Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Сипачёва, Об одном классе свободных локально выпуклых пространств, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 25–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:09:18

УДК 515.12

О. В. Сипачёва

Об одном классе свободных локально выпуклых пространств

Кружевные пространства представляют собой естественное обобщение метризуемых пространств, для которого верна теорема Дугунджи. Доказано, что свободное локально выпуклое пространство кружевного пространства является кружевным. Отсюда вытекает, в частности, что пространство вероятностных мер с конечным носителем на кружевном пространстве является ретрактом локально выпуклого пространства и что всякое кружевное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства является ретрактом локально выпуклого пространства.

Библиография: 12 названий.

Знаменитая теорема Дугунджи о продолжении [1] гласит, что если F – замкнутое подмножество метризуемого пространства X , а E – локально выпуклое пространство (ЛВП), то существует линейный оператор продолжения $\Phi: C(F, E) \rightarrow C(X, E)$ такой, что для всякого отображения $f \in C(F, E)$ образ его продолжения $\Phi(f)(X)$ содержится в выпуклой оболочке образа $f(F)$ самого отображения f и оператор Φ непрерывен при наделении обоих пространств $C(F, E)$ и $C(X, E)$ топологией поточечной сходимости, компактно-открытой топологией или топологией равномерной сходимости. (Как обычно, $C(Y, Z)$ – пространство непрерывных отображений из Y в Z ; словосочетание “оператор продолжения” означает, что сужение отображения $\Phi(f)$ на F всегда совпадает с f .)

В 1966 году Борхес [2] обобщил теорему Дугунджи с метризуемых пространств на пространства X из более широкого класса, известного в то время как класс M_3 -пространств. Из-за того, что эти пространства оказались чрезвычайно важными и полезными, Борхес предложил использовать для них специальный термин – *stratifiable*; с тех пор они так и называются. С легкой руки А. В. Архангельского в русской литературе их принято называть *кружевными*. По своим топологическим свойствам кружевные пространства очень близки к метризуемым; в частности, все они паракомпактны и совершенно нормальны (см. [3]). Однако свойство пространства быть кружевным сохраняется замкнутыми отображениями [2], поэтому класс кружевных пространств существенно шире класса метризуемых пространств. Он включает в себя, в частности, все клеточные комплексы, а также, как недавно доказал С. А. Шкарин, многие неметризуемые ЛВП, естественно возникающие в функциональном анализе (такие как D – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, D' – пространство обобщенных функций, S' – пространство обобщенных функций умеренного роста, $\mathcal{E}'$ – пространство финитных обобщенных функций) с их естественной топологией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00289).

Основной результат этой статьи состоит в том, что свободное локально выпуклое пространство кружевного T_1 -пространства является кружевным. Отметим, что свободные ЛВП бесконечных пространств никогда не бывают метризуемыми. Из справедливости теоремы Дугунджи для кружевных пространств вытекает, что всякое замкнутое выпуклое подмножество F кружевного ЛВП E является ретрактом этого ЛВП: чтобы получить ретракцию, достаточно продолжить тождественное вложение $\text{id}: F \rightarrow E$ на $X = E$ в соответствии с теоремой Дугунджи–Борхеса. Таким образом, всякое выпуклое подмножество свободного ЛВП $L(X)$ над кружевным пространством X , в частности пространство вероятностных мер с конечным носителем на X (которое совпадает с выпуклой оболочкой множества X в $L(X)$ [4]), является ретрактом пространства $L(X)$. Кроме того, если F – кружевное выпуклое подмножество некоторого ЛВП E , то F является ретрактом некоторого другого ЛВП, а именно, своего свободного ЛВП $L(F)$: ретракция получается продолжением вложения $\text{id}: F \rightarrow E$ на $X = L(F)$. Для некружевных пространств это не так: нетрудно построить компактное выпуклое подмножество в ЛВП, которое не является ретрактом никакой топологической группы (тем более, никакого ЛВП). Например, если X – компакт с несчетным числом Суслина, то пространство $P(X)$ вероятностных мер на X – тоже компакт с несчетным числом Суслина [5]. Свободная топологическая группа $F(P(X))$ имеет счетное число Суслина, потому что $P(X)$ компактно [6]; значит, $P(X)$ не является непрерывным образом (тем более, ретрактом) своей свободной топологической группы. Если бы пространство $P(X)$ являлось ретрактом некоторой топологической группы G , то определяемое ретракцией вложение $P(X) \rightarrow G$ можно было продолжить до непрерывного гомоморфизма $F(P(X)) \rightarrow G$ и композиция этого гомоморфизма с ретракцией была бы непрерывным отображением $F(P(X)) \rightarrow P(X)$, которого не существует.

Все рассматриваемые в этой статье пространства предполагаются вполне регулярными топологическими T_1 -пространствами (отметим, что кружевные и векторные T_1 -пространства всегда вполне регулярны). Под ЛВП мы подразумеваем вещественные хаусдорфовы локально выпуклые топологические векторные пространства. Обозначение $\bar{A}$ используется для замыкания множества A , а $|A|$ – для его мощности.

Если γ и γ' – семейства подмножеств множества X (например, его покрытия), то запись $\gamma \succ \gamma'$ означает, что γ вписано в γ' ,

$$\gamma \wedge \gamma' = \{A \cap B : A \in \gamma, B \in \gamma', A \cap B \neq \emptyset\}$$

– минимальное семейство, вписанное в γ и γ' одновременно, и

$$\gamma \circ \gamma' = \left\{ \bigcup \text{St}_\gamma A : A \in \gamma' \right\},$$

где $\text{St}_\gamma A = \{B \in \gamma : A \cap B \neq \emptyset\}$ – звезда множества A относительно γ . Семейство γ *сильно звездно вписано* в семейство γ' , если $\gamma \circ \gamma \succ \gamma'$. Топологическое пространство X паракомпактно в том и только том случае, если в любое его открытое покрытие можно сильно звездно вписать другое открытое покрытие [7] (см. также [8; теорема 5.1.12]).

Для псевдометрики d на X , точки $x \in X$ и положительного числа a мы полагаем

$$B_d(x, a) = \{y \in X : d(x, y) < a\}.$$

Иногда мы пишем номер формулы над знаком включения, неравенства или другого отношения, чтобы показать, что данное отношение вытекает из этой формулы.

Используемые в этой статье основные сведения из общей топологии можно найти в [8], из теории кружевных пространств – в [3] и из теории свободных ЛВП – в [4], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [3]). Пространство X называется *кружевным*, если каждое замкнутое в X множество F можно так представить в виде

$$F = \bigcap U_n(F) = \bigcap \overline{U_n(F)},$$

где все $U_n(F)$ открыты, что для любого замкнутого $F' \subseteq F$ $U_n(F') \subseteq U_n(F)$ при всех n .

Таким образом, свойство быть кружевным пространством можно интерпретировать как монотонную совершенную нормальность.

Нам понадобится более слабое понятие монотонной нормальности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [3]). Пространство X называется *монотонно нормальным*, если любой паре $F \subseteq U$, где F замкнуто и U открыто в X , можно поставить в соответствие открытое множество $V(F, U)$ так, что $F \subseteq V(F, U) \subseteq \overline{V(F, U)} \subseteq U$ и для любой меньшей пары $F' \subseteq U'$ замкнутого и открытого множеств (т.е. такой, что $F' \subseteq F$ и $U' \subseteq U$) $V(F', U') \subseteq V(F, U)$.

Свойство быть кружевным пространством сохраняется произвольными подпространствами, замкнутыми отображениями и счетными произведениями, а также многими другими операциями [2]. В [3] доказано, что пространство является кружевным в том и только том случае, если его произведение на сходящуюся последовательность монотонно нормально. Как заметил С. А. Шкарин, отсюда немедленно вытекает, что для ЛВП свойство быть кружевным пространством эквивалентно монотонной нормальности. В самом деле всякое нетривиальное ЛВП E гомеоморфно произведению $H \times \mathbb{R}$ (произвольной) замкнутой гиперплоскости H в E на вещественную прямую (для свободного ЛВП $E = L(X)$ в качестве H можно взять подпространство $L_0(X)$ всех формальных линейных комбинаций элементов X с нулевой суммой коэффициентов), так что если E монотонно нормально, то и произведение H на сходящуюся последовательность монотонно нормально. Значит, гиперплоскость H является кружевной, и ее произведение на кружевное пространство – прямую, т.е. $H \times \mathbb{R} = E$, тоже кружевное.

Таким образом, для доказательства основного результата (свободное ЛВП кружевного пространства является кружевным) достаточно доказать, что свободное ЛВП кружевного пространства монотонно нормально. Для этой цели удобно воспользоваться следующим критерием монотонной нормальности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [3]). *Пространство X монотонно нормально тогда и только тогда, когда любой точке $x \in X$ и любой ее открытой окрестности U можно сопоставить меньшую открытую окрестность $V(x, U)$ таким образом, чтобы из условия $V(x, U) \cap V(x', U') \neq \emptyset$ всегда вытекало, что либо $x \in U'$, либо $x' \in U$.*

Пусть X – пространство. Его свободное ЛВП $L(X)$ – это свободное вещественное векторное пространство, порожденное множеством X (т.е. множество формальных конечных линейных комбинаций элементов X с вещественными коэффициентами), снабженное сильнейшей из всех топологий, индуцирующих исходную топологию на X и превращающих $L(X)$ в локально выпуклое пространство. Иными словами топология $L(X)$ – это слабейшая из всех топологий таких, что всякое непрерывное отображение пространства X в произвольное ЛВП E продолжается до непрерывного линейного отображения из $L(X)$ с этой топологией в E .

Положим

$$L_0(X) = \left\{ \sum \lambda_i x_i \in L(X) : \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, \sum \lambda_i = 0 \right\}$$

(ясно, что это множество является замкнутой гиперплоскостью в $L(X)$ и, следовательно, определяет топологию на $L(X)$).

Для $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in L_0(X)$, где x_i – различные элементы множества X и λ_i – не равные нулю числа, мы полагаем $\text{supp } \mathbf{u} = \{x_i : i \leq n\}$; это множество определено однозначно для всякого $\mathbf{u} \in L_0(X)$.

Ниже приводятся основные сведения о топологии свободного ЛВП из [4].

Полунормой на векторном пространстве E называется неотрицательная вещественная функция $\|\cdot\|$, для которой выполняются следующие условия:

- 1) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ при всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$;
- 2) $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$ для любого числа λ и любого $\mathbf{u} \in E$.

Для каждой псевдометрики d на X существует наибольшая полунорма $\|\cdot\|_d$ на $L_0(X)$, для которой $\|x - y\|_d \leq d(x, y)$ при всех $x, y \in X$. Совокупность множеств вида

$$\mathbf{B}_d(a) = \{\mathbf{u} \in L_0(X) : \|\mathbf{u}\|_d < a\},$$

где d – непрерывные псевдометрики на X и $a > 0$, служит базой окрестностей нуля в $L_0(X)$. Для слова $\mathbf{u} \in L_0(X)$ и псевдометрики d

$$\|\mathbf{u}\|_d = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i d(x_i, y_i) : \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - y_i), x_i, y_i \in X, \lambda_i \geq 0 \right\}. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{j=1}^n b_j y_j$, где x_i, y_j – различные элементы пространства X , а a_i и b_j – положительные числа, для которых $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Мы будем называть такую запись слова $\mathbf{u} \in L_0(X)$ *канонической*; ясно, что каноническая запись несократима и единственна с точностью до перестановки слагаемых в суммах. В [4] показано, что для любой псевдометрики d на X

$$\|\mathbf{u}\|_d = \min \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d(x_i, y_j) : c_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n c_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m c_{ij} = b_j \right\}, \quad (2)$$

т.е. в (1) достигается минимум, и притом на записи, содержащей буквы только из $\text{supp } \mathbf{u}$.

Заметим, что (2) как задача на минимум для фиксированного слова $\mathbf{u}$ — не что иное, как классическая транспортная задача, которая решается традиционными методами линейного программирования. Роль поставщиков играют x_i , роль потребителей — y_j , a_i и b_j — запасы продукции у i -го поставщика и потребности j -го потребителя соответственно. Затраты на перевозку единицы продукции от i -го поставщика к j -му потребителю составляют $d(x_i, y_j)$. Требуется составить оптимальный план перевозок, т.е. определить для всех $i \leq n$ и $j \leq m$ количества c_{ij} продукции, которые следует перевезти от i -го поставщика к j -му потребителю, чтобы вся продукция оказалась вывезена от поставщиков и все потребности потребителей оказались удовлетворены при наименьших общих затратах на перевозку. Условие $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ означает по определению, что рассматриваемая транспортная задача сбалансирована, т.е. запасы продукции у всех поставщиков совпадают с суммарной потребностью всех потребителей (ясно, что только в этом случае задача имеет смысл). Очевидно, эта транспортная задача представляет собой переформулировку задачи вычисления нормы $\|\cdot\|_d$ слова $\mathbf{u}$ по формуле (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле требование каноничности записи, используемой в формуле (2), несущественно: если от записи $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{j=1}^n b_j y_j$ требовать только, чтобы все a_i и b_j были неотрицательны (и не требовать, чтобы буквы x_i и y_j были различными), то формула (2) останется верной. В самом деле, предположим, что $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{j=1}^n b_j y_j$ — произвольная запись слова $\mathbf{u}$, $a_i, b_j \geq 0$ и $c_{ij} \geq 0$ таковы, что $\sum_{j=1}^n c_{ij} = a_i$ и $\sum_{i=1}^m c_{ij} = b_j$. Допустим, что запись $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m'} a'_i x'_i - \sum_{j=1}^{n'} b'_j y'_j$ получена путем “расщепления” одного слагаемого (скажем, $a_m x_m$) в исходной записи на два, т.е. $m' = m + 1$; $n' = n$; $a'_i = a_i$, $x'_i = x_i$, $b'_j = b_j$ и $y'_j = y_j$ для $i \leq m - 1$ и $j \leq n$; $a'_m + a'_{m+1} = a_m$, $a'_m, a'_{m+1} \geq 0$, и $x'_m = x'_{m+1} = x_m$. Для каждого $j \leq n = n'$ положим $c'_{ij} = c_{ij}$, если $i \leq m - 1$, $c'_{mj} = (a'_m/a_m)c_{mj}$ и $c'_{(m+1)j} = (a'_{m+1}/a_m)c_{mj}$ (в случае $a_m = 0$ полагаем $c'_{mj} = c'_{(m+1)j} = 0$). Тогда $\sum_{j=1}^{n'} c'_{ij} = a'_i$, $\sum_{i=1}^{m'} c'_{ij} = b'_j$ и $\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} c'_{ij} d(x'_i, y'_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d(x_i, y_j)$. Предположим теперь, что запись $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m'} a'_i x'_i - \sum_{j=1}^{n'} b'_j y'_j$ получена из исходной путем добавления сокращающейся пары букв, т.е. $m' = m + 1$; $n' = n + 1$; $a'_i = a_i$, $x'_i = x_i$, $b'_j = b_j$ и $y'_j = y_j$ для $i \leq m$ и $j \leq n$; $a'_{m+1} = b'_{m+1} \geq 0$ и $x'_{m+1} = y'_{m+1}$. Положим $c'_{ij} = c_{ij}$, если $i \leq m$ и $j \leq n$; $c'_{ij} = 0$, если $i \leq m$ и $j = n + 1$ или $i = m + 1$ и $j \leq n$; $c'_{(m+1)(n+1)} = a'_{m+1} = b'_{n+1}$. Мы снова получим $\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} c'_{ij} d(x'_i, y'_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d(x_i, y_j)$. Наконец, допустим, что запись $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m'} a'_i x'_i - \sum_{j=1}^{n'} b'_j y'_j$ получена из исходной путем увеличения коэффициента при букве x_m за счет добавления той же буквы с отрицательным коэффициентом, т.е. $m' = m$; $n' = n + 1$; $a'_i = a_i$, $x'_i = x_i$, $b'_j = b_j$ и $y'_j = y_j$ для $i \leq m - 1$ и $j \leq n$; $a'_m = a_m + b'_{n+1}$, $b'_{n+1} \geq 0$, и $x'_m = x_m = y'_{n+1}$. В таком случае положим $c'_{ij} = c_{ij}$, если $i \leq m$ и $j \leq n$; $c'_{ij} = 0$, если $i \leq m - 1$ и $j = n + 1$; $c'_{m(n+1)} = b'_{n+1}$.

Утверждение замечания 1 вытекает из того, что любая запись любого слова может быть получена из канонической применением конечного числа описанных выше операций (расщепления слагаемого и т.п.).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из формулы (2) и замечания 1 следует, что если $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in L_0(X)$ и d – псевдометрика на X , то $\|\mathbf{u}\|_d \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \max_{i,j \leq n} d(x_i, x_j)$.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Свободное ЛВП кружевого пространства является кружевным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – кружевное пространство.

ЛЕММА 1. *Всякое кружевное пространство X замкнуто вкладывается в кружевное пространство Y такое, что для любой непрерывной псевдометрики d на Y найдется непрерывная псевдометрика $d' \geq d$ на Y , обладающая следующим свойством:*

$$\begin{aligned} &\text{если } a > 0, x, y \in X \text{ и } d'(x, y) < a, \text{ то существуют} \\ &n \in \mathbb{N} \text{ и } z_0, z_1, \dots, z_n \in Y \text{ такие, что } z_0 = x, z_n = y, \\ &d'(z_{i-1}, z_i) < \frac{1}{2} \text{ для } i = 1, \dots, n \text{ и } \sum_{i=1}^n d'(z_{i-1}, z_i) < a. \end{aligned} \quad (\star)$$

Кроме того, если $d(x, y) < \frac{1}{2}$, то $d'(x, y) = d(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$ (т.е. Y – это пространство, полученное стягиванием в точку замкнутого подпространства $X \times \{0\}$ произведения $X \times [0, 1]$; это тихоновское пространство, потому что $X \times [0, 1]$ нормально, будучи кружевным). Естественное отображение $X \times [0, 1] \rightarrow (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\})$ замкнуто (см. [8; пример 2.4.12]), поэтому пространство Y кружевное как замкнутый образ произведения кружевных пространств.

Покажем, что всякая непрерывная псевдометрика d на Y мажорируется непрерывной псевдометрикой d' со свойством $(\star)$. Заметим, что любые две точки x и y из Y можно соединить конечной цепочкой из открытых шаров диаметра $\frac{1}{2}$, т.е. всегда найдется конечное множество $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ такое, что $z_0 = x, z_n = y$ и $d(z_{i-1}, z_i) < \frac{1}{2}$. Это вытекает из того, что x и y принадлежат некоторому связному компакту в Y (в качестве такого компакта можно взять объединение отрезков – образов подпространств вида $\{z\} \times [0, 1]$ при факторизации, – содержащих x и y). Положим

$$d'(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d(z_{i-1}, z_i) : n \in \mathbb{N}, z_i \in Y, z_0 = x, z_n = y, d(z_{i-1}, z_i) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ясно, что d' – псевдометрика. Из справедливости неравенства треугольника для d вытекает, что $d' \geq d$ и $d'(x, y) = d(x, y)$, если $d(x, y) < \frac{1}{2}$; в частности, $B_{d'}(x, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon)$ для всех $x \in Y$ и $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, все шары радиуса не больше $\frac{1}{2}$ относительно d' открыты в Y , поскольку псевдометрика d непрерывна. Значит, псевдометрика d' тоже непрерывна.

Если мы докажем, что свободное ЛВП $L(Y)$ является кружевным, то тем самым мы докажем, что $L(X)$ кружевное. Действительно, кружевное пространство Y паракомпактно [3] и, следовательно, коллективно нормально [8]. Значит, X P -вложено в Y (т.е. любая непрерывная псевдометрика продолжается с X на Y),

будучи его замкнутым подмножеством [10]. Поэтому $L(X)$ естественно вкладывается в $L(Y)$ как топологическое векторное подпространство [4], и наследственность свойства быть кружевным пространством влечет наличие этого свойства у $L(X)$.

Итак, мы будем доказывать, что $L(Y)$ кружевное. Достаточно доказать, что замкнутая гиперплоскость $L_0(Y)$ является кружевной (поскольку $L(Y)$ гомеоморфно произведению $L_0(Y) \times \mathbb{R}$), а для этого достаточно проверить, что $L_0(Y)$ монотонно нормальна.

Обозначим через $\mathcal{D}^*(Y)$ множество всех непрерывных псевдометрик на Y со свойством $(\star)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ и $x, y \in Y$ положим

$$(d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2)(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d_1(z_{2i}, z_{2i+1}) + \sum_{j=1}^n d_2(z_{2j-1}, z_{2j}) : n \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. z_0 = x, z_1, \dots, z_{2n-1} \in Y, z_{2n} = y, d_1(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2}, d_2(z_{2j-1}, z_{2j}) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Легко видеть, что $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если d, d_1 и d_2 — псевдометрики на X такие, что $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$, $d \leq d_1$ и $d \leq d_2$, то $d \leq d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2$: это вытекает из неравенства треугольника. Ясно также, что если $d'_1, d'_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$, $d'_1 \leq d_1$ и $d'_2 \leq d_2$, то $d'_1 \overset{\star}{\wedge} d'_2 \leq d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2$. Кроме того, по определению $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \leq d_1$ и $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \leq d_2$, откуда немедленно вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ и $a > 0$, то

$$\mathbf{B}_{d_1}(a) + \mathbf{B}_{d_2}(a) \subseteq 2\mathbf{B}_{d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2}(a) \subseteq \mathbf{B}_{d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2}(2a).$$

ЛЕММА 3. Для любой непрерывной псевдометрики d на Y найдется непрерывная псевдометрика $\rho' \geq d$ на Y такая, что $B_{\rho'}(x, 1/n) = B_d(x, 1/2^{3n})$ для всех $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, определенную правилом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ -\frac{1}{\log_2 x}, & \text{если } x < \frac{1}{8}; \\ \frac{1}{3}, & \text{если } x \geq \frac{1}{8}, \end{cases}$$

имеем $f(1/2^n) = 1/n$ для $n = 3, 4, \dots$. Эта функция непрерывна на $[0, \infty)$; дифференцируя ее, мы видим, что она не убывает и является вогнутой, т.е. для любых $x, y > 0$ точка $(x+y, f(x+y))$ координатной плоскости лежит не выше прямой, соединяющей точки $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$, и следовательно, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Значит, композиция $d \circ f: X^2 \rightarrow [0, \infty)$ (определенная правилом $d \circ f(x, y) = f(d(x, y))$)

– непрерывная псевдометрика на X (ее непрерывность вытекает из непрерывности d и f , симметричность – из симметричности d , а неравенство треугольника – из неубывания и вогнутости f и справедливости неравенства треугольника для d). Положим $\rho' = \max\{3(d \circ f), d\}$. Для $x, y \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\rho'(x, y) < \frac{1}{n} \iff d(x, y) < f^{-1}\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{2^{3n}}.$$

ЛЕММА 4. Для любой непрерывной псевдометрики ρ на Y найдется непрерывная псевдометрика ρ' такая, что $B_{\rho'}(x, 1/n) \subseteq B_{\rho}(x, 1/n^n)$ для всех $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $\gamma_n = \{B_{\rho}(x, 1/n^n)\}_{x \in Y}$. Ясно, что для всякого n покрытие γ_{n+1} сильно звездно вписано в покрытие γ_n . Положим $\gamma_0 = \{Y\}$. По лемме Тьюки [11] (см. также [8; 5.4.Н(а)]) найдется такая непрерывная псевдометрика d , что $\gamma_{n+1} \succ \{B_d(x, 1/2^n)\}_{x \in Y} \succ \gamma_{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть ρ' – псевдометрика из леммы 3. Имеем $\{B_{\rho'}(x, 1/n)\}_{x \in Y} \succ \gamma_{3n-1} \succ \gamma_{2n}$. Это означает, что для любых $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $y \in Y$, что $B_{\rho'}(x, 1/n) \subseteq B_{\rho}(y, 1/(2n^{2n}))$. Поскольку $x \in B_{\rho}(y, 1/(2n^{2n}))$, т.е. $\rho(x, y) < 1/(2n^{2n})$, имеем $\rho(x, z) < 2(1/(2n^{2n})) < 1/n^n$ для всякого $z \in B_{\rho}(y, 1/(2n^{2n}))$; значит, $B_{\rho}(y, 1/(2n^{2n})) \subseteq B_{\rho}(x, 1/n^n)$. Следовательно, $B_{\rho'}(x, 1/n) \subseteq B_{\rho}(x, 1/n^n)$.

ЛЕММА 5. Если $n, s, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$, $s_i > s$ для $i \leq n$ и $\sum_{i=1}^n (1/s_i) \leq s$, то $\sum_{i=1}^n (1/s_i^{s_i}) < 1/(2s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^{s_i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i(s+1)^s} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i 2s^s} = \frac{1}{2s^s} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \leq \frac{1}{2s}.$$

Поскольку пространство Y кружевное, на нем есть непрерывная метрика ρ (см. [3; теоремы 5.9, 4.6, следствие 2.9]). Кроме того, на Y есть кружево в смысле Хита [12], т.е. такая последовательность

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

открытых покрытий пространства Y , что для всякого n

$$\mathcal{M}_n = \{M_n(x) : x \in Y\},$$

где $M_n(x)$ – открытая окрестность x , и

$$\begin{aligned} &\text{для любой точки } x_0 \text{ из } Y \text{ и любой ее окрестности } U_{x_0} \\ &\text{существует } m \in \mathbb{N}, \text{ для которого } x_0 \notin \overline{\bigcup \{M_m(x) : x \notin U_{x_0}\}}. \end{aligned} \quad (\mathcal{M})$$

Наличие кружева Хита равносильно свойству быть кружевным пространством [12].

ЛЕММА 6. Метрику ρ и семейства $\mathcal{M}_n$ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$(1^{\mathcal{M}}) \quad \mathcal{M}_{n+1} \succ \left\{ B_\rho \left(x, \frac{1}{n+1} \right) \right\} \succ \mathcal{M}_n,$$

$$(2^{\mathcal{M}}) \quad M_{n+1}(x) \subseteq M_n(x)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\widetilde{\mathcal{M}}_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\widetilde{\mathcal{M}}_n = \{\widetilde{M}_n(x) : x \in Y\}$, — произвольное кружево Хита на Y , а $\widetilde{\rho}$ — произвольная непрерывная метрика на Y . Положим $\mathcal{M}'_1 = \widetilde{\mathcal{M}}_1$ и $M'_1(x) = \widetilde{M}_1(x)$ для $x \in Y$. Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и семейство $\mathcal{M}'_n = \{M'_n(x)\}$ уже определено. Поскольку пространство Y паракомпактно (будучи кружевным), в его открытое покрытие $\mathcal{M}'_n$ можно сильно звездно вписать некоторое открытое покрытие γ_n . Пусть $x \in Y$. Выберем какую-нибудь окрестность $U \in \gamma_n$ точки x и положим

$$M'_{n+1}(x) = \widetilde{M}_{n+1}(x) \cap M'_n(x) \cap U \cap B_{\widetilde{\rho}} \left(x, \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\mathcal{M}'_{n+1} = \{M'_{n+1}(x) : x \in Y\}.$$

Построенное семейство $\mathcal{M}' = \{\mathcal{M}'_n : n \in \mathbb{N}\}$ образует кружево Хита, поскольку $M'_n(x) \subseteq \widetilde{M}_n(x)$ для всех n и x , а условие $(\mathcal{M})$ из определения кружева Хита сохраняется при уменьшении множеств $M_n(x)$ (лишь бы они оставались открытыми окрестностями своих точек x). Кроме того, по построению для каждого n открытое покрытие $\mathcal{M}'_{n+1}$ вписано в γ_n (следовательно, сильно звездно вписано в $\mathcal{M}'_n$) и $M'_{n+1}(x) \subseteq M'_n(x)$ для всех x . Так же, как при доказательстве леммы 4, мы применим лемму Тьюки и найдем непрерывную псевдометрику d на Y такую, что $\mathcal{M}'_{n+1} \succ \{B_d(x, 1/(2^n))\}_{x \in Y} \succ \mathcal{M}'_{n-1}$, а потом применим лемму 3 и найдем непрерывную псевдометрику ρ' , для которой $\mathcal{M}'_{3n+1} \succ \{B_{\rho'}(x, 1/n)\}_{x \in Y} \succ \mathcal{M}'_{3n-1}$. Осталось положить $M_n(x) = M'_{3n+1}(x)$ для $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$. Мы по-прежнему будем иметь $M_{n+1}(x) \subseteq M_n(x)$, так что семейство $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}$, где $\mathcal{M}_n = \{M_n(x)\}$, удовлетворяет требуемому условию $(2^{\mathcal{M}})$. Это семейство образует кружево Хита, потому что $M_n(x) = M'_{3n+1}(x) \subseteq M'_n(x)$, а $\mathcal{M}'$ — кружево Хита. Что касается метрики ρ , она уже построена — это псевдометрика ρ' . Эта псевдометрика действительно является метрикой: если x и y — различные точки пространства Y , то, поскольку $\widetilde{\rho}$ — метрика, найдется натуральное n , для которого $\widetilde{\rho}(x, y) \geq 1/n$; ясно, что шар $B_{\widetilde{\rho}}(x, 1/n)$, который по построению содержится в $M'_{3n-1}(z) \subseteq M'_{2n}(z) \subseteq B_{\widetilde{\rho}}(z, 1/(2n))$ для некоторого z , не содержит точку y .

Условие $(1^{\mathcal{M}})$ вытекает из отношений

$$\mathcal{M}'_{3n+1} \succ \left\{ B_{\rho'} \left(x, \frac{1}{n} \right) \right\}_{x \in Y} \succ \mathcal{M}'_{3n-1} \succ \mathcal{M}'_{3(n-1)+1}$$

и $M_n(x) = M'_{3n+1}(x)$.

Итак, мы имеем пространство Y с непрерывной метрикой ρ и кружевом Хита $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n = \{M_n(x) : x \in Y\}\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющими условиям $(1^{\mathcal{M}})$

и $(2\mathcal{M})$, причем каждая непрерывная псевдометрика на Y мажорируется непрерывной псевдометрикой со свойством $(\star)$.

Нам нужно доказать, что пространство $L_0(Y)$ монотонно нормально. В соответствии с утверждением 1 для этого мы должны определенным образом сопоставить каждому слову $\mathbf{u} \in L_0(Y)$ и каждой его открытой окрестности U меньшую окрестность $V(\mathbf{u}, U)$. Поскольку всякая окрестность слова $\mathbf{u}$ из $L_0(Y)$ содержит окрестность вида $\mathbf{u} + \mathbf{B}_d(a)$, где d — непрерывная псевдометрика на Y и a — положительное число, по сути дела мы должны сопоставить каждому слову $\mathbf{u}$ и каждой непрерывной псевдометрике $d_{\mathbf{u}}$ на Y бóльшую непрерывную псевдометрику $D_{\mathbf{u}}$. Проведенное ниже построение как раз и осуществляет это сопоставление.

Построение. Прежде всего зафиксируем непрерывную метрику ρ' на Y такую, что $\rho \leq \rho'$ и $B_{\rho'}(x, 1/n) \subseteq B_{\rho}(x, 1/(n^n))$ для любых $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$ (она существует по лемме 4).

Пусть $\mathbf{u} \in L_0(X)$ и $d_{\mathbf{u}}$ — непрерывная псевдометрика на Y ; будем считать, что $d_{\mathbf{u}} \geq \rho'$ (иначе рассмотрим $\max\{d_{\mathbf{u}}, \rho'\}$). Предположим, что $\sum_{i=1}^m a_i u'_i - \sum_{j=1}^n b_j u''_j$ — каноническая запись слова $\mathbf{u}$. Найдем $k_{\mathbf{u}} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{5}{k_{\mathbf{u}}} \leq \min \left\{ \left| \sum_{i \in I} \varepsilon_i a_i + \sum_{j \in J} \delta_j b_j \right| \neq 0 : I \subseteq \{1, \dots, m\}, \right. \\ \left. J \subseteq \{1, \dots, n\}, \varepsilon_i, \delta_j \in \{-1, 1\} \right\} \quad (3)$$

и

$$d_{\mathbf{u}}(u'_i, u''_j) \leq k_{\mathbf{u}} \quad \forall i \leq m, \quad j \leq n. \quad (4)$$

Для каждого $u \in \text{supp } \mathbf{u}$ найдем натуральное $l_{\mathbf{u}}(u)$, для которого

$$u \in U_{\mathbf{u}}(u) = Y \setminus \overline{\bigcup \left\{ M_{l_{\mathbf{u}}(u)}(y) : y \notin B_{d_{\mathbf{u}}}\left(u, \frac{1}{2k_{\mathbf{u}}}\right) \right\}}. \quad (5)$$

Ясно, что $\overline{U_{\mathbf{u}}(u)} \subseteq \overline{B_{d_{\mathbf{u}}}(u, 1/(2k_{\mathbf{u}}))} \subseteq B_{d_{\mathbf{u}}}(u, 1/k_{\mathbf{u}})$.

Пусть $\tilde{d}_{\mathbf{u}}$ — непрерывная псевдометрика на Y такая, что

$$\tilde{d}_{\mathbf{u}} \geq k_{\mathbf{u}} \cdot d_{\mathbf{u}}, \quad B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}}(u, 1) \subseteq U_{\mathbf{u}}(u) \quad \forall u \in \text{supp } \mathbf{u} \quad (6)$$

(ее существование вытекает из тихоновости пространства Y). Для каждого $u \in \text{supp } \mathbf{u}$ найдем натуральное $n_{\mathbf{u}}(u) \geq l_{\mathbf{u}}(u)$, для которого

$$u \in V_{\mathbf{u}}(u) = Y \setminus \overline{\bigcup \left\{ M_{n_{\mathbf{u}}(u)}(y) : y \notin B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}}\left(u, \frac{1}{2}\right) \right\}}. \quad (7)$$

Возьмем натуральное $n_{\mathbf{u}}$ такое, что

$$n_{\mathbf{u}} \geq \max \left\{ \{n_{\mathbf{u}}(u) + 1 : u \in \text{supp } \mathbf{u}\} \right. \\ \left. \cup \left\{ \frac{1}{\rho(x, y)} : x, y \in \text{supp } \mathbf{u}, x \neq y \right\} \cup \{k_{\mathbf{u}}\} \cup \{|\text{supp } \mathbf{u}|\} \right\}. \quad (8)$$

Наконец, для каждого $u \in \text{supp } \mathbf{u}$ выберем натуральное $m_{\mathbf{u}}(u)$, для которого

$$u \notin \bigcup \{M_{m_{\mathbf{u}}(u)-1}(y) : y \notin V_{\mathbf{u}}(u) \cap M_{n_{\mathbf{u}}}(u)\}, \quad (9)$$

и положим

$$m_{\mathbf{u}} = \max\{\max\{m_{\mathbf{u}}(u) : u \in \text{supp } \mathbf{u}\}, n_{\mathbf{u}} + 1\}. \quad (10)$$

До сих пор все построения были локальными: они относились лишь к окрестностям точек из $\text{supp } \mathbf{u}$. Сейчас мы по индукции построим последовательности локально конечных открытых покрытий $\theta_{\mathbf{u}}(n)$ пространства Y , чисел $\nu_{\mathbf{u}}(O, n)$ для $O \in \theta_{\mathbf{u}}(n)$, псевдометрик $\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(n)$, чисел $\mu_{\mathbf{u}}(x, n)$ для $x \in Y$ и открытых покрытий $\gamma_{\mathbf{u}}(n)$, с помощью которых будет построена новая псевдометрика $d'_{\mathbf{u}}$, после чего сразу же будет определена искомая псевдометрика $D_{\mathbf{u}}$.

Положим $\theta_{\mathbf{u}}(0) = \gamma_{\mathbf{u}}(0) = \{Y\}$, $\nu_{\mathbf{u}}(Y, 0) = 0$, $\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(0) \equiv 0$ и $\mu_{\mathbf{u}}(x, 0) = 0$ для $x \in Y$. Пусть $k > 0$. Определим k -е элементы перечисленных последовательностей, исходя из того, что их r -е элементы для $r < k$ уже построены.

Сначала определим покрытие $\theta_{\mathbf{u}}(k)$. Для каждого $x \in Y$ выберем натуральное число $m_{\mathbf{u}}(x, k) > m_{\mathbf{u}}$, для которого

$$x \in U_{\mathbf{u}}(x, k) = Y \setminus \overline{\bigcup \left\{ M_{m_{\mathbf{u}}(x, k)}(y) : y \notin B_{d_{\mathbf{u}}}\left(x, \frac{1}{16k}\right) \right\}}. \quad (11)$$

В качестве $\theta_{\mathbf{u}}(k)$ возьмем произвольное открытое покрытие пространства Y , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1^θ) $\theta_{\mathbf{u}}(k)$ локально конечно;
- (2^θ) $\theta_{\mathbf{u}}(k)$ вписано в покрытие $\{U_{\mathbf{u}}(x, k) : x \in Y\}$;
- (3^θ) для всякого $u \in \text{supp } \mathbf{u}$

$$\bigcup \text{St}_{\theta_{\mathbf{u}}(k)}(U_{\mathbf{u}}(u)) \subseteq B_{d_{\mathbf{u}}}(u, 1/k_{\mathbf{u}}),$$

т.е. $\theta_{\mathbf{u}}(k)$ вписано в двухэлементные покрытия $\{Y \setminus \overline{U_{\mathbf{u}}(u)}, B_{d_{\mathbf{u}}}(u, 1/k_{\mathbf{u}})\}$ для всех $u \in \text{supp } \mathbf{u}$ (см. (5)).

Покрытие, удовлетворяющее этим условиям, существует, поскольку число покрытий, в которые должно быть вписано $\theta_{\mathbf{u}}(k)$, конечно и все они открыты, а пространство Y паракомпактно.

Для каждого $O \in \theta_{\mathbf{u}}(k)$ зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 \in Y$, для которой $O \subseteq U_{\mathbf{u}}(x_0, k)$ (см. (2^θ)), и положим

$$\nu_{\mathbf{u}}(O, k) = m_{\mathbf{u}}(x_0, k). \quad (12)$$

Для каждого $x \in Y$ положим

$$\nu_{\mathbf{u}}(x, k) = \max\{\nu_{\mathbf{u}}(O, r) : O \in \text{St}_{\theta_{\mathbf{u}}(r)}(\{x\}), r \leq k\}. \quad (13)$$

Это число определено корректно, потому что все покрытия $\theta_{\mathbf{u}}(r)$ локально конечны.

Возьмем непрерывную псевдометрику $p_{\mathbf{u}}(k)$ на Y , для которой

$$\{B_{p_{\mathbf{u}}(k)}(x, 1)\}_{x \in Y} \succ \theta_{\mathbf{u}}(k) \wedge \gamma_{\mathbf{u}}(k-1). \quad (14)$$

Ее существование следует из паракомпактности Y (например, по уже неоднократно цитированной лемме Тьюки). Положим

$$\tilde{p}_{\mathbf{u}}(k) = \max\{\tilde{p}_{\mathbf{u}}(k-1), p_{\mathbf{u}}(k)\}. \quad (15)$$

Для каждой точки $x \in Y$ выберем натуральное число $\mu_{\mathbf{u}}(x, k)$ такое, что

$$\begin{aligned} (1^\mu) \quad & \mu_{\mathbf{u}}(x, k) \geq \nu_{\mathbf{u}}(x, k) \text{ и } \mu_{\mathbf{u}}(x, k) > 2k; \\ (2^\mu) \quad & \end{aligned}$$

$$x \notin \overline{\bigcup \left\{ M_{\mu_{\mathbf{u}}(x, k)}(y) : y \notin B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}} \left(x, \frac{1}{8kn_{\mathbf{u}}} \right) \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{u}}(k)} \left(x, \frac{1}{\mu_{\mathbf{u}}(x, k)\mu_{\mathbf{u}}(x, k)} \right) \right\}}.$$

Положим

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{u}}(x, k) = & B_{\rho'} \left(x, \frac{1}{8\mu_{\mathbf{u}}(x, k)} \right) \\ & \setminus \overline{\bigcup \left\{ M_{\mu_{\mathbf{u}}(x, k)}(y) : y \notin B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}} \left(x, \frac{1}{8kn_{\mathbf{u}}} \right) \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{u}}(k)} \left(x, \frac{1}{\mu_{\mathbf{u}}(x, k)\mu_{\mathbf{u}}(x, k)} \right) \right\}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве $\gamma_{\mathbf{u}}(k)$ возьмем любое открытое покрытие, удовлетворяющее условию

$$\gamma_{\mathbf{u}}(k) \circ \gamma_{\mathbf{u}}(k) \succ \{W_{\mathbf{u}}(x, k)\}_{x \in Y} \wedge \gamma_{\mathbf{u}}(k-1). \quad (17)$$

Обещанные последовательности построены; в частности, построена последовательность открытых покрытий $\gamma_{\mathbf{u}}(k)$, причем $\gamma_{\mathbf{u}}(k)$ сильно звездно вписано в $\gamma_{\mathbf{u}}(k-1)$ для каждого натурального k . По лемме Тьюки (см. [8; 5.4.H(a)]) найдется непрерывная псевдометрика $p_{\mathbf{u}}$ на Y , для которой

$$\left\{ B_{p_{\mathbf{u}}} \left(x, \frac{1}{2^{3n}} \right) \right\}_{x \in Y} \succ \gamma_{\mathbf{u}}(3n-1) \succ \gamma_{\mathbf{u}}(n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (18)$$

(можно также считать, что $p_{\mathbf{u}} \geq \rho$), и по лемме 3 найдется непрерывная псевдометрика $p'_{\mathbf{u}} \geq p_{\mathbf{u}}$ такая, что

$$B_{p'_{\mathbf{u}}} \left(x, \frac{1}{n} \right) = B_{p_{\mathbf{u}}} \left(x, \frac{1}{2^{3n}} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

В качестве псевдометрики $d'_{\mathbf{u}}$ возьмем непрерывную псевдометрику на Y со свойствами

$$\begin{aligned} (1^{d'}) \quad & (\star); \\ (2^{d'}) \quad & B_{d'_{\mathbf{u}}}(x, 1/n) \subseteq B_{p'_{\mathbf{u}}}(x, 1/n^n) (\subseteq B_{p_{\mathbf{u}}}(x, 1/n)); \\ (3^{d'}) \quad & d'_{\mathbf{u}} \geq 2m_{\mathbf{u}}^2 \rho'. \end{aligned}$$

Наконец, выберем псевдометрику $d''_{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}^*(Y)$ такую, что

$$d''_{\mathbf{u}} \geq n_{\mathbf{u}}^n d'_{\mathbf{u}}, \quad (20)$$

найдем $N_{\mathbf{u}} \in \mathbb{N}$, для которого

$$N_{\mathbf{u}} \geq \max\{d''_{\mathbf{u}}(x, y) : x, y \in \text{supp } \mathbf{u}\}, \quad (21)$$

и в качестве $D_{\mathbf{u}}$ возьмем любую псевдометрику, удовлетворяющую условиям $D_{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}^*(Y)$ и

$$D_{\mathbf{u}} \geq 2 N_{\mathbf{u}} d''_{\mathbf{u}}. \quad (22)$$

Итак, каждому слову $\mathbf{u} \in L_0(Y)$ и каждой непрерывной псевдометрике $d_{\mathbf{u}}$ на Y мы поставили в соответствие непрерывную псевдометрику $D_{\mathbf{u}}$. Поскольку ее построение зависело только от $\text{supp } \mathbf{u}$ и от модулей коэффициентов букв в слове $\mathbf{u}$, можно дополнительно потребовать выполнения условия

$$\begin{aligned} d'_{\mathbf{u}} &= d'_{-\mathbf{u}} \text{ для всех слов } \mathbf{u} \in L_0(Y) \\ &\text{и непрерывных псевдометрик } d_{\mathbf{u}} \text{ на } Y \end{aligned} \quad (D^{\pm})$$

(это условие не играет сколько-нибудь существенной роли в дальнейших рассуждениях; оно включено из чисто эстетических соображений).

Построение завершено.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in L_0(Y)$, $d_{\mathbf{h}}$ и $d_{\mathbf{g}}$ — непрерывные псевдометрики на Y , $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, $h \in \text{supp } \mathbf{h}$, $g \in \text{supp } \mathbf{g}$ и $(d'_{\mathbf{h}} \wedge^* d'_{\mathbf{g}})(h, g) < n_{\mathbf{h}}$. Тогда $d_{\mathbf{h}}(h, g) < 1/(2k_{\mathbf{h}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению операции $\wedge^*$ над псевдометриками найдутся натуральное число n и точки $z_0 = h, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = g$ в Y такие, что

$$\begin{aligned} d'_{\mathbf{h}}(z_{2i}, z_{2i+1}) &< \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ d'_{\mathbf{g}}(z_{2j-1}, z_{2j}) &< \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=0}^{n-1} d'_{\mathbf{h}}(z_{2i}, z_{2i+1}) + \sum_{j=1}^n d'_{\mathbf{g}}(z_{2j-1}, z_{2j}) &< n_{\mathbf{h}}. \end{aligned} \quad (23)$$

В частности,

$$\sum_{i=0}^{n-1} d'_{\mathbf{h}}(z_{2i}, z_{2i+1}) < n_{\mathbf{h}}, \quad \sum_{j=1}^n d'_{\mathbf{g}}(z_{2j-1}, z_{2j}) < n_{\mathbf{h}}. \quad (24)$$

Из условия $(3^{d'})$, а также из того, что $m_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{g}}$, $m_{\mathbf{h}} \geq n_{\mathbf{h}}$ (по построению) и $n_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{h}}$ (по условию леммы), вытекают неравенства

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{h}}}, \quad \sum_{j=1}^n \rho'(z_{2j-1}, z_{2j}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}}. \quad (25)$$

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ такого, что $\rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) \neq 0$, выберем натуральное k_i , для которого

$$\frac{1}{2k_i} \leq \rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{k_i}. \quad (26)$$

(Если $\rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) = 0$, то положим $k_i = \infty$ и условимся считать, что $1/\infty = 1/(\infty\infty) = 0$.) Положим

$$I = \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : k_i \leq m_{\mathbf{g}}\}. \quad (27)$$

Из (26), (25) и того, что $m_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{g}} \stackrel{(10)}{\geq} 2$, получаем $\sum_{i=0}^n (1/k_i) < 2 \leq m_{\mathbf{g}}$; значит, по лемме 5 $\sum_{i \notin I} (1/k_i^{k_i}) < 1/(2m_{\mathbf{g}})$. По определению метрики ρ' (см. начало построения) и из (26) имеем

$$\sum_{i \notin I} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}}. \quad (28)$$

Предположим, что $I = \emptyset$; тогда

$$\sum_{i \notin I} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}}.$$

Отсюда, из (25), из условия $\rho \leq \rho'$ и из неравенства треугольника получаем $\rho(h, g) \leq \sum_{k=0}^{2n-1} \rho(z_k, z_{k+1}) < 1/m_{\mathbf{g}}$. Поскольку кружево $\mathcal{M}$ обладает свойствами $(1^{\mathcal{M}})$ и $(2^{\mathcal{M}})$, мы можем заключить, что для некоторого $x \in Y$

$$g \in B_{\rho}\left(h, \frac{1}{m_{\mathbf{g}}}\right) \subseteq M_{m_{\mathbf{g}}-1}(x) \stackrel{(10)}{\subseteq} M_{m_{\mathbf{g}}(g)-1}(x). \quad (29)$$

Согласно (9) $x \in M_{n_{\mathbf{g}}}(g)$. Но $n_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{h}}$ (по условию леммы) и $n_{\mathbf{h}} \geq l_{\mathbf{h}}(h)$ (по построению); значит, $x \in M_{n_{\mathbf{g}}}(g) \stackrel{(2^{\mathcal{M}})}{\subseteq} M_{l_{\mathbf{h}}(h)}(g)$. С другой стороны, поскольку $m_{\mathbf{g}} - 1 \geq n_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{h}} \stackrel{(8)}{\geq} n_{\mathbf{h}}(h)$, (29) влечет $h \in B_{\rho}(h, 1/m_{\mathbf{g}}) \subseteq M_{n_{\mathbf{h}}(h)}(x)$. Следовательно, $x \in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}(h, \frac{1}{2}) \subseteq U_{\mathbf{h}}(h)$ (см. (7) и (6)). Так что $M_{l_{\mathbf{h}}(h)}(g) \cap U_{\mathbf{h}}(h) \neq \emptyset$ и (5) влечет $g \in B_{d_{\mathbf{h}}}(h, 1/(2k_{\mathbf{h}}))$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $I \neq \emptyset$. Упорядочим элементы множества I по возрастанию:

$$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\},$$

где $1 \leq r \leq n$, $i_1 \geq 0$ и $i_r \leq n-1$.

Возьмем $s \leq r$. Поскольку

$$d'_{\mathbf{h}}(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) \stackrel{(23)}{<} \frac{1}{2}, \quad d'_{\mathbf{h}} \stackrel{(3^{d'})}{\geq} \rho', \quad \rho'(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) \stackrel{(26)}{\geq} \frac{1}{2k_{i_s}} \stackrel{(27)}{\geq} \frac{1}{m_{\mathbf{g}}} > 0,$$

мы можем найти натуральное n_s , для которого

$$\frac{1}{2n_s} \leq d'_{\mathbf{h}}(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) < \frac{1}{n_s}. \quad (30)$$

Из (18), (19) и (2^{d'}) вытекает, что точки z_{2i_s} и z_{2i_s+1} принадлежат некоторому элементу покрытия $\gamma_{\mathbf{h}}(n_s)$. Согласно (17) они также принадлежат некоторому $W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)$, где $z_s^* \in Y$. По определению (16)

$$W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) \subseteq B_{\rho'}\left(z_s^*, \frac{1}{4\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)}\right).$$

Итак, $z_{2i_s}, z_{2i_s+1} \in B_{\rho'}(z_s^*, 1/(4\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)))$. Поскольку $i_s \in I$, имеем $k_{i_s} \leq m_{\mathbf{g}}$; значит, $\rho'(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) \stackrel{(26)}{\geq} 1/(2k_{i_s}) \geq 1/(2m_{\mathbf{g}})$. Отсюда и из неравенства треугольника получаем

$$\max\{\rho'(z_s^*, z_{2i_s}), \rho'(z_s^*, z_{2i_s+1})\} \geq \frac{1}{4k_{i_s}} \geq \frac{1}{4m_{\mathbf{g}}};$$

следовательно, $1/(2\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)) > 1/(2k_{i_s}) \geq 1/(2m_{\mathbf{g}})$ и $\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) < k_{i_s} \leq m_{\mathbf{g}}$.

Итак, для всякого $s \leq r$

$$z_{2i_s}, z_{2i_s+1} \in W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s), \quad \mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) < k_{i_s} \leq m_{\mathbf{g}}. \quad (31)$$

Для всех $s \in \{1, \dots, r-1\}$ (если $r > 1$) имеем

$$\begin{aligned} \rho(z_{2i_s+1}, z_{2i_{s+1}}) &\leq \sum_{j=i_s+1}^{i_{s+1}} \rho(z_{2j-1}, z_{2j}) + \sum_{i=i_s+1}^{i_{s+1}-1} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \rho(z_{2j-1}, z_{2j}) + \sum_{i \notin I} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \rho'(z_{2j-1}, z_{2j}) + \sum_{i \notin I} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{m_{\mathbf{g}}} \end{aligned}$$

(последнее неравенство вытекает из (25) и (28)). Точно так же доказывается, что $\rho(z_0, z_{2i_1}) < 1/m_{\mathbf{g}}$ и $\rho(z_{2i_r}, z_{2n}) < 1/m_{\mathbf{g}}$.

Из условия (1^М) следует, что для каждого $s \in \{1, \dots, r-1\}$ найдется $z_s^{**} \in Y$ такое, что $z_{2i_s+1}, z_{2i_{s+1}} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_s^{**})$; кроме того, существует $z_0^{**} \in Y$, для которого $z_0, z_{2i_1} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_0^{**})$, и существует $z_r^{**} \in Y$, для которого $z_{2i_r+1}, z_{2n} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_r^{**})$.

Итак, для всякого $s = 1, \dots, r$ имеем $z_{2i_s+1} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_s^{**})$. С другой стороны, согласно (31) $z_{2i_s+1} \in W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)$, причем $\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) \leq m_{\mathbf{g}} - 1$, т.е.

$$M_{\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)}(z_s^{**}) \stackrel{(2^{\mathcal{M}})}{\supseteq} M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_s^{**}).$$

Следовательно, $M_{\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)}(z_s^{**}) \cap W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) \neq \emptyset$. По определению (16) множества $W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)$ $z_s^{**} \in \tilde{B}_{d_{\mathbf{h}}}(z_s^*, 1/(8n_s n_{\mathbf{h}}))$.

Точно так же для $s = 0, \dots, r-1$ имеем $z_{2i_{s+1}} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_s^{**})$. С другой стороны, согласно (31) $z_{2i_{s+1}} \in W_{\mathbf{h}}(z_{s+1}^*, n_{s+1})$, причем $\mu_{\mathbf{h}}(z_{s+1}^*, n_{s+1}) \leq m_{\mathbf{g}} - 1$. Значит, $z_s^{**} \in \tilde{B}_{d_{\mathbf{h}}}(z_{s+1}^*, 1/(8n_{s+1} n_{\mathbf{h}}))$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
h &= z_0 \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_0^{**}), \\
z_0^{**} &\in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_1^*, \frac{1}{8n_1n_{\mathbf{h}}}\right), \\
z_1^{**} &\in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_1^*, \frac{1}{8n_1n_{\mathbf{h}}}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_2^*, \frac{1}{8n_2n_{\mathbf{h}}}\right), \\
z_2^{**} &\in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_2^*, \frac{1}{8n_2n_{\mathbf{h}}}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_3^*, \frac{1}{8n_3n_{\mathbf{h}}}\right), \\
&\dots\dots\dots, \\
z_{r-1}^{**} &\in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_{r-1}^*, \frac{1}{8n_{r-1}n_{\mathbf{h}}}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_r^*, \frac{1}{8n_rn_{\mathbf{h}}}\right), \\
z_r^{**} &\in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_r^*, \frac{1}{8n_rn_{\mathbf{h}}}\right), \\
g &= z_{2n} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_r^{**}).
\end{aligned} \tag{32}$$

При этом $\sum_{s=1}^r (1/(2n_s)) \stackrel{(30)}{\leq} \sum_{s=1}^r d'_{\mathbf{h}}(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) \stackrel{(24)}{<} n_{\mathbf{h}}$. Значит, $\tilde{d}_{\mathbf{h}}(z_0^{**}, z_r^{**}) \leq \sum_{s=1}^r (2/(8n_s n_{\mathbf{h}})) < \frac{1}{2}$. Из того, что $m_{\mathbf{g}} - 1 \stackrel{(10)}{\geq} n_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{h}} \stackrel{(8)}{>} n_{\mathbf{h}}(h)$, и из (32) вытекает, что $h \in M_{n_{\mathbf{h}}(h)}(z_0^{**})$. По определению (7) $z_0^{**} \in B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}(h, \frac{1}{2})$. Следовательно, $\tilde{d}_{\mathbf{h}}(h, z_r^{**}) < 1$ и

$$z_r^{**} \stackrel{(6)}{\in} U_{\mathbf{h}}(h). \tag{33}$$

Наконец, из включения $g \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_r^{**})$ вытекает включение $g \in M_{m_{\mathbf{g}}(g)-1}(z_r^{**})$ (см. (10) и $(2\mathcal{M})$), откуда $z_r^{**} \stackrel{(9)}{\in} M_{n_{\mathbf{g}}}(g)$. Свойство $(2\mathcal{M})$, неравенства $n_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{h}} \geq n_{\mathbf{h}}(h) \geq l_{\mathbf{h}}(h)$ и включение (33) дают $z_r^{**} \in M_{l_{\mathbf{h}}(h)}(g) \cap U_{\mathbf{h}}(h)$; значит, $g \stackrel{(5)}{\in} B_{d_{\mathbf{h}}}(h, 1/(2k_{\mathbf{h}}))$, что и требовалось.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in L_0(Y)$, $d_{\mathbf{h}}$ и $d_{\mathbf{g}}$ — непрерывные псевдометрики на Y , $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, $g_1, g_2 \in \text{supp } \mathbf{g}$, $0 < a \leq n_{\mathbf{g}}$ и $(d'_{\mathbf{h}} \wedge d'_{\mathbf{g}})(g_1, g_2) < a$. Тогда $d_{\mathbf{h}}(g_1, g_2) < a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начало доказательства почти дословно повторяет начало доказательства леммы 7. Найдём натуральное число n и точки $z_0 = g_1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = g_2$ в Y такие, что

$$\begin{aligned}
d'_{\mathbf{h}}(z_{2i}, z_{2i+1}) &< \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\
d'_{\mathbf{g}}(z_{2j-1}, z_{2j}) &< \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
\sum_{i=0}^{n-1} d'_{\mathbf{h}}(z_{2i}, z_{2i+1}) &< a \leq n_{\mathbf{g}}, \quad \sum_{j=1}^n d'_{\mathbf{g}}(z_{2j-1}, z_{2j}) < a \leq n_{\mathbf{g}},
\end{aligned} \tag{34}$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{n_{\mathbf{g}}}{2}, \quad \sum_{j=1}^n \rho'(z_{2j-1}, z_{2j}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}}; \tag{35}$$

при этом имеем $\rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2}$, потому что $\rho' \leq d'_{\mathbf{h}}$. Для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ выберем натуральное k_i такое, что

$$\frac{1}{2k_i} \leq \rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{k_i} \quad (36)$$

(если $\rho'(z_{2i}, z_{2i+1}) = 0$, считаем, что $k_i = \infty$). Положим

$$I = \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : k_i \leq m_{\mathbf{g}}\}.$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k_i} < n_{\mathbf{g}} \leq m_{\mathbf{g}},$$

из леммы 5 вытекает, что

$$\sum_{i \notin I} \frac{1}{k_i^{k_i}} < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}},$$

так что

$$\sum_{i \notin I} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2m_{\mathbf{g}}}.$$

Множество I непусто, потому что по меньшей мере для одного $i \in \{0, \dots, n-1\}$ $k_i \leq n_{\mathbf{g}}$ (тем более, $k_i \leq m_{\mathbf{g}}$). Действительно, если все k_i больше $n_{\mathbf{g}}$, то, поскольку $\sum_{i=0}^{n-1} (1/k_i) < n_{\mathbf{g}}$ (см. (36) и (35)), из леммы 5 вытекает, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k_i^{k_i}} < \frac{1}{n_{\mathbf{g}}},$$

и

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(z_{2i}, z_{2i+1}) < \frac{1}{2n_{\mathbf{g}}}.$$

Второе неравенство в (35) вместе с неравенствами $\rho \leq \rho'$ и $m_{\mathbf{g}} \geq n_{\mathbf{g}}$ дают

$$\rho(g_1, g_2) \leq \sum_{k=0}^{2n-1} \rho(z_k, z_{k+1}) < \frac{1}{n_{\mathbf{g}}},$$

что противоречит определению (8) числа $n_{\mathbf{g}}$.

Итак, множество I непусто; упорядочим его элементы по возрастанию:

$$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\},$$

где $1 \leq r \leq n$, $i_1 \geq 0$ и $i_r \leq n-1$.

Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 7, для каждого $s \leq r$ найдем $n_s \in \mathbb{N}$ и $z_s^* \in Y$ такие, что

$$\frac{1}{2n_s} \leq d'_{\mathbf{h}}(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) < \frac{1}{n_s} \quad (37)$$

и

$$z_{2i_s}, z_{2i_s+1} \in W_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s), \quad \mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) < k_{i_s} \leq m_{\mathbf{g}}.$$

Затем мы найдем такие $z_0^{**}, \dots, z_r^{**} \in Y$, для которых $z_0, z_{2i_1} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_0^{**})$, $z_{2i_s+1}, z_{2i_s+1} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_s^{**})$ при $s = 1, \dots, r-1$ и $z_{2i_r+1}, z_{2n} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_r^{**})$. Точно так же, как при доказательстве леммы 7, получаем

$$\begin{aligned} g_1 &= z_0 \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_0^{**}), \\ z_0^{**} &\in B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_1)}\left(z_1^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_1^*, n_1)\mu_{\mathbf{h}}(z_1^*, n_1)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_1^*, \frac{1}{8n_1n_{\mathbf{h}}}\right), \\ z_1^{**} &\in B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_1)}\left(z_1^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_1^*, n_1)\mu_{\mathbf{h}}(z_1^*, n_1)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_1^*, \frac{1}{8n_1n_{\mathbf{h}}}\right) \\ &\quad \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_2)}\left(z_2^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_2^*, n_2)\mu_{\mathbf{h}}(z_2^*, n_2)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_2^*, \frac{1}{8n_2n_{\mathbf{h}}}\right), \\ z_2^{**} &\in B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_2)}\left(z_2^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_2^*, n_2)\mu_{\mathbf{h}}(z_2^*, n_2)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_2^*, \frac{1}{8n_2n_{\mathbf{h}}}\right) \\ &\quad \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_3)}\left(z_3^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_3^*, n_3)\mu_{\mathbf{h}}(z_3^*, n_3)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_3^*, \frac{1}{8n_3n_{\mathbf{h}}}\right), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_{r-1}^{**} &\in B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{r-1})}\left(z_{r-1}^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_{r-1}^*, n_{r-1})\mu_{\mathbf{h}}(z_{r-1}^*, n_{r-1})}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_{r-1}^*, \frac{1}{8n_{r-1}n_{\mathbf{h}}}\right) \\ &\quad \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_r)}\left(z_r^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_r^*, n_r)\mu_{\mathbf{h}}(z_r^*, n_r)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_r^*, \frac{1}{8n_rn_{\mathbf{h}}}\right), \\ z_r^{**} &\in B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_r)}\left(z_r^*, \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_r^*, n_r)\mu_{\mathbf{h}}(z_r^*, n_r)}\right) \cap B_{\tilde{d}_{\mathbf{h}}}\left(z_r^*, \frac{1}{8n_rn_{\mathbf{h}}}\right), \\ g_2 &= z_{2n} \in M_{m_{\mathbf{g}}-1}(z_r^{**}). \end{aligned} \tag{38}$$

При этом

$$\sum_{s=1}^r \frac{1}{2n_s} \stackrel{(37)}{\leq} \sum_{s=1}^r d'_{\mathbf{h}}(z_{2i_s}, z_{2i_s+1}) \stackrel{(34)}{<} a \leq n_{\mathbf{g}}. \tag{39}$$

Выше было показано, что $k_{i_s} \leq n_{\mathbf{g}}$ и, следовательно, $\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) \leq n_{\mathbf{g}}$ по меньшей мере для одного $s \in \{1, \dots, r\}$. Пусть r_1 — наименьшее и r_2 — наибольшее из таких чисел (они могут совпадать); тогда $\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) > n_{\mathbf{g}}$ для всех $s < r_1$ и $s > r_2$.

Возьмем $s_0 \in \{1, \dots, r_1\}$, для которого $n_{s_0} = \min\{n_1, \dots, n_{r_1}\}$ (число s_0 может быть определено неоднозначно). Поскольку псевдометрики $\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n)$ увеличиваются с ростом n (см. (15)), имеем $\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0}) \leq \tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_s)$ для $s = 1, \dots, r_1$; значит,

$$\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})(z_0^{**}, z_{r_1-1}^{**}) \stackrel{(38)}{\leq} 2 \sum_{s=1}^{r_1-1} \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)}.$$

Все $\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)$ больше $n_{\mathbf{g}}$ для $s = 1, \dots, r_1 - 1$ и

$$\sum_{s=1}^{r_1-1} \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)} \stackrel{(1^{\mu})}{<} \sum_{s=1}^r \frac{1}{2n_s} \stackrel{(39)}{<} n_{\mathbf{g}}.$$

По лемме 5

$$\sum_{s=1}^{r_1-1} \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s) \mu_{\mathbf{h}}(z_s^*, n_s)} < \frac{1}{2n_{\mathbf{g}}},$$

так что

$$\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})(z_0^{**}, z_{r_1-1}^{**}) < \frac{1}{n_{\mathbf{g}}} \stackrel{(8)}{\leq} \frac{1}{2}.$$

Заметим, что

$$\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})(z_{r_1-1}^{**}, z_{r_1}^*) \leq \tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{r_1})(z_{r_1-1}^{**}, z_{r_1}^*) < \frac{1}{\mu_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, n_{r_1}) \mu_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, n_{r_1})} < \frac{1}{2}$$

(последнее неравенство вытекает из того, что $\mu_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, n_{r_1}) \stackrel{(1\mu)}{>} 2n_{r_1} \geq 2$). Значит,

$$\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})(z_0^{**}, z_{r_1}^*) < 1.$$

Согласно (14) и (15) найдется элемент O покрытия $\theta_{\mathbf{h}}(n_{s_0})$, для которого $B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})}(z_{r_1}^*, 1) \subseteq O$. Имеем $O \in \text{St}_{\theta_{\mathbf{h}}(n_{s_0})}(\{z_{r_1}^*\})$ и, поскольку $n_{s_0} \leq n_{r_1}$,

$$n_{\mathbf{g}} \geq \mu_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, n_{r_1}) \stackrel{(1\mu)}{\geq} \nu_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, n_{r_1}) \stackrel{(13)}{\geq} \nu_{\mathbf{h}}(O, n_{s_0}) \stackrel{(12)}{=} m_{\mathbf{h}}(x_0, n_{s_0})$$

для некоторого x_0 такого, что $O \subseteq U_{\mathbf{h}}(x_0, n_{s_0})$. Если $g_1 \notin B_{d_{\mathbf{h}}}(x_0, 1/(16n_{s_0}))$, то по определению (11)

$$\begin{aligned} \emptyset &= M_{m_{\mathbf{h}}(x_0, n_{s_0})}(g_1) \cap U_{\mathbf{h}}(x_0, n_{s_0}) \supseteq M_{n_{\mathbf{g}}}(g_1) \cap O \\ &\supseteq M_{n_{\mathbf{g}}}(g_1) \cap B_{\tilde{p}_{\mathbf{h}}(n_{s_0})}(z_{r_1}^*, 1) \ni z_0^{**} \end{aligned}$$

– противоречие. Следовательно, $g_1 \in B_{d_{\mathbf{h}}}(x_0, 1/(16n_{s_0}))$. С другой стороны,

$$z_{r_1}^* \in O \subseteq U_{\mathbf{h}}(x_0, n_{s_0}) \stackrel{(11)}{\subseteq} B_{d_{\mathbf{h}}}(x_0, 1/(16n_{s_0})); \text{ поэтому}$$

$$d_{\mathbf{h}}(g_1, z_{r_1}^*) < \frac{1}{8n_{s_0}}. \quad (40)$$

Аналогично доказывается, что

$$d_{\mathbf{h}}(z_{r_2}^*, g_2) < \frac{1}{8n_{s_0}}, \quad (41)$$

где $s^0 \in \{r_2, \dots, r\}$ таково, что $n_{s^0} = \min\{n_{r_2}, \dots, n_r\}$ (число r_2 было определено выше).

Из (38) получаем

$$\tilde{d}_{\mathbf{h}}(z_{r_1}^*, z_{r_2}^*) \leq \sum_{s=r_1}^{r_2} \frac{2}{8n_s n_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{s=r_1}^{r_2} \frac{1}{4n_s}.$$

Отсюда, из неравенства $d_{\mathbf{h}} \leq \tilde{d}_{\mathbf{h}}$ и из (40) и (41) получаем

$$d_{\mathbf{h}}(g_1, g_2) \leq \frac{1}{8n_{s_0}} + \sum_{s=r_1}^{r_2} \frac{1}{4n_s} + \frac{1}{8n_{s^0}} \leq \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \sum_{s=1}^r \frac{1}{n_s} \stackrel{(39)}{<} a.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in L_0(X)$, $d_{\mathbf{g}}$ и $d_{\mathbf{h}}$ — непрерывные псевдо-метрики на Y , $n_{\mathbf{g}} \leq n_{\mathbf{h}}$ и $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 1$. Тогда $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 28$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что слова $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ имеют канонические записи

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^k a_i g'_i - \sum_{j=1}^l b_j g''_j, \quad \mathbf{h} = \sum_{i=1}^m c_i h'_i - \sum_{j=1}^n d_j h''_j.$$

Тогда $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \sum_{i=1}^k a_i g'_i + \sum_{i=1}^m c_i h'_i - \sum_{j=1}^l b_j g''_j - \sum_{j=1}^n d_j h''_j$. В соответствии с замечанием 1 существуют неотрицательные c_{ij} для $i \leq k + m$ и $j \leq l + n$ такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l+n} c_{ij} &= a_i, \quad i \leq k, & \sum_{j=1}^{l+n} c_{(k+i)j} &= c_i, \quad i \leq m, \\ \sum_{i=1}^{k+m} c_{ij} &= b_j, \quad j \leq l, & \sum_{i=1}^{k+m} c_{i(l+j)} &= d_j, \quad j \leq n, \end{aligned} \quad (42)$$

и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(g'_i, g''_j) \\ &+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n c_{i(l+j)} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(g'_i, h''_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_j) \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(h'_i, h''_j) < 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij} (g'_i - g''_j), & \mathbf{u}_2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n c_{i(l+j)} (g'_i - h''_j), \\ \mathbf{u}_3 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (h'_i - g''_j), & \mathbf{u}_4 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} (h'_i - h''_j). \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$.

Покажем, что $\|\mathbf{u}_4\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$. Из (8) следует, что $\rho(h'_i, h''_j) \geq 1/n_{\mathbf{h}} \geq 1/n_{\mathbf{g}}$ для $i \leq m$, $j \leq n$. Согласно замечанию 3 из (22), (20), (3 d') и условия $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$ вытекает, что

$$(D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(x, y) \geq (d'_{\mathbf{h}} \star d'_{\mathbf{g}})(x, y) \geq 2n_{\mathbf{h}}^2 \rho'(x, y) \quad (44)$$

для любых $x, y \in Y$. Значит, $(D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(h'_i, h''_j) \geq 2n_{\mathbf{h}}$ для всех $i \leq m$ и $j \leq n$. Из (43) и неотрицательности всех слагаемых в (43) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(h'_i, h''_j) \leq \|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 1,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} < \frac{1}{2n_{\mathbf{h}}} \leq \frac{1}{2k_{\mathbf{h}}}. \quad (45)$$

С другой стороны, $d_{\mathbf{h}}(h'_i, h''_j) \stackrel{(4)}{\leq} k_{\mathbf{h}}$ для $i \leq m, j \leq n$. Следовательно, из (1) получаем $\|\mathbf{u}_4\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} d_{\mathbf{h}}(h'_i, h''_j) < \frac{1}{2}$.

Рассмотрим слово $\mathbf{u}_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (h'_i - g''_j)$. Для каждого $i \leq m$ выберем $j_i \leq l$ такое, что

$$(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) = \min_{j \leq l} \{(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_j)\}, \quad (46)$$

и положим $c'_i = \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j}$. Пусть

$$\mathbf{u}'_3 = \sum_{i=1}^m c'_i (h'_i - g''_{j_i}), \quad \mathbf{u}''_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (g''_{j_i} - g''_j).$$

Имеем $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}''_3$. Из (42), (45), неотрицательности всех c_{ij} и (3) вытекает, что

$$c_i \geq c'_i = c_i - \sum_{j=1}^n c_{(k+i)(l+j)} \geq \frac{5}{k_{\mathbf{h}}} - \frac{1}{k_{\mathbf{h}}} \geq \frac{1}{k_{\mathbf{h}}} \quad (47)$$

для $i \leq m$. Кроме того, из (46) и (43) следует, что

$$\sum_{i=1}^m c'_i (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_j) < 1 \quad (48)$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(g''_{j_i}, g''_j) \\ & \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} ((D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) + (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_j)) \\ & \leq 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j} (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_j) < 2, \end{aligned} \quad (49)$$

т.е. $\|\mathbf{u}''_3\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} < 2$. Из (47), (48) и неотрицательности всех c'_i , а также из неравенств $d' \stackrel{(20)}{\leq} d'', d'' \stackrel{(22)}{\leq} D$ и замечания 3 получаем

$$(d'_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d'_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) \leq (d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) \leq (D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, g''_{j_i}) < k_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}} \quad (50)$$

для $i \leq m$. Из леммы 7 вытекает, что $d_{\mathbf{h}}(h'_i, g''_{ji}) < 1/(2k_{\mathbf{h}})$ для всех $i \leq m$. Следовательно,

$$\|\mathbf{u}'_3\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{i=1}^m c'_i d_{\mathbf{h}}(h'_i, g''_{ji}) < \frac{1}{2k_{\mathbf{h}}} \sum_{i=1}^m c_i \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{2}.$$

Дословно повторяя все относящиеся к $\mathbf{u}_3$ рассуждения применительно к слову $\mathbf{u}_2$, мы представим $\mathbf{u}_2$ в виде суммы $\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}''_2$, где $\|\mathbf{u}'_2\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$, $\|\mathbf{u}''_2\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 2$ и $\mathbf{u}''_2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n c_{i(l+j)}(g'_i - g'_{ij})$; при этом соответствие $j \mapsto i_j$ ($j \leq n$, $i_j \leq k$) устроено таким образом, что

$$(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g'_{i_j}, h''_j) < n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}} \quad (51)$$

для $j \leq n$.

Итак, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}''_2 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}''_3 + \mathbf{u}_4$, причем $\|\mathbf{u}'_2\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$, $\|\mathbf{u}'_3\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$ и $\|\mathbf{u}_4\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$. Кроме того, $\|\mathbf{u}_1\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 1$ (это вытекает из (43) и неотрицательности всех слагаемых в (43)), $\|\mathbf{u}''_2\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 2$ и $\|\mathbf{u}''_3\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 2$. Рассмотрим слово $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3$; ясно, что $\mathbf{u}' \in L_0(Y)$. Имеем

$$\|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 5. \quad (52)$$

Слово $\mathbf{u}'$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_{ij}(g'_i - g''_j) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n c_{i(l+j)}(g'_i - g'_{ij}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{(k+i)j}(g''_{ji} - g''_j),$$

причем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l+n} c_{ij} &= a_i, \quad i \leq k, & \sum_{j=1}^{l+n} c_{(k+i)j} &= c_i, \quad i \leq m, \\ \sum_{i=1}^{k+m} c_{ij} &= b_j, \quad j \leq l, & \sum_{i=1}^{k+m} c_{i(l+j)} &= d_j, \quad j \leq n, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^k a_i g'_i - \sum_{j=1}^l b_j g''_j + \sum_{i=1}^m c_i g''_{ji} - \sum_{j=1}^n d_j g'_{ij}.$$

Слово $\mathbf{u}'$ отличается от слова $\mathbf{g}$ только коэффициентами при буквах вида g'_{ij} и g''_{ji} ; мы будем называть эти буквы *неправильными* (а прочие буквы из $\text{supp } \mathbf{u}'$ будем называть *правильными*). В частности, $\text{supp } \mathbf{u}' \subseteq \text{supp } \mathbf{g}$ и, следовательно, $|\text{supp } \mathbf{u}'| \leq |\text{supp } \mathbf{g}|$.

Скажем, что две буквы x и y из $\text{supp } \mathbf{u}'$ *1-связаны*, если найдутся натуральное r и $g_1, \dots, g_r \in \text{supp } \mathbf{u}'$ такие, что $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(x, g_1) < n_{\mathbf{g}}$, $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g_r, y) < n_{\mathbf{g}}$ и $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g_i, g_{i+1}) < n_{\mathbf{g}}$ для $i < r$. Разобьем множество $\text{supp } \mathbf{u}'$ на классы

$\mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_s^{(1)}$, $s \in \mathbb{N}$, таким образом, чтобы буквы из одного класса были 1-связаны друг с другом, а буквы из разных классов – нет. Мы получим

$$\begin{aligned} \text{supp } \mathbf{u}' &= \bigcup_{i \leq s} \mathcal{E}_i^{(1)}, \quad \mathcal{E}_i^{(1)} \cap \mathcal{E}_j^{(1)} = \emptyset, \quad i \neq j, \\ |\mathcal{E}_i^{(1)}| &\leq |\text{supp } \mathbf{u}'| \leq |\text{supp } \mathbf{g}|, \quad i \leq s, \quad s \leq |\text{supp } \mathbf{u}'|, \\ (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(x, y) &< n_{\mathbf{g}} |\text{supp } \mathbf{g}| \stackrel{(8)}{\leq} n_{\mathbf{g}}^2, \quad x, y \in \mathcal{E}_i^{(1)}, \quad i \leq s, \\ (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(\mathcal{E}_i^{(1)}, \mathcal{E}_j^{(1)}) &\geq n_{\mathbf{g}}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Предположим, что найдутся разные $i, j \leq s$, для которых $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(\mathcal{E}_i^{(1)}, \mathcal{E}_j^{(1)}) < n_{\mathbf{g}}^2$, т.е. расстояние между некоторыми двумя классами меньше верхней оценки диаметра каждого класса. В таком случае скажем, что две буквы x и y из $\text{supp } \mathbf{u}'$ 2-связаны, если найдутся натуральное r и $g_1, \dots, g_r \in \text{supp } \mathbf{u}'$ такие, что $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(x, g_1) < n_{\mathbf{g}}^2$, $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g_r, y) < n_{\mathbf{g}}^2$ и $(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g_i, g_{i+1}) < n_{\mathbf{g}}^2$ для $i < r$. Разобьем множество $\text{supp } \mathbf{u}'$ на классы $\mathcal{E}_1^{(2)}, \dots, \mathcal{E}_t^{(2)}$, $t \in \mathbb{N}$, таким образом, чтобы буквы из одного класса были 2-связаны друг с другом, а буквы из разных классов – нет. Мы получим

$$\begin{aligned} \text{supp } \mathbf{u}' &= \bigcup_{i \leq t} \mathcal{E}_i^{(2)}, \quad \mathcal{E}_i^{(2)} \cap \mathcal{E}_j^{(2)} = \emptyset, \quad i \neq j, \\ \{\mathcal{E}_i^{(1)} : i \leq s\} &\succ \{\mathcal{E}_i^{(2)} : i \leq t\}, \\ |\mathcal{E}_i^{(2)}| &\leq |\text{supp } \mathbf{u}'| \leq |\text{supp } \mathbf{g}|, \quad i \leq t, \quad t \leq s - 1 \leq |\text{supp } \mathbf{u}'| - 1, \\ (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(x, y) &< n_{\mathbf{g}}^2 |\text{supp } \mathbf{g}| \stackrel{(8)}{\leq} n_{\mathbf{g}}^3, \quad x, y \in \mathcal{E}_i^{(2)}, \quad i \leq t, \\ (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(\mathcal{E}_i^{(2)}, \mathcal{E}_j^{(2)}) &\geq n_{\mathbf{g}}^2, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Будем укрупнять разбиение множества $\text{supp } \mathbf{u}'$ на классы $\mathcal{E}_i^{(q)}$ до тех пор, пока не окажется, что попарные расстояния между классами не меньше верхней оценки $n_{\mathbf{g}}^{q+1}$ диаметров самих классов, или пока не останется только один класс. В

любом случае мы успеем сделать не более $|\text{supp } \mathbf{u}'| \leq |\text{supp } \mathbf{g}| \stackrel{(8)}{\leq} n_{\mathbf{g}}$ шагов, потому что на каждом шаге число классов уменьшается как минимум на единицу, а на первом шаге классов было не более $|\text{supp } \mathbf{u}'|$.

В результате мы получим разбиение

$$\text{supp } \mathbf{u}' = \bigcup_{i \leq p} \mathcal{E}_i,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j &= \emptyset, \quad i \neq j, \\ (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(x, y) &< n_{\mathbf{g}}^{q+1}, \quad x, y \in \mathcal{E}_i, \quad i \leq p, \end{aligned} \tag{53}$$

$$(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \geq n_{\mathbf{g}}^{q+1}, \quad i \neq j, \tag{54}$$

для некоторых $p, q \leq n_{\mathbf{g}}$.

Предположим, что слово $\mathbf{u}'$ имеет каноническую запись

$$\mathbf{u}' = \sum_{i=1}^r e_i u'_i - \sum_{j=1}^s f_j u''_j$$

(при этом $u'_i, u''_j \in \text{supp } \mathbf{g}$, поэтому каждая буква слова $\mathbf{u}'$ либо правильная, либо неправильная, и коэффициенты при правильных буквах совпадают с коэффициентами при этих буквах в слове $\mathbf{g}$). Найдём неотрицательные λ_{ij} для $i \leq r$ и $j \leq s$ такие, что

$$\sum_{j=1}^s \lambda_{ij} = e_i, \quad i \leq r, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_{ij} = f_j, \quad j \leq s,$$

и

$$\|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \wedge^* D_{\mathbf{h}}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} (D_{\mathbf{g}} \wedge^* D_{\mathbf{h}})(u'_i, u''_j).$$

Для каждого натурального $t \leq p$ положим

$$I_t = \{i \leq r : u'_i \in \mathcal{E}_t\}, \quad J_t = \{j \leq s : u''_j \in \mathcal{E}_t\}.$$

Предположим, что $\sum_{i \in I_t} e_i \neq \sum_{j \in J_t} f_j$; пусть, например, $\sum_{i \in I_t} e_i > \sum_{j \in J_t} f_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_t} \sum_{j \notin J_t} \lambda_{ij} &= \sum_{i \in I_t} \left(\sum_{j=1}^s \lambda_{ij} - \sum_{j \in J_t} \lambda_{ij} \right) \\ &\geq \sum_{i \in I_t} \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} - \sum_{i=1}^r \sum_{j \in J_t} \lambda_{ij} = \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j. \end{aligned}$$

Если $\sum_{i \in I_t} e_i < \sum_{j \in J_t} f_j$, то аналогично получаем

$$\sum_{i \notin I_t} \sum_{j \in J_t} \lambda_{ij} \geq \sum_{j \in J_t} f_j - \sum_{i \in I_t} e_i.$$

В любом случае

$$\sum_{i \in I_t} \sum_{j \notin J_t} \lambda_{ij} + \sum_{i \notin I_t} \sum_{j \in J_t} \lambda_{ij} \stackrel{\lambda_{ij} \geq 0}{\geq} \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right|. \quad (55)$$

Заметим, что если класс $\mathcal{E}_t$ не содержит неправильных букв, то $\sum_{i \in I_t} e_i = \sum_{j \in J_t} f_j$. В самом деле, поскольку коэффициенты при правильных буквах в слове $\mathbf{u}'$ совпадают с коэффициентами при этих буквах в слове $\mathbf{g}$, найдутся $I \subseteq \{1, \dots, l\}$ и $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, для которых $\sum_{i \in I_t} e_i = \sum_{i \in I} a_i$ и $\sum_{j \in J_t} f_j = \sum_{j \in J} b_j$. Имеем

$$\sum_{i \in I_t} \sum_{j \notin J_t} \lambda_{ij} + \sum_{i \notin I_t} \sum_{j \in J_t} \lambda_{ij} \geq \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right| = \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} b_j \right| \stackrel{(8)}{\geq} \frac{5}{k_{\mathbf{g}}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} &\stackrel{\lambda_{ij} \geq 0}{\geq} \sum_{\substack{i \in I_t, j \notin J_t \text{ или} \\ i \notin I_t, j \in J_t}} \lambda_{ij} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(u'_i, u''_j) \\ &\stackrel{(22)}{\geq} \sum_{\substack{i \in I_t, j \notin J_t \text{ или} \\ i \notin I_t, j \in J_t}} \lambda_{ij} (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(u'_i, u''_j) \stackrel{(54)}{\geq} \frac{5}{k_{\mathbf{g}}} n_{\mathbf{g}}^{q+1} \stackrel{(8)}{\geq} 5 \end{aligned}$$

в противоречие с тем, что $\|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 5$ (см. (52)).

Таким образом, сумма положительных и отрицательных коэффициентов при буквах из одного класса может отличаться от нуля только в том случае, если этот класс содержит хотя бы одну неправильную букву. Имеем

$$\begin{aligned} 5 &\stackrel{(52)}{>} \|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} \stackrel{\lambda_{ij} \geq 0}{\geq} \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left(\sum_{\substack{i \in I_t, j \notin J_t \text{ или} \\ i \notin I_t, j \in J_t}} \lambda_{ij} (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(u'_i, u''_j) \right) \\ &\stackrel{(22)}{\geq} \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left(\sum_{\substack{i \in I_t, j \notin J_t \text{ или} \\ i \notin I_t, j \in J_t}} \lambda_{ij} (d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(u'_i, u''_j) \right) \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\} \\ &\stackrel{(54), (55)}{\geq} \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right| n_{\mathbf{g}}^{q+1} \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right| < \frac{5}{n_{\mathbf{g}} \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\}}. \quad (56)$$

Выберем неправильную букву $\tilde{u}_t$ в каждом классе $\mathcal{E}_t$, содержащем хотя бы одну неправильную букву, и положим

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left(\sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right) \tilde{u}_t.$$

Слово $\tilde{\mathbf{u}}$ принадлежит $L_0(Y)$, т.е. сумма всех коэффициентов при его буквах равна нулю, потому что $\sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j = 0$, если класс $\mathcal{E}_t$ не содержит неправильных букв, и $\sum_{i=1}^r e_i - \sum_{j=1}^s f_j = 0$. Покажем, что $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}}} < 15$. Согласно замечанию 2

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}}} &\leq \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right| \\ &\quad \times \max\{(d''_{\mathbf{g}} \star d''_{\mathbf{h}})(g_1, g_2) : g_1 \text{ и } g_2 - \text{неправильные буквы}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $N_{\mathbf{g}} \leq N_{\mathbf{h}}$. Тогда (см. замечание 3)

$$(d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(g_1, g_2) \leq d''_{\mathbf{g}}(g_1, g_2) \stackrel{(21)}{\leq} N_{\mathbf{g}}$$

для любых $g_1, g_2 \in \text{supp } \mathbf{g}$, откуда

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} \stackrel{(56)}{<} \frac{5}{n_{\mathbf{g}} \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\}} N_{\mathbf{g}} \leq 5.$$

Пусть $N_{\mathbf{g}} \geq N_{\mathbf{h}}$. Вспомним, что неправильные буквы – это буквы вида g'_{i_j} или g''_{j_i} , поэтому для каждой неправильной буквы g найдется $h \in \text{supp } \mathbf{h}$ такое, что $(d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(g, h) < n_{\mathbf{g}}$ (см. (50) и (51)). Значит, если g_1 и g_2 – неправильные буквы, то для некоторых $h_1, h_2 \in \text{supp } \mathbf{h}$

$$\begin{aligned} (d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(g_1, g_2) &\leq (d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(g_1, h_1) + (d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(h_1, h_2) \\ &\quad + (d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(h_2, g_2) < 2n_{\mathbf{g}} + d''_{\mathbf{h}}(h_1, h_2) \leq 2n_{\mathbf{g}} + N_{\mathbf{h}}; \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} \stackrel{(56)}{<} \frac{5}{n_{\mathbf{g}} \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\}} (2n_{\mathbf{g}} + N_{\mathbf{h}}) \leq 15.$$

Точно так же можно оценить $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d_{\mathbf{h}}}$: согласно замечанию 2

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d_{\mathbf{h}}} &\leq \sum_{\substack{t: \mathcal{E}_t \text{ содержит} \\ \text{неправильную букву}}} \left| \sum_{i \in I_t} e_i - \sum_{j \in J_t} f_j \right| \\ &\quad \times \max\{d_{\mathbf{h}}(g_1, g_2) : g_1 \text{ и } g_2 - \text{неправильные буквы}\}. \end{aligned}$$

Неправильные буквы – это буквы вида g'_{i_j} или g''_{j_i} , поэтому для любой пары неправильных букв g_1, g_2 найдутся $h_1, h_2 \in \text{supp } \mathbf{h}$ такие, что $(d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}})(g_i, h_i) < n_{\mathbf{h}}$ для $i = 1, 2$ (см. (50) и (51)). По лемме 7 $d_{\mathbf{h}}(g_i, h_i) < 1/(2k_{\mathbf{h}})$ для $i = 1, 2$. Значит, $d_{\mathbf{h}}(g_1, g_2) \leq d_{\mathbf{h}}(g_1, h_1) + d_{\mathbf{h}}(h_1, h_2) + d_{\mathbf{h}}(h_2, g_2) \stackrel{(4)}{<} 1/k_{\mathbf{h}} + k_{\mathbf{h}} \stackrel{(8)}{\leq} 1 + n_{\mathbf{h}} \leq 1 + n_{\mathbf{g}}$, откуда

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d_{\mathbf{h}}} \stackrel{(56)}{<} \frac{5}{n_{\mathbf{g}} \min\{N_{\mathbf{g}}, N_{\mathbf{h}}\}} (1 + n_{\mathbf{g}}) \leq 6.$$

Итак, $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} < 15$. Положим $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}' - \tilde{\mathbf{u}}$. Тогда

$$\|\mathbf{u}''\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} \leq \|\mathbf{u}'\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} \leq \|\mathbf{u}'\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d''_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{h}}} < 20. \quad (57)$$

Заметим, что $\text{supp } \mathbf{u}'' \subseteq \text{supp } \mathbf{u}'$, так что буквы слова $\mathbf{u}''$ по-прежнему разбиты на классы таким образом, что расстояние относительно псевдометрики $d''_{\mathbf{h}} \overset{\star}{\wedge} d''_{\mathbf{g}}$ между буквами из разных классов не меньше $n_{\mathbf{g}}^{q+1}$, а расстояние между буквами из одного класса меньше $n_{\mathbf{g}}^{q+1}$. При этом суммы коэффициентов при буквах из одного

класса в слове $\mathbf{u}''$ равны нулю. В терминологии транспортной задачи это означает, что множество всех пунктов-поставщиков и пунктов-потребителей разбито на районы таким образом, что суммарные запасы продукции внутри каждого района равны суммарной потребности в этом районе, и стоимость перевозки единицы продукции между районами всегда больше стоимости перевозки внутри района. Ясно, что оптимальный план перевозок не предполагает обмена продукцией между районами. В самом деле, если план перевозок таков, что вывозятся все запасы и удовлетворяются все потребности, то из каждого района будет вывезено ровно столько продукции, сколько ввезено в этот район, и если такой план предполагает перевозки между районами, то его можно улучшить путем замены перевозок продукции между районами на перераспределение того же количества продукции внутри районов. Иными словами, мы всегда можем отменить все перевозки между районами и отправить продукцию, которая должна была быть вывезена из района, в те пункты (и в тех же количествах), куда она должна была быть ввезена из других районов; так будет выгоднее. В терминах нормы слова $\mathbf{u}''$ это означает, что если $\sum \mu_{ij}(x_i - y_j)$ — разложение слова $\mathbf{u}''$, для которого $\mu_{ij} \geq 0$, $x_i, y_j \in Y$ и $\|\mathbf{u}''\|_{d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}}} = \sum \mu_{ij}(d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}})(x_i, y_j)$, то $\mu_{ij} = 0$, как только x_i и y_j принадлежат разным классам. Другими словами, ненулевой вклад в норму $\|\mathbf{u}''\|_{d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}}}$ дают только пары букв из одного класса, расстояние между которыми относительно псевдометрики $d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}}$ меньше $n_{\mathbf{g}}^{q+1} \leq n_{\mathbf{g}}^{n_{\mathbf{g}}+1}$ (см. (53)) и, следовательно, расстояние относительно псевдометрики $d'_{\mathbf{h}} \star d'_{\mathbf{g}}$ меньше $n_{\mathbf{g}}$. К таким парам букв x_i, y_j применима лемма 8, согласно которой $d_{\mathbf{h}}(x_i, y_j) \leq (d'_{\mathbf{h}} \star d'_{\mathbf{g}})(x_i, y_j)$, откуда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}''\|_{d_{\mathbf{h}}} &\leq \sum \mu_{ij} d_{\mathbf{h}}(x_i, y_j) \leq \sum \mu_{ij} (d'_{\mathbf{h}} \star d'_{\mathbf{g}})(x_i, y_j) \\ &\leq \sum \mu_{ij} (d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}})(x_i, y_j) = \|\mathbf{u}''\|_{d''_{\mathbf{h}} \star d''_{\mathbf{g}}} \stackrel{(57)}{<} 20. \end{aligned}$$

Подведем итоги. Мы представили слово $\mathbf{h} + \mathbf{g}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{h} + \mathbf{g} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}''_2 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}''_3 + \mathbf{u}_4 \\ &= \mathbf{u}' + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}'' + \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}_4 \end{aligned}$$

и выяснили, что $\|\mathbf{u}''\|_{d_{\mathbf{h}}} < 20$, $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 6$, $\|\mathbf{u}'_2\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$, $\|\mathbf{u}'_3\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$ и $\|\mathbf{u}_4\|_{d_{\mathbf{h}}} < \frac{1}{2}$. Значит, $\|\mathbf{h} + \mathbf{g}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 28$, что и требовалось.

До конца доказательства монотонной нормальности пространства $L_0(Y)$ (и, следовательно, того, что свободное ЛВП $L(X)$ является кружевным) остался один шаг. Пусть $\mathbf{u} \in L_0(Y)$ и $U_{\mathbf{u}}$ — произвольная открытая окрестность слова $\mathbf{u}$ в $L_0(Y)$. Найдем непрерывную псевдометрику $d_{\mathbf{u}}$ на Y , для которой $d_{\mathbf{u}} \geq \rho'$ и $\mathbf{u} + \mathbf{B}_{d_{\mathbf{u}}}(1) \subseteq U_{\mathbf{u}}$, и поставим в соответствие паре $\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}}$ открытую окрестность $V(\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} + \mathbf{B}_{D_{\mathbf{u}}}(1/56)$ слова $\mathbf{u}$.

Рассмотрим $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in L_0(X)$ и открытые окрестности $U_{\mathbf{g}}$ и $U_{\mathbf{h}}$ слов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ соответственно. Предположим, что

$$V(\mathbf{g}, U_{\mathbf{g}}) \cap V(\mathbf{h}, U_{\mathbf{h}}) = \left(\mathbf{g} + \mathbf{B}_{D_{\mathbf{g}}}\left(\frac{1}{56}\right) \right) \cap \left(\mathbf{h} + \mathbf{B}_{D_{\mathbf{h}}}\left(\frac{1}{56}\right) \right) \neq \emptyset.$$

В соответствии с условием $(D^\pm)$ и леммой 2 имеем

$$\mathbf{g} - \mathbf{h} \in -\mathbf{B}_{D_{\mathbf{g}}} \left(\frac{1}{56} \right) + \mathbf{B}_{D_{\mathbf{h}}} \left(\frac{1}{56} \right) = \mathbf{B}_{D_{\mathbf{g}}} \left(\frac{1}{56} \right) + \mathbf{B}_{D_{-\mathbf{h}}} \left(\frac{1}{56} \right) \subseteq \mathbf{B}_{D_{\mathbf{g}} \hat{\wedge} D_{-\mathbf{h}}} \left(\frac{1}{28} \right),$$

т. е. $\|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \hat{\wedge} D_{-\mathbf{h}}} < \frac{1}{28}$. Из основной леммы вытекает, что либо $\|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 1$ (если $n(\mathbf{h}) \leq n(\mathbf{g})$) и тогда $\mathbf{g} \in \mathbf{h} + \mathbf{B}_{d_{\mathbf{h}}}(1) \subseteq U_{\mathbf{h}}$, либо $\|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|_{d_{-\mathbf{g}}} = \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{g}}} < 1$ (в противном случае) и тогда $\mathbf{h} \in \mathbf{g} + \mathbf{B}_{d_{\mathbf{g}}}(1) \subseteq U_{\mathbf{g}}$. Согласно утверждению 1 пространство $L_0(Y)$ монотонно нормально, что доказывает теорему.

В начале статьи отмечалось, что из доказанной теоремы и теоремы Дугунджи–Борхеса немедленно вытекают следующие два утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пространство вероятностных мер с конечным носителем на кружевном пространстве является ретрактом локально выпуклого пространства.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякое кружевное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства является ретрактом локально выпуклого пространства.*

Автор выражает глубокую признательность Ант. А. Клячко и С. А. Шкарину за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. *Dugundji J.* An extension of Tietze's theorem // Pacific J. Math. 1951. V. 1. P. 353–367.
2. *Borges C. J. R.* On stratifiable spaces // Pacific J. Math. 1966. V. 17. №1. P. 1–16.
3. *Gruenhage G.* Generalized metric spaces // Handbook of Set-Theoretic Topology / ed. K. Kunen, J. E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 423–501.
4. *Успенский В. В.* Свободные топологические группы метризуемых пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №6. С. 1295–1319.
5. *Fedorchuk V. V.* The Suslin number of the functor of probability measures // Topology Appl. 1998. V. 84. P. 55–60.
6. *Ткаченко М. Г.* О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №4. С. 601–607.
7. *Stone A. H.* On the compactification of topological spaces // Ann. Soc. Polon. Math. 1948. V. 21. P. 153–160.
8. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
9. *Райков Д. А.* Свободные локально выпуклые пространства равномерных пространств // Матем. сб. 1964. Т. 63. №4. С. 582–590.
10. *Przymusiński T.* Collectionwise normality and extensions of continuous functions // Fund. Math. 1978. V. 98. №1. P. 75–81.
11. *Tukey J. W.* Convergence and uniformity in topology. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1940.
12. *Heath R. W., Hodel R. E.* Characterizations of σ -spaces // Fund. Math. 1973. V. 77. №3. P. 271–275.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sipa@sipa.mccme.ru

Поступила в редакцию
23.07.2002