Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Рогов, Интегральные представления q -функций Макдональда, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 117–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:22:23

УДК 517.58

В.-Б. К. Рогов

Интегральные представления q -функций Макдональда

В работе рассматриваются q -функции Макдональда 1, 2 и 3 рода. Строятся их представления в виде классического интеграла.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

В работах [1], [2] были даны определения q -функций Макдональда (q -ФМ) и описаны некоторые их свойства. При построении интегральных представлений имеются две возможности – рассматривать q -интеграл Джексона или обычный интеграл. Первый путь был проделан в [2], [3]. Здесь мы идем вторым путем. Использование обычного интеграла позволяет на плоскости переходить к полярной системе координат, что невозможно при использовании q -интеграла Джексона, так как последний жестко связан с q -решеткой. Переход же к полярной системе координат во многих случаях существенно облегчает вычисление интегралов.

В §§ 2 и 3 мы напоминаем известные формулы для q -функций Бесселя и q -бинома. В §§ 4–6 строятся интегральные представления q -ФМ.

§ 2. Модифицированные q -функции Бесселя и q -ФМ

В [4] q -функции Бесселя были определены следующим образом:

$$J_{\nu}^{(1)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_{\infty}}{(q, q)_{\infty}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_2\Phi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{z^2}{4}\right), \quad (2.1)$$

$$J_{\nu}^{(2)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_{\infty}}{(q, q)_{\infty}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_0\Phi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, -\frac{z^2 q^{\nu+1}}{4}\right), \quad (2.2)$$

$$J_{\nu}^{(3)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_{\infty}}{(q, q)_{\infty}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_1\Phi_1\left(0; q^{\nu+1}; q, \frac{z^2 q^{\frac{\nu+1}{2}}}{4}\right), \quad (2.3)$$

где ${}_r\Phi_s$ – базисный гипергеометрический ряд [5; (1.2.22)],

$$\begin{aligned} & {}_r\Phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, q)_n \cdots (a_r, q)_n}{(q, q)_n (b_1, q)_n \cdots (b_s, q)_n} [(-1)^n q^{n(n-1)/2}]^{1+s-r} z^n, \\ & (a, q)_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}) & \text{при } n \geq 1, \end{cases} \\ & (a, q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a, q)_n, \quad (a_1, \dots, a_k, q)_{\infty} = (a_1, q)_{\infty} \cdots (a_k, q)_{\infty}. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 0001-00143) и фонда НИОКР МПС РФ.

Модифицированные q -функции Бесселя вводятся на основании (2.1), (2.2) и (2.3) подобно тому, как это делается в классическом случае [6; (7.2.12)].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Модифицированными q -функциями Бесселя назовем функции

$$I_{\nu}^{(j)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_{\infty}}{(q, q)_{\infty}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_{\delta}\Phi_1\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\delta}; q^{\nu+1}; q, (-1)^{\delta} \frac{z^2 q^{\frac{\nu+1}{2}(2-\delta)}}{4}\right).$$

Здесь

$$\delta = \begin{cases} 2 & \text{при } j = 1, \\ 0 & \text{при } j = 2, \\ 1 & \text{при } j = 3. \end{cases} \quad (2.4)$$

Очевидно,

$$I_{\nu}^{(j)}(z, q) = e^{-i\nu\pi/2} J_{\nu}^{(j)}(e^{i\pi/2} z, q), \quad j = 1, 2, 3.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать эти функции в виде

$$I_{\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}, \quad |z| < \frac{2}{1 - q^2}, \quad (2.5)$$

$$I_{\nu}^{(2)}((1 - q^2)z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k(\nu+k)} (1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}, \quad (2.6)$$

$$I_{\nu}^{(3)}((1 - q^2)z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(\nu+k)} (1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}, \quad (2.7)$$

где

$$\Gamma_{q^2}(\nu) = \frac{(q^2, q^2)_{\infty}}{(q^{2\nu}, q^2)_{\infty}} (1 - q^2)^{1-\nu}$$

$-q^2$ -гамма-функция. Если $|q| < 1$, ряды (2.6) и (2.7) абсолютно сходятся при всех значениях $z \neq 0$. Следовательно, $I_{\nu}^{(2)}((1 - q^2)z; q^2)$ и $I_{\nu}^{(3)}((1 - q^2)z; q^2)$ являются голоморфными функциями вне некоторой окрестности нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} I_{\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) = I_{\nu}(z), \quad j = 1, 2, 3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Функция $I_{\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2)$ является решением разностного уравнения

$$f(q^{-1}z) - (q^{-\nu} + q^{\nu})f(z) + f(qz) = q^{-\delta} \frac{(1 - q^2)^2}{4} z^2 f(q^{1-\delta}z), \quad (2.8)$$

где $j = 1, 2, 3$ связаны с $\delta = 2, 0, 1$ соотношением (2.4).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Функция $I_{-\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2)$ удовлетворяет уравнению (2.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Определим q -функцию Макдональда (q -ФМ) для $j = 1, 2, 3$ следующим образом [1], [2]:

$$K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{1}{2}q^{-\nu^2+\nu}\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)[I_{-\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) - I_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)]. \quad (2.9)$$

Так же как и в классическом случае, это определение может быть продолжено на целые значения $\nu = n$ предельным переходом в (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В [1], [2] следует положить $A_{\nu} = a_{\nu}/a_{-\nu} = 1$ (см. замечание 6.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. q -вронскиан двух решений $f_{\nu}^1(z)$ и $f_{\nu}^2(z)$ разностного уравнения второго порядка определим следующим образом:

$$W(f_{\nu}^1, f_{\nu}^2)(z) = f_{\nu}^1(z)f_{\nu}^2(qz) - f_{\nu}^1(qz)f_{\nu}^2(z).$$

Если q -вронскиан не обращается в нуль, то любое решение разностного уравнения второго порядка может быть записано в виде

$$f_{\nu}(z) = C_1 f_{\nu}^1(z) + C_2 f_{\nu}^2(z).$$

В этом случае функции $f_{\nu}^1(z)$ и $f_{\nu}^2(z)$ образуют фундаментальную систему решений данного уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Функции $I_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)$ и $K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.8) ($z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$, при $j = 1$).

Это предложение вытекает из того, что

$$W(z) = \begin{cases} \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{2} e_{q^2} \left(\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2 \right) & \text{при } \delta = 2, \\ \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{2} & \text{при } \delta = 1, \\ \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{2} E_{q^2} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{4} q^2 z^2 \right) & \text{при } \delta = 0 \end{cases}$$

(см. [2]). Очевидно, $W(z)$ определена всюду, кроме точек $z = \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$, при $j = 1$ ($\delta = 2$), и не обращается в нуль.

§ 3. Некоторые дополнительные формулы

Существует q -аналог классической биномиальной формулы [5; (1.3.2)]:

$$(1-z)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k, \quad (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{(q^{\alpha}z, q)_{\infty}}{(z, q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\alpha}, q)_k}{(q, q)_k} z^k, \quad |z| < 1.$$

Нам понадобится обобщение q -бинома

$$R(a, b, \gamma, z, q^2) = \frac{(az^2, q^2)_\infty}{(bz^2, q^2)_\infty} z^\gamma. \quad (3.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция $R(a, b, \gamma, z, q^2)$ (3.1) удовлетворяет разностному уравнению*

$$z^2[bq^\gamma R(a, b, \gamma, z, q^2) - aR(a, b, \gamma, qz, q^2)] = q^\gamma R(a, b, \gamma, z, q^2) - R(a, b, \gamma, qz, q^2). \quad (3.2)$$

Доказательство см. в [3].

В [3] было показано, что если $\alpha > \beta$, то

$$\frac{(-q^{2\alpha}z^2, q^2)_\infty}{(-q^{2\beta}z^2, q^2)_\infty} = \frac{(q^{2(\alpha-\beta)}, q^2)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{2(\beta-\alpha+1)}, q^2)_k q^{2(\alpha-\beta-1)k}}{(q^2, q^2)_k (1 + z^2 q^{2\beta+2k})}. \quad (3.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть в (3.1) $a = \epsilon q^{2\alpha}$, $b = \epsilon q^{2\beta}$, $\epsilon = \pm 1$. Тогда если $q \rightarrow 1-0$, разностное уравнение (3.2) принимает вид дифференциального уравнения

$$z(1 - \epsilon z^2)R'(z) - [\gamma + \epsilon(2\alpha - 2\beta - \gamma)z^2]R(z) = 0 \quad (3.4)$$

с решением

$$R(z) = Cz^\gamma (1 - \epsilon z^2)^{\beta-\alpha}.$$

Обозначим q -производную функции $g(x)$ через

$$\partial_x g(x) = \frac{g(x) - g(qx)}{(1-q)x}.$$

Из равенства

$$J_0^{(j)}((1-q^2)zs; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{(2-\delta)k^2} (1-q^2)^{2k} (sz/2)^{2k}}{(q^2, q^2)_k^2} \quad (3.5)$$

следует, что

$$\frac{2\partial_z}{1+q} J_0^{(j)}((1-q^2)q^{-1}zs; q^2) = -q^{1-\delta/2} s J_1^{(j)}((1-q^2)q^{-\delta/2}zs; q^2), \quad (3.6)$$

$$\frac{2\partial_z}{1+q} J_0^{(j)}((1-q^2)zs; q^2) = -q^{1-\delta/2} s J_1^{(j)}((1-q^2)q^{1-\delta/2}zs; q^2), \quad (3.7)$$

$$\frac{2\partial_s}{1+q} s J_1^{(j)}((1-q^2)q^{1-\delta/2}zs; q^2) = q^{-\delta/2} z s J_0^{(j)}((1-q^2)q^{1-\delta}zs; q^2). \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. *Если $F(x)$ является дифференцируемой (в классическом смысле) функцией в некоторой окрестности нуля и $F'(0) = 0$, то*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{q\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{F(x)}{x} dx = -F(0) \ln q. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{q\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{F(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[F(x) \ln x \Big|_{q\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{q\varepsilon}^{\varepsilon} F'(x) \ln x dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(F(\varepsilon) - F(q\varepsilon)) \ln \varepsilon - F(q\varepsilon) \ln q - \int_{q\varepsilon}^{\varepsilon} F'(x) \ln x dx \right]. \end{aligned}$$

Используя теорему Лагранжа и теорему о среднем, получим в правой части

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F'(\theta_1 \varepsilon)(1-q)\varepsilon \ln \varepsilon - F(q\varepsilon) \ln q - (1-q)\varepsilon F'(\theta_2 \varepsilon) \ln(\theta_2 \varepsilon)],$$

где $\theta_1 \in (0, 1)$, $\theta_2 \in (0, 1)$. Так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, мы имеем (3.9).

ЛЕММА 3.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $(0, \infty)$ и дифференцируемы в нуле (в классическом смысле), то имеет место q -аналог формулы интегрирования по частям для q -производной:

$$\int_0^{\infty} \partial_x f(x) g(x) dx = f(0)g(0) \frac{\ln q}{1-q} - \int_0^{\infty} f(qx) \partial_x g(x) dx. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \partial_x f(x) g(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} g(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} dx - \int_0^{\infty} f(qx) \frac{g(x) - g(qx)}{(1-q)x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \partial_x (f(x)g(x)) dx - \int_0^{\infty} f(qx) \partial_x g(x) dx. \end{aligned}$$

Используя лемму 3.1, вычислим первый интеграл в правой части:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \partial_x (f(x)g(x)) dx &= \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)g(x)}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(qx)g(qx)}{x} dx \right] \\ &= -\frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{q\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(x)g(x)}{x} dx = \frac{\ln q}{1-q} f(0)g(0). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если функция $f(s)g(s)s^{-1}$ интегрируема на $(0, \infty)$, то

$$\int_0^{\infty} f(s) \partial_s g(s) ds = - \int_0^{\infty} \partial_s f(s) g(qs) ds. \quad (3.11)$$

Доказательство следует из того, что в этом случае $f(0)g(0) = 0$.

§ 4. Интегральные представления q -ФМ

Будем считать, что z и s — коммутирующие переменные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. q -ФМ $K_\nu^{(j)}((1 - q^2)z; q^2)$ при $\operatorname{Re} \nu > 0$ может быть представлена интегралом

$$K_\nu^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) = -\frac{q^{-\nu^2 + \nu(1-\delta)}(1 - q^2)}{2 \ln q} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \times \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu}s^2, q^2)_\infty}{(-q^{-\delta\nu}s^2, q^2)_\infty} s J_0^{(j)}((1 - q^2)zs; q^2) ds, \quad (4.1)$$

где $j = 1, 2, 3$ и $\delta = 2, 0, 1$ связаны соотношением (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим абсолютно сходящийся интеграл

$$S^{(j)}(z) = \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s J_0^{(j)}((1 - q^2)zs; q^2) ds \quad (4.2)$$

и потребуем, чтобы функция $S^{(j)}(z)(z/2)^{-\nu}$ удовлетворяла разностному уравнению (2.8). Тогда функция $S^{(j)}(z)$ будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} S^{(j)}(q^{-1}z) - S^{(j)}(z) - q^{-2\nu}[S^{(j)}(z) - S^{(j)}(qz)] \\ = q^{\nu(\delta-2)-\delta} \left(\frac{1 - q^2}{2}\right)^2 z^2 S^{(j)}(q^{1-\delta}z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставив (4.2) в (4.3) и умножив обе части равенства на $2z^{-1}/(1 - q^2)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s \frac{2z^{-1}}{1 - q^2} [J_0^{(j)}((1 - q^2)q^{-1}zs; q^2) - J_0^{(j)}((1 - q^2)zs; q^2)] ds \\ - q^{-2\nu} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s \frac{2z^{-1}}{1 - q^2} [J_0^{(j)}((1 - q^2)zs; q^2) - J_0^{(j)}((1 - q^2)qzs; q^2)] ds \\ = q^{\nu(\delta-2)-\delta} \frac{1 - q^2}{2} z \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s J_0^{(j)}((1 - q^2)q^{1-\delta}zs; q^2) ds. \end{aligned}$$

Учитывая (3.6)–(3.8), мы можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s^2 J_1^{(j)}((1 - q^2)q^{-\delta/2}zs; q^2) ds \\ - q^{-2\nu+1} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s^2 J_1^{(j)}((1 - q^2)q^{1-\delta/2}zs; q^2) ds \\ = q^{\nu(\delta-2)-\delta/2} \frac{1 - q^2}{2} z \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s J_0^{(j)}((1 - q^2)q^{1-\delta}zs; q^2) ds \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) s^{2\nu+2} \frac{2\partial_s}{1+q} [s^{-2\nu+1} J_1^{(j)}((1 - q^2)q^{-\delta/2}zs; q^2)] ds \\ = -q^{\nu(\delta-2)} \int_0^\infty f_\nu^{(j)}(s) \frac{2\partial_s}{1+q} [s J_1^{(j)}((1 - q^2)q^{-\delta/2}zs; q^2)] ds. \end{aligned}$$

Используя (3.11), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \partial_s (f_\nu^{(j)}(s) s^{2\nu+2}) q^{-2\nu+1} s^{-2\nu+1} J_1^{(j)}((1-q^2)q^{1-\delta/2}zs; q^2) ds \\ &= -q^{\nu(\delta-2)} \int_0^\infty \partial_s f_\nu^{(j)}(s) q s J_1^{(j)}((1-q^2)q^{1-\delta/2}zs; q^2) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к разностному уравнению для функции $f_\nu^{(j)}(s)$

$$q^{-\delta\nu} s^2 [-f_\nu^{(j)}(s) + q^{2\nu+2} f_\nu^{(j)}(qs)] = f_\nu^{(j)}(s) - f_\nu^{(j)}(qs). \quad (4.4)$$

Из предложения 3.1 следует, что функция

$$f_\nu^{(j)}(s) = \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty}{(-q^{-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty} \quad (4.5)$$

удовлетворяет уравнению (4.4), и из (3.3) следует, что интеграл (4.2) сходится абсолютно.

Так как $S^{(j)}(z)(z/2)^{-\nu}$ является решением (2.8), она может быть представлена в виде

$$S^{(j)}(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} = A I_\nu^{(j)}((1-q^2)z; q^2) + B K_\nu^{(j)}((1-q^2)z; q^2). \quad (4.6)$$

Пусть $j = 1$. В [1] показано, что $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z = \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$, а $K_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ и левая часть (4.6) являются голоморфными функциями в области $\operatorname{Re} z > 0$.

Пусть $j = 2, 3$. Нетрудно показать (см. [2]), что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I_\nu^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} K_\nu^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = 0$$

и левая часть (4.6) стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Таким образом, для любого $j = 1, 2, 3$ $A = 0$. Умножая обе части равенства (4.6) на $(z/2)^\nu$ и полагая $z = 0$, из (2.9) и (2.5)–(2.7) мы получаем

$$\int_0^\infty \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty}{(-q^{-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty} s ds = \frac{B}{2} q^{-\nu^2+\nu} \Gamma_{q^2}(\nu) A_\nu^{|1-\delta|}. \quad (4.7)$$

Теперь вычислим интеграл в левой части (4.7):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty}{(-q^{-\delta\nu} s^2, q^2)_\infty} s ds &= \frac{q^{\delta\nu}}{2} \int_0^\infty \frac{(-q_1^{\nu+1} x, q_1)_\infty}{(-x, q_1)_\infty} dx \\ &= \frac{q^{\delta\nu}}{2} \int_0^\infty e_{q_1}(-x) E_{q_1}(q_1^{\nu+1} x) dx, \end{aligned}$$

где $x = q^{-\delta\nu} s^2$ и $q_1 = q^2$ [5; (1.3.15), (1.3.16)].

Заметим, что

$$\partial_x e_{q_1}(-x) = -\frac{1}{1-q_1} e_{q_1}(-x), \quad \partial_x E_{q_1}(q_1^{\nu+1} x) = \frac{q_1^{\nu+1}}{1-q_1} E_{q_1}(q_1^{\nu+2} x).$$

Используя лемму 3.2, получаем

$$\int_0^\infty e_{q_1}(-x)E_{q_1}(q_1^{\nu+1}x)dx = -\ln q_1 + q_1^\nu \int_0^\infty e_{q_1}(-x)E_{q_1}(q_1^{\nu+1}x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e_{q_1}(-x)E_{q_1}(q_1^{\nu+1}x)dx = -\frac{\ln q_1}{1-q_1^\nu}$$

и мы имеем

$$\int_0^\infty \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu}s^2, q^2)_\infty}{(-q^{-\delta\nu}s^2, q^2)_\infty} s ds = -\frac{q^{\delta\nu} \ln q}{1-q^{2\nu}}. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) следует, что

$$B = -\frac{2q^{\nu^2-\nu(1-\delta)} \ln q}{(1-q^2)\Gamma_{q^2}(\nu+1)},$$

откуда и следует (4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из замечания 3.1 вытекает, что при $q \rightarrow 1-0$ мы получим классическое интегральное представление функции Макдональда [6; (7.14.2.59)]:

$$K_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty (1+s^2)^{-\nu-1} s J_0(zs) ds.$$

§5. Представление q -ФМ в виде двойного интеграла

В этом параграфе будем считать, что $z, s \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим функцию

$$\xi_\eta^{(\delta)}(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{(2-\delta)\eta n^2} (1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} s^n, \quad \eta \geq 0. \quad (5.1)$$

Очевидно, этот ряд сходится равномерно по s при $(2-\delta)\eta > 0$ и в области $|s| < 1/(1-q^2)$ при $(2-\delta)\eta = 0$. Рассмотрим три случая.

1. $\eta = 0$. Из (5.1)

$$\xi_0^{(\delta)}(s) = e_{q^2}((1-q^2)s), \quad \delta = 2, 0, 1. \quad (5.2)$$

2. $\eta = 1$.

$$\xi_1^{(\delta)}(s) = \begin{cases} e_{q^2}((1-q^2)s) & \text{при } \delta = 2, \\ E_{q^2}((1-q^2)qs) & \text{при } \delta = 0, \\ {}_1\Phi_1(0; -q; q, -(1-q^2)q^{1/2}s) & \text{при } \delta = 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

3. $\eta = \frac{1}{2}$. Из (5.1)

$$\xi_{1/2}^{(\delta)}(s) = \begin{cases} e_{q^2}((1-q^2)s) & \text{при } \delta = 2, \\ {}_1\Phi_1(0; -q; q, -(1-q^2)q^{1/2}s) & \text{при } \delta = 0, \\ {}_3\Phi_3(0, 0, 0; -q^{1/2}, iq^{1/2}, -iq^{1/2}; q^{1/2}, -(1-q^2)q^{1/4}s) & \text{при } \delta = 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Положим $s = \rho e^{i\varphi}$, $z = r e^{i\psi}$ и рассмотрим интеграл

$$J(r\rho) = \int_{-\pi}^\pi \xi_\eta^{(\delta)}(ir\rho e^{-i(\psi+\varphi)}) \xi_{1-\eta}^{(\delta)}(ir\rho e^{i(\psi+\varphi)}) d\varphi. \quad (5.5)$$

Пусть $\delta < 2$, $\eta = \frac{1}{2}$. В этом случае мы можем интегрировать почленно:

$$\begin{aligned} J(r\rho) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)n^2/2}(1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} (ir\rho)^n e^{-in\varphi} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)m^2/2}(1-q^2)^m}{(q^2, q^2)_m} (ir\rho)^m e^{im\varphi} d\varphi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)n^2/2}(1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} (ir\rho)^n \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)m^2/2}(1-q^2)^m}{(q^2, q^2)_m} (ir\rho)^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{(2-\delta)n^2/2}(1-q^2)^{2n}}{(q^2, q^2)_n^2} (r\rho)^{2n}. \end{aligned}$$

Из (3.5) следует, что последний ряд есть не что иное, как q^2 -функция Бесселя, и мы имеем

$$J_0^{(j)}((1-q^2)2r\rho; q^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_{1/2}^{(\delta)}(ir\rho e^{-i(\psi+\varphi)}) \xi_{1/2}^{(\delta)}(ir\rho e^{i(\psi+\varphi)}) d\varphi, \quad (5.6)$$

где $\xi_{1/2}^{(\delta)}$ определяется формулой (5.4), а $j = 2, 3$ связаны с $\delta = 0, 1$ соотношением (2.4).

Пусть $\delta < 2$ и $\eta = 0$. Тогда мы имеем тот же результат при $r\rho < 1/(1-q^2)$, т.е.

$$J_0^{(j)}((1-q^2)2r\rho; q^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_{q^2}(i(1-q^2)r\rho e^{-i(\psi+\varphi)}) \xi_1^{(\delta)}(ir\rho e^{i(\psi+\varphi)}) d\varphi, \quad (5.7)$$

где $\xi_1^{(\delta)}$ определяется формулой (5.3). Левая часть (5.7) является голоморфной функцией вне некоторой окрестности нуля, и, следовательно, мы можем рассматривать функцию $J_0^{(j)}((1-q^2)2r\rho; q^2)$, $j = 2, 3$, как аналитическое продолжение (5.7).

Пусть $\delta = 2$. Из (5.2)–(5.6) следует, что при $r\rho < 1/(1-q^2)$

$$J_0^{(1)}((1-q^2)2r\rho; q^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_{q^2}(i(1-q^2)r\rho e^{-i(\psi+\varphi)}) e_{q^2}(i(1-q^2)r\rho e^{i(\psi+\varphi)}) d\varphi. \quad (5.8)$$

В этом случае обе части (5.8) являются мероморфными функциями с простыми полюсами в точках $r\rho = \pm iq^{-k}/(1-q^2)$. Следовательно, мы можем рассматривать $J_0^{(1)}((1-q^2)2r\rho; q^2)$ как аналитическое продолжение (5.8).

Теперь мы можем сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. q -ФМ может быть представлена в виде двойного интеграла

$$\begin{aligned} K_{\nu}^{(j)}(2(1-q^2)|z|, q^2) &= -\frac{q^{-\nu^2+\nu(1-\delta)}(1-q^2)}{8\pi \ln q} \Gamma_{q^2}(\nu+1)|z|^{-\nu} \\ &\quad \times \iint \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu}\bar{s}s, q^2)_{\infty}}{(-q^{-\delta\nu}\bar{s}s, q^2)_{\infty}} e_{q^2}(i(1-q^2)\bar{z}\bar{s}) \xi_1^{(\delta)}(izs) d\bar{s} ds \end{aligned} \quad (5.9)$$

или

$$K_{\nu}^{(j)}(2(1-q^2)|z|, q^2) = -\frac{q^{-\nu^2+\nu(1-\delta)}(1-q^2)}{8\pi \ln q} \Gamma_{q^2}(\nu+1)|z|^{-\nu} \\ \times \iint \frac{(-q^{2\nu+2-\delta\nu\bar{s}s}, q^2)_{\infty}}{(-q^{-\delta\nu\bar{s}s}, q^2)_{\infty}} \xi_{1/2}^{(\delta)}(i\bar{z}\bar{s}) \xi_{1/2}^{(\delta)}(izs) d\bar{s} ds, \quad (5.10)$$

где функции $\xi_{\eta}^{(\delta)}$ определяются формулами (5.2)–(5.4), а $j = 1, 2, 3$ связаны с $\delta = 2, 0, 1$ соотношением (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (5.6)–(5.8) в (4.1), мы получаем (5.9) или (5.10) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Нетрудно показать, что при $q \rightarrow 1-0$ все функции (5.2)–(5.4) стремятся к обычной экспоненте e^s , и мы приходим к классическому интегральному представлению функции Макдональда

$$K_{\nu}(2\sqrt{z\bar{z}}) = \Gamma(\nu+1)(\sqrt{z\bar{z}})^{-\nu} \iint (1+\bar{s}s)^{-\nu-1} \exp(i(\bar{z}\bar{s}+zs)) d\bar{s} ds.$$

§6. Представление q -ФМ в виде интеграла Бернса

Для классической функции Макдональда хорошо известно преобразование Меллина [7; (10.60)]:

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(z) z^{s-1} dz = 2^{-s-2} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right), \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu \geq 0, \quad (6.1)$$

и формула обращения:

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) z^{-s} ds, \quad \sigma > \operatorname{Re} \nu \geq 0. \quad (6.2)$$

Рассмотрим сходящийся интеграл

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) z^{-s} ds \quad (6.3)$$

и потребуем, чтобы функция $G(z)$ удовлетворяла уравнению (2.8). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} q^{-s} (1-q^{s+\nu})(1-q^{s-\nu}) g(s) z^{-s} ds \\ = \frac{(1-q^2)^2}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) q^{-\delta+(\delta-1)s} z^{-(s-2)} ds.$$

Отсюда следует, что функция $g(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$q^{-s} \frac{(1-q^{s+\nu})(1-q^{s-\nu})}{(1-q^2)^2} g(s) = \frac{1}{4} q^{\delta-2+(\delta-1)s} g(s+2).$$

Нетрудно убедиться в том, что этому уравнению удовлетворяет функция

$$g(s) = 2^s q^{-\frac{\delta}{4}s^2+s} \Gamma_{q^2}\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(\frac{s-\nu}{2}\right), \quad (6.4)$$

и при $\sigma > \operatorname{Re} \nu \geq 0$ интеграл (6.3) сходится.

В силу предложения 2.2

$$G(z) = AI_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) + BK_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2). \quad (6.5)$$

Пусть $j = 1$. В [1] показано, что $I_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z = \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$, а $K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ и левая часть (6.5) являются голоморфными функциями в области $\operatorname{Re} z > 0$.

Пусть $j = 2, 3$. Нетрудно показать (см. [2]), что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = 0$$

и левая часть (6.5) стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Таким образом, для любого $j = 1, 2, 3$ $A = 0$.

Нетрудно заметить, что (6.3) есть формула обращения преобразования Меллина функции $BK_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)$ [7; (10.60)]. Следовательно,

$$g(s) = B \int_0^{\infty} K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) z^{s-1} dz. \quad (6.6)$$

Для q -ФМ имеет место соотношение [2]:

$$\frac{2}{(1+q)z} \partial_z [z^{\nu} K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)] = -q^{-\frac{2-\delta}{2}(\nu-1)} z^{\nu-1} K_{\nu-1}^{(j)}((1-q^2)q^{\frac{2-\delta}{2}}z; q^2).$$

Используя эту формулу, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) z^{s-1} dz \\ &= -\frac{2q^{\frac{2-\delta}{2}(s+\nu)}}{1+q} \int_0^{\infty} \partial_z (z^{\nu+1} K_{\nu+1}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)) z^{s-\nu-2} dz. \end{aligned}$$

Положим теперь $s = \nu + 2$ и воспользуемся леммой 3.2. Тогда

$$\begin{aligned} & 2^{\nu+2} q^{-\frac{\delta}{4}(\nu+2)^2 + \nu+2} \Gamma_{q^2}(1+\nu) \\ &= -B \frac{2q^{(2-\delta)(\nu+1)}}{1+q} \int_0^{\infty} \partial_z (z^{\nu+1} K_{\nu+1}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)) dz \\ &= -B \frac{2^{\nu+1} \ln q}{1-q^2} \Gamma_{q^2}(1+\nu) q^{(1+\nu)(2-\nu-\delta)}. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$B = -\frac{2(1-q^2)}{\ln q} q^{\frac{4-\delta}{4}\nu^2}.$$

Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. q -ФМ допускает интегральное представление

$$\begin{aligned} & K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= -\frac{\ln q}{4(1-q^2)\pi i} q^{\frac{\delta-4}{4}\nu^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^s q^{-\frac{\delta}{4}s^2+s} \Gamma_{q^2}\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(\frac{s-\nu}{2}\right) z^{-s} ds, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $j = 1, 2, 3$ и $\delta = 2, 0, 1$ связаны соотношением (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. При $q \rightarrow 1 - 0$ в (6.7) мы получаем формулу обращения преобразования Меллина для классической функции Макдональда (6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Рассмотрим замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки, состоящий из отрезка прямой $s = \sigma + iy$, $\sigma > \nu > 0$, $-\sqrt{R^2 - \sigma^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - \sigma^2}$, и левой части окружности $|s| = R$, не проходящей через точки $s = \pm\nu - 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Подынтегральная функция в левой части (6.7) имеет простые полюсы в точках $s = -\nu - 2n$ и $s = \nu - 2n$ с вычетами

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=-\nu-2n} = & -\frac{q^{-\frac{\delta}{2}\nu^2-\nu}(1-q^2)}{\ln q} \frac{(1-q^2)^{1+\nu}(q^2, q^2)_\infty}{(q^{-2\nu}, q^2)_\infty} \\ & \times \frac{q^{(2-\delta)n(n+\nu)}(1-q^2)^{2n}(z/2)^{\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n(q^{2\nu+2}, q^2)_n} \end{aligned} \quad (6.8)$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=\nu-2n} = & -\frac{q^{-\frac{\delta}{2}\nu^2+\nu}(1-q^2)}{\ln q} \frac{(1-q^2)^{1-\nu}(q^2, q^2)_\infty}{(q^{2\nu}, q^2)_\infty} \\ & \times \frac{q^{(2-\delta)n(n-\nu)}(1-q^2)^{2n}(z/2)^{-\nu+2n}}{(q^2, q^2)_n(q^{-2\nu+2}, q^2)_n} \end{aligned} \quad (6.9)$$

соответственно. Если устремить R к бесконечности, то с учетом коэффициента перед интегралом в правой части (6.7) сумма вычетов (6.8) даст нам второе слагаемое в правой части (2.9), а сумма вычетов (6.9) – первое.

Замечание 6.2 сделано по совету рецензента. Следствием последнего замечания явилось уточнение значения коэффициента A_ν в [1], [2]. Автор выражает рецензенту искреннюю благодарность.

Список литературы

1. *Ольшанецкий М. А., Рогов В.-Б. К.* Модифицированные q -функции Бесселя и q -функции Макдональда // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 109–128.
2. *Rogov V.-B. K.* q -Bessel–Macdonald functions // Preprint ITEP-TH-56/00; arXiv:math.QA/0010170.
3. *Ольшанецкий М. А., Рогов В.-Б. К.* q -интегральные представления модифицированных q -функций Бесселя и q -функций Макдональда // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 8. С. 125–148.
4. *Jackson F. H.* The application of basic numbers to Bessel's and Legendre's functions // Proc. London Math. Soc. (2). 1905. V. 2. P. 192–220.
5. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
6. *Бейтмен А., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

Московский государственный
университет путей сообщения
E-mail: vrogov@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
05.03.2001 и 16.07.2002