Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Скоробогатов, Автоморфизмы и формы торических факторов однородных пространств, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:56:38

УДК 512.816.4+512.745.2

А. Н. Скоробогатов

Автоморфизмы и формы торических факторов однородных пространств

Найдена группа автоморфизмов фактора обобщенного грассманиана G/P по действию максимального тора полупростой группы G . Классифицированы формы таких факторов, т.е. многообразия, изоморфные им над алгебраическим замыканием основного поля. Доказано, что все они унирациональны.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: однородные пространства, торы, формы, торсоры.

Введение

Пусть G – полупростая алгебраическая группа, определенная над полем k характеристики нуль, а P – ее максимальная параболическая подгруппа. Основной целью настоящей работы является нахождение группы автоморфизмов фактора проективного однородного пространства G/P по действию максимального тора группы G , а также классификация $\bar{k}/k$ -форм этого фактора, т.е. многообразий над $\bar{k}$, которые становятся изоморфными ему над алгебраическим замыканием $\bar{k}$. Предлагаемый подход использует торсоры, структурной группой которых является алгебраический тор, поэтому прежде всего мы напомним основные понятия и конструкции этой теории.

Пусть X – алгебраическое многообразие над k , а T – алгебраический тор. Торсор (или главное однородное пространство) над X со структурной группой T – это многообразие $\mathcal{T}$, снабженное морфизмом $\mathcal{T} \rightarrow X$ с послойным действием T , локально в этальной топологии изоморфное прямому произведению $X \times_k T$. Кольо-Телен и Сансюк ввели в рассмотрение класс X -торсоров, названных ими универсальными торсорами; их структурной группой является алгебраический тор, двойственный к группе Пикара $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ с ее структурой $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуля (в предположении, что она не имеет кручения). Многочисленные примеры указывают на то, что изучение рациональных точек на универсальном X -торсоре проще, чем на исходном многообразии X . Так, если k – числовое поле, то в этих терминах можно трактовать основные теоремы теории спуска Кольо-Телена и Сансюка (см. [1; гл. 3], [2; гл. 6]), но даже и в случае произвольного основного поля универсальные торсоры полезны при изучении $\mathbb{R}$ -эквивалентности рациональных точек. В последние годы универсальные торсоры стали играть важную роль в аналитической теории чисел в задачах оценки роста числа рациональных точек ограниченной высоты на проективных многообразиях. Следует отметить, что для многих интересных многообразий построение системы уравнений, задающих универсальные торсоры, является нетривиальной задачей. В настоящей работе мы предлагаем

другой подход к этой проблеме. Пусть Y – аффинный конус над гладким проективным многообразием, вложенным при помощи T -линеаризованного обильного пучка, и пусть $U \subset Y$ – открытое подмножество, состоящее из точек x таких, что орбита Tx замкнута, а естественное отображение $T \rightarrow Tx$ биективно. В геометрической теории инвариантов доказывалось существование фактора $X = U/T$ в категории алгебраических многообразий, при этом морфизм $U \rightarrow X$ является торсором с группой T (лемма 1.4). Более того, если коразмерность $Y \setminus U$ в Y больше единицы и $\text{Pic } \bar{Y} = 0$, то $U \rightarrow X$ – универсальный торсор (теорема 1.6, (i)).

Обобщенные грассмановы многообразия G/P , где P – параболическая подгруппа полупростой группы G , образуют естественный класс гладких проективных многообразий с действием тора, в качестве которого можно взять любой максимальный тор G . Если P – максимальная параболическая подгруппа, то $\text{Pic } G/P$ – бесконечная циклическая группа, порожденная классом обильного пучка, так что аффинный конус над G/P имеет тривиальную группу Пикара, т.е. может быть использован для построения универсальных торсоров. Простейший случай, когда дополнение к U имеет коразмерность больше единицы, – грассманиан $G(2, 5)$, на котором действует максимальный тор группы $G = \text{SL}(5)$; в этом случае X – поверхность дель Пеццо степени пять (см. [3], [4]). Для этого случая мы получаем (см. [2; гл. 3, § 1]) следующие результаты:

- (a) описание универсальных торсоров на X ;
- (b) нахождение группы автоморфизмов $\text{Aut } \bar{X}$;
- (c) классификацию $\bar{k}/k$ -форм X как факторов $G(2, 5)$ по действию максимальных торов G ;
- (d) из п. (c) следует, что все $\bar{k}/k$ -формы X унирациональные, в частности, они содержат плотное по Зарискому множество k -точек.

Отметим, что все поверхности дель Пеццо степени пять изоморфны над $\bar{k}$, так что все они – $\bar{k}/k$ -формы друг друга. Таким образом, из (d) следует классическая теорема Энриквеса, утверждающая, что всякая поверхность дель Пеццо степени пять имеет рациональную точку над полем определения (конечным или бесконечным). Для малых значений m и n факторам грассманианов $G(m, n)$, и их естественным компактификациям посвящена обширная литература (см., например, [3], [5] и ссылки, приведенные в этих работах). При $n = 6$ и $m = 2$ многообразие X есть множество гладких точек кубики Серге

$$\sum_{i=0}^5 x_i = \sum_{i=0}^5 x_i^3 = 0,$$

представляющей собой трехмерную кубiku с максимальным числом изолированных особых точек (это число равно десяти). При $n = 6$ и $m = 3$ многообразие X есть множество гладких точек двулистного накрытия $\mathbf{P}_k^4$, разветвленного в трехмерном многообразии Игузы – компактификации пространства модулей абелевых поверхностей со структурой уровня два (напомним, что мы предполагаем, что характеристика поля k равна нулю). Соответствие Гельфанда–Макферсона [5] представляет X в виде фактора многообразия стабильных конфигураций n точек в $\mathbf{P}_k^{m-1}$ по действию $\text{GL}(m)$. Отметим, что поверхности дель Пеццо степени $d = 2, 3, 4$ естественным образом вкладываются в факторы обобщенных грассманианов для систем корней E_7 , E_6 , D_5 соответственно (см. [6], [7]).

В настоящей статье мы распространяем результаты (a), (b), (c) и (d), полученные для случая $G(2, 5)$, на произвольные обобщенные грассманианы G/P такие, что дополнение к множеству стабильных точек с тривиальными стабилизаторами имеет коразмерность больше единицы. Все случаи, когда это условие не выполнено, приведены в предложении 2.1. Единообразное описание группы автоморфизмов $\text{Aut } \bar{X}$ получается, если исключить также случай максимального тора группы типа B_n , действующего на грассманиане n -мерных изотропных подпространств в $(2n + 1)$ -мерном векторном пространстве с невырожденной симметрической формой, и случай максимального тора группы типа G_2 , действующего на квадрике – орбите вектора старшего веса – в семимерном представлении группы типа G_2 . Изложим кратко схему доказательства. Фактор $X = U/T$ обладает некоторым естественным торсором $\mathcal{T}$, на который поднимаются автоморфизмы X , причем $\text{Pic } \mathcal{T}$ порождается классом обильного пучка, так что G/P получается из $\mathcal{T}$ как замыкание по Зарискому в соответствующем проективном вложении. Нахождение группы автоморфизмов X может быть получено на основе описания группы автоморфизмов G/P , данного Титсом и Демазюром [8] (теорема 2.2). Далее, недавний результат Жилля [9] и Рагунатана [10] о максимальных торах в квазиразложимых группах позволяет доказать, что всякая $\bar{k}/k$ -форма X есть фактор однородного пространства квазиразложимой формы G по ее максимальному тору (теорема 2.4). Отсюда следует, что всякая $\bar{k}/k$ -форма X унирациональна; в частности, множество рациональных точек на ней плотно по Зарискому. Было бы интересно ответить на вопрос о рациональности этих многообразий над полем k .

§ 1. Торсоры и скрученные формы

1.1. Подъем автоморфизмов на торсор. Пусть k – поле характеристики нуль с алгебраическим замыканием $\bar{k}$ и группой Галуа $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Обозначим через $\bar{X}$ многообразие, полученное из X расширением основного поля k до $\bar{k}$. Предположим, что X – геометрически целое и удовлетворяет условию $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Пусть T – алгебраический тор, определенный над k . Через $\hat{T}$ обозначим группу характеров тора T , наделенную естественной структурой Γ -модуля. Имеется следующая точная последовательность Кольо-Телена и Сансюка (см., например, [2; формула (2.22)]):

$$0 \rightarrow H^1(k, T) \rightarrow H^1(X, T) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_{\Gamma}(\hat{T}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, T) \rightarrow H^2(X, T). \quad (1)$$

Торсор $\mathcal{T} \rightarrow X$ со структурной группой T задает класс $[\mathcal{T}]$ в $H^1(X, T)$. Его образ $\chi([\mathcal{T}]) \in \text{Hom}_{\Gamma}(\hat{T}, \text{Pic } \bar{X})$ называется *типом* данного торсора. Когда T – k -разложимый тор, т.е. $T \simeq \mathbf{G}_{m,k}^n$, то из (1) и теоремы Гильберта 90 следует, что торсор со структурной группой T определяется своим типом с точностью до изоморфизма. Из (1) следует, что торсор типа τ существует тогда и только тогда, когда $\partial(\tau) = 0$. Кроме того, из (1) видно, что множество торсоров данного типа либо пусто, либо находится в (неканонической) биекции с $H^1(X, T)$.

Торсор называется *универсальным*, если его тип – изоморфизм $\hat{T} \simeq \text{Pic } \bar{X}$.

Есть еще одна полезная точная последовательность, полученная Кольо-Теленом и Сансюком (см. [1; формула (2.1.1)]):

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[\mathcal{T}]^* \rightarrow \hat{T} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{\mathcal{T}} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Гомоморфизм $\hat{T} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$ с точностью до знака совпадает с типом тора $\mathcal{T} \rightarrow X$. Из (2) видно, что гомоморфизм, задаваемый типом, инъективен тогда и только тогда, когда $\bar{k}[\mathcal{T}]^* = \bar{k}^*$.

Следующая лемма является вариацией замечаний, сделанных в [11; теорема 1.2, предложение 1.4]. Пусть $\text{Aut } X$ – группа автоморфизмов k -многообразия X .

ЛЕММА 1.1. *Пусть X – геометрически целое многообразие над k такое, что $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Пусть $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ – торец, структурной группой которого является тор T , а тип $\lambda: \hat{T} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$ инъективен. Обозначим через $\text{Aut}(\bar{X}, \lambda) \subset \text{Aut } \bar{X}$ множество автоморфизмов, оставляющих инвариантной подгруппу $\lambda(\hat{T}) \subset \text{Pic } \bar{X}$. Тогда имеется точная последовательность групп, снабженных действием группы Галуа Γ , эквивариантная относительно этого действия:*

$$1 \rightarrow T(\bar{k}) \rightarrow N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k})) \rightarrow \text{Aut}(\bar{X}, \lambda) \rightarrow 1, \quad (3)$$

где $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ – нормализатор подгруппы $T(\bar{k})$ в $\text{Aut } \mathcal{T}$. При этом группа $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{T}$, сохраняющих слои проекции $\mathcal{T} \rightarrow \bar{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность гомоморфизма $T(\bar{k}) \rightarrow N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ очевидна. Ясно также, что любой автоморфизм тора $\mathcal{T}$, нормализующий подгруппу $T(\bar{k})$, спускается до автоморфизма $\bar{X}$. Группа $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ действует согласованно на $\mathcal{T}$ и $\bar{X}$, а также действует сопряжениями на $\bar{T} = T(\bar{k})$. При одновременном действии $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ на $\bar{X}$ и $\bar{T}$ класс $[\mathcal{T}]$ в $H^1(\bar{X}, \bar{T})$ остается на месте. Поэтому из точной последовательности (1) следует, что это действие сохраняет тип тора $\chi([\mathcal{T}]) \in \text{Hom}_\Gamma(\hat{T}, \text{Pic } \bar{X})$, т.е. факторгруппа $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ по $T(\bar{k})$ гомоморфно отображается в $\text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$.

Докажем инъективность этого гомоморфизма. Если α лежит в его ядре, то для любого $x \in \mathcal{T}(\bar{k})$ имеем $\alpha(x) = t(x)x$, где $t: \mathcal{T} \rightarrow T$ – морфизм многообразий. Однако ввиду инъективности λ из точной последовательности (2) следует, что $\bar{k}[\mathcal{T}]^* = \bar{k}^*$, т.е. любой морфизм из $\mathcal{T}$ в тор переводит $\mathcal{T}$ в точку. Поэтому α происходит из действия некоторого элемента $T(\bar{k})$, что доказывает требуемую инъективность.

Остается доказать, что образ $N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$ в $\text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$ совпадает со всей группой. Ввиду инъективности λ естественное действие $\text{Aut } \bar{X}$ на $\text{Pic } \bar{X}$ задает действие $\text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$ на $\hat{T}$. Пусть $h \in \text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$ действует на $\hat{T}$ посредством автоморфизма $\hat{\tau}_h$. Обозначим τ_h соответствующий автоморфизм тора $\bar{T}$. Тогда $\lambda \circ \hat{\tau}_h = h^* \circ \lambda$ для любого $h \in \text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$, где h^* – естественное действие h на $\text{Pic } \bar{X}$. Отсюда следует, что $\bar{X}$ -торсор со структурной группой $\bar{T}$, полученный из $f: \mathcal{T} \rightarrow \bar{X}$ заменой базы $h: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, имеет тот же тип, что и $\bar{X}$ -торсор, полученный заменой структурной группы $\tau_h: \bar{T} \rightarrow \bar{T}$. Поскольку $\bar{X}$ не имеет непостоянных обратимых регулярных функций, можно воспользоваться последовательностью (1), из которой следует, что эти два $\bar{X}$ -торсора изоморфны. Таким образом, любой автоморфизм $h \in \text{Aut}(\bar{X}, \lambda)$ получается из некоторого автоморфизма $\rho \in \text{Aut } \mathcal{T}$, сохраняющего слои $\mathcal{T} \rightarrow \bar{X}$. Докажем, что любой $\rho \in \text{Aut } \mathcal{T}$, сохраняющий слои $\mathcal{T} \rightarrow \bar{X}$, нормализует $T(\bar{k})$. Пусть $t \in T(\bar{k})$. Тогда $\psi := \rho t \rho^{-1}$ сохраняет слои проекции $\mathcal{T} \rightarrow \bar{X}$. Канонический изоморфизм $\mathcal{T} \times_X \mathcal{T} = \mathcal{T} \times_k T$ отождествляет график ψ с графиком некоторого морфизма

$\overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{T}$. Согласно (2) из инъективности λ следует, что $\overline{k}[\mathcal{T}]^* = \overline{k}^*$, поэтому образ любого морфизма из $\overline{\mathcal{T}}$ в тор состоит из одной точки. Следовательно, ψ действует на $\overline{\mathcal{T}}$ сдвигом на элемент $T(\overline{k})$ (этот аргумент заимствован из [11; лемма 1.1]). На этом доказательство леммы завершается.

В случае, когда $\mathcal{T} \rightarrow X$ – универсальный торсор, (3) дает точную последовательность

$$1 \rightarrow T(\overline{k}) \rightarrow N_{\text{Aut } \overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})) \rightarrow \text{Aut } \overline{X} \rightarrow 1. \quad (4)$$

Над $\overline{k}$ существует единственный с точностью до изоморфизма универсальный $\overline{X}$ -торсор (фиксированного типа). Поэтому любой универсальный торсор над $\overline{k}/k$ -формой X является $\overline{k}/k$ -формой любого универсального X -торсора.

Если G – топологическая группа с непрерывным действием Γ , то будем обозначать через $Z^1(\Gamma, G)$ множество непрерывных 1-коциклов Γ с коэффициентами в G .

ЛЕММА 1.2. Пусть выполнены предположения леммы 1.1 и $X' - \overline{k}/k$ -форма X , скрученная при помощи некоторого 1-коцикла $\sigma \in Z^1(\Gamma, \text{Aut}(\overline{X}, \lambda))$. Тогда множество X' -торсоров типа λ есть множество $\overline{k}/k$ -форм $\mathcal{T}$, скрученных при помощи 1-коцикла из $Z^1(\Gamma, N_{\text{Aut } \overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})))$, являющегося поднятием σ .

Следует пояснить, что указанием типа λ однозначно определяется структурная группа X' -торсора. Действительно, действие Γ на $\text{Pic } \overline{X}'$ задает действие Γ на подмодуле $\widehat{T} \simeq \lambda(\widehat{T})$. Этим однозначно определяется двойственный к этой решетке тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T}' \rightarrow X'$ – торсор типа λ . Так как $\overline{X}' \simeq \overline{X}$, а в сделанных предположениях $\overline{X}$ -торсор типа λ единствен с точностью до изоморфизма, то получаем, что $\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}$ изоморфны как $\overline{X}$ -торсоры. Поэтому $\mathcal{T}'$ получается из $\mathcal{T}$ скручиванием на 1-коцикл с коэффициентами в группе автоморфизмов $\overline{\mathcal{T}}$, сохраняющих слои отображения $\overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{X}$, являющийся поднятием σ . По лемме 1.1 эта группа есть $N_{\text{Aut } \overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$. Обратно, если $\xi \in Z^1(\Gamma, N_{\text{Aut } \overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})))$ есть поднятие σ , то $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_\xi$ есть торсор типа λ над $X' = X_\sigma$.

Предположим, что (3) есть последовательность групп $\overline{k}$ -точек в точной последовательности групповых k -схем

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1. \quad (5)$$

Обозначим через $Z^1(k, G)$ множество непрерывных 1-коциклов группы Галуа Γ с коэффициентами в группе $G(\overline{k})$. Пусть $\sigma \in Z^1(k, H)$ и $X' = X_\sigma$ – соответствующая скрученная форма. Пусть T_σ – скрученная посредством σ форма T в смысле действия H на T сопряжениями, задаваемого (5). Из первой части доказательства леммы 1.1 видно, что определяемое этим действие $H(\overline{k})$ на $\widehat{T} = \lambda(\widehat{T})$ согласовано с действием $H(\overline{k})$ на $\text{Pic } \overline{X}_\sigma$, поэтому T_σ будет структурной группой X_σ -торсоров типа λ , если таковые существуют.

Согласно лемме 1.2 X_σ -торсоры типа λ существуют тогда и только тогда, когда класс когомологий $[\sigma] \in H^1(k, H)$ лежит в образе $H^1(k, G)$. Напомним, что (5) задает класс $\Delta(\sigma) \in H^2(k, T_\sigma)$, равный нулю в том и только том случае, когда класс $[\sigma]$ лежит в образе $H^1(k, G)$ (см. [12; гл. I, § 5, п. 6, предложение 41]).

(Заметим, что если заменить $\sigma = \sigma(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, на когомологичный коцикл $h^{-1} \cdot \sigma(\gamma) \cdot {}^\gamma h$, то класс $\Delta(\sigma)$ заменится на $h^{-1} \cdot \Delta(\sigma) \cdot h$.)

Хотя нам не понадобится этот факт, мы докажем, что $\Delta(\sigma)$ совпадает с $\partial(\lambda)$, где ∂ – отображение из точной последовательности (1) для X_σ и T_σ . Иными словами, два препятствия к существованию X_σ -торсоров типа λ совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть выполнены предположения леммы 1.1 и X_σ – форма X , полученная скручиванием при помощи коцикла $\sigma \in Z^1(k, H)$. Тогда $\Delta(\sigma) = \partial(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_σ – правый k -торсор группы H , задаваемый σ , т.е. k -схема с правым действием H , которая после замены k на $\bar{k}$ становится изоморфной H с естественным правым действием на себе. Рассмотрим жерб (*φр. gerbe*) $\mathcal{G}_1$ поднятий H_σ до правого торсора G (см. [13; гл. IV, § 2, п. 5, утверждение 8]). Это – категория, расслоенная над категорией расширений $k \subset K \subset \bar{k}$. Слой $\mathcal{G}_1(K)$ над K есть группоид, образованный теми K -торсорами группы G , которые после замены структурной группы посредством отображения $G \rightarrow H$ становятся изоморфными $H_{\sigma,K} = H_\sigma \times_k K$. Иначе говоря, $\mathcal{G}_1(K)$ состоит из K -торсоров D таких, что D/T получается из H_σ расширением основного поля с k до K . Жерб $\mathcal{G}_1$ связан k -связкой (*φр. lien, англ. band*), определенной k -тором T_σ , действующим на этих торсорах слева (*ibidem*).

Далее, пусть $\mathcal{G}_2$ – жерб X_σ -торсоров со структурной группой T_σ типа λ (см. [13; гл. V, § 3, п. 1, утверждение 6]), т.е. слой $\mathcal{G}_2(K)$ состоит из $X_{\sigma,K}$ -торсоров типа λ . Согласно [13; гл. V, § 3, п. 2, утверждение 1, (i)] этот жерб связан k -связкой $f_* f^* T_\sigma$, где $f: \mathcal{T} \rightarrow X$ – структурный морфизм. Из условия $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ следует, что канонический морфизм $T_\sigma \rightarrow f_* f^* T_\sigma$ является изоморфизмом. Поэтому $\mathcal{G}_2$ также связан k -связкой, определенной k -тором T_σ .

Сопоставим правому K -торсору D группы G скрученную посредством D форму K -многообразия $\mathcal{T}_K$, т.е. $\mathcal{T}_{K,D} = (D \times_K \mathcal{T}_K)/G$, где G действует справа на D и слева на $\mathcal{T}_K$. (Напомним, что $G(\bar{k}) = N_{\text{Aut } \mathcal{T}}(T(\bar{k}))$.) Тор T_σ действует на скрученном многообразии $\mathcal{T}_{K,D}$ слева, наделяя его структурой $X_{\sigma,K}$ -торсора группы T_σ типа λ . Получающийся при этом морфизм жербов $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ отождествляет классы $[\mathcal{G}_1]$ и $[\mathcal{G}_2]$ в $H^2(k, T_\sigma)$. Однако класс $\mathcal{G}_1$ в $H^2(k, T_\sigma)$ есть $\Delta(\sigma)$ (см. [13; гл. IV, § 2, п. 5, утверждение 9 и § 3, п. 5, утверждение 4]), тогда как класс $\mathcal{G}_2$ есть $\partial(\lambda)$ (см. [2; гл. 2, § 3 и гл. 9, § 5], где используется результат из [13; гл. V, § 3, п. 2, утверждение 1]).

В частности, если $\Delta(\sigma) \neq 0$, то X_σ не имеет k -точек: в противном случае $\partial(\lambda) = 0$, так как последнее отображение в (1) имеет сечение, задаваемое k -точкой X_σ .

1.2. Фактор аффинного многообразия по действию тора. Торсо-ры естественно появляются в контексте геометрической теории инвариантов. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем k . Мы будем рассматривать V как аффинное пространство над k и писать $V(\bar{k})$ вместо $V \otimes_k \bar{k}$. Пусть G_1 – связная редуктивная подгруппа $\text{SL}(V)$, и пусть G – наименьшая замкнутая подгруппа в $\text{GL}(V)$, содержащая G_1 и группу скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$. Напомним, что точка $x \in V(\bar{k})$ называется *стабильной*, если орбита $\bar{G}_1 x$ замкнута и ее размерность равна $\dim G_1$ (см. [14; с. 194]). Множество стабильных точек $V^s \subset V$ открыто (может быть, пусто) и G -инвариантно. В геометрической теории инвариантов строятся квази-проективное многообразие Z и аффинный морфизм $f: V^s \rightarrow Z$, слоями которого являются орбиты G (см. [14;

теорема 1.10, (iii)). Пусть $V^f \subset V$ – подмножество точек, стабилизаторы которых в G тривиальны. Пусть $V^{\text{sf}} = V^s \cap V^f$; это подмножество также открыто и G -инвариантно.

ЛЕММА 1.4. Пусть $U = V^{\text{sf}} \cap Y$, где Y – замкнутое G -инвариантное подмногообразие V . Предположим, что U гладко, и пусть $X = f(U)$. Тогда естественный морфизм $f: U \rightarrow X$ есть торсор со структурной группой G , причем X гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение локально по X . Пусть $x \in X(\bar{k})$. Выберем открытую аффинную окрестность W точки x . Поскольку f – аффинный морфизм, $f^{-1}(W)$ – аффинное подмножество (см. [15; гл. II, § 5, упражнение 5.17]). Стабилизаторы всех $\bar{k}$ -точек $f^{-1}(W)$ тривиальны, поэтому согласно следствию теоремы Луна об этальных слайсах (Luna’s étale slice theorem, см. [14; с. 153]) естественный морфизм $f^{-1}(W) \rightarrow W$ – торсор с группой G . Отсюда получаем то же утверждение для $f: U \rightarrow X$. По определению торсор локально тривиален в этальной топологии, поэтому гладкость X следует из гладкости U .

Мы рассмотрим случай, когда G_1 есть алгебраический тор. Напомним, что тор называется разложимым, если действие группы Галуа на его группе характеров тривиально. Пусть T_1 – разложимый тор в $\text{SL}(V)$, T – наименьший тор в $\text{GL}(V)$, содержащий T_1 и группу скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$, и пусть $T_2 = T/\mathbf{G}_{m,k}$ – образ T в $\text{PGL}(V)$. Таким образом, $\hat{T}_1, \hat{T}, \hat{T}_2$ – тривиальные Γ -модули. Пространство V разлагается в прямую сумму собственных подпространств тора T :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{T}} V_{\lambda},$$

где V_{λ} состоит из векторов w таких, что $t \cdot w = \lambda(t)w$ для любого $t \in T(\bar{k})$. Пусть Λ – множество весов представления T в V , т.е. характеров $\lambda \in \hat{T}$, для которых $V_{\lambda} \neq 0$. Пусть Λ_1 – множество весов T_1 в V . Очевидно, что естественный гомоморфизм $\hat{T} \rightarrow \hat{T}_1$ изоморфно отображает Λ на Λ_1 .

Для $x \in V(\bar{k})$ обозначим через $\text{wt}_T(x)$ множество весов $\lambda \in \Lambda$ таких, что V_{λ} -компонента x не равна нулю. Определим $\text{wt}_{T_1}(x) \subset \Lambda_1$ как образ $\text{wt}_T(x)$ при сюръекции $\hat{T} \rightarrow \hat{T}_1$. *Весовым многогранником x* называется выпуклая оболочка $\text{Conv}(\text{wt}_{T_1}(x))$ множества $\text{wt}_{T_1}(x)$ в $\hat{T}_1 \otimes \mathbf{R}$. Критерий стабильности Гильберта–Мамфорда утверждает, что точка x стабильна при действии T_1 тогда и только тогда, когда нуль лежит во внутренней части весового многогранника x (см. [16; теорема 9.2]).

ЛЕММА 1.5. Пусть $Y \subset V$ – дополнение к началу координат в геометрически целом T -инвариантном замкнутом подмногообразии в V , причем Y гладко. Пусть $U = Y \cap V^{\text{sf}}$. Если $\text{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$, то $\bar{k}[X]^* = \bar{k}[U]^* = \bar{k}^*$, где $X = U/G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbf{P}(Y)$ образ Y в проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$. Естественный морфизм $Y \rightarrow \mathbf{P}(Y)$ есть торсор с группой $\mathbf{G}_{m,k}$. Его тип – инъективный гомоморфизм $\mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic } \mathbf{P}(\bar{Y})$, переводящий единицу в класс пучка $\mathcal{O}(1)$ (с точностью до знака). Из (2) следует, что $\bar{Y}$ не имеет непостоянных обратимых регулярных функций. Из предположения о коразмерности $Y \setminus U$ вытекает, что то же самое верно для U и, следовательно, для X .

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $Y \subset V$ – дополнение к началу координат в геометрически целом T -инвариантном замкнутом подмногообразии, не содержащемся в гиперплоскости. Предположим, что Y гладко, $\text{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ и $\text{Pic } \mathbf{P}(\bar{Y})$ порождается классом пучка $\mathcal{O}(1)$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Многообразие X гладкое и удовлетворяет условию $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Естественный морфизм $f: U \rightarrow X$ является универсальным торсором; в частности, имеется канонический изоморфизм тривиальных Γ -модулей $\text{Pic } \bar{X} = \hat{T}$.

(ii) Пусть $K = \bar{k}(X)$ и U_K – общий слой морфизма $\bar{U} \rightarrow \bar{X}$. Модули Галуа $\text{Div } \bar{X}$ и $K[U_K]^*/\bar{k}^*$ канонически изоморфны, причем полугруппа эффективных дивизоров на $\bar{X}$ отождествляется с $(K[U_K]^* \cap \bar{k}[Y])/\bar{k}^*$.

(iii) $-\Lambda$ есть единственное минимальное множество образующих полугруппы классов эффективных дивизоров $\text{Pic } \bar{X} = \hat{T} = K[U_K]^*/K^*$. В частности, любой автоморфизм $\bar{X}$ переводит Λ в себя.

(iv) Пусть $\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ – гомоморфизм, двойственный включению группы скалярных матриц $\mathbf{G}_{m, \bar{k}}$ в $\bar{T}$. Этот гомоморфизм эквивариантен относительно действия группы $\text{Aut } \bar{X}$ (которое тривиально на $\mathbf{Z}$).

(v) Любой универсальный торсор на $\bar{k}/k$ -форме X , имеющий тот же тип, что и $U \rightarrow X$, является $\bar{k}/k$ -формой U .

(vi) Пусть τ – вложение $\hat{T}_2$ в $\text{Pic } \bar{X}$ в качестве ядра гомоморфизма $\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ из (iv). Любой торсор типа τ на $\bar{k}/k$ -форме X является плотным открытым подмножеством $\bar{k}/k$ -формы $\mathbf{P}(Y)$, отвечающей коциклу с коэффициентами в нормализаторе $T_2(\bar{k})$ в $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{Y})$.

(vii) Группа $\text{Aut } \bar{X}$ канонически изоморфна факторгруппе нормализатора $T_2(\bar{k})$ в $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{Y})$ по $T_2(\bar{k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) В силу лемм 1.4 и 1.5 остается проверить, что торсор $f: U \rightarrow X$ универсален. Из того, что $\text{Pic } \mathbf{P}(\bar{Y})$ порождается классом пучка $\mathcal{O}(1)$, следует, что $\text{Pic } \bar{Y} = 0$ (последовательность (2) для торсора $\bar{Y} \rightarrow \mathbf{P}(\bar{Y})$). В наших предположениях из этого следует, что $\text{Pic } \bar{U} = 0$, поэтому из точной последовательности (2) для $f: U \rightarrow X$ вытекает, что тип $\hat{T} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$ торсора f есть изоморфизм абелевых групп, а значит, и Γ -модулей.

(ii) Общий слой U_K является K -торсором с группой $T_K = T \times_k K \simeq \mathbf{G}_{m, K}^n$. По теореме Гильберта $90 \ H^1(K, \mathbf{G}_{m, K}) = \{1\}$, поэтому U_K – тривиальный торсор, т.е. $U_K \simeq T_K$. Лемма Розенлихта утверждает, что T действует на любую обратимую регулярную функцию на U_K умножением на характер, что определяет канонический изоморфизм $K[U_K]^*/K^* = \hat{T}$. Так как $\bar{Y}$ гладко и не имеет непостоянных обратимых регулярных функций, причем $\text{Pic } \bar{Y} = 0$, то $\text{Div } \bar{U} = \text{Div } \bar{Y} = \bar{k}(Y)^*/\bar{k}^*$. Аналогично $\text{Div } U_K = \bar{k}(Y)^*/K[U_K]^*$. Теперь первое утверждение следует из (расщепляющейся) точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Div } \bar{U} \rightarrow \text{Div } U_K \rightarrow 0. \quad (6)$$

Дивизор $D \subset \bar{X}$ эффективен тогда и только тогда, когда замыкание по Зарискому дивизора $f^*(D)$ на $\bar{Y}$ эффективно. Так как $\text{Pic } \bar{Y} = 0$, то это замыкание есть главный дивизор $\text{div } g$, где g – ненулевая регулярная функция на $\bar{Y}$. Отсюда $g \in \bar{k}[Y]$. Обратно, любая функция $g \in K[U_K]^* \cap \bar{k}[Y] \subset K[U_K]$ определяет эффективный дивизор на $\bar{U}$, который не пересекается с общим слоем U_K . Ввиду точности последовательности (6) он происходит из единственного эффективного дивизора на $\bar{X}$.

(iii) Поскольку Y – дополнение к точке в замкнутом аффинном подмногообразии $Y_c \subset V$ размерности более единицы, то $\bar{k}$ -алгебра $\bar{k}[Y_c] = \bar{k}[Y] = \bar{k}[U]$ порождается как векторное пространство над $\bar{k}$ мономами от координатных функций. Согласно лемме Розенлихта имеется изоморфизм $K[U_K]^*/K^* \xrightarrow{\sim} \hat{T}$, отображающий функцию g на характер χ , такой, что $t \cdot g = \chi(t)g$ для любого $t \in T(\bar{k})$. Координатные гиперплоскости не пересекаются с общим слоем U_K , т.е. координатные функции лежат в $K[U_K]^*$. Они отображаются на веса двойственного представления T , т.е. на множество $-\Lambda$. Линейная комбинация мономов принадлежит $K[U_K]^*$ тогда и только тогда, когда все мономы с ненулевыми коэффициентами отвечают одному и тому же характеру, который тогда представляет класс этой функции в $\text{Pic } \bar{X}$. Характеры, получаемые таким образом, суть линейные комбинации весов $-\lambda$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Поэтому $-\Lambda$ порождает полугруппу E классов эффективных дивизоров в $\text{Pic } \bar{X}$.

Пусть $\mathbf{G}_{m, \bar{k}} \rightarrow \bar{T}$ – вложение подгруппы скалярных матриц. Двойственное отображение $h: \hat{T} \rightarrow \mathbf{Z}$ переводит любой элемент $\lambda \in \Lambda$ в единицу. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – элементы E такие, что E есть множество их целочисленных линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами. В частности, любой $\lambda \in \Lambda$ записывается в виде $\lambda = \sum r_i \alpha_i$. Отсюда $1 = h(\lambda) = \sum r_i h(\alpha_i)$, но так как $h(\alpha_i)$ – целое положительное число, то $h(\alpha_i) = 1$ в точности для одного индекса i и $h(\alpha_j) = 0$ при $j \neq i$. Отсюда следует, что $\lambda = \alpha_i$, т.е. $-\Lambda$ входит в любую систему образующих E , а значит, является единственной минимальной системой образующих E .

(iv) Следует из (iii).

(v) Следует из (i) и леммы 1.2.

(vi) Пусть $N(Y)$ (соответственно $N(U)$) – нормализатор $T_2(\bar{k})$ в $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{Y})$ (соответственно в $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{U})$). Из (iv) и леммы 1.2 вытекает, что любой торсор типа τ на $\bar{k}/k$ -форме X является $\bar{k}/k$ -формой $\mathbf{P}(U)$, полученной из коцикла с коэффициентами в $N(U)$. Поэтому остается показать, что $N(Y) = N(U)$. Обильный пучок $\mathcal{O}(1)$ инвариантен относительно $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{Y})$, что дает вложение $\text{Aut } \mathbf{P}(\bar{Y}) \rightarrow \text{PGL}(V \otimes_k \bar{k})$. При этом $N(Y)$ отображается в подгруппу нормализатора $T_2(\bar{k})$ в $\text{PGL}(V \otimes_k \bar{k})$, состоящую из элементов, сохраняющих $\mathbf{P}(\bar{Y})$. Эта подгруппа сохраняет тривиальность стабилизатора в T_2 , так же как и стабильность относительно действия T_1 , поэтому $N(Y)$ сохраняет открытое множество $\mathbf{P}(\bar{U}) \subset \mathbf{P}(\bar{Y})$. Таким образом, имеется вложение $N(Y) \rightarrow N(U)$. Аналогичные соображения применимы и к $\mathbf{P}(\bar{U})$. Действительно, по условиям теоремы $\text{Pic } \mathbf{P}(\bar{U}) = \text{Pic } \mathbf{P}(\bar{Y})$ порождается классом $\mathcal{O}(1)$, поэтому любой автоморфизм $\mathbf{P}(\bar{U})$ действует на проективизации

$$(V \otimes_k \bar{k})^* = H^0(\mathbf{P}(\bar{Y}), \mathcal{O}(1)) = H^0(\mathbf{P}(\bar{U}), \mathcal{O}(1))$$

и, следовательно, происходит из элемента $\text{PGL}(V \otimes_k \bar{k})$. Проективное преобразование, сохраняющее множество $\mathbf{P}(\bar{U})$, сохраняет и его замыкание по Зарискому $\mathbf{P}(\bar{Y})$. Это доказывает, что $N(Y) = N(U)$.

(vii) Следует из (iv), леммы 1.1 и изоморфизма $N(Y) = N(U)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Пусть вес λ имеет кратность один, т.е. V^* имеет единственный с точностью до пропорциональности собственный вектор веса $-\lambda$. Обозначим его через f_λ . Тогда дивизор на X , задаваемый уравнением $f_\lambda = 0$, является единственным эффективным дивизором в своем классе. Действительно, из

п. (ii) теоремы 1.6 следует, что линейная система, ассоциированная с дивизором некоторого веса, порождается всеми мономами данного веса, однако f_λ – единственный моном веса $-\lambda$.

2. Геометрическая теория инвариантов дает каноническую компактификацию X , а именно, фактор множества полустабильных точек. Однако следует иметь в виду, что в большинстве случаев эта компактификация имеет особенности.

§ 2. Фактор G/P по действию максимального тора

2.1. Группа автоморфизмов. Пусть G – разложимая односвязная простая алгебраическая группа над k . По определению разложимости G обладает k -разложимым максимальным тором $H \simeq \mathbf{G}_{m,k}^n$ и борелевской подгруппой $B \supset H$, определенной над k . Пусть R – система корней G относительно H , и $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – базис простых корней R , задаваемый B . Мы используем нумерацию корней такую же, как в [17], [18]. (Во избежание повторов будем считать, что если R имеет тип B , C или D , то R – одна из систем корней B_n , $n \geq 2$, C_n , $n \geq 3$, D_n , $n \geq 4$.) Пусть $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – двойственный к S базис фундаментальных весов. Мы будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $Q(R)$ – решетка, порожденная корнями; $P(R)$ – решетка, порожденная фундаментальными весами; $W = W(R)$ – группа Вейля; $A(R)$ – группа автоморфизмов системы корней R . Известно, что $A(R) = W(R) \rtimes \text{Aut } S$, где $\text{Aut } S$ – группа автоморфизмов системы простых корней S (или, что эквивалентно, диаграммы Дынкина R).

Пусть $Z(G)$ – центр G и $G_{\text{ad}} = G/Z(G)$ – присоединенная группа G . Положим $H_{\text{ad}} = H/Z(G)$. Напомним, что $\text{Aut } G$ – алгебраическая k -группа $G_{\text{ad}} \rtimes \text{Aut } S$, причем по определению разложимой группы действие группы Галуа Γ на $\text{Aut } S$ тривиально. Конечная группа $\text{Aut } S$ отождествляется с группой внешних автоморфизмов G , а также с подгруппой $\text{Aut } G$, сохраняющей H , B и множество однопараметрических унитарных корневых подгрупп G , задаваемых простыми корнями. Подгруппа $\text{Aut}(G, H) \subset \text{Aut } G$, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих H , разлагается в полупрямое произведение $N_{G_{\text{ad}}}(H_{\text{ad}}) \rtimes \text{Aut } S$, где $N_{G_{\text{ad}}}(H_{\text{ad}})$ – нормализатор H_{ad} в G_{ad} . Таким образом, имеется коммутативная диаграмма алгебраических групп с точными строками и расщепляющимися точными столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & H_{\text{ad}} & \longrightarrow & N_{G_{\text{ad}}}(H_{\text{ad}}) & \longrightarrow & W \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & H_{\text{ad}} & \longrightarrow & \text{Aut}(G, H) & \longrightarrow & A(R) \longrightarrow 1 \\
 & & & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow & \\
 & & & & \text{Aut } S & \equiv & \text{Aut } S & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & 1 & & 1 &
 \end{array} \quad (7)$$

При этом действие группы Галуа Γ на $A(R)$ тривиально, так как G разложима.

Пусть $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – неприводимое конечномерное представление G со старшим весом ω_i . Обозначим $T_1 = \rho(H)$. Пусть $v \in V$ – вектор старшего веса. Стабилизатор прямой $kv \in \mathbf{P}(V)$ является максимальной параболической подгруппой $P \subset G$. Она задается замкнутым подмножеством R , являющимся объединением множества положительных корней R^+ и множества целочисленных линейных комбинаций всех простых корней кроме α_i . Однородное пространство G/P является замкнутым подмногообразием $\mathbf{P}(V)$, более того, единственной замкнутой орбитой G в $\mathbf{P}(V)$. Группа Пикара $\mathrm{Pic} G/P \simeq \mathbf{Z}$ порождается классом очень обильного пучка $\mathcal{O}(1)$.

Пусть $Y \subset V \setminus \{0\}$ – аффинный конус над G/P с выколотым началом координат. Пусть $T \subset \mathrm{GL}(V)$ – тор, порожденный $T_1 = \rho(H)$ и группой скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$, и пусть $T_2 = H_{\mathrm{ad}} = T_1/\rho(Z(G))$. По лемме Шура $\rho(Z(G)) = \rho(G) \cap \mathbf{G}_{m,k}$. Мы находимся в ситуации, описанной перед теоремой 1.6. Нас интересует фактор X открытого множества $U = Y \cap V^{\mathrm{sf}} \subset Y$ по действию T , в частности, его группа автоморфизмов $\mathrm{Aut} X$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гладкое многообразие X проективно, если $R = A_n$ и i взаимно просто с $n+1$. В этом случае G/P представляет собой грассманиан $G(i, n+1)$, множество стабильных точек которого $G(i, n+1)^s$ совпадает со множеством полустабильных точек $G(i, n+1)^{\mathrm{ss}}$ (см. [14; предложение 4.3] или [19]), а T_2 свободно действует на этом множестве. В работе [19] доказано, что $(G/P)^s \neq (G/P)^{\mathrm{ss}}$ для всех остальных пар (R, α_i) , поэтому во всех этих случаях X не является проективным многообразием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Условие $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ не выполнено для пары (R, α) тогда и только тогда, когда она входит в следующий список: (R_n, α_1) , (A_n, α_n) , (A_3, α_2) , (B_2, α_2) , (D_4, α_3) или (D_4, α_4) , где $R_n = A_n, B_n, C_n$ или D_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем базис собственных векторов тора T в V и обозначим через $\mathcal{U}$ открытое подмножество аффинного конуса над G/P , состоящее из точек, у которых не более одной координаты равно нулю. По лемме 2.1 работы [6] дополнение к $\mathbf{P}(\mathcal{U})$ в G/P имеет коразмерность два. В предложении 2.4 работы [6] для пар (R, α) , не входящих в вышеприведенный список, доказано, что $\mathcal{U} \subset V^s$. Из этого же доказательства видно, что для пар, входящих в список, Y содержит координатную гиперплоскость, состоящую из нестабильных точек. Если R имеет тип A_n, D_n или E_n , то из следствия 2.3 работы [6] вытекает, что коразмерность $Y^s \setminus U$ больше единицы. Поэтому для завершения доказательства остается проверить, что если (R, α_i) не входит в наш список и R имеет тип B_n, C_n, F_4 или G_2 , то $\mathcal{U} \subset U$, т.е. T действует свободно на $\mathcal{U}$.

Эквивалентное утверждение состоит в том, что T_2 действует свободно на $\mathbf{P}(\mathcal{U})$. Это очевидно для точек, у которых все координаты ненулевые, поэтому в дальнейшем будем считать, что зануляется ровно одна весовая координата, скажем, веса λ . Точки с тривиальным стабилизатором в T_2 характеризуются тем, что множество $\mathrm{wt}_{T_1}(x) - \mathrm{wt}_{T_1}(x)$ порождает $Q(R) = \widehat{T}_2$. В частности, $Q(R)$ порождается множеством $\Lambda_1 - \Lambda_1$, где Λ_1 – совокупность весов T_1 . Если кратность веса λ больше единицы, то $\mathrm{wt}_{T_1}(x) = \Lambda_1$, поэтому стабилизатор x в T_2 тривиален. Таким образом, можно считать, что кратность веса λ равна единице. Нам нужно проверить, что $(\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) - (\Lambda_1 \setminus \{\lambda\})$ порождает $Q(R)$.

Разберем сначала случай $\lambda = 0$. Если $R = B_n$ или C_n , то непосредственная проверка, использующая описание фундаментальных представлений в [17], [18], показывает, что кратность веса $\lambda = 0$ больше единицы, за исключением пары

(B_n, α_1) , входящей в наш список. Веса фундаментальных представлений в случае F_4 описаны в [18; гл. VIII, § 9, упражнение 16]. Далее, ω_1 и ω_4 являются весами представления со старшим весом ω_i при $i = 1, 2, 3$. Но $\omega_1 - \omega_4$ является коротким корнем, и корни $w(\omega_1 - \omega_4)$, $w \in W(F_4)$, порождают $Q(F_4)$. Наконец, $\lambda = 0$ – вес кратности больше единицы для представления со старшим весом ω_4 . В случае $R = G_2$ требуемое утверждение легко проверяется с помощью таблицы X из [17; гл. VI].

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Все представления, задающиеся парой (R, α_i) , где R имеет тип B_n, C_n, F_4 или G_2 , самодвойственны (см. таблицу 1 из [18; гл. VIII]). Отсюда $\Lambda_1 = -\Lambda_1$. Для любого $\mu \in \Lambda_1 \setminus \{\lambda, -\lambda\}$ очевидные тождества $\lambda - \mu = (-\mu) - (-\lambda)$ и $\lambda - (-\lambda) = \mu - (-\lambda) + (-\mu) - (-\lambda)$ доказывают, что

$$(\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) - (\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) = \Lambda_1 - \Lambda_1.$$

Это заканчивает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае существуют стабильные точки, на которых действие T не свободно. Следующий пример был указан автору В. В. Сергеновой. Пусть $(R, \alpha) = (C_n, \alpha_n)$, $n \geq 3$. Рассмотрим векторное пространство K с базисом $e_1, f_1, \dots, e_n, f_n$ и кососимметрической формой такой, что $(e_i, e_j) = (f_i, f_j) = 0$ и $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ для любых i и j . Пусть G/P – лагранжев грассманиан изотропных n -мерных подпространств K . Здесь $G = \mathrm{Sp}(2n)$ – подгруппа $\mathrm{SL}(2n)$, сохраняющая кососимметрическую форму, а P – стабилизатор линейной оболочки $e_1, \dots, e_n$. Подгруппа диагональных матриц в G есть максимальный тор $H \simeq \mathbf{G}_{m,k}^n$. Точка G/P , задаваемая изотропным подпространством, натянутым на векторы $e_i + f_i$, $i = 1, \dots, n$, стабильна, так как ее весовой многогранник представляет собой куб со стороной два и с центром в начале координат. Однако стабилизатор этой точки в H содержит элемент $(-1, -1, 1, \dots, 1)$, не лежащий в центре G .

Обозначим через $\mathrm{Aut}(S, \alpha)$ подгруппу $\mathrm{Aut} S$, состоящую из элементов, оставляющих неподвижным простой корень α .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть пара (R, α) удовлетворяет следующим двум условиям:

1) дополнение в G/P ко множеству стабильных точек с тривиальными стабилизаторами в T_2 имеет коразмерность больше единицы, т.е. (R, α) не входит в список предложения 2.1;

2) $(R, \alpha) \neq (B_n, \alpha_n)$, $(R, \alpha) \neq (G_2, \alpha_1)$.

Тогда существует канонический изоморфизм k -групп с тривиальным действием группы Галуа Γ

$$\mathrm{Aut} \bar{X} = W \rtimes \mathrm{Aut}(S, \alpha_i).$$

При этом имеется естественная биекция между множеством $\bar{k}/k$ -форм X , рассматриваемых с точностью до изоморфизма, и множеством гомоморфизмов $\Gamma \rightarrow W \rtimes \mathrm{Aut}(S, \alpha_i)$, рассматриваемых с точностью до сопряжения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.6, (vii) группа $\mathrm{Aut} \bar{X}$ канонически изоморфна факторгруппе нормализатора $T_2(\bar{k})$ в $\mathrm{Aut} \bar{G}/\bar{P}$ по подгруппе $T_2(\bar{k})$. Так как пара (R, α_i) не есть (B_n, α_n) или (G_2, α_1) , то можно применить теорему Титса и Демазюра [8], согласно которой группа $\mathrm{Aut} G/P$ есть подгруппа

$\text{Aut } \overline{G}$, состоящая из элементов, сохраняющих класс сопряженности P . Так как $\text{Aut } \overline{G} = G_{\text{ad}}(\overline{k}) \rtimes \text{Aut } S$, то получаем, что $\text{Aut } \overline{G/P} = G_{\text{ad}}(\overline{k}) \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i)$. Нормализатор $T_2(\overline{k}) = H_{\text{ad}}(\overline{k})$ в $\text{Aut } \overline{G}$ является расширением $\text{Aut } S$ при помощи $N_{G_{\text{ad}}}(H_{\text{ad}})$, поэтому нормализатор $T_2(\overline{k})$ в $\text{Aut } \overline{G/P}$, отфакторизованный по $T_2(\overline{k})$, есть $W \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i)$.

Поскольку Γ действует на $W \rtimes \text{Aut } S$ тривиально, то Γ тривиально действует и на $\text{Aut } \overline{X} = W \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i)$. Хорошо известно, что $\overline{k}/k$ -формы квазипроективного многообразия X взаимно однозначно соответствуют элементам множества когомологий Галуа $H^1(k, \text{Aut } \overline{X})$. Отсюда следует последнее утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пара (A_3, α_2) входит в список предложения 2.1, так как множество нестабильных точек грассманиана $G(2, 4)$ есть множество точек, у которых равна нулю хотя бы одна координата. В этом случае X есть прямая $\mathbf{P}^1$ без трех точек, и группа автоморфизмов $\text{Aut } \overline{X} \simeq S_3$ не изоморфна $W \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i) \simeq S_4 \rtimes \mathbf{Z}/2$. Это показывает, что условие (1) в теореме 2.2 нельзя убрать. Условие (2) также нельзя убрать, так как в этих случаях теорема Титса и Демазюра не верна: в случае пары (B_n, α_n) группа автоморфизмов $\text{Aut } \overline{G/P}$ содержит присоединенную группу типа D_{n+1} , а в случае пары (G_2, α_1) – присоединенную группу типа B_3 (см. [8; с. 181]). Поэтому связная компонента $\text{Aut } \overline{X}$ содержит одномерный тор.

Если $R = A_n$, то группа Вейля изоморфна симметрической группе S_{n+1} . Если отмеченным корнем является α_i , то она действует на $G/P = G(i, n+1)$ перестановками координат.

Единственный нетривиальный элемент $\text{Aut } S = \mathbf{Z}/2$ индуцирует изоморфизм $G(i, n+1) \simeq G(n+1-i, n+1)$ и инволюцию на $G(i, n+1)$, если $2i = n+1$. Соответствие Гельфанда–Макферсона [5] представляет X в виде фактора множества стабильных конфигураций $n+1$ точек на $\mathbf{P}_k^{i-1}$ по действию $\text{GL}(i)$. Например, в случае $n = 5, i = 3$ рассматриваются шестерки точек на плоскости. Инволюция X , задаваемая нетривиальным элементом $\text{Aut } S$, соответствует инволюции X как двулистного накрытия $\mathbf{P}_k^4$, разветвленного в многообразии Игузы. В классической литературе она известна под названием *ассоциации*; шестерка точек инвариантна относительно ассоциации тогда и только тогда, когда все шесть точек лежат на конике (подробнее см. [5]).

2.2. Формы и рациональные точки. Формы группы G получаются скручиванием на коциклы группы Галуа Γ с коэффициентами в $\text{Aut } G$ (подробнее см. [20; гл. II, § 2]). В частном случае, когда коцикл принимает значения в $\text{Aut } S$, реализованной в виде подгруппы $\text{Aut } G$, сохраняющей H , B и множество унитарных корневых подгрупп G , задаваемых простыми корнями, форма G называется *квазиразложимой*. Квазиразложимая группа имеет борелевскую подгруппу, определенную над k .

Напомним, что действие $\text{Aut}(G, H)$ на H задает действие группы автоморфизмов системы корней $A(R) = W \rtimes \text{Aut } S$ на H (см. (7)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть σ – гомоморфизм $\Gamma \rightarrow A(R)$, θ – композиция σ и сюръекции $A(R) \rightarrow \text{Aut } S$. Обозначим через G_θ квазиразложимую форму G , задаваемую θ . Пусть H_σ – форма k -разложимого максимального тора $H \subset G$, скрученная при помощи коцикла σ . Тогда тор H_σ изоморфен некоторому максимальному тору в G_θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правый столбец (7) представляет собой расщепляющуюся точную последовательность

$$1 \rightarrow W \rightarrow A(R) \rightarrow \text{Aut } S \rightarrow 1.$$

Сечение $\text{Aut } S \rightarrow A(R)$ позволяет считать θ коциклом с коэффициентами в $A(R)$. Это позволяет определить скрученные формы $(\text{Aut } S)_\theta$ и $A(R)_\theta$. Действие $A(R)$ сопряжениями на W позволяет определить скрученную форму W_θ . При этом получается следующая точная последовательность групповых схем над k :

$$1 \rightarrow W_\theta \rightarrow A(R)_\theta \rightarrow (\text{Aut } S)_\theta \rightarrow 1.$$

Напомним, что между множествами $Z^1(k, A(R))$ и $Z^1(k, A(R)_\theta)$, а также между $H^1(k, A(R))$ и $H^1(k, A(R)_\theta)$ имеется каноническая биекция, при которой класс $[\theta]$ в $H^1(k, A(R))$ соответствует выделенному элементу в $H^1(k, A(R)_\theta)$ (см. [12; гл. I, § 5, п. 3, предложение 35]). Эта биекция отождествляет прообраз $[\theta] \in H^1(k, \text{Aut } S)$ в $H^1(k, A(R))$ с образом $H^1(k, W_\theta)$ в $H^1(k, A(R)_\theta)$ (см. [12; гл. I, § 5, п. 5, следствие 2] или [20; гл. I, § 3]). Пусть $\tilde{\sigma} \in Z^1(k, W_\theta)$ – коцикл такой, что образ класса $[\tilde{\sigma}] \in H^1(k, W_\theta)$ в $H^1(k, A(R)_\theta)$ соответствует σ при этом отождествлении.

Очевидно, что скрученная форма тора H при помощи θ является максимальным тором $H_\theta \subset G_\theta$. Обозначим, что N_θ нормализатор H_θ в G_θ . Групповая k -схема W_θ изоморфна N_θ/H_θ , поэтому W_θ естественно действует на H_θ . Скручивание H_θ на коцикл $\tilde{\sigma}$ изоморфно H_σ . В силу того, что G_θ – квазиразложимая группа, мы можем применить теорему Жилля–Рагунатана (см. [9; теорема 5.1, (b)], [10; теорема 1.1]). Согласно этой теореме тор, получаемый скручиванием H_θ на любой 1-коцикл Γ с коэффициентами в W_θ , можно вложить в G_θ как максимальный тор этой же группы. В частности, это применимо и к H_σ .

При реализации $\text{Aut}(S, \alpha_i)$ как некоторой подгруппы в $\text{Aut } G$, сохраняющей H и B , параболическая подгруппа P переходит в себя, так как это единственная группа в своем классе сопряженности, содержащая B . Поэтому если $\theta(\Gamma) \subset \text{Aut}(S, \alpha_i)$, то квазиразложимая группа G_θ содержит скрученную форму P_θ группы P .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть σ – гомоморфизм $\Gamma \rightarrow W \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i) \subset A(R)$, θ – композиция σ и сюръекции $W \rtimes \text{Aut}(S, \alpha_i) \rightarrow \text{Aut}(S, \alpha_i)$. Пусть $H_\sigma \subset G_\theta$ – вложение H_σ как максимального тора в квазиразложимую группу G_θ . Предположим, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 2.2. Тогда скрученная при помощи σ форма X изоморфна фактору по H_σ множества тех стабильных точек G_θ/P_θ относительно действия H_σ , стабилизаторы которых в $H_\sigma/Z(G_\theta)$ тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(G_\theta/P_\theta)^{\text{sf}, \theta}$ – открытое подмножество однородного пространства (G_θ/P_θ) , состоящее из стабильных точек относительно действия H_θ с тривиальными стабилизаторами в торе $H_\theta/Z(G_\theta)$. Поскольку группа $\text{Aut}(S, \alpha_i)$ действует согласованно на G , P , H , $(G/P)^{\text{sf}}$ и $X = H \backslash (G/P)^{\text{sf}}$, то скрученная форма X посредством коцикла θ есть фактор $X_\theta = H_\theta \backslash (G_\theta/P_\theta)^{\text{sf}, \theta}$.

Скрученная форма X на коцикл σ получается скручиванием X_θ на коцикл $\tilde{\sigma} \in Z^1(k, W_\theta)$ (см. доказательство предложения 2.3), т.е. $X_\sigma = (X_\theta)_{\tilde{\sigma}}$. Поскольку максимальные торы H_θ и H_σ группы G_θ сопряжены над $\bar{k}$, то существует элемент $g \in G_\theta(\bar{k})$ такой, что $g \cdot H_\theta \cdot g^{-1} = H_\sigma$. Тогда $\rho(\gamma) = g^{-1} \cdot \gamma g \in Z^1(k, N_\theta)$,

$\gamma \in \Gamma$, есть 1-коцикл группы Галуа с коэффициентами в N_θ , являющийся поднятием $\tilde{\sigma} \in Z^1(k, W_\theta)$. При этом образ класса $[\rho]$ в $H^1(k, G)$ тривиален. Группа N_θ согласовано действует на однородном пространстве G_θ/P_θ , на торе H_θ и на факторе $X_\theta = H_\theta \backslash (G_\theta/P_\theta)^{\text{sf}, \theta}$, поэтому скрученная форма $X_\sigma = (X_\theta)_{\tilde{\sigma}}$ есть фактор соответствующей скрученной формы $(G_\theta/P_\theta)^{\text{sf}, \theta}$ по действию $H_\sigma = (H_\theta)_{\tilde{\sigma}}$. В силу того, что образ $[\rho]$ в $H^1(k, G)$ тривиален, а замкнутость орбит и тривиальность стабилизаторов являются условиями над $\bar{k}$, упомянутая скрученная форма $(G_\theta/P_\theta)^{\text{sf}, \theta}$ является открытым подмножеством G_θ/P_θ , а именно, подмножеством, состоящим из стабильных точек относительно действия H_σ с тривиальными стабилизаторами в $H_\sigma/Z(G_\theta)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Предположим, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 2.2. Тогда любая $\bar{k}/k$ -форма X унирациональна, в частности, множество ее k -точек плотно по Зарискому.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.4 достаточно показать, что G_θ/P_θ рационально над k . В этом случае множество k -точек будет плотным ввиду того, что поле k бесконечно (напомним, что $\text{char}(k) = 0$). Пусть P_θ^- – противоположная к P_θ параболическая подгруппа, и пусть $R(P_\theta^-)$ – ее унипотентный радикал. Аффинное пространство $R(P_\theta^-)$ является плотным открытым подмножеством (открытой клеткой Шуберта) в G_θ/P_θ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Как хорошо известно, любая поверхность дель Пеццо степени пять рациональна над полем определения. Было бы интересно выяснить, обобщается ли это свойство на произвольные $\bar{k}/k$ -формы факторов G/P по действию максимального тора.

Теорема 2.2 для случая системы корней A_n была доказана Нилом Фитцджералдом (Neil Fitzgerald), который рассматривал фактор $(\mathbf{P}_k^{m-1})^n$ по действию $\text{PGL}(m)$ (неопубликовано). Автор признателен Филиппу Жиллю (Philippe Gillet) и Вере Сергановой за полезные обсуждения, а анонимному рецензенту – за тщательное прочтение статьи и подробные замечания. Работа над статьей была начата в Центре математических исследований Университета Монреаля (Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal). Я хотел бы поблагодарить Ирину Веденову и Виктора Перельмутера за гостеприимство.

Список литературы

- [1] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles. II”, *Duke Math. J.*, **54**:2 (1987), 375–492.
- [2] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Math., **144**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [3] I. Dolgachev, D. Ortland, *Point sets in projective spaces and theta functions*, Astérisque, **165**, Société Mathématique de France, Paris, 1988.
- [4] A. N. Skorobogatov, “On a theorem of Enriques–Swinerton–Dyer”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **2**:3 (1993), 429–440.
- [5] M. M. Kapranov, “Chow quotients of Grassmannians. I”, *I. M. Gel'fand seminar. Part 2* (Moscow, 1993), Adv. Soviet Math., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 29–110.
- [6] V. V. Serganova, A. N. Skorobogatov, “Del pezzo surfaces and representation theory”, *Algebra Number Theory*, **1**:4 (2007), 393–419.

- [7] V. V. Serganova, A. N. Skorobogatov, “On the equations for universal torsors over del Pezzo surfaces”, *J. Inst. Math. Jussieu* (to appear).
- [8] M. Demazure, “Automorphismes et déformations des variétés de Borel”, *Invent. Math.*, **39**:2 (1977), 179–186.
- [9] Ph. Gille, “Type des tores maximaux des groupes semi-simples”, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **19**:3 (2004), 213–230.
- [10] M. S. Raghunathan, “Tori in quasi-split groups”, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **19**:4 (2004), 281–287.
- [11] D. Harari, A. Skorobogatov, “Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces”, *Int. Math. Res. Not.*, **52** (2005), 3203–3228.
- [12] Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968; пер. с фр.: J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math., **5**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1994.
- [13] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [14] Ж. Дьедонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд, *Геометрическая теория инвариантов*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: J. A. Dieudonné, J. B. Carrell, *Invariant theory, old and new*, Academic Press, New York–London, 1971; D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1965.
- [15] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
- [16] I. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **296**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [17] Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли*. Гл. 4–6: *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, **1337**, Hermann, Paris, 1968.
- [18] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 7–8: *подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.*, Fasc. XXXVIII: *Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII–VIII*, Hermann, Paris, 1975.
- [19] S. Senthamarai Kannan, “Torus quotients of homogeneous spaces – II”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **109**:1 (1999), 23–39.
- [20] В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, М., 1991; англ. пер.: V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure Appl. Math., **139**, Academic Press, Boston, MA, 1994.

А. Н. Скоробогатов (A. N. Skorobogatov)

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва

Department of Mathematics, Imperial College, London, U. K.

E-mail: a.skorobogatov@imperial.ac.uk

Поступила в редакцию

29.08.2008 и 08.05.2009