Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Многообразие полных пар двоеточий гладкого трехмерного многообразия особо, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 53–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 06:59:44

УДК 517.2

Н. В. Тимофеева

Многообразие полных пар двоеточий гладкого трехмерного многообразия особо

Получены уравнения, которым удовлетворяют векторы касательного пространства к многообразию X_{22} полных пар нульмерных подсхем длины 2 гладкого трехмерного проективного алгебраического многообразия, в наиболее специальной точке многообразия X_{22} . Доказано, что вычисленная система уравнений полна и многообразие полных пар двоеточий гладкого трехмерного проективного алгебраического многообразия особо.

Библиография: 6 названий.

§ 0. Введение

Целью настоящей статьи является установление того факта, что многообразие X_{22} полных пар двоеточий гладкого трехмерного проективного алгебраического многообразия является особым. В работе [1] А. С. Тихомировым было построено многообразие $X_{d_1 d_2}$ полных пар 0-подсхем длины d_1 и d_2 гладкой проективной алгебраической поверхности. Многообразия X_{1d} поверхности изучались, в частности, Дж. Чи [2] и А. С. Тихомировым в уже цитированной работе. Этими авторами независимо установлено, что многообразие X_{1d} гладкой проективной алгебраической поверхности гладко. В работе [1] дано доказательство гладкости многообразия X_{22} поверхности.

Аналогичная конструкция многообразия пар может быть реализована для 0-подсхем любого гладкого неприводимого проективного алгебраического n -мерного многообразия P . Для таких многообразий возникает ряд вопросов: для каких длин d_1, d_2 многообразия $X_{d_1 d_2}$ неособы, а для каких – особы; какова структура особенностей и имеются ли естественные их разрешения и т. п.

Будем работать над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, без ограничения общности считая $k = \mathbb{C}$.

Пусть H_d – схема Гильберта нульмерных подсхем длины d многообразия P , Z – подсхема в многообразии P , отвечающая точке z схемы Гильберта. Длина нульмерной подсхемы Z определяется как эйлерова характеристика ее структурного пучка: $l(Z) = \chi(\mathcal{O}_Z)$. Рассмотрим, следуя [1], бирациональный морфизм сложения наборов точек

$$\phi_{d_1 d_2}: H_{d_1} \times H_{d_2} \dashrightarrow H_{d_1 + d_2},$$

корректно определенный на открытых подмножествах схем Гильберта H_{d_1} и H_{d_2} . Если подсхемы Z_1 и Z_2 длин d_1 и d_2 (которые могут принимать одинаковые

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS-OPEN (грант № 2000-269).

значения) представлены соответственно наборами из d_1 и d_2 различных точек $Z_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}\}$, $Z_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}$, то их образ $\phi_{d_1 d_2}(z_1, z_2)$ относительно бирационального морфизма $\phi_{d_1 d_2}$ представлен их теоретико-множественным объединением $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}, q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}$. Многообразие $X_{d_1 d_2}$ строится как замыкание в произведении $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ открытого множества

$$\{(z_1, z_2, z) \mid Z_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}\}, Z_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}, z = \phi_{d_1 d_2}(z_1, z_2)\},$$

обладает проекцией $\sigma: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2}$ и является разрешением бирационального морфизма $\phi_{d_1 d_2}$ в следующем смысле: существует единственный морфизм $\tilde{\phi}: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1+d_2}$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & X_{d_1 d_2} & & \\ & \swarrow \sigma & & \searrow \tilde{\phi} & \\ H_{d_1} \times H_{d_2} & \xrightarrow{\phi_{d_1 d_2}} & & \longrightarrow & H_{d_1+d_2}. \end{array}$$

Из факта гладкости многообразия X_{12} поверхности сразу следует гладкость многообразий X_{11} и X_{12} трехмерного многообразия. Гладкость — понятие локальное, и можно рассматривать многообразия пар трехмерного аффинного пространства. Многообразие X_{12} обладает проекцией на схему Гильберта H_3 подсхем длины 3. Всякая подсхема длины 3 лежит в единственной плоскости. Отсюда видим, что многообразие X_{12} трехмерного аффинного пространства расслоено над грассманианом 2-плоскостей пространства $\mathbb{A}^3$ со слоем, представляющим собой многообразие X_{12} аффинной плоскости. Из гладкости многообразия X_{12} трехмерного многообразия очевидным образом следует гладкость многообразия X_{11} . Решение проблемы гладкости (или особенности) многообразий $X_{d_1 d_2}$ трехмерного многообразия при $d_1 + d_2 \geq 4$ не сводится к изучению многообразий полных пар подсхем поверхности.

Настоящая работа посвящена доказательству особенности одного из низших нетривиальных многообразий полных пар нульмерных подсхем трехмерного многообразия P — многообразия X_{22} .

Чтобы установить особенность многообразия X_{22} , достаточно вычислить размерность его касательного пространства в наиболее специальной точке $(z_1, z_2, z) \in X_{22} \subset H_2 \times H_2 \times H_4$. Для этого с небольшими изменениями применяется техника, использованная автором этой статьи в работе [3] для доказательства гладкости многообразия X_{23} полных пар 0-подсхем гладкой поверхности. В §1 излагаются технические сведения, необходимые для вычисления линейных условий, которым удовлетворяют векторы касательного пространства к любому многообразию полных пар $X_{d_1 d_2}$ в каждой его точке. Дальнейшее изложение посвящено обоснованию выбора точки многообразия X_{22} , в которой будет исследоваться касательное пространство. Эта точка должна быть специальной точкой многообразия. Очевидно, что достаточно общие точки многообразия X_{22} , представленные тройками подсхем, лежащих на поверхности, — гладкие.

Так как вопрос о гладкости или особенности точки локален, для решения данной задачи оказывается удобным взять в качестве P трехмерное проективное пространство $\mathbb{P}^3$. Оно допускает действие тора T , которое позволяет проспециализировать

все точки многообразия в неподвижные относительно действия T точки, число которых конечно. Параграф 2 посвящен выбору действия тора T и самой специальной из неподвижных точек этого действия. В §3 вычисляются линейные условия, которым удовлетворяют векторы касательного пространства к многообразию X_{22} в его наиболее специальной точке, а также показывается, что полученная система является полной. Это и доказывает основной результат статьи.

§1. Касательное пространство

Пусть подсхема Z_1 задается в аффинной окрестности $U = \text{Spec } R \subset P$ носителей $\text{Supp } Z_1$ и $\text{Supp } Z_2$ идеалом I_1 , подсхема Z_2 – идеалом I_2 , подсхема Z – идеалом I . Имеют место следующие отношения включения [3]:

$$I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2. \quad (1)$$

Искомое касательное пространство $T_x X_{d_1 d_2}$ к многообразию $X_{d_1 d_2}$ в его точке $x = (z_1, z_2, z)$ является подпространством в касательном пространстве

$$T_x(H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}) = T_{z_1} H_{d_1} \oplus T_{z_2} H_{d_2} \oplus T_z H_{d_1+d_2}$$

к произведению $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$. Касательное пространство $T_z H_d$ к схеме Гильберта есть $\text{Hom}_R(I, R/I)$. Так как вопрос о гладкости локален, то можно заменить многообразие P на аффинную окрестность $U \simeq \mathbb{A}^3 = \text{Spec } R$ носителей подсхем Z_1 и Z_2 на многообразии P и положить кольцо $R = \mathbb{C}[x, y, z]$, где x, y, z – локальные координаты в аффинной карте U . В дальнейшем будет удобно считать аффинное подмножество U вложенным в проективное пространство $\mathbb{P}^3$.

Уравнения, которым должны удовлетворять векторы касательного пространства, согласно [3] задаются следующими условиями:

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \text{Hom}_R(I, R/I), \quad \forall \eta_1 \in \text{Hom}_R(I_1, R/I_1), \\ \forall \eta_2 \in \text{Hom}_R(I_2, R/I_2), \quad \forall f \in I, \quad \forall f_1 \in I_1, \quad \forall f_2 \in I_2 \\ \eta(f) - \eta_1(f) \equiv 0 \pmod{I_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\eta(f) - \eta_2(f) \equiv 0 \pmod{I_2}, \quad (3)$$

$$f_1 \eta_2(f_2) + \eta_1(f_1) f_2 - \eta(f_1 f_2) \equiv 0 \pmod{I}. \quad (4)$$

§2. Специализации

Будем считать, что многообразие P есть проективное пространство $\mathbb{P}^3$. Если $(p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^3$, то в алгебре $\mathbb{C}[p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ однородных многочленов можно ввести действие одномерной группы тора, определяя его $\forall \tau \in T$ на образующих p_0, p_1, p_2, p_3 следующим образом:

$$\tau * p_0 = p_0, \quad \tau * p_1 = t p_1, \quad \tau * p_2 = t^m p_2, \quad \tau * p_3 = t^n p_3,$$

m, n – параметры. Тогда имеется индуцированное действие тора T на множестве идеалов кольца $\mathbb{C}[p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$, и при $t \rightarrow 0$ произвольная тройка подсхем (Z_1, Z_2, Z) перейдет в тройку подсхем, заданных мономиальными идеалами, в силу следующего.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что схема длины 2 на $\mathbb{P}^3$ при действии тора переходит либо в схему, аналитически изоморфную схеме с идеалом (x^2, y) , либо в схему, представленную парой неподвижных точек на $\mathbb{P}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любая схема длины 4 с носителем в точке на $\mathbb{P}^3$, за исключением схем, задаваемых квадратом максимального идеала (т.е. $I \stackrel{\text{an}}{\simeq} (x, y, z)^2 = (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)$), лежит на гладкой поверхности и, следовательно, аналитически изоморфна 4-подсхеме плоскости. Аналитическая классификация 4-подсхем с носителем в точке на плоскости дана Ж. Бриансоном [4] и включает 3 типа: (x^4, y) , (x^2, y^2) , (x^3, xy, y^2) .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Под действием тора всякая схема длины 4 в пространстве $\mathbb{P}^3$ переходит либо в схему, аналитически изоморфную схеме одного из трех типов Ж. Бриансона, либо в схему, задаваемую квадратом максимального идеала, либо в объединение схем меньших длин с носителями в двух, трех или четырех неподвижных точках на $\mathbb{P}^3$.

Аналогичная специализация подсхем в мономиальные может быть реализована для любых длин при подходящем выборе действия тора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует такое действие тора на $\mathbb{P}^n = \text{Proj } \mathbb{C}[p_0 : p_1 : \dots : p_n]$*

$$\tau * p_0 = p_0, \quad \tau * p_1 = t^{m_1} p_1, \quad \dots, \quad \tau * p_n = t^{m_n} p_n$$

с параметрами $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, что точка (z_1, z_2, z) многообразия полных пар $X_{d_1 d_2}$ неподвижна тогда и только тогда, когда подсхемы Z_1, Z_2, Z задаются мономиальными идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, образующая идеала всякой подсхемы длины d имеет степень не выше d . Следовательно, под действием тора с $m_1 = 1$, $m_2 = d+1$, $m_3 = d(d+1)+1, \dots, m_{i+1} = m_i d + 1, \dots, m_n = d^{n-1} + d^{n-2} + \dots + 1$ всякая точка с немономиальным набором идеалов перемещается. Это доказывает предложение.

Для случая $n = 3$, $d_1 + d_2 = 4$ полагаем $m_2 = 5$, $m_3 = 21$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Многообразие полных пар $X_{d_1 d_2}$ 0-подсхем проективного пространства $\mathbb{P}^n$ инвариантно относительно действий полного тора $\overline{T} = T \cup \{0\}$, где $\{0\}$ – матрица, отвечающая нулевому значению параметра t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\forall \tau \in T, \forall x \in X_{d_1 d_2} \quad \tau * x \in X_{d_1 d_2}$. Действие всякой алгебраической группы G на многообразии X – это морфизм $\alpha: G \times X \rightarrow X$. Образ морфизма $\alpha: T \times X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ содержит открытое подмножество, плотное в замыкании $\alpha(T \times X_{d_1 d_2})$. Отсюда следует $\alpha(\overline{T} \times X_{d_1 d_2}) \subset X_{d_1 d_2}$ и $\overline{T}$ -инвариантность $X_{d_1 d_2}$. Предложение доказано.

Фиксируем аффинную карту $U = \{p_0 \neq 0, x = p_1/p_0, y = p_2/p_0, z = p_3/p_0\}$. Согласно предложению 1 достаточно рассмотреть следующие тройки мономиальных идеалов, удовлетворяющие условиям (1):

- I) $\mathcal{J} = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^4, y, z)\}$;
- II) $\mathcal{J} = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^3, xy, y^2, z)\}$;
- III) $\mathcal{J} = \{(x, y^2, z), (x^2, y, z), (x^3, xy, y^2, z)\}$;
- IV) $\mathcal{J} = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2, y^2, z)\}$;
- V) $\mathcal{J} = \{(x^2, y, z), (x, y^2, z), (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)\}$;
- VI) $\mathcal{J} = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)\}$.

Из замкнутости многообразия $X_{d_1 d_2}$ в произведении $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ и универсального свойства схемы Гильберта непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для того чтобы точка $\mathcal{X}_0 \in H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ была точкой многообразия $X_{d_1 d_2}$, достаточно, чтобы существовало плоское над $\mathbb{P}^1$ семейство $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$: $\mathcal{X}_\lambda = (z_1(\lambda), z_2(\lambda), z(\lambda)) \mapsto \lambda$ (формально параметр λ может принимать бесконечное значение), причем для всех $\lambda \neq 0$ $(z_{d_1}(\lambda), z_{d_2}(\lambda), z(\lambda)) \in X_{d_1 d_2}$ и $\mathcal{X}_0 = (z_1(0), z_2(0), z(0))$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Точка аналитического типа VI является наиболее специальной точкой многообразия X_{22} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для исследования точек типа I рассмотрим аналитическую замену координат $y \mapsto \lambda y - x^2$, где λ – параметр. При $\lambda \rightarrow 0$ это определяет специализацию тройки подсхем, заданных тройкой идеалов $\mathcal{I}_\lambda = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^4, \lambda y - x^2, z)\}$ и изоморфных идеалам тройки I, в идеалы $\mathcal{I}_0 = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2, y^2, z)\}$ тройки IV. Аналитическая замена $x \mapsto \lambda x - y$ приводит при $\lambda \rightarrow 0$ к специализации $\mathcal{I}_\lambda = \{((\lambda x - y)^2, y, z), ((\lambda x - y)^2, y, z), ((\lambda x - y)^2, y^2, z)\} \rightsquigarrow \mathcal{I}_0 = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^3, xy, y^2, z)\}$, т.е. точка типа IV специализируется в точку типа II. Такая же замена приводит к специализации точки типа III в точку типа II: $\mathcal{I}_\lambda = \{(\lambda x - y, y^2, z), ((\lambda x - y)^2, y, z), ((\lambda x - y)^3, (\lambda x - y)y, y^2, z)\} \rightsquigarrow \mathcal{I}_0 = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^3, xy, y^2, z)\}$, и точки типа V в точку типа VI: $\mathcal{I}_\lambda = \{(\lambda x - y, y^2, z), ((\lambda x - y)^2, y, z), (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)\} \rightsquigarrow \mathcal{I}_0 = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)\}$. Наконец, точка типа II специализируется в точку типа VI. Для этого выполним аналитическую замену $z \mapsto \lambda z - x^2$. При $\lambda \rightarrow 0$ получим $\mathcal{I}_\lambda = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^3, xy, y^2, \lambda z - x^2)\} \rightsquigarrow \mathcal{I}_0 = \{(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)\}$. Предложение доказано.

Для того чтобы сделать вывод о гладкости или особенности многообразия X_{22} , достаточно вычислить касательное пространство в его наиболее специальной точке – точке шестого типа.

§3. Вычисление в точке VI

Базис пространства T_1 , касательного к первому сомножителю произведения $H_2 \times H_2 \times H_4$, состоит из следующих гомоморфизмов, заданных на образующих идеала I_1 :

$$\begin{aligned} e_{x^2}^1: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}; & e_{x^2}^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}; & e_y^1: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}; \\ e_y^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{x} \\ \overline{0} \end{bmatrix}; & e_z^1: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}; & e_z^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор пространства T_1 есть линейная комбинация $\eta_1 = \sum_j x_j^i e_j^i$, где суммирование ведется по образующим идеала I_1 .

Базис пространства T_2 , касательного ко второму сомножителю произведения $H_2 \times H_2 \times H_4$, имеет в точности такой же вид; мы будем обозначать его элементы f_j^i ,

$i \in \{1, x\}$, $j \in \{x^2, y, z\}$. Значение гомоморфизма f_j^i на образующей $k \in \{x^2, y, z\}$ определяется равенством

$$f_j^i(k) = \begin{cases} \bar{i}, & \text{если } k = j; \\ \bar{0} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Произвольный вектор пространства T_2 — это линейная комбинация $\eta_2 = \sum_j y_j^i f_j^i$.

Теперь опишем базисные векторы φ_j^i пространства $T_4 = T_z H_4$. Это гомоморфизмы $I \rightarrow R/I$, определенные своими значениями на образующих $k \in \{x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx\}$:

$$\varphi_j^i(k) = \begin{cases} \bar{i}, & \text{если } k = j; \\ \bar{0} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i \in \{x, y, z\}, \quad j \in \{x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx\}.$$

Как заметил еще Дж. Фогарти [5], схема H_4 в интересующей нас точке особа и касательное пространство к ней в этой точке 18-мерно. Произвольный вектор пространства T_4 представлен линейной комбинацией $\eta_4 = \sum_j a_j^i \varphi_j^i$.

Подстановка полученных линейных комбинаций в сравнения (2)–(4), а также учет того, что ситуация симметрична относительно перестановок $y \leftrightarrow z$ и $I_2 \leftrightarrow I'_2$, приводит к 17 линейно независимым уравнениям:

$$\begin{aligned} x_{x^2}^1 &= 0, & a_{x^2}^x - x_{x^2}^x &= 0, & a_{xy}^x - x_y^1 &= 0, & a_{y^2}^x &= 0, \\ a_{yz}^x &= 0, & a_{z^2}^x &= 0, & a_{zx}^x - x_z^1 &= 0, & y_{x^2}^1 &= 0, & a_{x^2}^x - y_{x^2}^x &= 0, \\ a_{xy}^x - y_y^1 &= 0, & a_{zx}^x - y_z^1 &= 0, & a_{z^2}^y &= 0, & a_{y^2}^z &= 0, & y_y^1 + x_y^1 - a_{y^2}^y &= 0, \\ y_z^1 + x_z^1 - a_{z^2}^z &= 0, & x_y^1 - a_{yz}^z &= 0, & x_z^1 - a_{yz}^y &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Система (5) полна в следующем смысле: всякий вектор, удовлетворяющий системе (5), есть вектор касательного пространства к многообразию X_{22} в точке VI.

Для доказательства нам потребуется ряд фактов и определений.

Известно [5; добавление к лекции 4], что для всякой схемы X над полем k существует биекция

$$\text{Hom}(\text{Спес } D, X)|^x \simeq T_x X, \quad (6)$$

где $\text{Hom}(\text{Спес } D, X)|^x$ — подмножество, состоящее из морфизмов спектра кольца дуальных чисел $D = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ в схему X , образ которых есть точка $x \in X$, $T_x X$ — касательное пространство к схеме X в точке x . Множество $\text{Hom}(\text{Спес } D, X)|^x$ обладает структурой векторного пространства, и (6) — изоморфизм векторных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Деформация первого порядка (или инфинитезимальная деформация) подсхемы Z — это семейство $Z_\varepsilon \subset U \times \text{Спес } D$, плоское над $\text{Спес } D$ и такое, что его слой над приведенной точкой $\text{Спес } k \in \text{Спес } D$ есть Z .

Тогда векторы касательного пространства к схеме Гильберта H_d в ее точке z естественно отождествить с деформациями первого порядка подсхемы Z , а векторы касательного пространства к многообразию пар X_{22} — с деформациями первого порядка тройки подсхем $\mathcal{X}_0 = (Z_1, Z_2, Z)$, отвечающей точке многообразия X_{22} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инфинитезимальная деформация $\mathcal{X}_\varepsilon \in T_{\mathcal{X}_0}(H_2 \times H_2 \times H_4)$ *продолжаема в многообразии* X_{22} , если найдется такое семейство $\mathcal{X}_t \subset U \times U \times U \times \text{Спец } k[t]$, плоское над $\text{Спец } k[t]$, что слой семейства $\mathcal{X}_t$ над точкой $\text{Спец } k(t) \in \text{Спец } k[t]$ есть тройка подсхем $(Z_1(t), Z_2(t), Z(t))$, соответствующая точке многообразия X_{22} , и имеет место расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\varepsilon & \hookrightarrow & U \times U \times U \times \text{Спец } D \\ \phi_{\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{X}_t & \hookrightarrow & U \times U \times U \times \text{Спец } k[t], \end{array}$$

в котором вертикальные морфизмы индуцированы гомоморфизмом колец $\phi^\# : k[t] \rightarrow D, t \mapsto \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Известно [6; гл. V, § B], что всякая инфинитезимальная деформация тройки $\mathcal{X}_0 \in H_2 \times H_2 \times H_4$, продолжаемая в многообразии X_{22} , лежит в касательном пространстве к X_{22} . Для доказательства особенности многообразия в исследуемой точке надо проверить, продолжаема ли всякая инфинитезимальная деформация, удовлетворяющая полученной системе уравнений.

В касательном пространстве к произведению $H_2 \times H_2 \times H_4$ полученная система линейных уравнений вырезает подпространство деформаций следующего общего вида:

$$\begin{aligned} (x^2 - ax, y - b - b'x, z - c - c'x), \quad (x^2 - ax, y - b - b''x, z - c - c''x), \\ (x^2 - ax - t_1y - t_2z, xy - bx - t_3y - t_4z, y^2 - 2by, \\ yz - bz - cy, z^2 - 2cz, zx - cx - t_5y - t_6z). \end{aligned}$$

Во-первых, инфинитезимальная деформация

$$(x^2 - ax, y, z), \quad (x^2 - ax, y, z), \quad \left(x^2 - ax, xy - \frac{a}{2}y, y^2, yz, z^2, xz - \frac{a}{2}z\right)$$

продолжаема в семейство

$$\left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2, y, z\right), \quad \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2, y, z\right), \quad \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2, \left(x - \frac{a}{2}\right)y, y^2, yz, z^2, \left(x - \frac{a}{2}\right)z\right).$$

Во-вторых, инфинитезимальная деформация

$$(x^2, y - b, z - c), \quad (x^2, y - b, z - c), \quad (x^2, xy - bx, y^2 - 2by, yz - bz - cy, z^2 - 2cz, xz - cx)$$

продолжаема в семейство

$$(x^2, y - b, z - c), \quad (x^2, y - b, z - c), \quad (x^2, x(y - b), (y - b)^2, (y - b)(z - c), (z - c)^2, x(z - c)).$$

В-третьих, инфинитезимальные деформации, порожденные параметрами b', c' и b'', c'' , очевидно, продолжаемы.

Осталось рассмотреть деформации с параметрами $t_i, i = 1, \dots, 6$. Деформация $(x^2, y, z), (x^2, y, z), (x^2 - t_1y, xy, y^2, yz, z^2, xz)$ продолжаема. Чтобы убедиться

в этом, достаточно сделать аналитическую замену $y \mapsto (1/t_1)(x^2 - y)$. Это дает (x^2, y, z) , (x^2, y, z) , (y, x^3, zx, z^2) . Такая точка принадлежит многообразию X_{22} . Ввиду симметрии ситуации относительно перестановки $y \leftrightarrow z$ тем самым доказана продолжаемость деформации, заданной параметром t_2 .

Деформация (x^2, y, z) , (x^2, y, z) , $(x^2, xy - t_3y - t_4z, y^2, yz, z^2, zx)$ продолжаема; это доказывается заменой $z \mapsto (1/t_4)(xy - t_3y - z)$, приводящей к тройке (x^2, y, z) , (x^2, y, z) , (x^2, y^2, z) . Ввиду симметрии ситуации тем самым доказана продолжаемость деформаций с параметрами t_5, t_6 . Предложение доказано.

Итак, все инфинитезимальные деформации, удовлетворяющие линейным условиям, продолжаемы и точка типа VI особа. Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА. *Многообразие X_{22} полных пар двусточий трехмерного гладкого неприводимого проективного многообразия особа.*

В силу того, что всякое многообразие $X_{d_1 d_2}$ полных пар 0-подсхем длин, одна из которых больше 2, а другая не меньше 2, содержит точки, соответствующие тройкам подсхем вида

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{\{x^2, y, z\} \cup p_3 \cup \dots \cup p_{d_1}\}, \\ Z_2 &= \{\{x^2, y, z\} \cup q_3 \cup \dots \cup q_{d_2}\}, \\ Z &= \{\{x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx\} \cup p_3 \cup \dots \cup p_{d_1} \cup q_3 \cup \dots \cup q_{d_2}\}, \end{aligned}$$

где все точки p_i и q_j различны и не совпадают с носителем неприведенных подсхем, имеется очевидное

СЛЕДСТВИЕ. *Многообразия $X_{d_1 d_2}$ полных пар нульмерных подсхем длин d_1 и d_2 особы при $d_1, d_2 \geq 2$.*

Список литературы

1. Тихомиров А. С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №6. С. 153–180.
2. Cheah J. The cohomology of smooth nested Hilbert schemes of points // Thesis. Chicago: Univ. of Chicago, 1994.
3. Тимофеева Н. В. Гладкость и эйлерова характеристика многообразия полных пар X_{23} нульмерных подсхем длины 2 и 3 алгебраической поверхности // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №2. С. 276–287.
4. Briançon J. Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ // Invent. Math. 1977. V. 41. P. 45–89.
5. Fogarty J. Algebraic families on an algebraic surface // Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 511–521.
6. Kleiman S. The enumerative theory of singularities // Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, August 5–25, 1976). Alpen aan den Rijn: Sijthoff and Noodhoff, 1977. P. 297–396.

Ярославский государственный
педагогический университет
им. К. Д. Ушинского
E-mail: timof@yspu.yar.ru

Поступила в редакцию
25.01.2002 и 17.07.2002