Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Варфоломеев, Вписанные многоугольники и полиномы Герона, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:25:09

УДК 513.7

В. В. Варфоломеев

Вписанные многоугольники и полиномы Герона

Известная формула Герона, выражающая площадь треугольника через длины его сторон, обобщается на многоугольники, вписанные в окружности, в следующем смысле. Доказывается, что площадь является алгебраической функцией от длин ребер многоугольника. Аналогичные утверждения доказываются для диагоналей и радиуса описанной окружности. Полученные алгебраические уравнения исследуются и даются элементарные геометрические применения полученных алгебраических результатов.

Библиография: 1 название.

Введение

Многоугольники в статье – это замкнутые ломаные, вписанные в окружности. Последнее условие не налагает алгебраической зависимости на стороны, так как из любых отрезков, из которых можно сложить многоугольник, можно сложить и вписанный, например, выпуклый многоугольник. Это используется ниже без оговорок. Вершины и стороны многоугольника нумеруются в порядке обхода.

ПРИМЕРЫ.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

КОММЕНТАРИЙ. Параллельные отрезки обозначают кратные ребра, т.е. ребра, проходимые несколько раз при однократном обходе вершин. Точка на рис. 3 обозначает нулевое ребро, соединяющее 2-ю и 3-ю вершины. Выбор рисунков связан со ссылками на них в тексте.

Термин “сторона” может означать, в зависимости от контекста, и отрезок, соединяющий соседние вершины, и длину этого отрезка, “ребро” – сторона со знаком “+” или “–”.

ПРАВИЛО ВЫБОРА ЗНАКА РЕБРА. Если для превращения многоугольника в выпуклый движением его вершин вдоль описанной окружности необходимо переставить соседние вершины, то соединяющей их стороне присваивается знак “–”.

Например, многоугольник, изображенный на рис. 4, имеет одно отрицательное ребро, а изображенный на рис. 2 – два. Впрочем, правило неоднозначно, например, “звезду” на рис. 5 можно превратить в выпуклый многоугольник так: вершины 4 и 5 скользят по описанной окружности по часовой стрелке и размещаются между вершинами 1 и 3, при этом вершина 4 переставляется с 3, а значит, ребру a_3 следует приписать знак “–”; но можно действовать и так: движением по или против часовой стрелки вершина 2 помещается между 1 и 3, а вершина 4 переставляется с 5 – такой способ обязывает приписать минусы либо ребрам a_2 и a_4 , либо a_1 и a_4 .

Мотивировка правила выбора знаков дается в § 2 в доказательстве теоремы 1.

ПРИМЕРЫ ПОЛИНОМОВ ГЕРОНА (все это известные школьные формулы).

$$P_S(x) = 16x^2 - (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3), \quad (1)$$

$$P_r(x) = (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3) \times (a_1 + a_2 - a_3)x^2 - a_1^2 a_2^2 a_3^2, \quad (2)$$

$$P_S(x) = 16x^2 - (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4) \times (a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4), \quad (3)$$

$$P_r(x) = x^2(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4) \times (a_1 + a_2 + a_3 - a_4) - (a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3), \quad (4)$$

$$P_d(x) = (a_1 a_2 + a_3 a_4)x^2 - (a_1 a_3 + a_2 a_4)(a_1 a_4 + a_2 a_3). \quad (5)$$

КОММЕНТАРИЙ. Корни полиномов (1) и (2) – это соответственно площадь треугольника со сторонами a_i и радиус описанной окружности; корни полиномов (3) и (4) имеют тот же геометрический смысл для вписанного 4-угольника; корень полинома (5) – диагональ 4-угольника, соединяющая его 1-ю и 3-ю вершины. Полиномы (3), (4) и (5) сохраняют свой геометрический смысл и для 4-угольника, изображенного на рис. 4, если одной из сторон приписать знак “–”, – нужно только уточнить понятие площади. Под *площадью произвольного многоугольника* будем понимать не лебегову меру арендуемой им части плоскости, а длину (или минус длину) вектора

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n [\vec{OA}_i, \vec{OA}_{i+1}] = \sum_{i=1}^n [\vec{OA}_i, \vec{A_i A_{i+1}}], \quad (6)$$

здесь A_i – точки плоскости, обозначающие вершины, O – произвольная, но фиксированная точка плоскости, $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение; сложение индексов

здесь и ниже понимается по модулю n . Для 4-угольника, изображенного на рис. 4, площадью (в указанном смысле) будет разность площадей двух образовавшихся треугольников.

Будем изображать n -угольник точкой $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в $\mathbb{R}^n$, где a_i — ребра многоугольника. Пусть $f(a_1, \dots, a_n)$ — алгебраическая функция, определенная на множестве многоугольников с непустой внутренностью. Другими словами, предполагается, что существует алгебраическое уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$P_f(x) = \sum_k p_k(a_1, a_2, \dots, a_n) x^k = 0,$$

для которого $f(a_1, \dots, a_n)$ является корнем. Полином P_f будем называть *f -полиномом Герона*.

В статье доказывается существование некоторых f -полиномов и исследуется их структура. Стоит сказать, что вначале дело ограничивалось выпуклыми многоугольниками, и я благодарен И. Х. Сабитову за настойчивость, с которой он убеждал меня включить в рассмотрение многоугольники с самопересечениями, — это полностью изменило характер работы. Я благодарен также своему коллеге по кафедре высшей математики МИРЭА Ю. О. Головину: ответ на его вопрос — как объяснить “на пальцах” хорошему школьнику формулу Герона? — стал началом работы.

В заключение выражаю надежду, что имеется не только формальная связь между этой работой и знаменитыми результатами И. Х. Сабитова по метрической теории многогранников (см., например, [1]).

§1. Существование d -, r - и S -полиномов Герона для выпуклых многоугольников

ЛЕММА 1. *Диагональ d многоугольника, отсекающая от него треугольник, является алгебраической функцией сторон этого многоугольника.*

Рис. 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На рис. 7 приведены необходимые обозначения. Индукция по числу сторон n многоугольника. Основа индукции – формула (5), примененная к 4-угольнику (a_1, a_2, a_3, d_1) . Разложим (5) по степеням d_1 :

$$(a_1a_2 + a_3d_1)x^2 - (a_1a_3 + a_2d_1)(a_1d_1 + a_2a_3) = a_1a_2d_1^2 + (a_1^2 + a_2^2 - x^2)a_3d_1 + (-x^2 + a_3^2)a_1a_2 = Q(d_1).$$

По предположению индукции существует d_1 -полином для многоугольника $(d, a_3, \dots, a_n)$. Обозначим его $Q_{n-1}(d_1)$, переменная $d = x$ войдет в коэффициенты этого полинома. Результат

$$R(Q(d_1), Q_{n-1}(d_1)) = R_d(x) \quad (7)$$

будет d -полином для многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

ПРИМЕР. При $n = 5$ вычисление результата $R_d(x)$ после сокращения всех коэффициентов на a_3^2 дает многочлен

$$\begin{aligned} & a_3a_4a_5x^7 + (a_3^2a_4^2 + a_3^2a_5^2 + a_4^2a_5^2 - a_1^2a_2^2)x^6 + a_3a_4a_5(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2a_1^2 - 2a_2^2)x^5 \\ & + (2(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)a_1^2a_2^2 - 2(a_3^2a_4^2 + a_3^2a_5^2 + a_4^2a_5^2)(a_1^2 + a_2^2) + a_3^2a_4^2a_5^2)x^4 \\ & + a_3a_4a_5(a_1^4 + a_2^4 + 6a_1^2a_2^2 - 2(a_1^2 + a_2^2)(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2))x^3 \\ & + ((a_1^4 + a_2^4)(a_3^2a_4^2 + a_3^2a_5^2 + a_4^2a_5^2) - 2a_3^2a_4^2a_5^2(a_1^2 + a_2^2) - a_1^2a_2^2(a_3^4 + a_4^4 + a_5^4))x^2 \\ & + a_3a_4a_5(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)(a_1^2 - a_2^2)^2x + a_3^2a_4^2a_5^2(a_1^2 - a_2^2)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

В §4 будет доказана неприводимость этого полинома над полем рациональных функций от переменных $a_1, a_2, \dots, a_5$.

Если рассматривать d -полином для многоугольника $(a_1, \dots, a_n)$ как элемент кольца многочленов от $(n + 1)$ -й переменной, то любая его однородная компонента, т.е. сумма всех мономов одинаковой полной степени, также будет, очевидно, d -полиномом для данного многоугольника. Это свойство сохраняется также при перестановке a_1 с a_2 и при всех перестановках переменных $a_3, \dots, a_n$. Следовательно, при необходимости можно считать, что $P_d(x)$ однороден по совокупности всех переменных $a_1, \dots, a_n, x$, а его коэффициенты симметричны по группам переменных $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3, \dots, a_n\}$. Будем также считать, что коэффициенты $P_d(x)$ взаимно просты в совокупности.

ЛЕММА 2. Радиус описанной вокруг многоугольника окружности – алгебраическая функция его сторон.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r – радиус окружности, изображенной на рис. 7, тогда r – корень полинома (2), записанного для треугольника (a_1, a_2, d) . Разложим этот полином по степеням d :

$$x^2d^4 + (a_1^2a_2^2 - 2(a_1^2 + a_2^2)x^2)d^2 + x^2(a_1^2 - a_2^2)^2 = Q(d).$$

В d -полиноме $P_d(x)$ для многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ заменим x на d и составим результат $R(Q(d), P_d(d))$ – это r -полином Герона для $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Подобно d -полиному, r -полином также можно считать однородным и симметричным уже по всем переменным $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Отметим еще одно следствие из леммы 1: любая диагональ выпуклого многоугольника является алгебраической функцией его сторон.

ЛЕММА 3. *Площадь выпуклого многоугольника – алгебраическая функция его сторон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . В основе индукции полином (1). Обозначения – на рис. 7. Пусть S' – площадь $(n-1)$ -угольника $(d, a_3, \dots, a_n)$,

$$P_{S'}(x) = \sum p_k(d, a_3, \dots, a_n)x^k$$

– соответствующий S -полином. Пусть Δ – площадь треугольника (a_1, a_2, d) , тогда $S' + \Delta = S$ – площадь n -угольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Подставляя $S' = S - \Delta$ в (12) вместо x , получаем

$$P_{S'}(S - \Delta) = \sum p_k(d, a_3, \dots, a_n)(S - \Delta)^k. \quad (9)$$

Раскроем в (9) скобки и перенесем все слагаемые, содержащие нечетные степени Δ , в правую часть равенства. После возведения в квадрат обеих частей соберем все слагаемые слева. В полученном многочлене выразим Δ через a_1, a_2, d и разложим его по степеням d . Обозначим этот многочлен от d через $Q(d)$. По лемме 1 существует d -полином для многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, обозначим его $P(x)$ и подставим d вместо x . Результат

$$R(P(d), Q(d)) \quad (10)$$

будет S -полиномом для многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

В S -полиноме $P_S(x)$ присвоим переменной x вес 2, остальные переменные сохраняют вес 1. Изобарические компоненты $P_S(x)$, т.е. суммы всех мономов одинакового веса, также будут, очевидно, S -полиномами. Итак, $P_S(x)$ можно считать изобарическим полиномом, кроме того можно считать, что $P_S(x)$ симметричен по $a_1, a_2, \dots, a_n$, а его коэффициенты взаимно просты в совокупности. Везде ниже “однородный” для S -полинома означает “изобарический”.

Для $f = r, d$ или S рассмотрим в соответствующем классе f -полиномов полином Герона минимальной по x степени. Как и раньше, обозначаем его $P_f(x)$.

ЛЕММА 4. *Полином $P_f(x)$ неприводим над полем рациональных функций от переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_f(x)$ разлагается на взаимно простые множители $P_1(x)$ и $P_2(x)$. По известной лемме Гаусса их коэффициенты можно считать полиномами от $a_1, a_2, \dots, a_n$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ следующие множества:

$$\begin{aligned} M^n &= \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < a_i < \sum_{j \neq i} a_j, \ i = 1, 2, \dots, n \right\}, \\ U_i &= \{ (a_1, \dots, a_n) \in M^n : P_i(f) \neq 0 \}, \quad i = 1, 2, \\ M_0^n &= \{ (a_1, \dots, a_n) \in M^n : R(a_1, \dots, a_n) = 0 \}, \end{aligned}$$

$f = f(a_1, \dots, a_n)$ – значение величины f (равной r, d или S) на многоугольнике $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; $R(a_1, \dots, a_n)$ – результат многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Рис. 8

На алгебраической поверхности M_0^n выберем регулярную точку $(b_1, \dots, b_n)$. Выберем также шар B с центром в этой точке так, чтобы после удаления из него M_0^n , он распался бы на две связные компоненты $B_1 \subset U_1$ и $B_2 \subset U_2$. Схематически эта ситуация изображена на рис. 8; кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ определяется ниже.

Пусть r – радиус окружности, описанной вокруг многоугольника $(b_1, \dots, b_n)$, а $M^n(r)$ – множество всех многоугольников из M^n , вписанных в эту окружность. Заметим, что $M^n(r)$ – вещественно аналитическая поверхность в $\mathbb{R}^n$: карта в окрестности точки $(a_1, \dots, a_n)$ при условии $a_i < 2r$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, строится с помощью параметризации $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \mapsto (a_1, \dots, a_n)$, где $a_i = 2r \sin \varphi_i$, $\varphi_i < \pi/2$, $\sum \varphi_i < \pi$. На $M^n(r)$ действует локальная группа G , порожденная движениями вершин многоугольника вдоль описанной окружности. Подгруппу движений i -й вершины обозначим G_i . Пусть γ_i – кривая в $M^n(r)$, полученная действием подгруппы G_i на многоугольник $(b_1, \dots, b_n)$. Каждая такая кривая является дугой эллипса в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в точке $(b_1, \dots, b_n)$ касательные векторы к этим эллипсам. Легко проверить, что любые $n-1$ из них линейно независимы и поэтому образуют базис касательного пространства к $M^n(r)$ в этой точке. С другой стороны, луч $(tb_1, \dots, tb_n)$ с $t > 0$ ввиду однородности $P_1(x)$ и $P_2(x)$ целиком лежит в M_0^n и вектор $(b_1, \dots, b_n)$ можно рассматривать как касательный к M_0^n в точке $(b_1, \dots, b_n)$. Геометрически очевидно и легко подтвердить прямым вычислением, что этот вектор не выражается линейно через касательные векторы к $M^n(r)$. Следовательно, среди кривых γ_i есть, по крайней мере, одна трансверсальная к M_0^n . Именно эта кривая обозначена Γ и изображена на рис. 8. Посмотрим теперь, как изменяется вдоль γ_i величина f . Если $f = d$, то при движениях G_i , $i \neq 1$, $i \neq 3$, d остается неизменной, а при движениях из G_3 это изменение определяется формулой

$$d^2 = a_3^2 - 2d_1 a_3 \cos \alpha + d_1^2,$$

обозначения см. на рис. 7; через α обозначен угол между a_3 и d_1 . Если в качестве параметра на γ_3 взять a_3 , видно, что d изменяется вдоль γ_3 аналитически. Если $f = S$, то представим S в виде суммы площадей треугольника с вершинами A_1, A_2, A_3 и многоугольника с вершинами $A_1, A_3, A_4, \dots, A_n$. Площадь последнего остается постоянной при движениях из G_2 , а изменение площади треугольника

определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin \beta,$$

где β — угол между сторонами a_1 и a_2 . При этом

$$a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \beta + a_2^2 = d^2. \quad (11)$$

Если считать, что сторона a_2 многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ не является диаметром окружности, то взяв ее за параметр вдоль γ_2 и выразив a_1 из (11), получим

$$a_1 = a_2 \cos \beta \pm \sqrt{d^2 - a_2^2 \sin^2 \beta}$$

(выбор знака перед корнем зависит только от многоугольника $(b_1, \dots, b_n)$). Выражая теперь S через a_2 , видим, что S также изменяется аналитически. Наконец, f , равное r , вообще сохраняет постоянное значение при всех движениях из G .

Итак, $P_1(f(a_1, \dots, a_n))$ — аналитическая функция на кривой Γ , тождественно равная нулю на Γ_1 , а потому и на Γ_2 . Противоречие с выбором $P_f(x)$ завершает доказательство леммы 4.

СЛЕДСТВИЕ. *Полином $P_f(x)$ из леммы 4 имеет также минимальную полную степень (минимальный вес, если $f = S$).*

ЛЕММА 5. *Неприводимый полином Герона $P_S(x)$ содержит только четные степени x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Площадь выпуклого вписанного многоугольника может быть выражена формулой

$$\begin{aligned} S(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) &= \frac{r^2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \varphi_k \cos \varphi_k \\ &\quad + \frac{r^2}{2} \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}), \end{aligned}$$

здесь предполагается, что при $k \leq n-1$ сторона a_k меньше диаметра, так что φ_k — острый угол, опирающийся на дугу, стянутую хордой a_k . Полагая

$$\sin \varphi_k = \frac{2t_k}{1+t_k^2}, \quad \cos \varphi_k = \frac{1-t_k^2}{1+t_k^2}, \quad t_k = \operatorname{tg} \frac{\varphi_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

получаем для сторон a_k и площади S выражения в виде рациональных функций от переменных t_k . Введем новую переменную $y = x/r^2$. Так как $P_S(x)$ однороден, после сокращения на подходящую степень переменной r получаем полином от y с коэффициентами, рационально зависящими от $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Отметим очевидные равенства

$$\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) = \operatorname{Re} \prod_{k=1}^{n-1} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad (12)$$

$$\sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) = \operatorname{Im} \prod_{k=1}^{n-1} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k). \quad (13)$$

Поэтому все слагаемые в (12) содержат множители $\sin \varphi_k$ в четном количестве, а в (13) – в нечетном. Таким образом, при замене всех t_k на $-t_k$ коэффициенты полинома Герона либо все остаются неизменными, либо все изменяют знак. Так как $S(-t_1, -t_2, \dots, -t_{n-1}) = -S(t_1, \dots, t_{n-1})$, этот полином делится не только на $y - S(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, но и на $y + S(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$. Это завершает доказательство леммы ввиду неприводимости $P_S(x)$.

§ 2. Произвольные многоугольники

ТЕОРЕМА 1. *Все f -полиномы, построенные в §1 для выпуклых многоугольников, будут f -полиномами произвольных вписанных многоугольников, при этом в коэффициенты f -полиномов следует подставлять ребра многоугольников, т.е. стороны со знаком “+” или “−”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем радиус описанной окружности r . Тор, порожденный локальной группой G движений вершин, обозначаем той же буквой G . Рассмотрим какой-нибудь выпуклый многоугольник $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Нумерация его вершин определяет на окружности направление отсчета углов, а вершина A_1 – начало отсчета. Так что этот многоугольник определяется последовательностью $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$ угловых координат своих вершин. Выражения для сторон, диагонали, соединяющей вершины A_1 и A_3 , и площади имеют вид:

$$\begin{aligned} a_k &= 2r \sin \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}, \quad k \leq n-1, \quad a_n = 2r \sin \frac{\theta_n}{2}, \\ d &= 2r \sin \frac{\theta_3}{2}, \\ S &= \frac{1}{2} r^2 \sum_{k=1}^n \sin(\theta_{k+1} - \theta_k). \end{aligned}$$

При повороте вершин A_i , $i = 2, \dots, n$, на углы φ_i эти формулы становятся следующими:

$$\begin{aligned} a_k &= 2r \sin \frac{\theta_{k+1} + \varphi_{k+1} - \theta_k - \varphi_k}{2}, \quad k \leq n-1, \quad a_n = 2r \sin \frac{\theta_n + \varphi_n}{2}, \\ d &= 2r \sin \frac{\theta_3 + \varphi_3 - \varphi_1}{2}, \\ S &= \frac{1}{2} r^2 \sum \sin(\theta_{k+1} + \varphi_{k+1} - \theta_k - \varphi_k), \end{aligned}$$

поэтому величины a_k , d и S являются аналитическими функциями переменных φ_i . При малых значениях φ_i многоугольник еще остается выпуклым, и подстановка этих величин в соответствующий полином Герона обращает его в тождественный нуль. В силу аналитичности это свойство сохраняется при произвольных φ_i . Заметим, что если движение из G приводит к перестановке вершин A_k и A_{k+1} , то ребро a_k изменяет знак – именно это правило в удобном для применения виде сформулировано во введении. Еще одно замечание касается d -полинома: чтобы избежать изменения знака d , следует при выяснении знаков ребер оставлять неподвижной не только вершину A_1 , но и вершину A_3 . Наконец, движениями из G выпуклый многоугольник можно превратить в любой, вписанный в ту же окружность, и наоборот. Это завершает доказательство теоремы.

§ 3. Строение f -полиномов Герона

ЛЕММА 6. Производная функции $F(a_1, \dots, a_n)$ по направлению действия подгруппы $G_2 \subset G$ вращений вершины A_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}_1}{a_1} \frac{1}{a_1^2 - a_2^2 - d^2} (d^2 \mathcal{D}_A + (a_1^2 - a_2^2) \mathcal{D}_s) F(a_1, \dots, a_n), \\ \mathcal{D}_A = a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} - a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad \mathcal{D}_s = a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

$\dot{a}_1$ — производная a_1 по параметру подгруппы, другие обозначения см. на рис. 7.

Отбросим несущественный множитель перед квадратными скобками и рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}_x = x^2 \mathcal{D}_A + (a_1^2 - a_2^2) \mathcal{D}_s.$$

Очевидно, что он определяет дифференцирование в кольце полиномов от x с рационально зависящими от $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентами.

ЛЕММА 7. Если d -полином $P_d(x)$ неприводим, то $\mathcal{D}_x P_d$ делится на $P_d(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$P_d(x) = \sum_{k=0}^N p_k(a_1, a_2, \dots, a_n) x^k = \sum_{k=0}^N p_k x^k. \quad (15)$$

Тогда

$$\mathcal{D}_x \circ P_d(x) = \sum (\mathcal{D}_x \circ p_k) x^k + \sum k p_k x^{k-1} \mathcal{D}_x \circ x = \sum (\mathcal{D}_x \circ p_k) x^k.$$

Полагая $x = d = d(a_1, \dots, a_n)$ и пользуясь (14), находим

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (d^2 \mathcal{D}_A + (a_1^2 - a_2^2) \mathcal{D}_s) P_d(d) \\ &= \sum \mathcal{D}_x p_k \big|_{x=d} d^k + \sum k p_k d^{k-1} (d^2 \mathcal{D}_A + (a_1^2 - a_2^2) \mathcal{D}_s) d = \mathcal{D}_x \circ P_d \big|_{x=d}. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено, поскольку d не изменяется под действием G_2 . Следовательно, $\mathcal{D}_x \circ P_d$ также d -полином, а потому делится на $P_d(x)$.

ЛЕММА 8. Справедливо следующее: $\mathcal{D}_x \circ P_d = \lambda(a_1^2 - a_2^2) P_d$, где λ — четное положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 $\mathcal{D}_x \circ P_d = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)P_d$. По лемме Гаусса α , β и γ — полиномы от $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для старшего коэффициента в (15) имеем $\mathcal{D}_A p_N = \alpha p_N$. Так как p_N однородный, симметричный по a_1 и a_2 многочлен, то либо $\mathcal{D}_A p_N$ тождественно равен нулю, либо имеет ту же степень, что и p_N . Следовательно, α — константа. Но $\mathcal{D}_A p_N$ кососимметричный по a_1 и a_2 , а p_N — симметричный, поэтому $\alpha = 0$. Для младшего коэффициента p_0 в (15) имеем $(a_1^2 - a_2^2)\mathcal{D}_s p_0 = \gamma p_0$. Вновь $\mathcal{D}_s p_0$ — либо тождественный нуль, либо имеет ту же степень, что и p_0 . Многочлен γ является однородным, кососимметричным, потому что таков $a_1^2 - a_2^2$, таким образом, γ пропорционален $a_1^2 - a_2^2$. Итак, $\gamma = \lambda(a_1^2 - a_2^2)$, где λ — константа. Так как множитель $\beta x + \gamma$ должен быть однородным и кососимметричным по a_1 и a_2 , то для β остается только возможность $\beta = \beta_0(a_1 - a_2)$ с константой β_0 . Покажем, что $\beta_0 = 0$. Любой коэффициент в $P_d(x)$ имеет вид:

$$\sum p_{ij}(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i), \quad (16)$$

где p_{ij} — симметричные, однородные многочлены от $a_3, \dots, a_n$. Обратимся вновь к рис. 7. Поворот на угол 2π вершины A_2 не изменяет d , но стороны a_1 и a_2 изменят знаки. При подстановке $-a_1$ и $-a_2$ в неприводимое уравнение $P_d(x) = 0$ оно сохранит свой вид. Однако (16) теперь станет следующим:

$$\sum p_{ij}(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i)(-1)^{i+j}.$$

Следовательно, все суммы $i + j$ во всех коэффициентах $P_d(x)$ имеют одинаковую четность. Старший коэффициент $P_d(x)$ принадлежит ядру $\mathcal{D}_A$ и поэтому имеет вид:

$$\sum p_l(a_3, \dots, a_n)(a_1 a_2)^l.$$

Следовательно, все суммы $i + j$ четные, в частности, такое и λ . Применим оператор $\mathcal{D}_A$ к коэффициенту (16) и он приобретет вид

$$\sum p_{ij}(j - i)(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i). \quad (17)$$

При подстановке $a_2 = -a_1$ (17) обратится в нуль, так как $i + j$ все четные. Таким образом, левая часть тождества

$$(x^2 \mathcal{D}_A + (a_1^2 - a_2^2) \mathcal{D}_s) \circ P_d(x) = (a_1 - a_2)(\beta_0 x + \lambda(a_1 + a_2))P_d(x)$$

обращается в нуль при $a_2 = -a_1$, а правая часть имеет вид $2a_1\beta_0 P_d(x)$. Все коэффициенты этой правой части не могут обращаться в нуль при $a_2 = -a_1$, так как это означало бы их делимость на $a_1 + a_2$. Следовательно, $\beta_0 = 0$. Осталось показать, что $\lambda > 0$. Для $n = 4$ это видно из формулы (5) — там $\lambda = 2$. Если $n > 4$, то среди многоугольников $(a_1, -a_1, a_3, \dots, a_n)$ есть имеющий нулевую диагональ, поэтому свободный член p_0 должен делиться на $a_1 + a_2$. Это завершает доказательство леммы 8.

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты неприводимого d -полинома удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ApN} &= \mathcal{D}_{ApN-1} = 0, & \mathcal{D}_s p_1 &= \lambda p_1, & \mathcal{D}_s p_0 &= \lambda p_0, \\ \mathcal{D}_{Apk} &= (a_1^2 - a_2^2)(\lambda - \mathcal{D}_s)p_{k+2}, & k &= 0, 1, \dots, N-2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Для многоугольника с четным числом ребер неприводимый d -полином содержит только четные степени переменной x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен $P_d(x)$ однородный, поэтому одновременное изменение знаков у всех переменных не изменяет уравнения $P_d(x) = 0$. С другой стороны, поворот на 2π каждой вершины с четным номером приводит к изменению знака всех ребер, не изменяя самого уравнения, так как диагональ d остается неизменной. Следовательно, вместе с корнем x уравнение $P_d(x) = 0$ имеет и корень $-x$.

Для многоугольников с четным числом сторон введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник имеет *тип 0*, если количество отрицательных ребер в нем четно, в противном случае многоугольник имеет *тип 1*.

ЛЕММА 10. Вращением вершин на 2π можно превратить любой многоугольник типа 0 в многоугольник с положительными ребрами, а многоугольник типа 1 – в многоугольник с одним отрицательным, наперед заданным ребром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

В каждом коэффициенте неприводимого $P_d(x)$ заменим переменную a_1 на $-a_1$. Обозначим новый полином $P_d^-(x)$. Положим также $P_d^+(x) = P_d(x)$.

ЛЕММА 11. Диагонали многоугольников типа 0 являются корнями полинома $P_d^+(x)$, а диагонали многоугольников типа 1 корнями полинома $P_d^-(x)$, при этом в коэффициенты этих полиномов нужно подставлять уже не ребра, а их длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма сразу следует из двух предыдущих.

ЛЕММА 12. Полиномы $P_d^+(x)$ и $P_d^-(x)$ взаимно просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином $P_d^-(x)$ очевидно неприводим, как и $P_d^+(x)$. Поэтому они либо взаимно просты, либо совпадают. Последнее невозможно, это следует, например, из приведенных ниже формул для старшего коэффициента полинома $P_d(x)$.

СЛЕДСТВИЕ. Перестановка сторон многоугольника не изменяет его тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая такая перестановка получается последовательным применением элементарных, т.е. перестановок двух соседних сторон, скажем a_{i-1} и a_i . Диагональ, соединяющая вершины A_{i-1} и A_{i+1} , при этом не изменяется и, следовательно, остается корнем соответствующего d -полинома P_d^+ или P_d^- .

Рассмотрим теперь многоугольники с нечетным числом ребер и отмеченной диагональю d , соединяющей вершины A_1 и A_3 . Для таких многоугольников введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник с ребрами $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ имеет d -тип 0, если тип 0 имеет многоугольник $(d, a_3, \dots, a_n)$. Аналогично определяется d -тип 1.

ЛЕММА 13. Диагональ d многоугольника d -типа 0 является корнем полинома $P_d^+ = P_d$ при подстановке в его коэффициенты длин ребер этого многоугольника; при том же условии диагональ многоугольника d -типа 1 является корнем полинома $P_d^-(x) = P_d(-x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим d -тип 0. По лемме 10 можно считать все ребра многоугольника $(d, a_3, \dots, a_n)$ положительными. При этом ребра a_1 и a_2 исходного многоугольника имеют либо одинаковые, либо разные знаки. Вращая при необходимости вершину A_2 на 2π , можно в первом случае считать a_1 и a_2 положительными, и в этом случае утверждение леммы очевидно. Будем считать, что знак минус имеет ребро a_2 . При подстановке в коэффициенты p_k полинома P_d имеем

$$p_k(a_1, -a_2, a_3, \dots, a_n) = \sum p_{kij}(a_3, \dots, a_n)(a_1^i(-a_2)^j + a_1^j(-a_2)^i). \quad (18)$$

В доказательстве леммы 8 отмечалось, что все суммы $i+j$ четные. Следовательно, (18) имеет вид

$$\sum p_{kij}(a_3, \dots, a_n)(-1)^i(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i).$$

Вращением всех вершин с нечетными номерами, начиная с 3-й, превращаем многоугольник $(a_1, -a_2, \dots, a_n)$ в $(a_1, a_2, -a_3, \dots, -a_n)$, при этом диагональ d изменит знак. Следовательно, замена в $P_d(x)$ всех a_l , $l \geq 3$, на $-a_l$ и x на $-x$ не изменяет уравнения $P_d(x) = 0$.

Коэффициенты этого уравнения имеют вид

$$\sum p_{kij}(-a_3, \dots, -a_n)(-1)^k(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i) = \sum p_{kij}(-1)^{l_{ij}+k}(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i), \quad (19)$$

где l_{ij} — степень полинома p_{kij} . Если L — полная степень P_d , то $i+j+l_{ij}+k=L$, и так как $i+j$ четно, то $l_{ij}+k$ имеет ту же четность, что и L . Поэтому (19) можно заменить на

$$(-1)^L \sum p_{kij}(a_3, \dots, a_n)(a_1^i a_2^j + a_1^j a_2^i).$$

Таким образом, все коэффициенты в (19) либо совпадают с коэффициентами полинома $P_d(x)$, либо все отличаются от них знаком. Это доказывает лемму для d -типа 0. Заметим еще, что одновременно доказана одинаковая четность всех показателей степеней, с которыми a_1 и a_2 входят во все коэффициенты $P_d(x)$. Это, в свою очередь, влечет четность всех этих показателей, так как в противном случае все коэффициенты $P_d(x)$ делились бы на произведение $a_1 a_2$. Для младшего коэффициента получаем его делимость на $(a_1^2 - a_2^2)^2$.

Рассмотрим теперь многоугольники d -типа 1. По лемме 10 можно считать, что среди ребер многоугольника $(d, a_3, \dots, a_n)$ только ребро d отрицательно. Знаки ребер a_1 и a_2 многоугольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ не имеют значения ввиду четности степеней их вхождения в коэффициенты $P_d(x)$. Следовательно, d — корень полинома $P_d(-x)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Степени вхождения переменных $a_3, \dots, a_n$ во все коэффициенты $P_d(x)$ при степенях x одинаковой четности все либо четные, либо нечетные. Поэтому коэффициенты, содержащие нечетные степени этих переменных, делятся на произведение $a_3 a_4 \cdots a_n$.*

Если в d -полиноме для n -угольников положить $a_n = 0$, то получим $(n-1)$ -полином для $(n-1)$ -угольников. Из лемм 11 и 13 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *При $a_n = 0$ полином $P_d(x)$ делится на произведение $P_d^+(x)P_d^-(x)$ d -полиномов для $(n-1)$ -угольников.*

Применим следствие 2 для вычисления степени неприводимого d -полинома 6-угольников. Вычисления старшего и младшего коэффициентов в результате (7) дают следующие формулы:

$$a_3^4(a_3 t - a_4 a_5 a_6)(a_4 t - a_3 a_5 a_6)(a_5 t - a_3 a_4 a_6)(a_6 t - a_3 a_4 a_5), \quad (20)$$

$$a_3^8(a_2^2 - a_1^2)^4(a_2 a_5 a_6 - a_1 a_3 a_4)(a_2 a_4 a_6 - a_1 a_3 a_5)(a_2 a_4 a_5 - a_1 a_3 a_6) \\ \times (a_1 a_5 a_6 - a_2 a_3 a_4)(a_1 a_4 a_6 - a_2 a_3 a_5)(a_1 a_4 a_5 - a_2 a_3 a_6), \quad (21)$$

(20) – это старший, а (21) – младший коэффициенты в (7), $t = a_1 a_2$. Степень (7) по x равна 18. В силу свойств симметричности и однородности неприводимый d -полином, который делит результат (7), должен иметь степень не выше 14, но по следствию 2 с учетом (8) он не может иметь степень менее 14.

Обобщение формулы (20) дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Старший коэффициент неприводимого d -полинома для многоугольника с четным числом сторон $n = 2m$ имеет вид:*

$$\prod_{\substack{3 \leq i_1 < \dots < i_{m-2} \leq 2m \\ 3 \leq j_1 < \dots < j_m \leq 2m, i_l \neq j_k}} (a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{m-2}} t + (-1)^m a_{j_1} \cdots a_{j_m}), \quad t = a_1 a_2.$$

Старший коэффициент d -полинома многоугольника с нечетным числом сторон равен произведению $a_3 a_4 \cdots a_n$.

Доказательство этого предложения опускается, однако ниже указывается его геометрический смысл (см. предложение 2).

Нам понадобится одно следствие из этого предложения, которое, впрочем, может быть получено и независимо:

ЛЕММА 14. *Старший коэффициент d -полинома не обращается в 0 при $a_1 = 0$.*

ЛЕММА 15. *Старший коэффициент неприводимого S -полинома можно считать равным 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по числу ребер. Обозначения из леммы 3. Возьмем в качестве полинома $P_{S'}(x)$ неприводимый S -полином. По предположению индукции его старший коэффициент можно считать равным 1. Младший коэффициент в полиноме $Q(d)$ будет тогда единственным, имеющим старшую степень по S .

Таким образом, результат (10) имеет в качестве старшего коэффициента некоторую степень старшего коэффициента полинома $P(d)$. Старший коэффициент неприводимого S -полинома должен быть симметричным делителем $P(d)$, имеющего вид

$$\sum p_l(a_3, \dots, a_n)(a_1 a_2)^l. \quad (22)$$

По лемме 14 свободный член в (22) не равен нулю, значит симметричный и однородный делитель у (22) может быть только константой.

ЛЕММА 16. *Пусть многоугольник имеет четное число сторон. Тогда площади многоугольников типа 0 являются корнями полинома $P_S^+(x) = P_S(x)$. Площади многоугольников типа 1 являются корнями полинома $P_S^-(x)$, получаемого из $P_S(x)$ изменением знака переменной a_1 . Полиномы P_S^+ и P_S^- взаимно просты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что для вычисления площади в полиномы $P_S^\pm(x)$ нужно подставлять уже не ребра, а их длины. Из однородности и леммы 15 получаем, что одновременное изменение знаков у переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ не изменяет полинома $P_S(x)$. Для многоугольников обоих типов это изменение достигается поворотом вершин с четными номерами на 2π . Применение леммы 10 доказывает первые два утверждения. Так как оба полинома P_S^+ и P_S^- неприводимы, то они либо взаимно просты, либо совпадают. Последнее исключается обращением к результату (10) из леммы 3. Этот результат обращается в 0 только на общих корнях многочленов $P(d)$ и $Q(d)$. Если в качестве P взять P_d^+ из леммы 11, то среди его корней нет диагоналей многоугольников типа 1, поэтому результат (10) не будет делиться на $P_S^-(x)$.

ЛЕММА 17. *Все площади многоугольников с нечетным числом сторон получаются подстановкой их длин в коэффициенты $P_S(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть многоугольник с одним отрицательным ребром, скажем, a_1 . Поворачивая на 2π все вершины с нечетными номерами, начиная с 3-й, превращаем все ребра в отрицательные. Однако одновременное изменение знака у всех переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ не изменяет полинома $P_S(x)$.

ЛЕММА 18. *Если число ребер n многоугольника нечетно, то после подстановки в $P_S(x)$ $a_n = 0$ получаем его делимость на произведение $P_S^+ P_S^-$ S -полиномов для $(n-1)$ -угольников. Если n четно, то подобная подстановка дает делимость $P_S^+ P_S^-$ на квадрат S -полинома для $(n-1)$ -угольников.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго достаточно у P_S^- вместо “ $-a_1$ ” брать “ $-a_n$ ”.

ЛЕММА 19. *Свободный член S -полинома делится на произведение*

$$\prod_{i=1}^n (a_1 + \dots + a_{i-1} - a_i + a_{i+1} + \dots + a_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – выпуклый многоугольник. Зафиксируем сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ и устремим a_n к этой сумме. Выпуклый многоугольник начнет “сплющиваться”, и его площадь устремится к нулю. С учетом леммы 15 мы получаем в пределе нулевой корень у полинома $P_S(x)$. Это доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ. *Свободный член S -полинома делится на любое произведение вида*

$$\prod_{i_1, i_2, \dots, i_k} (a_1 + \dots - a_{i_1} + \dots - a_{i_2} + \dots - a_{i_k} + \dots + a_n). \quad (23)$$

При этом для многоугольника с четным числом ребер следует k брать нечетным, а для многоугольника с нечетным числом ребер, наоборот, – четным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу получается из леммы 19 применением вращений соответствующих вершин многоугольника. В частности, для n -угольника с нечетным n получаем делимость свободного члена на периметр многоугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ. После деления свободного члена S -полинома на все взаимно простые произведения вида (23) остается еще многочлен от $a_1, a_2, \dots, a_n$, геометрический смысл которого такой: обращение его в нуль на ребрах многоугольника означает, что площадь этого многоугольника равна нулю.

Рассмотрим еще r -полиномы.

ЛЕММА 20. *Неприводимый r -полином $P_r(x)$ имеет ненулевые коэффициенты только при четных степенях x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для четных n доказываем так же, как для d -полиномов; для нечетных n следует из четности вхождения всех степеней переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ в коэффициенты r -полинома. В самом деле, переменные a_1 и a_2 входят в $P_d(x)$ в четных степенях, то же верно и для результата из леммы 2. Остается воспользоваться симметрией коэффициентов $P_r(x)$ по всем переменным. Теперь то, что r и $-r$ – оба корни, следует из однородности r -полинома.

Аналоги лемм 16–18 сведем воедино.

ЛЕММА 21. 1) *Радиусы описанных вокруг многоугольников типа 0 окружностей являются корнями полинома $P_r^+(x) = P_r(x)$. Для многоугольников типа 1 – корнями $P_r^-(x)$, получаемого из $P_r(x)$ изменением знака переменной a_1 . Полиномы P_r^+ и P_r^- взаимно просты.*

2) *Все радиусы описанных вокруг многоугольников с нечетным числом сторон окружностей – корни полинома $P_r(x)$.*

3) *Если число ребер n многоугольника нечетно, то после подстановки $a_n = 0$ в коэффициенты $P_r(x)$ получаем его делимость на произведение $P_r^+(x)P_r^-(x)$, если же n – четно, то та же подстановка обеспечивает делимость $P_r^+P_r^-$ на квадрат неприводимого r -полинома для $(n-1)$ -угольников.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как у лемм 16–18.

Отметим одно “топологическое” следствие из леммы 20. Предположим, что n -угольник $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0)$ вписан в окружность радиуса r_0 и обладает следующими свойствами:

- 1) существует диагональ $d_0 \neq 0$ (пусть это опять диагональ A_1A_3), которая является простым корнем $P_d(x)$;
- 2) радиус r_0 – простой корень r -полинома $P_{r,n-1}(x)$ для $(n-1)$ -угольника $(d_0, a_3^0, \dots, a_n^0)$;
- 3) произвольное, но малое шевеление ребер последнего превращает его в $(n-1)$ -угольник, который может быть вписан в окружность радиуса, мало отличающегося от r_0 .

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 20. *Произвольное, но малое шевеление ребер $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ дает n -угольник, который вписывается в окружность радиуса, близкого к r_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином $P_{r,n-1}(x)$ по лемме 20 содержит только четные степени переменной x . Для любого n -угольника $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ с диагональю $d \neq 0$ радиус описанной окружности r можно выразить из полинома (2). Подставив это выражение вместо x^2 в $P_{r,n-1}(x)$, получим рациональную функцию

$$P_{r,n-1}\left(\frac{a_1^2 a_2^2 d^2}{(a_1 + a_2 + d) \cdots (-a_1 + a_2 + d)}\right).$$

Освобождаясь от знаменателя, получим d -полином для $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Пусть d' – какой-нибудь корень неприводимого d -полинома, который получился при подстановке в его коэффициенты ребер $a_1, a_2, \dots, a_n$, тогда

$$\frac{a_1^2 a_2^2 d'^2}{(a_1 + a_2 + d') \cdots (-a_1 + a_2 + d')}$$

будет корнем r -полинома $P_{r,n-1}(x)$, если в его коэффициенты подставить “ребра” $(d', a_3, \dots, a_n)$. Малое шевеление ребер n -угольника $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0)$ приведет к малому изменению корня d_0 . Если d – новый корень, то радиус окружности, описанной около треугольника (d, a_1, a_2) , близок к r_0 . С другой стороны, он останется корнем $P_{r,n-1}(x)$. Так как r_0 – простой корень, то радиусы окружностей, описанных вокруг треугольника (d, a_1, a_2) и $(n-1)$ -угольника $(d, a_3, \dots, a_n)$, совпадут.

В связи с доказанным следствием заметим, что малые шевеления ребер многоугольника общего положения можно получить, двигая слегка его вершины вдоль описанной окружности, а затем раздувая или сжимая эту окружность. Действительно, запишем ребра $a_1, a_2, \dots, a_n$ из теоремы синусов через полярные углы φ_i вершин многоугольника ($\varphi_1 = 0$)

$$a_1 = 2r \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad a_i = 2r \sin \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{2}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad a_n = 2r \sin \frac{\varphi_n}{2}.$$

Рассмотрим отображение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mapsto (a_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, a_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$, определенное формулами

$$\begin{aligned} a_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= 2(1 + \varepsilon_1)r \sin \frac{\varphi_2 + \varepsilon_2}{2}, \\ a_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= 2(1 + \varepsilon_1)r \sin \frac{\varphi_n + \varepsilon_n}{2}, \\ a_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= 2(1 + \varepsilon_1)r \sin \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{2}, \\ i &= 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$ матрица Якоби этого отображения имеет вид:

$$r^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\varphi_2}{2} & \cos \frac{\varphi_2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} & -\cos \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} & \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 \sin \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} & 0 & -\cos \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} & \cos \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 \sin \frac{\varphi_n}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos \frac{\varphi_n}{2} \end{pmatrix}.$$

На многоугольниках общего положения ее определитель отличен от 0.

Теперь коротко затронем вопрос, который обходился молчанием, — это возможность одновременного обращения в нуль всех коэффициентов r - или d -полиномов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольник с ненулевыми ребрами назовем *изгибаемым*, если возможно непрерывное изменение его конфигурации с одновременным непрерывным изменением радиуса описанной окружности (длины ребер при этом сохраняются).

Примеры изгибаемых многоугольников изображены на рис. 2 и 3. Очевидно, что подстановка ребер изгибаемого многоугольника в коэффициенты соответствующего r - или d -полинома обращает их все в нуль, но обратное неверно, например, подстановка в d -полином сторон правильного выпуклого 6-угольника обращает в нуль все его коэффициенты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть n -угольник имеет ненулевые длины ребер. Подстановка этих ребер в коэффициенты соответствующего неразложимого r - или d -полинома обращает их все в нуль только в следующих случаях:

- 1) $n = 4k$, n -угольник имеет тип 1, а все его ребра четную кратность, или получается из такого многоугольника перестановкой ребер, или любой другой вписанный n -угольник типа 1 с такими же ребрами;
- 2) $n = 4k + 2$, n -угольник устроен так же, как в п. 1), с заменой типа 1 на тип 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многоугольники с кратными ребрами из п.п. 1), 2) изгибаемые, как и те, что получаются перестановками сторон из них. Пусть, наоборот, все коэффициенты r -полинома обратились в 0, тогда все коэффициенты всех d -полиномов обратятся в 0. Обращение к формулам для старших коэффициентов d -полиномов из предложения 1 приводит к условиям п.п. 1) или 2). Подробности опускаются.

Подведем краткий итог §3.

ТЕОРЕМА 2. *Если число сторон многоугольника нечетно, то квадрат его площади и квадрат радиуса описанной около него окружности являются корнями S - или r -полинома для выпуклого многоугольника, величина же диагонали такого многоугольника будет корнем d -полинома $P_d(x)$ выпуклого многоугольника или корнем $P_d(-x)$, в зависимости от того, имеет ли многоугольник d -тип 0 или d -тип 1.*

Если число сторон многоугольника четно, то квадраты площади, радиуса описанной окружности и диагонали будут корнями соответственно полиномов P_S^+ , P_r^+ , P_d^+ или P_S^- , P_r^- , P_d^- , в зависимости от того, имеет данный многоугольник тип 0 или тип 1, исключение составляют многоугольники, перечисленные в предложении 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для того чтобы построить r - и d -полиномы многоугольников из предложения 2, которые не являются изгибаемыми (например, выпуклых), вероятно достаточно рассмотреть расширение основного поля с помощью подходящего корня S -полинома, разлагая в этом поле r - и d -полиномы на множители. Поэтому естественный интерес представляет задача вычисления группы Галуа построенных полиномов Герона.

§ 4. Пятиугольники

Начнем с доказательства неприводимости d -полинома (8). Пусть $P_d(x)$ – неприводимый $d_{1,3}$ -полином для 5-угольников, тогда его свободный член должен делиться на $(a_1^2 - a_2^2)^2$ (см. конец доказательства леммы 13 для d -типа 0). Из следствия 2 и формулы (5) вытекает, что свободный член в $P_d(x)$ не может не содержать переменных a_3, a_4, a_5 , поэтому он пропорционален либо $a_3 a_4 a_5 (a_1^2 - a_2^2)^2$, либо $a_3^2 a_4^2 a_5^2 (a_1^2 - a_2^2)^2$. Те же аргументы дают зависимость от a_3, a_4, a_5 старшего коэффициента $P_d(x)$, следовательно, он пропорционален произведению $a_3 a_4 a_5$. Итак, если $P_d(x)$ не совпадает с (8), он должен иметь 4-ю степень по x . Применение следствия 2 завершает доказательство неприводимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существует не более семи 5-угольников с заданными длинами ребер и вписанных в окружности попарно различных радиусов. Оценка является точной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нем, очевидно, нуждается только точность оценки. Рассмотрим “правильные” 5-угольники с длинами ребер, равными 1. Два таких 5-угольника изображены на рис. 1 и 5, еще один – выпуклый. Все $d_{i,i+2}$ -полиномы имеют в этом случае один и тот же вид:

$$x^7 + 2x^6 - x^5 - 5x^4 - 4x^3 - x^2 = x^2(x+1)^3 \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right). \quad (24)$$

Слегка сдвинув вдоль описанной окружности вершины 5-угольника с 3-кратным ребром, превратим его в следующий (см. рис. 9).

Такое шевеление ребер приводит к разрушению кратных корней полинома (24), при этом -1 превращается в три близких к -1 простых корней, а нулевой корень

Рис. 9

распадается на два близких корня разных знаков. Удобно представить 5-угольник на рис. 9 парой $\{-d_{5,2}, -d_{1,3}\}$ его маленьких диагоналей (знаки “ $\pm$ ” совпадают со знаками соответствующих корней $d_{i,i+2}$ -полиномов). Четыре “родственников” этого 5-угольника представляются тогда парами $\{+d_{1,3}, -d_{2,4}\}$, $\{+d_{2,4}, -d_{3,5}\}$, $\{+d_{3,5}, -d_{4,1}\}$, $\{+d_{4,1}, +d_{2,5}\}$. Все 5-угольники расположены в этом списке в порядке возрастания радиуса описанной окружности. Это видно из сравнений

$$r_1 < r(a_3, a_4, a_5) < r_2 < r(a_1, a_4, a_5) < r_3 < r(a_1, a_2, a_5) < r_4 < r(a_1, a_2, a_3) < r_5,$$

здесь $r(a_i, a_j, a_k)$ – радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами a_i, a_j, a_k . То, что перечисленные 5-угольники действительно могут быть вписаны в окружности, можно показать так: 5-угольник $\{+d_{1,3}, -d_{2,4}\}$ имеет $d_{1,3}$ -тип 0, т.е. 4-угольник $(d_{1,3}, a_3, a_4, a_5)$ выпуклый и может быть вписан; то, что радиус описанной вокруг него окружности совпадает с радиусом окружности, описанной вокруг треугольника $(a_1, a_2, d_{1,3})$, доказывается, как в следствии леммы 20; для остальных 5-угольников – индукция по номеру в списке. Упомянутое следствие показывает также, что правильные “звезда” и выпуклый 5-угольник после возмущения ребер могут быть вписаны в окружности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Численный анализ показывает большую чувствительность d -полинома к возмущениям ребер. Например, 5-угольников с длинами ребер $(1; 1.05; 1.1; 1.15; 1.2)$ уже только пять (два корня полинома (8) оказываются комплексными). С другой стороны, действительный корень d -полинома не обязательно будет чьей-то диагональю. Например, 5-угольников с ребрами $(5, 4, 3, 2, 1)$ – только три, хотя действительных корней у d -полинома (8) – пять.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. S -полином для 5-угольников имеет степень по S , равную 14.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После преобразований приведем многочлен (9) к виду

$$S^4 - 2(S_3^2 + S_4^2)S^2 + (S_3^2 - S_4^2)^2 = (S^2 - (S_3 + S_4)^2)(S^2 - (S_3 - S_4)^2),$$

здесь

$$16S_3^2 = (d + a_1 + a_2)(-d + a_1 + a_2)(d - a_1 + a_2)(d + a_1 - a_2),$$

$$16S_4^2 = (-d + a_3 + a_4 + a_5)(d - a_3 + a_4 + a_5)(d + a_3 - a_4 + a_5)(d + a_3 + a_4 - a_5).$$

Пользуясь стандартной формулой для вычисления результата, приходим к следующему выражению для результата (10):

$$\begin{aligned} & a_3^4 a_4^4 a_5^4 \prod_{i=1}^7 (S^4 - 2(S_{3i}^2 + S_{4i}^2)S^2 + (S_{3i}^2 - S_{4i}^2)^2) \\ &= a_3^4 a_4^4 a_5^4 \prod_{i=1}^7 (S^2 - (S_{3i} + S_{4i})^2)(S^2 - (S_{3i} - S_{4i})^2), \end{aligned} \quad (25)$$

где S_{3i} и S_{4i} получаются после подстановки в формулы для S_3^2 и S_4^2 i -го корня полинома (8). Из формулы (25) видно, что неприводимый S -полином не может иметь степень большую 14, так как в противном случае он имел бы делитель 4-й степени по S с рациональными коэффициентами. Покажем, что его степень не менее 14, параллельно будет найден явный вид свободного члена неприводимого S -полинома.

Положим $a_1 = 0$. В этом случае корни полинома (8) легко вычисляются: имеются три простых корня $-a_3 a_4 / a_5$, $-a_3 a_5 / a_4$, $-a_4 a_5 / a_3$ и два двукратных $\pm a_2$. Подставляя эти корни в (25), получаем разложение

$$\begin{aligned} & \left(a_3^4 S^2 + \frac{1}{16} [\dots]_1^2 \right) \left(a_4^2 S^2 + \frac{1}{16} [\dots]_2^2 \right) \left(a_3^2 S^2 + \frac{1}{16} [\dots]_3^2 \right) \\ & \times \left(S^2 + \frac{1}{16} (a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_2^2)^2 \right) \left(S^2 + \frac{1}{16} (a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_2^2)^2 \right) \\ & \times \left(S^2 + \frac{1}{16} (-a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2)^2 \right) \\ & \times \left(S^2 - \frac{1}{16} (a_3 + a_4 + a_5 + a_2)(a_3 + a_4 - a_5 - a_2) \right. \\ & \times (a_3 - a_4 + a_5 - a_2)(-a_3 + a_4 + a_5 - a_2) \left. \right)^4 \\ & \times \left(S^2 - \frac{1}{16} (a_3 + a_4 + a_5 - a_2)(a_3 + a_4 - a_5 + a_2) \right. \\ & \times (a_3 - a_4 + a_5 + a_2)(-a_3 + a_4 + a_5 + a_2) \left. \right)^4. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражения, обозначенные многоточием в квадратных скобках, не представляют интереса ввиду их несимметричности, поэтому приведем лишь первое из них — остальные аналогичны:

$$[\dots]_1 = a_5^4 - a_5^2 a_4^2 - a_5^2 a_3^2 - a_5^2 a_2^2 + 2a_3^2 a_4^2.$$

Симметричная часть разложения (26) получается отбрасыванием первых трех множителей. Выясним, какие из оставшихся войдут в разложение на множители неприводимого S -полинома. По лемме 19 и ее следствию свободный член последнего должен делиться на произведение

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_5) \prod_{i=1}^5 (a_1 + \dots - a_i + \dots + a_5) \prod_{i_1 < i_2} (a_1 + \dots - a_{i_1} + \dots - a_{i_2} + \dots + a_5). \quad (27)$$

Все множители из (27) входят с $a_1 = 0$ в две последние внешние скобки в (26). Выражения в этих скобках – это S -полиномы для 4-угольников типа 1 и 0 соответственно и на них по лемме 18 должен делиться ($a_1 = 0$) неприводимый S -полином 5-угольника. Так как степень (27) равна 16, то последний может делиться либо на квадраты указанных скобок, либо на их 4-е степени. Однако последняя возможность дает завышенную степень S -полинома. С другой стороны, первые три из оставшихся множителей – все должны войти в S -полином ввиду его симметричности, а также существования 5-угольников с нулевой площадью. Итак, показано, что степень S -полинома 5-угольника равна 14. В поле разложения неприводимого S -полинома он приобретает следующий вид:

$$\prod_{i=1}^7 (x^2 - (S_{4i} \pm S_{3i})^2),$$

здесь выбор знака “+” или “−” у “площади” S_{3i} , т.е. выбор ветви квадратного корня, зависит от корня d_i полинома (8) и может быть сделан только локально. Например, если нумерация корней d_i соответствует нумерации 5-угольников в списке из предложения 3, то этот выбор в окрестности точки $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ должен быть такой: $+-+--+$. Завершим вычисление свободного члена S -полинома. Остается найти однородный, симметричный множитель 12-й степени. При ограничении $a_1 = 0$ этот множитель имеет вид

$$(a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_2^2)^2 (a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_2^2)^2 (-a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_2^2)^2.$$

Так как все переменные a_i входят в неприводимый S -полином для многоугольников с нечетными числом ребер в четных степенях, то в общем случае искомым множителем записывается в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^5 t_i^6 - 2 \sum_{i_1 \neq i_2} t_{i_1}^5 t_{i_2} - \sum t_{i_1}^4 t_{i_2}^2 + 6 \sum_{i_2 < i_3} t_{i_1}^4 t_{i_2} t_{i_3} + 4 \sum t_{i_1}^3 t_{i_2}^3 \\ & - 4 \sum_{i_1 \neq i_s} t_{i_1}^3 t_{i_2}^2 t_{i_3} - 5 \sum_{i_2 < i_3 < i_4} t_{i_1}^3 t_{i_2} t_{i_3} t_{i_4} + 10 \sum t_{i_1}^2 t_{i_2}^2 t_{i_3}^2 \\ & + 2 \sum_{i_3 < i_4} t_{i_1}^2 t_{i_2}^2 t_{i_3} t_{i_4} + A t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \sum_{i=1}^5 t_i, \quad t_i = a_i^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Все его коэффициенты (кроме A) вычисляются в предположении $a_1 = 0$. Для вычисления A применим теорему Виета. Вычислим квадраты площадей 5-угольников с ребрами, равными 1. Для 5-угольника, изображенного на рис. 1, эта величина равна $3 \cdot 16^{-1}$, для “звезды” (см. рис. 5) – $(5 - 2\sqrt{5}) \cdot 5 \cdot 16^{-1}$, а для выпуклого 5-угольника – $(5 + 2\sqrt{5}) \cdot 5 \cdot 16^{-1}$. Стоит напомнить, что площадь понимается в смысле формулы (6), поэтому для “звезды” это будет лебегова мера ее внутренности плюс мера “сердцевины”. Заметим еще, что площадь 5-угольника, изображенного на рис. 1, будет 5-кратным корнем S -полинома, так как все 5-угольники из списка предложения 3 превращаются в него при стремлении ребер к единице. Итак, свободный член в S -полиноме при всех a_i , равных 1, окажется равным $3^5 \cdot 5^3 \cdot 16^{-7}$. Положим теперь в формулах (27) и (28) все a_i равными 1 и учтем, что 16^{-7} входит множителем в свободный член S -полинома (см. (26)). Получим для A значение 8.

Дополнение о 6- и 7-угольниках. Максимальное количество 6-угольников с заданными длинами ребер, вписанных в окружности попарно различных радиусов, — 14, а 7-угольников — 31. Например, семь 6-угольников типа 1 можно получить шевелением ребер квадрата с 3-кратным ребром, который при этом превратится в шесть вписанных в разные окружности 6-угольников, и треугольника с двукратными ребрами. Все 7-угольники получаются шевелением ребер следующих фигур: выпуклого правильного 7-угольника, двух “звезд”, образованных диагоналями правильного выпуклого 7-угольника, 5-угольника с 3-кратным ребром, “звезды” с 3-кратным ребром, 3-угольника с 5-кратным ребром и, наконец, 3-угольника с двумя 3-кратными ребрами. Все ребра у всех этих многоугольников считаются равными 1. На начальном этапе построения удобно применять матрицу Якоби из § 3: ее определитель для всех перечисленных многоугольников не равен 0.

Список литературы

1. *Сабитов И. Х.* Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 105–134.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
04.03.2002