Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Трубецкой, Й. Шмелинг, Неоднородные диофантовы приближения и угловая возвращаемость для бильярдов в многоугольниках, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 2, 129–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:12:03

УДК 517.987

С. Трубецкой, Й. Шмелинг

Неоднородные диофантовы приближения и угловая возвращаемость для бильярдов в многоугольниках

Для заданного числа вращения вычисляется хаусдорфова размерность множества хорошо приближаемых чисел. Этот результат вместе с неоднородным вариантом теоремы Ярника используется для доказательства свойств сильной возвращаемости бильярдного потока в некоторых многоугольниках.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

За последние десять лет в четырех независимых статьях было замечено, что бильярдная траектория произвольной точки, начинающаяся перпендикулярно стороне многоугольника и в какой-то последующий момент времени попадающая на некоторую сторону под прямым углом, проходит свой путь бесконечно часто в обоих направлениях между этими перпендикулярными соударениями и потому является периодической. Наиболее ранняя из этих статей, принадлежащая Рюдзгрокку [1], вычислительная; она содержит гипотезу, что в каждом треугольнике есть перпендикулярные периодические траектории. В 1992 г. Бошерницан [2] и, независимо от него, Воробец, Гальперин и Степин [3] доказали, что бильярдная траектория, начинающаяся перпендикулярно любой стороне любого рационального многоугольника, является периодической для всех начальных точек на этой стороне, кроме конечного числа. Наконец, Сипра, Хансон и Колан [4] рассмотрели траектории, выходящие из точек одного из катетов иррационального прямоугольного треугольника перпендикулярно этому катету, и показали, что почти для всех таких точек (в смысле линейной меры Лебега на стороне треугольника) указанные траектории периодические. Используемый ими метод доказательства фактически приводит к более сильному результату: в любом (обобщенном) параллелограмме или прямоугольном треугольнике и для любого направления θ множество F_θ тех точек, траектории которых, выходящие в направлении θ , никогда не возвращаются параллельно самим себе, имеет нулевую меру Лебега [5]. Результат Сипры и др. о периодических траекториях следует из этого наблюдения. Проведенное ими компьютерное моделирование подсказывает, что утверждение о “почти всюду”, возможно, поддается улучшению. Это и является отправной точкой нашего исследования. В теореме 4.1 показывается, что в любом (обобщенном) параллелограмме и для любого направления θ нижняя бокс-размерность множества точек, траектории которых, выходящие в направлении θ , никогда не возвращаются параллельно самим себе, не превосходит $1/2$. В качестве следствия получаем утверждение, что

бох-размерность множества точек катета прямоугольного треугольника, траектории которых, начинающиеся перпендикулярно катету, не являются периодически, не превосходит $1/2$.

Затем мы переходим к вопросу о том, существуют ли направления θ , для которых постоянная $1/2$ в теореме 4.1 может быть улучшена. Теорема 4.4 утверждает, что если $\mu > 1$ есть порядок аппроксимации направления θ числом α , то нижняя бох-размерность множества F_θ в действительности не превосходит $(\mu + 1)^{-1}$. Имеются два приложения теоремы 4.4. Рассмотрим множество $\mathcal{C}_s$ направлений θ , для которых множество точек, траектории которых никогда не возвращаются параллельно самим себе, имеет нижнюю бох-размерность не более $s \in [0, 1/2]$. Теорема 4.6 утверждает, что хаусдорфова размерность множества $\mathcal{C}_s$ не меньше $s/(1-s)$, причем $\mathcal{C}_s$ – остаточное (т.е. плотное G_δ -) множество бох-размерности 1. Зафиксируем направление θ_0 и рассмотрим множество $\mathcal{D}_s(\theta_0)$ таких углов α , что для любого обобщенного параллелограмма с углом α размерность множества точек, траектории которых, выходящие в направлении θ_0 , никогда не возвращаются параллельно самим себе, не превосходит $s \in [0, 1/2]$. Рассмотрим также множество $\mathcal{E}_s$ прямоугольных треугольников, для которых размерность множества непериодических траекторий, перпендикулярных заданному катету, не превосходит $s \in [0, 1/2]$. Теорема 4.7 устанавливает, что хаусдорфовы размерности множеств $\mathcal{D}_s$ и $\mathcal{E}_s$ не меньше $2s$, причем эти множества – остаточные и имеют ящичную размерность 1.

Доказательства теорем 4.6 и 4.7 происходят из чисто теоретико-числовых рассуждений. Аппроксимация угла t кратными угла ω – классическая область исследований в теории чисел, известная как неоднородные диофантовы приближения. Классическим результатом в этом направлении является теорема Минковского [6], которая утверждает, что если t не лежит в орбите направления ω , то неравенство $\|t + p\omega\| < 1/(4p)$ имеет бесконечно много целочисленных решений p , причем постоянная $1/4$ в общем случае неулучшаема. Здесь $\|\cdot\|$ – стандартное расстояние на $\mathbb{S}^1$. В духе теоремы Минковского мы рассматриваем множество

$$\{t \in \mathbb{S}^1 : \|t + p\omega\| < p^{-\mu} \text{ для бесконечно многих } p \in \mathbb{N}\}.$$

Для каждого $\mu > 1$ теорема 3.2 утверждает, что хаусдорфова размерность этого множества равна μ^{-1} . Теорема 4.6 легко следует из аналогичного утверждения для аппроксимаций по арифметической прогрессии.

Другой классический результат теории чисел – теорема Ярника о хаусдорфовой размерности множества чисел, хорошо аппроксимируемых рациональными [7]. В духе теоремы Ярника мы рассмотрим множество

$$\{\omega \in \mathbb{S}^1 : \|t + p\omega\| < p^{-\mu} \text{ для бесконечно многих } p \in \mathbb{N}\}.$$

Левесли [8] доказал, что для любого $\mu > 1$ хаусдорфова размерность этого множества равна $2/(1 + \mu)$. Доказательство теоремы 4.7 опирается на аналогичный неоднородный результат Ярника, обобщенный на арифметические подпоследовательности.

Структура работы такова. В §2 описываются необходимые результаты из теории размерности и теории бильярдов. Чисто теоретико-числовые результаты формулируются в §3, где также доказываются те из них, которые являются новыми. В §4 мы формулируем и доказываем новые результаты, касающиеся бильярдов.

В заключение заметим, что результаты Сипры и др. были обобщены одним из нас в другом направлении [9].

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Размерность. Пусть Y — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть также $N(\epsilon)$ — минимальное число ϵ -шаров, необходимое, чтобы покрыть Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Нижняя бок-размерность* $\dim_{LB} Y$ подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\dim_{LB} Y = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}.$$

Верхняя бок-размерность $\dim_{UB} Y$ определяется аналогично с заменой $\liminf$ на $\limsup$. Если $\dim_{UB} Y$ и $\dim_{LB} Y$ существуют и они совпадают, то *бок-размерность* подмножества Y определяется как $\dim_B Y = \dim_{UB} Y = \dim_{LB} Y$.

Через $\text{diam } U$ будет обозначаться диаметр подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $s \in [0, \infty]$. Тогда s -мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^s(Y)$ подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$ определяется как предел “ ϵ -обхватов”:

$$\mathcal{H}^s(Y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } U_i)^s : Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ и } \sup_i \text{diam } U_i \leq \epsilon \right\} \right).$$

Легко видеть, что существует и единственно такое число $s_0 = s_0(Y)$, что

$$\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} \infty & \text{при } s < s_0, \\ 0 & \text{при } s > s_0. \end{cases} \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Единственное число s_0 , определяемое формулой (1), называется *хаусдорфовой размерностью* множества Y и обозначается через $\dim_H Y$.

Стандартные рассуждения показывают, что

$$\dim_H Y \leq \dim_{LB} Y \leq \dim_{UB} Y$$

для произвольного подмножества Y в $\mathbb{R}^n$. Примеры показывают, что эти неравенства могут быть строгими.

Бок-размерность также может быть определена в терминах сумм, связанных с покрытиями, с единственным отличием, что все множества, образующие покрытие, должны иметь одинаковый диаметр. Заметим, что для того чтобы оценить бок-размерность, достаточно потребовать, чтобы поперечники покрывающих множеств стремились к нулю по геометрической прогрессии.

Наконец, определим хаусдорфову размерность меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть μ – вероятностная борелевская мера на X . Хаусдорфова размерность меры μ определяется формулой

$$\dim_H \mu = \inf_Y \{ \dim_H Y : \mu(Y) = 1 \}.$$

Отметим, что размерность меры никогда не превосходит размерности ее (борелевского) носителя. Хорошо известен метод, позволяющий оценить снизу размерность меры или множества. Пусть $\mathcal{U}(x, r)$ – шар радиуса r с центром в точке x .

ЛЕММА 2.5. Пусть μ – конечная мера. Если

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(\mathcal{U}(x, r))}{\log r} \geq s$$

на множестве положительной μ -меры, то размерность меры μ не меньше чем s .

Обзор методов и результатов теории размерности содержится в [10], [11].

2.2. Бильярдное преобразование направлений. Рассмотрим многоугольник $Q \subset \mathbb{R}^2$. Бильярдный шар, т.е. точечная масса, движется внутри Q с единичной скоростью вдоль прямой до тех пор, пока не достигнет границы ∂Q , где он мгновенно меняет направление по закону “угол падения равен углу отражения” и продолжает движение по новой прямой. Предположим временно, что многоугольник Q выпуклый. Мы опишем бильярдное отображение в Q как преобразование множества X лучей, пересекающих Q .

Параметризуем X двумя параметрами. В качестве первого параметра возьмем угол θ между лучом и положительной полуосью x . Чтобы определить второй параметр, рассмотрим перпендикулярное сечение X_θ множества лучей, имеющих угол θ . Множество X_θ – это просто интервал, так что второй параметр – это длина дуги на интервале X_θ с фиксированной ориентацией. Для невыпуклого многоугольника нужно различать части лучей, входящих в многоугольник и выходящих из него несколько раз. Можно осуществить указанную выше конструкцию локально, в результате чего получим множество X_θ , представляющее собой конечное объединение интервалов. Пусть w – (не обязательно нормированная) линейная мера Лебега на X_θ .

Бильярдное отображение $T: X \rightarrow X$ переводит луч, содержащий отрезок бильярдной траектории, ориентированный направлением движения на нем, в луч, содержащий следующий отрезок траектории после отражения от границы.

Многоугольник Q называется *обобщенным параллелограммом*, если каждая сторона его параллельна одному из двух заданных направлений. Предположим, что одно из этих направлений есть направление положительной полуоси x . Тогда существует единственное α в интервале $0 < \alpha \leq \pi/2$ такое, что угол между любыми двумя сторонами равен 0 , α или $\pi - \alpha$. Всюду в работе предполагается, что $\alpha \notin \mathbb{Q} \cdot \pi$, т.е. Q не является рациональным многоугольником. Заметим, что бильярд в прямоугольном треугольнике эквивалентен бильярду в ромбе, полученном из четырех экземпляров этого треугольника с помощью процедуры развертки.

Бильярдное отображение в обобщенном параллелограмме имеет следующие специальные свойства (см. рис. 1). Множество X_θ может быть (локально) разбито на три множества U_θ , R_θ и D_θ , состоящие из конечного объединения интервалов, такие, что $T^2 U_\theta \subset X_{\theta+2\alpha}$, $T^2 R_\theta \subset X_\theta$, $T^2 D_\theta \subset X_{\theta-2\alpha}$ и каждый интервал в U_θ , R_θ и D_θ изометрически отображается на свой образ. Линейная мера w T -инвариантна. Далее, существует такая постоянная K , что

$$w(D_\theta) \leq K |\sin \theta| \quad \text{и} \quad w(U_\theta) \leq K |\sin(\theta - \alpha)|. \quad (2)$$

Концы интервалов, составляющих U_θ и D_θ , будут называться *особенностями* отображения T^2 .

Обозначим $Z_n := X_{\theta+2n\alpha}$ и $Z := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} Z_n$. Множество Z_n называется n -м уровнем множества Z . Множество Z T^2 -инвариантно с бесконечной инвариантной мерой w .

О бильярдах написано несколько хороших обзорных статей [12]–[14]. Обсуждаемая здесь структура более подробно описана в [5].

§ 3. Теоретико-числовые результаты

В этом параграфе мы работаем с окружностью $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ единичной длины, а не длины 2π . Роль углов θ и α , рассматриваемых в параграфах, посвященных бильярдам, играют здесь параметры $t = (\theta \bmod \pi)/\pi$ и $\omega = (2\alpha \bmod \pi)/\pi$.

3.1. Неоднородные диофантовы приближения. Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}_{\mu, \omega} := \{t : \|t + p\omega\| < |p|^{-\mu} \text{ для бесконечного набора положительных} \\ \text{и бесконечного набора отрицательных } p \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $m, l \in \mathbb{N}$ – заданные числа такие, что $0 \leq l < m$. Положим

$$\mathcal{A}_{\mu, \omega}(l, m) := \{t : \|t + p\omega\| < |p|^{-\mu} \text{ для бесконечного набора положительных} \\ \text{и бесконечного набора отрицательных } p \equiv l \bmod m\}.$$

Заметим, что $\mathcal{A}_{\mu, \omega}(l, m) \subset \mathcal{A}_{\mu, \omega}$ и $\mathcal{A}_{\mu, \omega} = \bigcup_{0 \leq l < m} \mathcal{A}_{\mu, \omega}(l, m)$.

Минковский показал, что если t не лежит в орбите числа ω , то неравенство $\|t + p\omega\| < 1/(4p)$ имеет бесконечно много решений, причем постоянная $1/4$ в общем случае оптимальна [6]. Простое рассуждение типа Бореля–Кантелли показывает, что множество направлений, аппроксимируемых лучше, чем указано в теореме Минковского, имеет меру нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\mu > 1$ и $\omega \notin \mathbb{Q}$. Мера Лебега множества $\mathcal{A}_{\mu,\omega}$ равна нулю, при этом $\dim_B \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m) = 1$. Множества $\mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m)$ остаточные. Поэтому множество $\bigcap_{\mu \in \mathbb{Q}, \mu > 1} \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m)$ – также остаточное множество и его box-размерность равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты при $0 < a < b$ мы обозначаем интервал $(-b, -a)$ через $-(a, b)$. Пусть $S(l, m) = \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv l \pmod{m}\}$. Тогда

$$\mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m) = \bigcap_{|k|=1}^{\infty} \bigcup_{p \in S(l, m) \cap \text{sgn}(k)[|k|m, \infty)} \left(p\omega - \frac{1}{2|p|^\mu}, p\omega + \frac{1}{2|p|^\mu} \right) \quad (3)$$

и

$$\mathcal{A}_{\mu,\omega} = \bigcap_{|k|=1}^{\infty} \bigcup_{p \in \text{sgn}(k)[|k|, \infty)} \left(p\omega - \frac{1}{2|p|^\mu}, p\omega + \frac{1}{2|p|^\mu} \right).$$

Поскольку множества $\{p\omega : p \in S(l, m) \cap [|k|m, \infty)\}$ и $\{p\omega : p \in S(l, m) \cap -[|k|m, \infty)\}$ плотны, то $\mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m)$ – остаточное множество. Итак, множество $\bigcap_{k=0}^{m-1} \mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m)$ плотно, а значит, его верхняя и нижняя box-размерности равны единице. Чтобы убедиться, что лебегова мера множества $\mathcal{A}_{\mu,\omega}$ равна нулю, заметим, что последовательность $(2|p|^\mu)^{-1}_{p \in \mathbb{Z}}$ имеет при $\mu > 1$ конечную сумму. По лемме Бореля–Кантелли почти никакая точка t не содержится более чем в конечном числе интервалов $(p\omega - 1/(2|p|^\mu), p\omega + 1/(2|p|^\mu))$.

Используя это предложение, рассмотрим размерность множества $\mathcal{A}_{\mu,\omega}$ точек t , обладающих лучшими аппроксимациями.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любых $\mu > 1$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\dim_H \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m) = \frac{1}{\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва оценку сверху. Для любого $\varepsilon > 0$ из формулы (3) вытекает, что

$$\mathcal{H}_{\mu}^{\frac{1}{\mu} + \varepsilon}(\mathcal{A}_{\mu,\omega}(l, m)) \leq 2 \cdot \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{p=k}^{\infty} \left(\frac{1}{p^\mu} \right)^{\frac{1}{\mu} + \varepsilon} = 0.$$

Обратимся теперь к оценке снизу. При $n_k \in \mathbb{Z}$ положим $\mathcal{J}_k := \text{sgn}(n_k)[n_k, 2|n_k|]$

и

$$\hat{T}_{n_k}^\mu := \bigcup_{qm+k \in \mathcal{J}_k} \left((qm+k)\omega - \frac{1}{2(2|n_k|)^\mu}, (qm+k)\omega + \frac{1}{2(2|n_k|)^\mu} \right).$$

Для произвольной последовательности целых чисел $\{n_k\}$, как положительные, так и отрицательные элементы n_k которой бесконечно часто попадают во все классы вычетов, верно, что

$$\widehat{S}_{\{n_k\}} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_{n_k}^{\mu} \subset \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{A}_{\mu, \omega}(l, m).$$

Для доказательства оценки снизу мы построим по индукции последовательность $\{n_k\}$, которая будет просто подпоследовательностью последовательности знаменателей q_m подходящих дробей непрерывной дроби. Для этой последовательности $\{n_k\}$ мы построим меру m с носителем на множестве $\widehat{S}_{\{n_k\}}$ размерности μ^{-1} . Идея построения заключается в следующем: чем быстрее возрастает последовательность $\{n_k\}$, тем лучше точки $((qm + k)\omega)_{qm+k \in \mathcal{J}_k}$ распределены на окружности. Если точка x лежит в $\mathcal{A}_{\mu, \omega}$, то она должна бесконечно часто встречаться на интервалах вида $J_q = (q\omega - |q|^{-\mu}/2, q\omega + |q|^{-\mu}/2)$. Поэтому для некоторого достаточно большого n_k она неизбежно попадет в J_q для некоторого $q \in \text{sgn}(n_k)[0, 2|n_k|]$. Принадлежность множеству $\widehat{S}_{\{n_k\}}$ вынуждает эту точку находиться в “правой половине” семейства интервалов J_q , где q меняется от 0 до $2n_k$. Если последовательность $\{n_k\}$ достаточно разрежена, то это ограничение оказывается достаточно умеренным для сохранения размерности множества $\mathcal{A}_{\mu, \omega}$.

Положим $n_1 = q_1$ и предположим, что последовательность n_i уже построена вплоть до $i = k - 1$. Тогда множество $\bigcap_{l=1}^{k-1} \widehat{T}_{n_l}^{\mu}$ состоит из конечного числа открытых интервалов $\widehat{I}_i^{k-1}$, удовлетворяющих неравенству

$$|\widehat{I}_l^{k-1}| \leq (2|n_{k-1}|)^{-\mu}, \quad (4)$$

в котором равенство выполняется тогда и только тогда, когда соответствующий интервал полностью содержится в $\bigcap_{l=1}^{k-2} \widehat{T}_{n_l}^{\mu}$. Мы будем опускать крышку в обозначении любого интервала, для которого выполнено равенство.

Рассмотрим множество

$$T_{n_k}^{\mu} := \bigcup_l I_l^k$$

и положим

$$S_{\{n_k\}} := \bigcap_{k=1}^{\infty} T_{n_k}^{\mu}.$$

Очевидно, $S_{\{n_k\}} \subset \widehat{S}_{\{n_k\}}$.

Предположим, что $\{n_i\}$ уже построены по индукции вплоть до $i \leq k - 1$. Хорошо известно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{(pm + k)\omega : p \in \mathbb{Z}\}$ “хорошо распределена” на $\mathbb{S}^1$, т.е. для любой непрерывной функции f и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N , что

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f((q + pm + k)\omega) - \int f \right| < \varepsilon$$

для любого $q \in \mathbb{Z}$ и любого $n \geq N$. Поэтому при $k \pmod{2m} \leq m-1$ в качестве n_k можно взять наименьшее целое положительное $q_r > |n_{k-1}|$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\frac{|I_l^{k-1}|}{2} \leq \frac{\text{Card}\{pm+k \in \mathcal{J}_k : (pm+k)\omega \in I_l^{k-1}\}}{|q_r|} \leq 2|I_l^{k-1}| \quad (5)$$

и

$$\frac{\log \prod_{i=1}^{k-1} |n_i|}{\log |q_r|} \rightarrow 0. \quad (6)$$

В противном случае (при $k \pmod{2m} \geq m$) мы полагаем $n_k = -q_r$, удовлетворяя условиям (5) и (4). Построение последовательности $\{n_k\}$ завершено. Очевидно, эта последовательность попадает во все классы вычетов бесконечно часто как для положительных, так и для отрицательных n_k .

Далее на $S_{\{n_k\}}$ построим меру нужной размерности. Мы предполагаем, что I^0 совпадает со всей окружностью и потому имеет длину 1. Сначала рекуррентно определим внешнюю меру m^* , полагая $m^*(I^0) := 1$ и

$$m^*(I_l^k) := \frac{m^*(I_j^{k-1})}{\text{Card}\{j : I_l^k \subset I_j^{k-1}\}}.$$

Теперь мы оценим внешнюю меру сверху. Используя формулы (5) и (6), имеем

$$\begin{aligned} m^*(I_j^{k+1}) &\leq \frac{2m^*(I_l^k)}{|I_l^k||n_{k+1}|} = 2m^*(I_l^k) \frac{(2|n_k|)^\mu}{|n_{k+1}|} \\ &\leq 2^{(1+\mu)k} \prod_{i=1}^k \frac{(|n_i|)^\mu}{|n_{i+1}|} \leq 2^{(1+\mu)k} \frac{(n_1)^\mu}{|n_{k+1}|} \prod_{i=2}^k (|n_i|)^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Большая скорость роста чисел n_k , предполагаемая в (6), влечет соотношение $m^*(I_j^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому ясно, что m^* удовлетворяет условиям согласованности Колмогорова и может быть продолжена до меры m на $S_{\{n_k\}}$.

Теперь мы можем доказать, что размерность этой меры не меньше чем $1/\mu$. Поскольку $|I^{k+1}| = (2|n_{k-1}|)^{-\mu} < 1$, то из (7) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\log m(I_l^{k+1})}{\log |I_l^{k+1}|} &\geq \frac{\log 2^{(1+\mu)k} + \sum_{i=2}^k \log |n_i|^{\mu-1} + \mu \log n_1 - \log |n_{k+1}|}{\log (2|n_{k+1}|)^{-\mu}} \\ &= \frac{-kC_1 - C_2 \sum_{i=2}^k \log |n_i| - C_3 + \log |n_{k+1}|}{C_4 + \mu \log |n_{k+1}|}, \end{aligned}$$

где все C_i — положительные постоянные. Согласно (6) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m(I_l^{k+1})}{\log |I_l^{k+1}|} \geq \frac{1}{\mu}.$$

Чтобы применить лемму 2.5 и вывести требуемый результат, нужно вычислить отношение $\log m(I)/\log |I|$ для “промежуточных” интервалов I , т.е. интервалов, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{(2|n_k|)^\mu} < |I| < \frac{1}{(2|n_{k-1}|)^\mu}.$$

Обозначим через $\mathcal{U}_a(B)$ a -окрестность множества B и положим

$$r(I) := \text{Card}\{qm + k : qm + k \in \mathcal{J}_k \text{ и } (qm + k)\omega \in I \setminus \mathcal{U}_{(2n_k)^{-\mu}}(\partial I)\}.$$

Для $r = 1$ обозначим через I_l^k единственный такой интервал, содержащийся в I . Тогда ввиду соотношений $m(I_l^k) = m(I)$ и $|I_l^k| < |I|$ имеем

$$\frac{\log m(I)}{\log |I|} = \frac{\log m(I_l^k)}{\log |I|} > \frac{\log m(I_l^k)}{\log |I_l^k|}.$$

Предположим теперь, что $r \geq 2$. Поскольку $|n_k|$ — это знаменатель q_{m_k} некоторой подходящей дроби, то

$$\min_{|n_k| \leq |p_1| < |p_2| \leq |2n_k|} d(p_1\omega, p_2\omega) \geq \frac{1}{|n_k| + 2}. \quad (8)$$

Отметим, что это единственное место, где используется тот факт, что n_k — подпоследовательность последовательности знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби. Из (8) и (4) (в предположении, что $|n_k| \geq 2$) вытекает, что

$$|I| \geq (r-1) \frac{1}{|n_k| + 2} \geq (r-1) |I_l^k|^{\frac{1}{\mu}}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{\log m(I)}{\log |I|} &\geq \frac{\log m(I)}{\log((r-1) \cdot |I_l^k|^{\frac{1}{\mu}})} \\ &\geq \frac{\log(r \cdot m(I_l^k))}{\log((r-1) \cdot |I_l^k|^{\frac{1}{\mu}})} \\ &= \frac{\log r + \log m(I_l^k)}{\log(r-1) + \frac{1}{\mu} \log |I_l^k|}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для любого $\varepsilon > 0$, используя неравенство (9), мы можем выбрать достаточно большое $k(\varepsilon)$, так что

$$\frac{\log m(I)}{\log |I|} \geq \frac{\log r + \frac{1}{\mu+\varepsilon} \log |I_l^k|}{\log(r-1) + \frac{1}{\mu} \log |I_l^k|}$$

для любого $k \geq k(\varepsilon)$. Поэтому

$$\frac{\log m(I)}{\log |I|} \geq \frac{\mu}{\mu + \varepsilon} > \frac{1}{\mu},$$

где последнее неравенство выполняется для любого достаточно малого ε .

Теперь наш результат следует из леммы 2.5.

3.2. Теорема Ярника. Рассмотрим множество

$$\mathcal{B}_{\mu,t} := \{\omega : \|t + p\omega\| < |p|^{-\mu} \text{ для бесконечного набора положительных} \\ \text{и бесконечного набора отрицательных } p \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $m, l \in \mathbb{N}$ – заданные числа такие, что $0 \leq l < m$, и пусть

$$\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m) := \{\omega : \|t + p\omega\| < |p|^{-\mu} \text{ для бесконечного набора положительных} \\ \text{и бесконечного набора отрицательных } p \equiv l \pmod{m}\}.$$

Тогда $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m) \subset \mathcal{B}_{\mu,t}$ и $\mathcal{B}_{\mu,t} \supset \bigcup_{0 \leq l < m} \mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Предположим, что $\mu > 1$ и $\omega \notin \mathbb{Q}$. Тогда мера Лебега множества $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ равна нулю, а $\dim_B \mathcal{B}_{\mu,t}(l, m) = 1$. Множества $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ остаточные. Поэтому множество $\bigcap_{\mu \in \mathbb{Q}, \mu > 1} \bigcap_{0 \leq l < m} \mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ также остаточное и имеет вох-размерность 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(l, m) = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv l \pmod{m}\}$, тогда

$$\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m) = \bigcap_{|k|=1}^{\infty} \bigcup_{p \in S(l, m) \cap \text{sgn}(k)[|k|, \infty)} \bigcup_{i=0}^{p-1} \left(\frac{t+i}{p} - \frac{1}{2|p|^{\mu+1}}, \frac{t+i}{p} + \frac{1}{2|p|^{\mu+1}} \right) \quad (10)$$

и поэтому $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ – остаточное множество. Множество $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ плотно, так что его нижняя и верхняя вох-размерности равны единице. Поскольку $\sum 1/(2|p|^{\mu+1}) < \infty$, по лемме Бореля–Кантелли почти ни одна точка ω не содержится более чем в конечном числе интервалов $\left(\frac{t+i}{p} - \frac{1}{2|p|^{\mu+1}}, \frac{t+i}{p} + \frac{1}{2|p|^{\mu+1}} \right)$, т.е. лебегова мера множества $\mathcal{B}_{\mu,t}(l, m)$ равна нулю.

Следующее ниже обобщение классической теоремы Ярника [7] представляет собой частный случай еще более общего результата, доказанного Левесли.

ТЕОРЕМА 3.4 [8]. *Для любого $\mu > 1$ имеем*

$$\dim_H \mathcal{B}_{\mu,t} = \frac{2}{1 + \mu}.$$

Мы улучшим теорему Левесли в этой специальной постановке. Доказательство по существу следует его идеям и не претендует на оригинальность.

ТЕОРЕМА 3.5. *Для любых $\mu > 1$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\dim_H \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{B}_{\mu,t}(l, m) = \frac{2}{1 + \mu}.$$

Нам потребуется приспособленное к нашему случаю понятие *вездесущей* системы. Для заданных l и m определим множество

$$R_k(l, m) = \{t \in [0, 1) : \|(km + l)t - \omega\| = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ – такая функция, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho(N) = 0$. Семейство множеств $\{R_k(l, m)\}$ называется *вездесущим* относительно ρ , если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{mes} \left([0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^N \mathcal{U}(R_k(l, m), \rho(N)) \right) = 0.$$

Множества $\mathcal{B}_{\mu, t}(l, m)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mu, t}^+(l, m) &:= \bigcap_{K=0}^{\infty} \bigcup_{k=K}^{\infty} \mathcal{U}(R_k(l, m), (km + l)^{-\mu-1}), \\ \mathcal{B}_{\mu, t}^-(l, m) &:= \bigcap_{K=0}^{\infty} \bigcup_{-k=K}^{\infty} \mathcal{U}(R_k(l, m), (km + l)^{-\mu-1}) \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{B}_{\mu, t}(l, m) = \mathcal{B}_{\mu, t}^+(l, m) \cap \mathcal{B}_{\mu, t}^-(l, m).$$

Мы используем следующий частный случай более общей теоремы 2 из статьи Додсона, Рюнна и Викерса [15].

ТЕОРЕМА 3.7 [15]. *Предположим, что для любого l в интервале $0 \leq l < m$ семейство $\{R_k(l, m)\}$ – вездесущее относительно ρ . Тогда*

$$\dim_H \bigcap_{l=0}^{m-1} \mathcal{B}_{\mu, t}(l, m) \geq \min \left\{ 1, \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \rho(N)}{\mu + 1} \right\}.$$

Левесли доказал, что система $\{\bigcup_{l=0}^{m-1} R_k(l, m)\}$ – вездесущая относительно функции $\rho(N) := K \frac{\log^{5+\varepsilon} N}{N^2}$. Мы можем воспроизвести рассуждение Левесли и показать, что $\{R_k(l, m)\}$ – вездесущая система относительно функции $\rho(N) := K \frac{\log^{5+2\varepsilon}(Nm + l)}{(Nm + l)^2}$. Теперь теорема 3.5 вытекает из теоремы 3.7.

§ 4. Результаты о бильярдах

4.1. Сильная возвращаемость во всех направлениях. Зафиксируем обобщенный параллелограмм. Для каждого направления θ обозначим через F_θ множество элементов $x \in X_\theta$, положительная полутраектория которых никогда не возвращается параллельно x , и положим $G_\theta := X_\theta \setminus F_\theta$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого обобщенного параллелограмма и любого направления θ нижняя бок-размерность множества F_θ не превышает $1/2$.*

Это утверждение усиливает основную теорему в [5], которая утверждает, что для любого θ множество F_θ имеет меру 0. Заметим, что множество G_θ открыто и плотно для каждого θ .

Развертка прямоугольного треугольника с углом $\alpha/2$ вокруг прямого угла дает ромб с углом α . Рассмотрим в ромбе направление θ , перпендикулярное одному

из катетов треугольника. Если рассматривать траектории, начинающиеся в X_θ и возвращающиеся в X_θ , как траектории в треугольнике, то они оказываются дважды перпендикулярными одной из сторон. Как объяснено во введении, такие траектории должны быть периодическими. Поэтому, применяя теорему 4.1 к этому направлению, получаем следующее усиление теоремы Сипры, Хансона и Колана [4]:

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *В прямоугольном треугольнике нижняя фрактальная размерность множества элементов, перпендикулярных одному из катетов треугольника, для которых траектория не является периодической, не превышает $1/2$.*

В доказательстве теоремы 4.1 нам понадобится лемма, которая, по существу, содержится в [5].

ЛЕММА 4.3. *Зафиксируем интервал X_θ и натуральное N . Тогда существует разбиение множества U_θ на $j_N \leq CN$ интервалов (где C – некоторая положительная постоянная) такое, что итерации T^2 отображают изометрично каждый интервал разбиения до тех пор, пока не встретится одна из следующих ситуаций: 1) траектория интервала достигает уровня N прежде, чем вернуться на X_θ , или 2) траектория интервала возвращается на X_θ , так и не достигнув уровня N . Траектории всех этих интервалов попарно не пересекаются до возможного момента возвращения на X_θ .*

Аналогичное утверждение верно для D_θ и уровня $-M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество V_N особенностей отображения T^2 на уровнях $0, 1, \dots, N$. Мощность множества V_N не превосходит CN (где в качестве C можно взять удвоенное число вершин многоугольника). Для каждого $v \in V_N$ рассмотрим его первый прообраз, лежащий на уровне 0 (если таковой существует: заметим, что время, необходимое для того, чтобы отобразить точку $v \in V_N$ на уровень 0, не обязательно ограничено). Это дает указанное разбиение множества U_θ . Отображение T^{2j} непрерывно на каждом элементе разбиения до тех пор, пока он не отображается на уровень $N + 1$ или не возвращается на уровень 0.

Тот факт, что траектории не пересекаются, следует из обратимости отображения T^2 . Действительно, предположим, что $x, y \in X_\theta$, $x \neq y$, но $z = T^{2j}x = T^{2k}y$ при некоторых $j \geq k$. Равенство $j = k$ невозможно, поскольку в этом случае точка z имела бы два прообраза. Так как $T^{2(j-k)}x = y$, то траектория точки x возвращается на X_θ в момент времени $2(j-k) > 0$ и не пересекается с траекторией точки y до этого времени, как и утверждалось.

Если бы один из интервалов (скажем, J) никогда не вернулся на X_θ и не достиг уровня N , то множество $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} T^{2j}J$ состояло бы из бесконечного числа непересекающихся интервалов одинаковой длины и содержалось бы в $\bigcup_{0 \leq n \leq N} Z_n$. Последнее множество есть конечное объединение интервалов конечной длины, так что мы приходим к противоречию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Зафиксируем произвольное θ . Мы изучим размерность пересечения $F_\theta \cap D_\theta$. Рассуждение для $F_\theta \cap U_\theta$ аналогично, с дополнительным условием, что поскольку мы пользуемся формулой (2), то $\theta - 2N\alpha$ должно быть близко к нулю в случае D_θ , в то время как в случае U_θ число $\theta + (2N - 1)\alpha$

должно быть близко к α . В силу этого дополнительного условия и поскольку требуется, чтобы $F_\theta \cap D_\theta$ и $F_\theta \cap U_\theta$ были малы одновременно, вместо аппроксимаций с помощью 2α мы рассмотрим аппроксимации с помощью α , используя четные итерации для множества $F_\theta \cap D_\theta$ и нечетные итерации для множества $F_\theta \cap U_\theta$.

Рассмотрим множество F_N точек $x \in D_\theta$, положительная полутраектория которых достигает $X_{\theta-2(N+1)\alpha}$ прежде, чем вернуться на X_θ . Это событие назовем выходом точки x с уровня $-N$ (обязательно на уровень $-(N+1)$). Когда траектория точки x достигает уровня $-N$ и находится в процессе выхода с уровня $-N$, она должна пройти через “ворота” $D_{\theta-2N\alpha}$ на уровне $-N$.

Из леммы 4.3 ясно, что не более CN интервалов выходит с уровня $-N$ прежде, чем вернуться на X_θ . Поэтому множество F_N состоит из не более чем CN интервалов, которые мы обозначим через I_i . Когда они выходят с уровня $-N$ прежде, чем вернуться на уровень 0, сумма их длин не может превосходить ширину ворот на уровне $-N$, через которые они выходят. Подчеркнем, что здесь мы пользуемся утверждением из леммы 4.3 о том, что все выходящие траектории не пересекаются. Таким образом, суммарная длина интервалов, выходящих с уровня $-N$, не превосходит общей длины ворот уровня $-N$, т.е. не превосходит $K |\sin(\theta - 2N\alpha)|$.

Через $[x]$ мы обозначаем целую часть числа x . Пусть $\{a_i\}$ — последовательность положительных чисел, а $n \in \mathbb{N}$. Простая оценка показывает, что (см. [16])

$$\sum_{k=1}^n \left(\left\lceil \frac{na_k}{\sum_{i=1}^n a_i} \right\rceil + 1 \right) \leq 3n. \quad (11)$$

Можно оценить $(1/2 + \varepsilon)$ -обхват $F_\theta \cap D_\theta$, покрывая F_N интервалами “средней выходной длины”, т.е. интервалами длины $K |\sin(\theta - 2N\alpha)| / j_N$.

Необходимое для этого общее число интервалов средней длины не превосходит

$$\sum_{k=1}^{j_N} \left(\left\lceil \frac{|I_k| j_N}{\sum_{i=1}^{j_N} |I_i|} \right\rceil + 1 \right).$$

Используя неравенство (11) и тот факт, что $j_N \leq CN$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{1/2+\varepsilon}(F_\theta \cap D_\theta) &\leq \sum_{k=1}^{j_N} \left(\left\lceil \frac{|I_k| j_N}{\sum_{i=1}^{j_N} |I_i|} \right\rceil + 1 \right) \left(\frac{K(|\sin(\theta - 2N\alpha)|)}{j_N} \right)^{1/2+\varepsilon} \\ &\leq \frac{3j_N}{(j_N)^{1/2+\varepsilon}} (K(|\sin(\theta - 2N\alpha)|))^{1/2+\varepsilon} \\ &\leq LN^{1/2-\varepsilon} ((\theta - 2N\alpha) \bmod \pi)^{1/2+\varepsilon} \end{aligned} \quad (12)$$

с некоторой постоянной L . Чтобы получить требуемое покрытие, нужно только найти такую последовательность (N_k) , что неоднородное диофантово приближение $\|(\theta - 2N_k\alpha)/\pi\|$ малó. Хорошо известно, что для любого $\delta > 0$ неравенство

$$\|(\theta - 2p\alpha)/\pi\| < p^{-1+\delta} \quad (13)$$

разрешимо для бесконечно многих $p \in \mathbb{N}$. Заметим, что это гораздо более слабое утверждение, чем теорема Минковского [6]. Поэтому можно найти такие последовательности $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$, что

$$\mathcal{H}^{1/2+\varepsilon}(F_\theta \cap D_\theta) \leq L N_k^{1/2-\varepsilon} (N_k^{-1+\delta})^{1/2+\varepsilon} \leq L N_k^{-2\varepsilon+(\delta/2)+\delta\varepsilon}. \quad (14)$$

Если $1 > \varepsilon > \delta > 0$, то правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку мы покрыли $F_\theta \cap D_\theta$ интервалами одинаковой длины, то

$$\dim_{LB}(F_\theta \cap D_\theta) \leq \frac{1}{2}.$$

Чтобы оценить размерность множества $F_\theta \cap U_\theta$, в формуле (12) нужно воспользоваться второй частью формулы (2). Имея в виду это изменение, полезно рассмотреть переменную $\theta' := \theta - \alpha$. Замечая, что $\theta + 2p\alpha - \alpha = \theta' + 2p\alpha$ и неравенство $\|(\theta' + 2p\alpha)/\pi\| < p^{-1+\delta}$ имеет бесконечно много целочисленных решений, мы приходим к выводу, что $\dim_{LB}(F_\theta \cap U_\theta) \leq 1/2$ и поэтому $\dim_{LB}(F_\theta) \leq 1/2$.

4.2. Из теории чисел вытекает более сильная возвращаемость в некоторых направлениях. В предыдущем пункте мы доказали теорему о возвращаемости для всех направлений θ . Наши первые результаты в этом пункте относятся к специальным направлениям θ , которые особенно хорошо приближаемы. Для этих направлений справедлив более сильный результат о возвращаемости.

ТЕОРЕМА 4.4. *Рассмотрим обобщенный параллелограмм с углом α . Пусть θ — такое направление, что $\|(\theta - p\alpha)/\pi\| < p^{-\mu}$ для бесконечно многих $p \in 2\mathbb{N}$ и $\|(\theta + p\alpha)/\pi\| < p^{-\mu}$ для бесконечно многих $p \in 2\mathbb{N} + 1$. Тогда нижняя box-размерность множества F_θ не превосходит $1/(\mu + 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по существу такое же, как в теореме 4.1. Нужно только заменить неравенство (13) неравенством из условия теоремы и соответственно модифицировать (14).

Применим этот результат к перпендикулярным траекториям в прямоугольных треугольниках. Здесь предполагается, что основание треугольника параллельно оси x .

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Зафиксируем $\mu > 1$ и рассмотрим прямоугольный треугольник с таким углом $\alpha/2$, что приближение числа $\pi/2$ орбитой угла α в смысле предыдущей теоремы имеет порядок μ . Тогда нижняя фрактальная размерность множества элементов, перпендикулярных основанию треугольника и имеющих непериодические траектории, не превосходит $1/(\mu + 1)$.*

Теорема 4.4 показывает, что для того чтобы получить лучший результат, чем в теореме 4.1, нужно рассматривать лучше приближаемые направления ($\mu > 1$). Введем множество

$$\mathcal{C}_s := \{\theta : \dim_{LB}(F_\theta) \leq s\}.$$

ТЕОРЕМА 4.6. *Зафиксируем произвольный обобщенный параллелограмм. Для любого $s \in [0, 1/2]$*

$$\dim_H \mathcal{C}_s \geq \frac{s}{1-s},$$

кроме того, $\mathcal{C}_s$ – остаточное множество vox-размерности 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 3.2 при $m = 2$. Второе утверждение является прямым следствием предложения 3.1.

Теперь мы зафиксируем направление и будем варьировать обобщенный параллелограмм. С этой целью предположим, что одна из сторон многоугольника зафиксирована, и будем отсчитывать направление θ от этого фиксированного направления. Заметим, что наши оценки для F_θ будут зависеть только от угла α и больше ни от каких параметров обобщенного параллелограмма. Зафиксируем направление θ_0 . Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s &:= \{\alpha \in \mathbb{S}^1 : \dim_{LB}(F_{\theta_0}) < s \text{ для всех} \\ &\quad \text{обобщенных параллелограммов с углом } \alpha\}, \\ \mathcal{E}_s &:= \{\alpha \in \mathbb{S}^1 : \dim_{LB}(F_{\text{перп}}) < s \text{ для} \\ &\quad \text{прямоугольного треугольника с углом } \alpha/2\}, \end{aligned}$$

где перп – направление, перпендикулярное одному из катетов.

ТЕОРЕМА 4.7. (а) *Если $s \in [0, 1/2]$, то $\dim_H \mathcal{E}_s \geq 2s$. При этом $\mathcal{E}_s$ – остаточное множество vox-размерности 1.*

(б) *При заданном θ_0 и при $s \in [0, 1/2]$ выполнено неравенство $\dim_H \mathcal{D}_s \geq 2s$. При этом $\mathcal{D}_s$ – остаточное множество vox-размерности 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результаты о хаусдорфовой размерности непосредственно вытекают из теоремы 4.4 и теоремы 3.5 при $m = 2$. Результаты о массивности и ящичной размерности являются прямым следствием предложения 3.3.

Авторы благодарны Мартину Шмоллю и Анатолию Степину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Ruijgrok Th.* Periodic orbits in triangular billiards // Acta Phys. Polon. B. 1991. V. 22. P. 955–981.
2. *Boshernitzan M.* Billiards and rational periodic directions in polygons // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. P. 522–529.
3. *Воробец Я.Б., Гальперин Г.А., Степин А.М.* Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения // УМН. 1992. Т. 47. № 3. С. 9–74.
4. *Cipra B., Hanson R., Kolan A.* Periodic trajectories in right triangle billiards // Phys. Rev. E (3). 1995. V. 52. P. 2066–2071.
5. *Gutkin E., Troubetzkoy S.* Directional flows and strong recurrence for polygonal billiards // Proc. of the International congress of dynamical systems, Montevideo, Uruguay, 1995 / ed. F. Ledrappier et al. Harlow: Longman, 1996. P. 21–45.
6. *Cassels J. W. S.* An introduction to Diophantine approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.

7. *Jarnik V.* Diophantische Approximationen und Hausdorff Maß // Math. Sbornik. 1929. V. 36. P. 371–382.
8. *Levesley J.* A general inhomogeneous Jarnik–Besicovitch theorem // J. Number Theory. 1998. V. 71. P. 65–80.
9. *Troubetzkoy S.* Recurrence and periodic billiard orbits in polygons // Preprint; <http://iml.univ-mrs.fr:80/~troubetz/pubs.html>.
10. *Falconer K.* The geometry of fractal sets. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
11. *Pesin Ya.* Dimension theory in dynamical systems. Chicago: Univ. of Chicago Press 1997.
12. *Gutkin E.* Billiard in polygons // Phys. D. 1986. V. 19. P. 311–333.
13. *Gutkin E.* Billiard in polygons: survey of recent results // J. Statist. Phys. 1996. V. 83. P. 7–26.
14. *Tabachnikov S.* Billiards // Panoramas et syntheses. Paris: Soc. Math. France, 1995.
15. *Dodson M., Rynne B., Vickers J.* Diophantine approximation and a lower bound for Hausdorff dimension // Mathematika. 1990. V. 37. P. 59–73.
16. *Kra B., Schmeling J.* Diophantine numbers, dimension and Denjoy maps // Acta Arith. (to appear); <http://www.math.psu.edu/kra/publications.html>.

Centre de Physique Théorique and
 Institut de Mathématiques de Luminy, France;
 Freie Universität Berlin and
 Institut de Mathématiques de Luminy, France
E-mail: troubetz@iml.univ-mrs.fr, joerg@maths.lth.se

Поступила в редакцию
 17.05.2001 и 21.06.2002