительных JBW -алгебр не позволяет применять идеи и методы алгебр фон Неймана. В [8] при построении OJ -алгебры измеримых элементов были введены понятия сходимости по мере, сходимости почти всюду и сходимости s -почти всюду. Их свойства и взаимосвязи рассмотрены в [9], [10]. Эти сходимости использовались в эргодических теоремах для марковских операторов, теоремах о сходимости условных математических ожиданий на JBW -алгебрах (см. [11]–[14]). Статистические эргодические теоремы на йордановых алгебрах получены в [15], [16].

В последние годы интенсивно изучаются эргодические теоремы относительно подпоследовательностей времен (см., например, [17]–[21]), что обусловлено рядом физических соображений.

Задачи изучения в йордановых алгебрах сходимостей почти всюду средних с весом и по подпоследовательностям являются относительно новыми, так что здесь имеется ряд нерешенных проблем. Заметим, что в основе доказательства многих эргодических теорем лежит так называемый принцип Банаха. Для полноты изложения напомним этот классический результат.

ПРИНЦИП БАНАХА [22]. Пусть $(S, \mathcal{F}, \mu)$ – измеримое пространство с σ -конечной мерой и X – банахово пространство. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность непрерывных линейных отображений пространства X в пространство всех измеримых функций на S . Предположим, что выполнено

$\sup_n \{|a_n(x)(s)|\} < \infty$ для каждого $x \in X$ и почти всех $s \in S$. Если последовательность $a_n(x)$ сходится почти всюду для всех x из всюду плотного подмножества X , то $a_n(x)$ сходится для любого $x \in X$.

В настоящей работе дается неассоциативный аналог принципа Банаха для измеримых элементов относительно JBW -алгебры. На основе этого принципа доказана индивидуальная эргодическая теорема для подпоследовательностей, порожденных равномерными последовательностями. В коммутативном случае такие теоремы были доказаны в [23], [24].

§ 2. Предварительные сведения

Пусть A – йорданова алгебра с единицей 1 и банахово пространство над полем действительных чисел. Если норма на A связана с умножением соотношениями $\|a^2\| = \|a\|^2$, $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$ для любых $a, b \in A$, то A называется JB -алгеброй (см. [6]). Йорданова подалгебра $A_0 \subset A$ называется *сильно ассоциативной*, если $(ac)b = a(cb)$ для всех $a, b \in A_0$, $c \in A$. Семейство элементов $M \subset A$ называется *совместным*, если йорданова подалгебра, порожденная этим семейством, сильно ассоциативна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Частичный порядок $\geq$ на йордановой алгебре A называется *согласованным с алгебраическими операциями*, если

- 1) $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c \ \forall c \in A$;
- 2) $a \geq b \Rightarrow \lambda a \geq \lambda b \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$;
- 3) $a \geq 0, b \geq 0, a$ и b совместны $\Rightarrow ab \geq 0$;
- 4) $a^2 \geq 0 \ \forall a \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Йорданова алгебра A с единицей 1 называется OJ -алгеброй, если на ней задан частичный порядок, который согласован с алгебраическими операциями и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $\{x_\alpha\}$ – возрастающая и порядково ограниченная сверху сеть из A , то существует $x = \sup x_\alpha$; причем x и y совместны, если x_α и y совместны для всех α ;
- 2) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра A является векторной решеткой относительно индуцированного частичного порядка.

Заметим, что во всякой JB -алгебре A множество $A^+ = \{a^2 : a \in A\}$ является правильным выпуклым конусом и определяет на A частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями.

JB -алгебра A называется JBW -алгеброй, если существует банахово пространство N , которое называется *предсопряженным* к A , такое, что A изометрически изоморфна пространству N^* всех непрерывных линейных функционалов на N . На JBW -алгебре A можно определить $\sigma(A, N)$ -слабую топологию. Линейный функционал f на JBW -алгебре A называется *нормальным*, если f непрерывен в $\sigma(A, N)$ -слабой топологии. Известно, что предсопряженное пространство N к JBW -алгебре A можно отождествить с пространством всех линейных нормальных функционалов на A .

В теории йордановых алгебр важную роль играет оператор U_a , определенный для любого элемента $a \in A$ как $U_a x = 2a(ax) - a^2 x$. Если A является JBW -алгеброй, то оператор U_a обладает следующими свойствами:

- 1) U_a положителен, т.е. $U_a(A^+) \subset A^+$;
- 2) U_a нормален, т.е. для любой возрастающей и ограниченной сверху сети x_α в A имеет место $U_a(\sup x_\alpha) = \sup U_a(x_\alpha)$;
- 3) если элементы a и b совместны, то $U_{ab} = U_a U_b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. След на JBW -алгебре — это отображение $\tau: A^+ \rightarrow [0, +\infty]$ такое, что

- 1) $\tau(a + \lambda b) = \tau(a) + \lambda \tau(b)$ для всех $a, b \in A^+$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ в предположении, что $0 \cdot (\infty) = 0$,
- 2) $\tau(U_s a) = \tau(a)$ для всех $a \in A^+$, $s \in A$, $s^2 = 1$.

След τ называется *точным*, если $\tau(a) > 0$ для всех $a \in A^+$, $a \neq 0$; *нормальным*, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети x_α в A^+ имеет место $\tau(\sup x_\alpha) = \sup \tau(x_\alpha)$; *полуконачным*, если существует сеть $\{b_\alpha\} \subset A^+$, возрастающая к 1 , такая, что $\tau(b_\alpha) < \infty$ для всех α ; *конечным*, если $\tau(1) < \infty$.

Пусть A — JBW -алгебра с точным нормальным полуконачным (т.н.п.) следом τ . Элемент $p \in A$ называется *идемпотентом*, если $p^2 = p$. Через ∇ обозначим множество всех идемпотентов; ∇ образует логику. Для $p \in \nabla$ обозначим $p^\perp = 1 - p$.

Топология *сходимости по мере* на JBW -алгебре A определяется следующей базой окрестностей нуля вида $N(\varepsilon, \delta)$, $\varepsilon, \delta > 0$:

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in A : \exists p \in \nabla, U_p a \in A, \|U_p a\| \leq \varepsilon, \tau(1 - p) \leq \delta\}.$$

Полношение A в этой топологии обозначается через $\mathcal{A}$. Известно [11], [8], что $\mathcal{A}$ является относительно топологии сходимости по мере отделимой топологической йордановой алгеброй. Кроме того, $\mathcal{A}$ есть OJ -алгебра, совокупность ограниченных (в смысле порядка) элементов которой совпадает с A . Элементы $\mathcal{A}$ называются *измеримыми элементами*.

Положим

$$A_\tau = \{x \in A : \tau(|x|) < \infty\},$$

$$K_\tau = \{x \in A : \tau(x^2) < \infty\}.$$

Отображение $\|\cdot\|_1: A_\tau \rightarrow (0, \infty)$ (соответственно $\|\cdot\|_2: K_\tau \rightarrow (0, \infty)$), определяемое как $\|a\|_1 = \tau(|a|)$ (соответственно $\|a\|_2 = \tau(a^2)$), является нормой (см. [11]). Полношение A_τ (соответственно K_τ) по норме $\|\cdot\|_1$ (соответственно $\|\cdot\|_2$) обозначается через $L^1(A, \tau)$ (соответственно $L^2(A, \tau)$) или короче L^1 (соответственно L^2). В [11] было показано, что пространства $L^1(A, \tau)$ и $L^2(A, \tau)$ инъективно вкладываются в $\mathcal{A}$ и имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Пространство $L^p(A, \tau)$ ($p = 1, 2$) совпадает с множеством*

$$L^p = \left\{ x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_{\lambda} \in \mathcal{A} : \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d\tau(e_{\lambda}) < \infty \right\}.$$

При этом

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^p d\tau(e_{\lambda}) \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2.$$

Говорят, что последовательность $\{a_n\} \subset \mathcal{A}$ сходится *почти равномерно* (п.р.) к a , если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $p \in \nabla$ такой, что $\tau(\mathbf{1} - p) < \varepsilon$ и $\|U_p(a_n - a)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

§3. Принцип Банаха

В этом параграфе мы приводим неассоциативный аналог принципа Банаха.

Пусть A — JBW -алгебра с т.н.п. следом τ и $\mathcal{A}$ — OJ -алгебра измеримых элементов. Вначале приведем несколько вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть $a \in A$, $0 \leq a \leq \mathbf{1}$, f — спектральный идемпотент a , соответствующий сегменту $[1/2, 1]$. Тогда*

- 1) $\tau(f^{\perp}) \leq \frac{1}{2}\tau(\mathbf{1} - a)$,
- 2) *существует $\hat{a} \in A$, совместный с a , такой, что $\|\hat{a}\| \leq 2$ и $f = a\hat{a}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению f справедливо неравенство $(\mathbf{1} - a)f^{\perp} \geq \frac{1}{2}f^{\perp}$. С другой стороны, $(\mathbf{1} - a) - (\mathbf{1} - a)f^{\perp} = (\mathbf{1} - a)(\mathbf{1} - f^{\perp}) = (\mathbf{1} - a)f = f(\mathbf{1} - a)f \geq 0$, что означает $(\mathbf{1} - a) \leq (\mathbf{1} - a)f^{\perp}$. Следовательно, $(\mathbf{1} - a)f^{\perp} \geq \frac{1}{2}f^{\perp}$.

2) Утверждение непосредственно вытекает из спектрального разложения элемента a .

Следующие предложения из теории алгебр фон Неймана легко доказать для йордановых алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $a, \{a_n\} \subset A^+$ и $a_n \rightarrow a$ слабо (т.е. в $\sigma(A, N)$ -топологии), то*

$$\tau(a) \leq \liminf_n \tau(a_n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Если $a, \{a_n\} \subset A$ и $a_n \rightarrow a$ слабо, то*

$$\|a\| \leq \limsup_n \|a_n\|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если $a, \{a_n\} \subset \mathcal{A}$ и $y_n \rightarrow y$ по мере в $\mathcal{A}$, то существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ такая, что $y_{n_k} \rightarrow y$ почти равномерно.*

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть A — JBW -алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ , $\mathcal{A}$ — OJ -алгебра измеримых элементов. Для банахова пространства X предположим, что последовательность $\alpha_n: X \rightarrow \mathcal{A}$ линейных непрерывных отображений удовлетворяет условию

- (i) для каждого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $b \in A, 0 < b \leq 1$, такой, что $\tau(1 - b) \leq \varepsilon$ и $\sup_n \{\|U_b \alpha_n(x)\|\} < \infty$.

Если для любого x из всюду плотного подмножества $X_0 \subset X$

- (ii) $\alpha_n(x)$ сходится почти равномерно в $\mathcal{A}$,

то (ii) справедливо на всем X .

Прежде чем доказать теорему, докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.6. Условие (i) теоремы 3.5 эквивалентно следующему условию:

- (i₁) для всех $x \in X, p \in \nabla, \tau(p) < \infty$, и $\varepsilon > 0$ существует $b \in A^+, b \leq p$, такой, что $\tau(p - b) \leq \varepsilon$ и $\sup_n \{\|U_b a_n(x)\|\} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим импликацию (i) $\Rightarrow$ (i₁). Пусть $p \in \nabla, \tau(p) < \infty$, и $\varepsilon > 0$. В силу условия (i) существует $b \in A^+, b \leq 1$, такой, что $\tau(1 - b) < \varepsilon$ и $\sup_n \{\|U_b a_n(x)\|\} < \infty$. Положим $b_p = p \wedge b$, где $b = \int_0^1 \lambda de_\lambda, f = \int_{1/2}^1 de_\lambda$. Ясно, что $b_p \leq p$ и

$$\tau(p - b_p) = \tau(p - p \wedge b) = \tau(p \vee f - f) \leq \tau(1 - f) \leq 2\tau(1 - b) < 2\varepsilon,$$

здесь мы воспользовались предложением 3.1. В силу этого предложения существует $\hat{b}$ такой, что $f = \hat{b}b$ и $\|\hat{b}\| \leq 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|U_{b_p} a_n(x)\| &= \|U_{b_p} f a_n(x)\| = \|U_{b_p} U_f a_n(x)\| \leq \|U_f a_n(x)\| = \|U_{\hat{b}b} a_n(x)\| \\ &= \|U_{\hat{b}} U_b a_n(x)\| = \|\hat{2}\hat{b}(b U_b a_n(x)) - \hat{b}^2 U_b a_n(x)\| \\ &\leq 2\|\hat{b}\|^2 \|U_b a_n(x)\| + \|\hat{b}^2\| \|U_b a_n(x)\| \leq 12 \|U_b a_n(x)\|. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sup_n \|U_{b_p} a_n(x)\| \leq 12 \sup_n \|U_b a_n(x)\| < \infty.$$

Теперь докажем импликацию (i₁) $\Rightarrow$ (i). Так как τ — полуконечный след, то существует сеть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$ такая, что $\tau(e_\alpha) < \infty$ и $e_\alpha \rightarrow 1$. В силу нормальности τ для $\varepsilon > 0$ существует α_0 такой, что $\tau(1 - e_{\alpha_0}) < \varepsilon$. Из условия (i₁) находим $b, 0 \leq b \leq e_{\alpha_0}$, такой, что $\tau(e_{\alpha_0} - b) \leq \varepsilon$. Отсюда ясно, что $0 \leq b \leq 1, \tau(1 - b) < 2\varepsilon$ и $\sup_n \|U_b a_n(x)\| < \infty$.

ЛЕММА 3.7. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $y_n \rightarrow 0$ почти равномерно;
- 2) для $e \in \nabla, \tau(e) < \infty, \varepsilon > 0, \delta > 0$ существует $q \in \nabla, q \leq e$, такой, что $\tau(e - q) < \varepsilon$ и $\|U_q y_n\| < \delta$ для всех $n > N(e, \varepsilon, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1). В силу полуконечности τ существует $e_0 \in \nabla$ такой, что $\tau(e_0) < \infty$ и $\tau(\mathbf{1} - e_0) < \varepsilon$. По условию существует $q \in \nabla$, $q \leq e$, такой, что $\tau(e - q) < \varepsilon$ и $\|U_q y_n\| < \delta$ для всех $n > N(e, \varepsilon, \delta)$. Тогда $\tau(\mathbf{1} - q) = \tau(\mathbf{1} - e_0) + \tau(e_0 - q) < 2\varepsilon$, что означает $y_n \rightarrow 0$ почти равномерно.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $y_n \rightarrow 0$ почти равномерно, т.е. для $\varepsilon > 0$ существует $e \in \nabla$, $\tau(\mathbf{1} - e) < \varepsilon$, такой, что $\|U_e y_n\| \rightarrow 0$. Пусть $q \in \nabla$, $\tau(q) < \infty$. Положим $f = e \wedge q$, тогда $\tau(q - f) = \tau(q - q \wedge e) = \tau(q \vee e - e) \leq \tau(\mathbf{1} - e) < \varepsilon$ и $\|U_f y_n\| \leq \|U_e y_n\|$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. В силу леммы 3.7 для $x \in X$, $p \in \nabla$, $\tau(p) < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ достаточно построить идемпотент $q \leq p$ такой, что $\tau(p - q) < \varepsilon$ и $\|U_q(a_m(x) - a_n(x))\| < \delta$ для всех $m, n \geq N(p, \varepsilon, \delta)$. Для каждой пары натуральных чисел L и k определим множество

$$X_{L,k} = \left\{ x \in X : \text{для некоторого } 0 \leq b \leq p \text{ такого, что} \right. \\ \left. \tau(p - b) \leq \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}, \sup_n \{\|U_b a_n(x)\|\} \leq L \right\}.$$

Покажем, что $X_{L,k}$ замкнуто в X . Пусть $x_m \rightarrow x$ в X и $\{x_m\} \subset X$. Тогда существует последовательность $\{b_m\} \subset A$ такая, что $0 \leq b_m \leq p$ и $\tau(p - b_m) < \varepsilon_k$, $\|U_{b_m} a_n(x_m)\| \leq L$ для всех n и m . Зафиксируем n . Из ограниченности $\{b_m\}$ и слабостью компактности единичного шара в A следует, что $b_m \rightarrow b$ слабо для некоторого $0 \leq b \leq p$. В силу предложения 3.2 получаем $\tau(p - b) < \varepsilon_k$. Из непрерывности a_n следует, что $a_n(x_m) \rightarrow a_n(x)$ по мере. Следовательно, по предложению 3.4 существует подпоследовательность последовательности $\{a_n(x_m)\}$, которая сходится к $a_n(x)$ почти равномерно. Не уменьшая общности, можно предполагать, что $a_n(x_m) \rightarrow a_n(x)$ почти равномерно, т.е. $\forall \sigma > 0$ существует $h \in \nabla$ такой, что $\tau(h^\perp) \leq \sigma$ и $\|U_h(a_n(x_m) - a_n(x))\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. В частности, для $j \in \mathbb{N}$ $\exists h_j \in \nabla$ такой, что $\tau(h_j^\perp) \leq 1/j$ и

$$\|U_{h_j} a_n(x_m)\| \rightarrow \|U_{h_j} a_n(x)\| \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Отсюда находим, что $U_{b_m} U_{h_j} a_n(x_m) \rightarrow U_b U_{h_j} a_n(x)$ слабо для любого j и, следовательно, по предложению 3.3 имеем

$$\|U_b U_{h_j} a_n(x)\| \leq \limsup_n \|U_{b_m} U_{h_j} a_n(x_m)\| \leq L.$$

Так как при $j \rightarrow \infty$ $h_j \rightarrow \mathbf{1}$ слабо, то $U_b U_{h_j} a_n(x) \rightarrow U_b a_n(x)$ слабо. Снова пользуясь предложением 3.3, получаем

$$\|U_b a_n(x)\| \leq \limsup_n \|U_b U_{h_j} a_n(x)\| \leq L.$$

Это означает, что $x \in X_{L,k}$.

В силу леммы 3.6 находим, что $X = \bigcup_L^\infty X_{L,k}$. По теореме Бэра существуют число L_k , элемент $x_k \in X$ и $\delta_k > 0$ такие, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - x_k\| < \delta_k$, существует элемент $0 \leq b_{x,k} \leq p$ такой, что $\tau(p - b_{x,k}) \leq \varepsilon/2^{k+3}$, для которого справедливо

$$\sup_n \{\|U_{b_{x,k}} a_n(x)\|\} \leq L_k.$$

Пусть $f_{x,k}$ — спектральный идемпотент $b_{x,k}$, соответствующий $[1/2, 1]$ в алгебре $U_p A$. Тогда по предложению 3.1 $\tau(p - f_{x,k}) < \varepsilon/2^{k+2}$ и

$$\|U_{f_{x,k}} a_n(x)\| \leq 12 \|U_{b_{x,k}} a_n(x)\| \leq 12 L_k.$$

Если $f_{x_k,k}$ — спектральный идемпотент $b_{x_k,k}$, соответствующий сегменту $[1/2, 1]$, и $\|x - x_k\| \leq \delta_k$, $g_{x,k} = f_{x,k} \wedge f_{x_k,k}$, то $\tau(p - g_{x,k}) \leq \varepsilon/2^{k+1}$ и

$$\begin{aligned} \|U_{g_{x,k}} a_n(x - x_k)\| &= \|U_{f_{x,k} \wedge f_{x_k,k}} a_n(x - x_k)\| \\ &\leq \|U_{f_{x,k}} a_n(x)\| + \|U_{f_{x_k,k}} a_n(x_k)\| \leq 24 L_k. \end{aligned}$$

Это означает, что если положить $\gamma_k = \delta_k/(24 L_k)$, то для z , удовлетворяющего условию $\|z\| \leq \gamma_k$, существует такой $g_{z,k} \in \nabla$, $0 \leq g_{z,k} \leq p$, $\tau(p - g_{z,k}) \leq \varepsilon/2^{k+1}$, что $\sup_n \|U_{g_{z,k}} a_n(z)\| \leq 1$. Так как X_0 плотно в X , то для произвольного $k \in \mathbb{N}$ существует $z_k \in X$ такой, что $\|z_k\| \leq \gamma_k$ и $x + z_k/k \in X_0$. Если $y_k = z_k/k$ и $g = \bigwedge_{k=1}^\infty g_{z,k}$, то $g \leq p$ и $\tau(p - g) \leq \varepsilon/2$. Кроме того, $\|U_g a_n(y_k)\| \rightarrow 0$ равномерно по n . Тогда существует K такое, что при $k > K$ $\|U_g a_n(y_k)\| < \delta/3$ для любого n . Фиксируем $k > K$. Ввиду $x + y_k \in X_0$ находим, что $q \in \nabla$, $q \leq g$, $\tau(g - q) < \varepsilon/2$ и $\exists N = N(q, \varepsilon, \delta)$ такое, что

$$\|U_q(a_m(x + y_k) - a_n(x + y_k))\| < \frac{\delta}{3} \quad \forall m, n > N.$$

Отсюда следует, что $q \leq p$, $\tau(p - q) < \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \|U_q(a_m(x) - a_n(x))\| &\leq \|U_q(a_m(x + y_k) - a_n(x + y_k))\| \\ &\quad + \|U_q a_m(y_k)\| + \|U_q a_n(y_k)\| < \delta, \quad m, n > N. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что принцип Банаха для L^∞ был рассмотрен в [25], а в некоммутативном случае доказан в [26].

§ 4. Приложения принципа Банаха

В этом параграфе, применяя доказанный принцип, докажем индивидуальную эргодическую теорему относительно равномерной подпоследовательности для абсолютных сжатий, определенных на JBW -алгебре с т.н.п. следом.

Пусть A — JBW -алгебра с т.н.п. следом τ и $\mathcal{A}$ — OJ -алгебра измеримых элементов относительно A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Линейный положительный оператор $\alpha: A \rightarrow A$ называется *абсолютным сжатием*, если $\alpha(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$ и $\tau(\alpha(x)) \leq \tau(x)$ для всех $x \in A^+$.

В [8], [13] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Для любого $a \in A_\tau$ справедливо неравенство

$$\|\alpha(a)\|_p \leq \|a\|_p, \quad p = 1, 2.$$

Из этого предложения следует, что абсолютное сжатие α можно продолжить до сжатия из $L^p(A, \tau)$ в $L^p(A, \tau)$ ($p = 1, 2$). Продолженное сжатие также будем обозначать через α ; оно будет положительным (в смысле порядка на $L^p(A, \tau)$), индуцированного из $\mathcal{A}$ и $\|\alpha(x)\|_p \leq \|x\|_p$ для любого $x \in L^p(A, \tau)$.

В [8], [13] доказана следующая максимальная эргодическая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть A — JBW -алгебра с т.н.п. следом τ . Пусть $x \in L^1(A, \tau)$ и $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $e \in \nabla$ такой, что $\tau(1 - e) \leq 2\varepsilon^{-1}\|x\|_1$, $U_e S_n(x) \in A$ и

$$\|U_e S_n(x)\| \leq 2\varepsilon \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

Теперь в качестве приложения принципа Банаха докажем следующую индивидуальную эргодическую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Тогда для каждого $x \in L^1(A, \tau)$ средние $S_n(x)$ сходятся почти равномерно в $L^1(A, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $S_n(x)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ является положительным линейным отображением из банахова пространства $X = L^1(A, \tau)$ в $L^1(A, \tau) \subset \mathcal{A}$, причем непрерывным, т.е. если последовательность $\{x_m\} \subset X$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$, то в силу предложения 4.1 $S_n(x_m)$ также сходится в $L^1(A, \tau)$ и, следовательно, сходится и по мере на $\mathcal{A}$. Условие (i) теоремы 3.5 для последовательности $\{S_n(x)\}$ следует из теоремы 4.2. Остается найти плотное подмножество X_0 в $L^1(A, \tau)$, на котором имеет место сходимост почти равномерно. Из предложения 4.1 также следует, что α является сжатием на гильбертовом пространстве H , построенном как пополнение пространства $L^1 \cap L^2$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$, которая порождается скалярным произведением $(x, y) = \tau(xy)$, $x, y \in L^1 \cap L^2$. Положим

$$H_0 = \{x + (y - \alpha(y)) : x \in H, \alpha(x) = x, y \in A_\tau \cap K_\tau\}.$$

Покажем, что H_0 плотно в H . Для этого достаточно из условия $x \perp (y - \alpha(y))$, $x \in H$, $y \in A_\tau \cap K_\tau$, вывести $\alpha(x) = x$. Действительно, имеем

$$(x, y - \alpha(y)) = (x - \alpha^*(x), y) = 0 \quad \forall y \in A_\tau \cap K_\tau,$$

что означает $x = \alpha^*(x)$. Тогда

$$\|x - \alpha(x)\|_2^2 = \|x\|_2^2 - (\alpha^*(x), x) - (x, \alpha^*(x)) + \|\alpha(x)\|_2^2 = \|\alpha(x)\|_2^2 - \|x\|_2^2 \leq 0,$$

отсюда $\alpha(x) = x$. Из свойства L^p -пространств множество H_0 плотно в L^1 . Более того, для каждого $x \in H_0$ $S_n(x)$ почти равномерно сходится в $\mathcal{A}$. Следовательно, по теореме 3.5 получим п.р. сходимост $S_n(x)$ для каждого $x \in L^1$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанная теорема является неассоциативным аналогом классического результата Биргхофа–Хинчина (см. [27]), который называется индивидуальной эргодической теоремой. Некоммутативный вариант этой теоремы был доказан в [2]–[4].

Пусть Ω – хаусдорфово компактное пространство, и пусть φ – непрерывное отображение Ω в себя такое, что семейство $\{\varphi^n\}_{n \geq 0}$ является равностепенно непрерывным. Система (Ω, φ) называется *строго эргодической*, если существует единственная φ -инвариантная мера μ на $(\Omega, \mathcal{B})$ с условием $\text{supp}(\mu) = \Omega$ (т.е. $\mu \circ \varphi^{-1}(A) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{B}$), где $\mathcal{B}$ – σ -алгебра всех борелевских подмножеств Ω такая, что для любого $\omega \in \Omega$ и $f \in C(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k \omega),$$

здесь сходимость понимается относительно нормы в $C(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Последовательность $\{k_i\}$ неотрицательных целых чисел называется *равномерной*, если существуют

- (i) строго эргодическая система $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$,
- (ii) множество $Y \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu(Y) > 0 = \mu(\partial Y)$, где ∂Y означает границу Y ,
- (iii) точка $\omega_0 \in \Omega$ такая, что

$$\begin{aligned} k_1 &= \min\{k \geq 0 : \varphi^k \omega_0 \in Y\}, \\ k_n &= \min\{k > k_{n-1} : \varphi^k \omega_0 \in Y\}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Заметим, что равномерные последовательности были впервые введены в работе [23]. Приведенное выше определение принадлежит Р. Сато [24] и является обобщением равномерной последовательности, введенной в [23].

Основным результатом работы [24] является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $(S, \mathcal{F}, m)$ – измеримое пространство с σ -конечной мерой и $T: L^1(S, \mathcal{F}, m) \rightarrow L^1(S, \mathcal{F}, m)$ – линейный оператор такой, что $\|T\|_1 \leq 1$, $\|T\|_{\infty} \leq 1$. Если $\{k_i\}$ – равномерная последовательность, то для каждого $f \in L^1(S, \mathcal{F}, m)$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{k_i} f(s)$$

существует и конечен для почти всех s из S .

Основным результатом этого параграфа является неассоциативный аналог приведенной теоремы (см. теорему 4.8). Прежде чем сформулировать основную теорему, докажем некоторые вспомогательные результаты.

ЛЕММА 4.4 [24]. Если $\{k_i\}$ – равномерная последовательность, порожденная точкой ω_0 и множеством Y , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} = \mu(Y).$$

ЛЕММА 4.5 [24]. Если $\{k_i\}$ – равномерная последовательность, порожденная точкой ω_0 и множеством Y , то для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытые подмножества Y_1, Y_2 и W из Ω такие, что

- (i) $Y_1 \subset Y \subset Y_2$, $\mu(Y_2 - Y_1) < \varepsilon$ и $\mu(\partial Y_1) = 0 = \mu(\partial Y_2)$,
- (ii) $\omega_0 \in W$ и для каждого $\omega \in W$ и всех $k \geq 0$

$$\chi_{Y_1}(\varphi^k \omega) \leq \chi_Y(\varphi^k \omega_0) \leq \chi_{Y_2}(\varphi^k \omega),$$

где $\chi_E(\omega)$ есть характеристическая функция множества E .

Пусть A – JBW -алгебра с т.н.п. следом τ . Через $\tilde{A}$ обозначим множество слабо измеримых и существенно ограниченных функций $g: (\Omega, \mu) \rightarrow A$ относительно нормы на A , наделенное следом

$$\tilde{\tau}(g) = \int_{\Omega} \tau(g(\omega)) d\mu(\omega), \quad g \geq 0.$$

На $\tilde{A}$ вводится операция умножения: для $f, g \in \tilde{A}$

$$(f \circ g)(\omega) = f(\omega)g(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

а норма определяется следующим образом:

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|.$$

Пусть $\tilde{L}^1$ есть банахово пространство всех μ -интегрируемых функций $h: (\Omega, \mu) \rightarrow L^1(A, \tau)$ в смысле Бохнера. Аналогично, рассуждая как в [28; с. 68], можно показать, что $\tilde{A}$ является JBW -алгеброй с т.н.п. следом $\tilde{\tau}$ и сопряженным пространством $\tilde{L}^1$, которое изоморфно $L^1(\tilde{A}, \tilde{\tau})$.

ЛЕММА 4.6. Пусть $f, \{f_n\} \subset \tilde{L}^1$ и $f_n \rightarrow f$ почти равномерно, тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ почти равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для любого натурального k существует идемпотент $e_k \in \tilde{A}$ такой, что $(e_k^\perp) < 1/k^4$ и $\|U_{e_k}(f_n - f)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для всех $\omega \in \Omega$ $e_k(\omega) \in \nabla$ и

$$\|U_{e_k(\omega)}(f_n(\omega) - f(\omega))\| \rightarrow 0 \quad \text{для почти всех } \omega \in \Omega.$$

Пусть

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega : \tau(e_k^\perp) < \frac{1}{k^2} \right\},$$

тогда

$$\frac{1}{k^2} \mu(C\Omega_k) \leq \int_{\Omega} \tau(e_k^\perp(\omega)) d\mu = (e_k^\perp) < \frac{1}{k^4}.$$

Отсюда $\mu(C\Omega_k) \leq 1/k^2$. Положим

$$\Omega' = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \Omega_k,$$

тогда

$$\mu(C\Omega') = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \Omega_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n} \Omega_k\right) \quad \forall n.$$

Так как

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq n} \Omega_k\right) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то $\mu(C\Omega') = 0$. Если теперь $\omega \in \Omega'$, то существует n такой, что $\omega \in \Omega_k$ для всех $k \geq n$, поэтому для $\varepsilon > 0$ существует $e \in \nabla$ с условием $\tau(e^\perp) < \varepsilon$ такой, что $\|U_e(f_n(\omega) - f(\omega))\| \rightarrow 0$, что доказывает лемму.

Заметим, что аналогичная лемме 4.6 теорема была доказана в [29], но в ней сходимость рассматривается только на алгебре фон Неймана, а не в пространстве L^1 .

ЛЕММА 4.7. *Если последовательность $\{b_n\}$ в A такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют почти равномерно сходящаяся последовательность $\{a_n\} \subset A$ и натуральное n_0 , удовлетворяющие условиям $\|b_n - a_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, то $\{b_n\}$ сходится почти равномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$; для каждого k найдем последовательность $\{a_n^{(k)}\} \subset A$, идемпотент $p_k \in \nabla$ с условием $\tau(p_k^\perp) < \varepsilon/2^k$ и натуральные числа $n_0(k)$, $n_1(k)$ такие, что

$$\|U_{p_k}(a_m^{(k)} - a_n^{(k)})\| < \frac{\delta}{3} \quad \text{для всех } m, n \geq n_0(k)$$

и $\|b_n - a_n^{(k)}\| < 1/k$ для всех $n \geq n_1(k)$. Если $p = \bigwedge_{k=1}^{\infty} p_k$, то из полуаддитивности следа имеем $\tau(p^\perp) < \varepsilon$. Кроме того, поскольку $p \leq p_k$ для всех k , то для каждого k получим

$$\|U_p(a_m^{(k)} - a_n^{(k)})\| < \frac{\delta}{3} \quad \text{при } m, n \geq n_0(k).$$

Если k_0 таков, что $1/k_0 < \delta/3$, то

$$\|U_p(b_m - b_n)\| \leq \|U_p(b_m - a_m^{(k_0)})\| + \|U_p(a_m^{(k_0)} - a_n^{(k_0)})\| + \|U_p(b_n - a_n^{(k_0)})\| < \delta$$

для всех $m, n \geq \max\{n_0(k_0), n_1(k_0)\}$. Это значит, что последовательность $\{U_p b_n\}$ фундаментальна, т.е. $\{b_n\}$ сходится почти равномерно. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.8. *Пусть A — JBW -алгебра с т.н.п. следом τ , и пусть α — абсолютное сжатие на $L^1(A, \tau)$. Если $\{k_i\}$ — равномерная последовательность и $x \in L^1$, то средние*

$$\tilde{a}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha^{k_i}(x)$$

сходятся почти равномерно в L^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$, ω_0 , Y — порождающие элементы, связанные с последовательностью $\{k_i\}$. Определим отображение $\tilde{\alpha}$ на $\tilde{L}^1$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}(h)(\omega) = \alpha(h(\varphi\omega)), \quad h \in \tilde{L}^1.$$

Можно убедиться, что $\tilde{\alpha}$ является абсолютным сжатием на $\tilde{L}^1$. Тогда по теореме 4.3 для каждого $h \in \tilde{L}^1$ средние

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}^k(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(h(\varphi^k))$$

п.р. сходятся в $\tilde{L}^1$. Из леммы 4.6 следует, что средние

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(h(\varphi^k\omega))$$

п.р. сходятся в $L^1(A, \tau)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем открытые подмножества Y_1 , Y_2 и W из Ω , удовлетворяющие условиям леммы 4.5. Применяя последнюю сходимость к функции

$$h(\omega) = x\chi_{Y_1}(\omega) \in \tilde{L}^1$$

и учитывая, что $\mu(W) > 0$, найдем точку $\omega \in W$, для которой последовательность

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x)\chi_{Y_1}(\varphi^k\omega)$$

п.р. сходится.

С другой стороны, поскольку $\mu(\partial Y_i) = 0$, имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{Y_i}(\varphi^k\omega) = \mu(Y_i), \quad i = 1, 2.$$

Из того, что $\mu(Y_2) - \mu(Y_1) < \varepsilon$ и $\chi_{Y_1}(\varphi^k\omega) \leq \chi_Y(\varphi^k\omega_0) \leq \chi_{Y_2}(\varphi^k\omega)$ для каждого k , следует, что существует натуральное n_0 такое, что

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\chi_Y(\varphi^k\omega_0) - \chi_{Y_1}(\varphi^k\omega)] < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Поэтому для всех $n \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x)\chi_Y(\varphi^k\omega_0) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x)\chi_{Y_1}(\varphi^k\omega) \right\| \\ & \leq \|x\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\chi_Y(\varphi^k\omega_0) - \chi_{Y_1}(\varphi^k\omega)] < \|x\|\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 4.7 средние

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x) \chi_Y(\varphi^k \omega_0)$$

п.р. сходятся. В силу леммы 4.4 имеет место равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha^{k_i}(x) = \frac{k_n + 1}{n} \cdot \frac{1}{k_n + 1} \sum_{i=1}^n \alpha^{k_i}(x) = \frac{k_n + 1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x) \chi_Y(\varphi^k \omega_0).$$

Из последнего получим п.р. сходимость средних $\tilde{a}_n(x)$ для каждого $x \in L^1(A, \tau) \cap A$.

Пусть теперь $x \in L^1(A, \tau)$, тогда согласно теореме 4.2 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $e \in \nabla$ такой, что $\tau(e^\perp) < \varepsilon$ и

$$\sup_n \|U_e S_n(x)\| < \infty.$$

Тогда имеем

$$\sup_n \|U_e \tilde{a}_n(x)\| \leq \left[\sup_n \frac{k_n + 1}{n} \right] \cdot \left[\sup_n \|U_e S_n(x)\| \right] < \infty.$$

Учитывая плотность $X_0 = L^1(A, \tau) \cap A$ в $X = L^1(A, \tau)$, в силу теоремы 3.5 получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Заметим, что аналогичная теорема в некоммутативном случае была доказана в [30], [31].

Список литературы

1. Segal I. A non-commutative extension of abstract integration // Ann. of Math. (2). 1953. V. 57. P. 401–457.
2. Yeadon F. J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras I // J. London Math. Soc. (2). 1977. V. 16. №2. P. 326–332.
3. Гольдштейн М. Ш. Теоремы сходимости почти всюду в алгебрах фон Неймана // J. Operator Theory. 1981. V. 6. P. 233–311.
4. Lance E. C. Non-commutative ergodic theory // Proc. of the meeting on C^* -algebras and their appl. to theor. phys., Roma, Citta Universitaria, 1975. P. 70–79.
5. Paszkewicz A. Convergence in W^* -algebras // J. Funct. Anal. 1974. V. 15. P. 103–116.
6. Alfsen E. M., Shultz F. W., Stormer E. A Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. Math. 1978. V. 128. №1. P. 11–56.
7. Shultz F. W. On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces // J. Funct. Anal. 1979. V. 31. №3. P. 360–376.
8. Аюпов Ш. А. Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах. II // Изв. АН УзССР. Сер. физ., матем. 1982. №5. С. 7–12.
9. Каримов А. К. Сходимости почти всюду на JW -алгебрах и их приложения к усиленным законам больших чисел // Докл. АН УзССР. 1985. №11. С. 4–6.
10. Каримов А. К. О свойствах сходимости по мере в йордановых алгебрах // Научн. труды ТашГУ. Математический анализ и геометрия. Ташкент, 1983. С. 38–41.
11. Бердикулов М. А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW -алгебр // Докл. АН УзССР. 1982. №6. С. 3–4.

12. Бердикулов М. А., Азизов Э. Ю. Условные ожидания на JBW -алгебрах // Изв. АН УзССР. Сер. физ., матем. 1986. № 5.
13. Эгамбердиев О. И. Индивидуальная эргодическая теорема для марковских операторов, действующих на полуконечных JBW -алгебрах // Деп. в ВИНТИ № 1263-75 деп, 1985.
14. Аюнов Ш. А. Супермартингалы в йордановых алгебрах // Случайные процессы и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1983. С. 20–31.
15. Аюнов Ш. А. Статистические эргодические теоремы в йордановых алгебрах // УМН. 1981. Т. 36. № 6. С. 201–202.
16. Ayupov Sh. A. Ergodic theorems in Jordan algebras of measurable elements // An. Univ. Craiova Ser. Mat. Fis. Chim. 1981. V. 9. P. 22–28.
17. Baxter J. R., Olsen J. H. Weighted and subsequential ergodic theorems // Canad. J. Math. 1983. V. 35. № 1. P. 145–166.
18. Bellow A., Losert V. The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288. № 1. P. 307–345.
19. Boshernitzan M., Wierdl M. Ergodic theorems along sequences and Hardy fields // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1996. V. 93. P. 8205–8207.
20. Jones R. L., Lin M., Olsen J. H. Weighted ergodic theorems along subsequences of density zero // New York J. Math. 1998. V. 3A. P. 89–98.
21. Lin M., Olsen J. H., Tempelman A. On modulated ergodic theorems for Dunford–Schwartz operators // Illinois J. Math. 1999. V. 43. № 1. P. 542–567.
22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1. М.: Мир, 1962.
23. Brunel A., Keane M. Ergodic theorems for operator sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 1969. V. 12. P. 231–240.
24. Sato R. Operator averages for subsequences // Math. J. Okayama Univ. 1980. V. 22. P. 161–168.
25. Bellow A., Jones R. L. A Banach principle for L^∞ // Adv. Math. 1996. V. 120. P. 115–172.
26. Goldstein M., Litvinov S. Banach principle in the space of τ -measurable operators // Studia Math. 2000. V. 143. № 1. P. 43–51.
27. Корнфельд Н. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
28. Sakai S. C^* -algebras and W^* -algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
29. Dang-Ngoc N. A random ergodic theorem in von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86. № 2. P. 605–608.
30. Hensz E. On some ergodic theorems for von Neumann algebras // Probability theory on vector spaces, III, Proc. Conf. Lublin, August 1983. Lecture Notes in Math. 1984. V. 1080. P. 119–123.
31. Litvinov S., Mukhamedov F. M. On individual subsequential ergodic theorem in von Neumann algebras // Studia Math. 2001. V. 145. № 1. P. 55–62.

Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
 Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
 E-mail: root@im.tashkent.su

Поступила в редакцию
 14.02.2002 и 26.08.2002