Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Асимптотики больших отклонений гауссовских процессов типа винеровского для L^p -функционалов, $p > 0$, и гипергеометрическая функция, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 61–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:12:55

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

**Асимптотики больших отклонений гауссовских
процессов типа винеровского для L^p -функционалов,
 $p > 0$, и гипергеометрическая функция**

В статье доказан общий результат о точных асимптотиках вероятностей

$$P \left\{ \int_0^1 |\xi(t)|^p dt > u^p \right\}$$

при $u \rightarrow \infty$ и $p > 0$ для гауссовских процессов $\xi(t)$.

Общая теорема применена для вычисления указанной асимптотики в случае следующих процессов: винеровского $w(t)$, броуновского моста и стационарного гауссовского процесса $\eta(t) := w(t+1) - w(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Метод исследования – метод Лапласа в банаховых пространствах. Вычисления констант сведены к решению экстремальной задачи для функционала действия и исследованию спектра дифференциального оператора второго порядка типа Штурма–Лиувилля.

Библиография: 30 названий.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Точные асимптотики больших отклонений гауссовских мер в банаховых пространствах впервые были найдены в работах [1]–[5]. Речь идет об асимптотиках вероятностей

$$\mu(uD), \quad u \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где $D = \{x \in B : G(x) \geq 1\}$ – некоторая область сепарабельного банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$, μ – гауссовская мера, заданная на B , $G(x)$ – дважды дифференцируемая по Фреше неотрицательная функция.

Наиболее полно изучена ситуация $B = L^p([0, 1]^n)$, $p > 1$, $n \geq 1$,

$$G(x) = \int_0^1 |x(t)|^p dt, \quad x \in B, \quad (1.2)$$

в случаях, когда мера μ есть распределение

- 1) стандартного винеровского процесса,
- 2) броуновского моста [2],
- 3) винеровского процесса со сносом [3],
- 4) винеровского поля Йеа–Ченцова,
- 5) “винеровской подушки” [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00649).

Новый метод исследования, развитый для решения этих сложных задач, — метод Лапласа в банаховых пространствах — позволил не только выявить общую природу асимптотического поведения гауссовских мер (см. теорему 8 ниже), но и провести до конца вычисления основных констант, характеризующих это общее поведение.

Оказалось, что метод работ [1]–[4] годится не только для L^p -норм, но и для так называемых L^p -функционалов, которые также выражаются формулой (1.2), но в случае, когда $0 < p < 1$. Как известно, для этих значений p функционал $(G(x))^{1/p}$ нормой уже не является.

В данной работе мы исследуем асимптотику вероятности (1.1) для L^p -функционала, $0 < p \leq 1$ (граничный случай $p = 1$ также сложен для изучения вследствие нереклексивности пространства L^1). Мы рассмотрим применение полученного общего результата к винеровскому процессу, броуновскому мосту, а также рассмотрим новый важный пример, в котором мера μ есть распределение стационарного гауссовского процесса с треугольной ковариационной функцией. Последний процесс имеет широкие приложения в теории и технике [6], [7], [8; § 12.2, замеч. 12.2.10], [9].

Перейдем к точным формулировкам полученных в статье результатов.

Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс и $w_0(t) = w(t) - tw(1)$, $t \in [0, 1]$, — броуновский мост. Как известно, это — непрерывные процессы. Пусть μ_w и μ_{w_0} обозначают распределения этих процессов в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций, снабженном нормой супремума.

На протяжении всей статьи $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 0$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |w(t)|^p dt > u^p \right\} &= \mu_w \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p dt > u^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{2\sigma}{u} \pi^{-3/4} \left(\frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right)^{1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\sigma = \left(\frac{2}{p\pi} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{(p-2)/(2p)} \frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)}, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |w_0(t)|^p dt > u^p \right\} &= \mu_{w_0} \left\{ \int_0^1 |x(t)|^p dt > u^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2u^2}{\sigma^2} \right\} \frac{\sigma}{u} \pi^{-3/4} \left(\frac{\Gamma(1/2 + 1/p)}{\Gamma(1 + 1/p)} \right)^{1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где σ то же, что и в пункте (i).

Результат теоремы 1 при $p \geq 2$ доказан в работе [2], при $1 < p < 2$ — в [4], [10], мы исследуем оставшийся промежуток значений p .

Вероятности из формул (1.3), (1.5) при $p = 1$ исследовались методом преобразования Лапласа в нескольких работах (см., например, [11], [12], а также [13]–[15]. В частности, формула (1.5) при $p = 1$ получена также в работе [12; теорема 5].

Построения, развитые в данной статье, позволяют также вычислить асимптотики L^p -функционалов и других гауссовских процессов. Мы исследуем следующий важный пример.

Пусть $\eta(t) := w(t+1) - w(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — гауссовский стационарный непрерывный почти наверное (п.н.) процесс со средним нуль и треугольной ковариационной функцией $r(t)$, т.е.

$$E\eta(t)\eta(s) \equiv r_\eta(t-s) = \begin{cases} 1 - |t-s|, & \text{если } |t-s| \leq 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Пусть μ_η обозначает распределение процесса η в пространстве $C[0,1]$ и $[v]$ — целую часть числа $v > 0$.

На протяжении всей статьи $F(\cdot, \cdot; \cdot; t)$ обозначает гипергеометрическую функцию Гаусса и $P_\nu^\chi(t)$, $Q_\nu^\chi(t)$, $t \in (0,1)$, — функции Лежандра первого и второго рода (см. [16], [17]).

ТЕОРЕМА 2. *Для гауссовского стационарного процесса $\eta(t)$ имеют место следующие утверждения.*

(i) Пусть $p > 0$, $p \neq 1$, $p \neq 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 |\eta(t)|^p dt > u^p\right\} &= \mu_\eta\left\{\int_0^1 |x(t)|^p dt > u^p\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma_0^2}\right\} \frac{1}{u} \frac{\sqrt{2}\sigma_0}{\sqrt{\pi}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p-1}{2p\alpha_n(1/2 - 1/p - \alpha_n)}\right)^{-1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2+p-2hp}}{2h\sqrt{p}}, \quad (1.8)$$

$h < (1+p/2)^{1/p} < \sqrt{e}$ — единственный положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} &2^{2/p}(2+p+2hp)^{-1/(2p)}\sqrt{h}P_{-1/p}^{-1/p}\left(\sqrt{\frac{2+p-2hp}{2+p+2hp}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2+1/p)} - \frac{2^{2/p}h}{\Gamma(1+1/p)} \frac{(2+p+2hp)^{1/2-1/p}}{(2+p-2hp)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$ — действительные числа, удовлетворяющие уравнению

$$F\left(\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{1}{2}; 1 - \theta\right) + 2p\theta\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha\right)F\left(1 + \alpha, \frac{3}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{3}{2}; 1 - \theta\right) = 0, \quad (1.10)$$

$\theta = 4hp/(2+p+2hp)$.

(ii) При $u \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$P\left\{\int_0^1 |\eta(t)| dt > u\right\} = \mu_\eta\left\{\int_0^1 |x(t)| dt > u\right\} = \exp\left\{-\frac{3}{4}u^2\right\} \frac{1}{u} \frac{2}{\sqrt{3\pi}}(1 + o(1)). \quad (1.11)$$

(iii) При $u \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 \eta^2(t) dt > u^2\right\} &= \mu_\eta\left\{\int_0^1 x^2(t) dt > u^2\right\} \\ &= \exp\{-\gamma_1^2 u^2\} \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{\gamma_1^2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_k^2}\right)^{-1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \dots \quad (1.13)$$

— положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \gamma = \gamma, \quad (1.14)$$

причем $\gamma_1 \approx 0.86$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. (i) Уравнение (1.10) можно записать в терминах функций Лежандра $P_\nu^\chi(t)$ и $Q_\nu^\chi(t)$.

Именно, в лемме 2 ниже будет доказано, что положительное число $\tilde{\alpha} \neq \frac{1}{2}$ удовлетворяет уравнению (1.10) тогда и только тогда, когда это число удовлетворяет либо уравнению

$$P_{2\alpha-1+1/p}^{1+1/p} \left(\sqrt{\frac{2+p-2hp}{2+p+2hp}} \right) - P_{2\alpha-1+1/p}^{1+1/p} \left(-\sqrt{\frac{2+p-2hp}{2+p+2hp}} \right) = 0, \quad (1.15)$$

$$\alpha \neq \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 1, \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 2, \dots,$$

либо уравнению

$$Q_{2\alpha-1+1/p}^{1+1/p} \left(\sqrt{\frac{2+p-2hp}{2+p+2hp}} \right) = 0, \quad \alpha = \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 1, \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 2, \dots \quad (1.16)$$

Сведения о функциях Лежандра, таблицы значений и решения уравнений, содержащих функции Лежандра, имеются в [16; гл. 8], [17; гл. 3], [10], [18]. Отметим, что в [18; том 3, с. 62, 63] имеется информация об уравнениях (1.15), (1.16), которые довольно часто возникают в прикладных исследованиях и достаточно хорошо изучены.

(ii) Применяя графический метод (или используя [19]), несложно убедиться, что для последовательности чисел (1.13) имеет место соотношение

$$\gamma_k = \pi k - \pi + o(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

(iii) Для значений $p = 2/m$, $m = 3, 4, \dots$, возможны точные вычисления по формулам (1.7)–(1.10), поскольку для этих значений p функции Лежандра $P_{-1/p}^{-1/p}$ из (1.9) представимы в виде суммы конечного числа элементарных функций (см. [17; гл. 3, п. 3.6.1]). Ниже рассмотрено два таких значения. Отметим, что при вычислениях по формулам (1.7)–(1.9) удобно вводить новый параметр

$$\varphi = \varphi(p) := \frac{h}{\sqrt{\lambda C}} = \sqrt{\frac{2+p-2hp}{2+p+2hp}},$$

величины $\lambda > 0$ и $C > 0$ определены ниже в лемме 1 и имеют вполне конкретный математический смысл.

СЛЕДСТВИЕ 1. В обозначениях теоремы 2 имеют место утверждения.

(i) Пусть $p = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\sigma_0^2 = 64 \frac{5 + 2\varphi^2 - 2\varphi\sqrt{5 + \varphi^2}}{p(5 + 4\varphi^2 - 4\varphi\sqrt{5 + \varphi^2})^4},$$

где

$$\varphi := \frac{3/2 - 2\sqrt{h}}{3/2 + 2\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{15}}{7}}.$$

(ii) Пусть $p = \frac{2}{3}$. Тогда число

$$v := \arcsin \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{4 - 3h^{2/3}}{4 + 3h^{2/3}}} \quad (1.17)$$

является единственным положительным корнем уравнения

$$z = \frac{\cos z}{3 \sin z} (2 - 5 \sin^2 z), \quad z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.18)$$

Числа

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$$

из формулы (1.7) ($\alpha_n \neq \frac{1}{2}$) выражаются через положительные корни ρ_n уравнения

$$\left(\frac{2 \cos^3 v}{3v \sin v} + \frac{\sin 2v}{2v + \rho} \right) \operatorname{tg} \rho = \frac{1}{\rho} + \frac{\cos 2v}{2v + \rho} - \frac{2 \cos^2 v}{3v} \quad (1.19)$$

по формуле $\alpha_n = \rho_n / (2v)$. Имеет место асимптотика

$$\alpha_n = \frac{1}{2v} \left(\pi n - \frac{3\pi}{2} \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Свойства распределения максимума процесса $\eta(t)$ описаны в работах [6], [8], его применение в проблеме обнаружения радарного сигнала – в [7].

Точные асимптотики малых уклонений распределений L^p -норм гауссовских процессов из теорем 1, 2 при $p = 1$ и $p = 2$ приведены в работах [9], [20].

§ 2. Выбор банахова функционального пространства и дифференцирование по Фреше функционала G при $0 < p \leq 1$

На протяжении этого параграфа $0 < p \leq 1$.

Главный вопрос при работе с L^p -функционалом (1.2) при $0 < p \leq 1$ – это выбор подходящего банахова функционального пространства, на котором удобно рассматривать исходную гауссовскую меру μ . Для применения метода Лапласа важно, чтобы, с одной стороны, исследуемый функционал был бы дважды дифференцируем, а с другой стороны, – чтобы ковариационный оператор меры μ имел бы наиболее простой вид. Учитывая сведения, изложенные в [21; глава 5], мы выбрали следующий подход.

Зафиксируем некоторое число $a > 3$ и через $1 < b < \frac{3}{2}$ обозначим его сопряженное, т.е. $1/a + 1/b = 1$.

Эти числа фиксированы на протяжении всей статьи.

Мы будем рассматривать гауссовскую меру μ как определенную на пространстве L^a , имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C[0, 1]$.

Для $0 < q < 1$ через L^q обозначим множество измеримых функций $x(t)$ на $[0, 1]$, для которых конечен интеграл $\int_0^1 |x(t)|^q dt$. Используя неравенство Гёльдера, [21; § 1, п. 1.1], несложно получить включение

$$L^{r_2} \subset L^{r_1}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty. \quad (2.1)$$

В частности,

$$L^a \subset L^b \subset L^p. \quad (2.2)$$

Будем полагать, что функционал G из (1.2) определен на L^a . Докажем, что функционал G дважды дифференцируем по Фреше на некотором всюду плотном в L^a множестве (а именно на множестве $\mathcal{X}$, которое будет определено в (2.12)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ниже мы используем определение производной по Фреше, данное в [22; § 2, п. 2.2], где допускается, чтобы рассматриваемый оператор был бы определен всего лишь на некотором всюду плотном подмножестве банахова пространства. Это следует иметь в виду при работе со второй производной по Фреше.

Введем оператор суперпозиции F , действующий по правилу

$$(Fx)(t) = |x(t)|^p, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Нам понадобятся некоторые факты из [21], обосновывающие введение пространств L^a и L^b . Ниже мы приводим результаты из [21] в слегка измененной, удобной для нас форме (отметим, что в [21] использованы обозначения $L_a \equiv L_{1/a}$).

Из примера 17.4 [21; § 17] легко вывести следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор суперпозиции F , введенный в (2.3), является непрерывным отображением из L^c в L^d для любых пар c, d , связанных соотношением $c \geq pd$.*

Как видно, наши числа a, b удовлетворяют условиям теоремы 3, поэтому

$$\text{оператор } F \text{ непрерывно отображает } L^a \text{ в } L^b. \quad (2.4)$$

Пусть $f(s)$ — трижды непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ функция с производными $f'(s)$ и $f''(s)$. Рассмотрим более общий оператор суперпозиции Ψ , порожденный функцией f и имеющий вид

$$(\Psi x)(t) = f[x(t)], \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 4 (необходимое условие дважды дифференцируемости по Фреше). Пусть оператор суперпозиции Ψ , введенный в (2.5), действует из L^c в L^d , $c > 2d > 2$, и имеет в точке $x_0 \in L^c$ первые две производные по Фреше $\Psi'(x_0)$ и $\Psi''(x_0)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

(i) Первая производная есть оператор умножения и имеет вид

$$\Psi'(x_0)[h](t) = f'(x_0(t))h(t), \quad h \in L^c, \quad t \in [0, 1], \quad (2.6)$$

где функция $f'(x_0(t))$ должна принадлежать множеству $L^{cd/(c-d)}$.

(ii) Вторая производная имеет вид

$$\Psi''(x_0)[h, g](t) = f''(x_0(t))h(t)g(t), \quad h, g \in L^c, \quad t \in [0, 1], \quad (2.7)$$

где функция $f''(x_0(t))$ должна принадлежать множеству $L^{cd/(c-2d)}$.

Первое утверждение теоремы 4 просто следует из теоремы 20.1 [21; § 20]. Второе утверждение доказывается аналогично с учетом фактов, приведенных в [21; § 20, п. 20.12].

Определим функцию

$$\omega(x, v) \equiv \omega(x(t), v) := f(x(t) + v) - f(x(t)) - f'(x(t))v - \frac{1}{2}f''(x(t))v^2, \quad (2.8)$$

$$t \in [0, 1], \quad v \in \mathbb{R}^1.$$

ТЕОРЕМА 5 (достаточное условие дважды дифференцируемости по Фреше). Пусть оператор суперпозиции Ψ , введенный в (2.5), действует из L^c в L^d , $c > 2d > 2$, и точка $x_0 \in L^c$. Пусть функция $\omega(x_0, v)$, введенная в (2.8), удовлетворяет при некотором $0 < v_0 < 1$ двум неравенствам:

$$|\omega(x_0(t), v)| \leq z_0(t)|v|^\tau, \quad t \in [0, 1], \quad |v| \leq v_0, \quad (2.9)$$

и

$$|\omega(x_0(t), v)| \leq z_1(t)|v|^2, \quad t \in [0, 1], \quad |v| \geq v_0, \quad (2.10)$$

где $z_0(t) \in L^{r_0}$ при некотором $0 < r_0 < \infty$, $z_1(t) \in L^{r_1}$ при некотором $r_1 \geq cd/(c-2d)$ и $\tau > 2$.

Тогда оператор Ψ дважды дифференцируем по Фреше в точке $x_0 \in L^c$.

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 20.4 из [21; § 20] с учетом фактов, изложенных в [21; § 20, п. 20.12].

Напомним, что из существования второй производной по Фреше в некоторой точке вытекает существование первой производной по Фреше в этой же точке [23; § 2.2, п. 2.2.5].

Применим теоремы 4 и 5 к нашему оператору F . Ниже важную роль будет играть показатель

$$r := \frac{ab}{a-2b} \equiv \frac{a}{a-3} \equiv \frac{b}{3-2b} > b. \quad (2.11)$$

Определим следующий класс функций:

$$\mathcal{X} := \left\{ x \in C[0, 1] : \frac{1}{x(t)} \in L^{r(3-p)} \right\}. \quad (2.12)$$

Пусть также

$$\mathcal{N}(x) := \{t \in [0, 1] : x(t) = 0\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что множество $\mathcal{X}$ всюду плотно в $C[0, 1]$, а следовательно, и в L^a . Очевидно также, что функция $y(t)$, для которой $\text{mes } \mathcal{N}(y) > 0$, не принадлежит классу $\mathcal{X}$, здесь mes – мера Лебега. В частности, $0 \notin \mathcal{X}$.

ТЕОРЕМА 6. Оператор суперпозиции $F: L^a \rightarrow L^b$, введенный в (2.3), дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x_0 \in \mathcal{X}$ с производными

$$F'(x_0)[h](t) = p|x_0(t)|^{p-1} \text{sign } x_0(t)h(t), \quad h \in L^a, \quad t \in [0, 1], \quad (2.13)$$

и

$$F''(x_0)[h, g](t) = p(p-1)|x_0(t)|^{p-2}h(t)g(t), \quad h, g \in L^a, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 5, в которой положим $c = a$, $d = b$, $\Psi = F$, $f(s) = |s|^p$.

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < p < 1$. Функция $|s|^p$ трижды дифференцируема на $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ с производными

$$\begin{aligned} f'(s) &= p|s|^{p-1} \text{sign } s, & f''(s) &= p(p-1)|s|^{p-2} < 0, \\ f^{(3)}(s) &= p(p-1)(p-2)|s|^{p-3} \text{sign } s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}$. Оценим функцию $\omega(x_0, v)$. Записав формулу Тейлора для функции $f(s) = |s|^p$ до членов третьего порядка, убеждаемся, что при некотором $0 < v_0 < 1$ выполнено неравенство

$$|\omega(x_0(t), v)| \leq p(1-p)(2-p)|x_0(t)|^{p-3}|v|^3, \quad t \in [0, 1], \quad |v| \leq v_0.$$

Таким образом, имеет место соотношение (2.9) с $\tau = 3$ и $z_0(t) = p(1-p) \times (2-p)|x_0(t)|^{p-3} \in L^r$.

Для оценки функции $\omega(x_0, v)$ при $|v| \geq v_0$ используем хорошо известное неравенство

$$|\alpha + \beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1, \quad (2.16)$$

верное при $0 < p < 1$. Применяя (2.16), имеем

$$\begin{aligned} |\omega(x_0(t), v)| &\leq |v|^p + p|x_0(t)|^{p-1}|v| + p(1-p)|x_0(t)|^{p-2}|v|^2 \\ &\leq \left(v_0^{p-1} + \frac{1}{v_0}p|x_0(t)|^{p-1} + p(1-p)|x_0(t)|^{p-2} \right) |v|^2, \quad t \in [0, 1], \quad |v| \geq v_0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место соотношение (2.10) с

$$z_1(t) = v_0^{p-1} + \frac{1}{v_0}p|x_0(t)|^{p-1} + p(1-p)|x_0(t)|^{p-2}.$$

Поскольку $x_0 \in \mathcal{X}$, то в силу (2.1) $1/x_0(t) \in L^{r(2-p)} \subset L^{r(1-p)}$, поэтому $z_1(t) \in L^r$.

Как видим, условия теоремы 5 выполнены. Применяя теоремы 4 и 5 с учетом (2.15), получаем утверждение теоремы 6 при $0 < p < 1$.

Рассуждения в случае $p = 1$ еще проще, поскольку теперь $\omega(x_0(t), v) = 0$, $t \notin \mathcal{N}(x_0)$.

Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $x_0 \in \mathcal{X}$, то $|x_0(t)|^{p-1} \in L^r$, но поскольку $r > b$, то согласно (2.1) $|x_0(t)|^{p-1} \in L^b = (L^a)^*$. Аналогично, используя неравенство Гёльдера, доказывается, что $|x_0(t)|^{p-2}h(t) \in L^b$, если $h \in L^a$.

Вернемся к функционалу G , определенному на L^a по формуле (1.2). Представим G в виде композиции двух отображений:

$$G = KF: L^a \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad (2.17)$$

где отображение $F: L^a \rightarrow L^b$ определено в (2.3) и $K: L^b \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывный линейный функционал вида

$$Ky = \int_0^1 y(t) dt, \quad y \in L^b. \quad (2.18)$$

ТЕОРЕМА 7. *Функционал G дважды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x_0 \in \mathcal{X}$ с производными*

$$G'(x_0)[h] = \int_0^1 p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_0(t)h(t) dt, \quad h \in L^a, \quad (2.19)$$

и

$$G''(x_0)[h, g](t) = \int_0^1 p(p-1)|x_0(t)|^{p-2}h(t)g(t) dt, \quad h, g \in L^a. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений (см. [23; §2.2, п. 2.2.2]). Из соотношения $G'(x_0) = K \circ F'(x_0)$ и формулы (2.13) следует (2.19). Учитывая замечания 2, 3 и упомянутую теорему о суперпозиции, получаем соотношение $G''(x_0) = K \circ F''(x_0)$. Это равенство и формула (2.14) доказывают (2.20).

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает каноническую билинейную форму между пространствами L^a и L^b , которая, как известно, имеет интегральный вид

$$\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t)g(t) dt, \quad h \in L^a, \quad g \in L^b. \quad (2.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В силу замечания 4 и теоремы 7 мы вправе использовать далее следующую форму записи:

$$G'(x_0)[h] = \langle h, G'(x_0) \rangle, \quad (2.22)$$

где справа стоит $G'(x_0)(t) = p|x_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x_0(t)$ — элемент пространства L^b , и

$$G''(x_0)[h, g](t) = \langle h, G''(x_0)g \rangle, \quad h, g \in L^a, \quad (2.23)$$

где справа стоит линейный оператор умножения $G''(x_0): L^a \rightarrow L^b$, действующий по правилу

$$[G''(x_0)g](t) = p(p-1)|x_0(t)|^{p-2}g(t), \quad g \in L^a. \quad (2.24)$$

§ 3. Метод Лапласа для L^p -функционалов

Доказательства теорем 1, 2 (и им подобным) основано на одном общем результате автора [2], [5] о точных асимптотиках больших отклонений гауссовских мер в банаховых пространствах. Ниже мы приведем этот результат в удобной для нас форме, когда основным банаховым пространством является пространство Лебега L^a .

Рассмотрим на пространстве L^a гауссовскую меру μ , где μ является одной из гауссовских мер $-\mu_w$, μ_{w^0} или μ_η . Гауссовская мера μ имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A = A_\mu$ [24; гл. 3], [25], [26], который отображает сопряженное пространство L^b в L^a и имеет интегральный вид

$$Ax(t) = \int_0^1 r_A(t, s)x(s) ds, \quad x \in L^b, \quad (3.1)$$

где $r_A(t, s)$ — ковариационная функция соответствующего процесса, т.е. $r_A(t, s) = \min\{t, s\}$ в случае меры μ_w , $r_A(t, s) = \min\{t, s\} - ts$ в случае меры μ_{w^0} и $r_A(t, s) = r_\eta(t - s)$ (см. (1.6)) в случае меры μ_η .

Напомним, что ковариационный оператор A является

- 1) симметричным, т.е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in L^b$;
- 2) положительным, т.е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in L^b$;
- 3) ядерным (см. [24; гл. 3, § 1, п. 1, § 2, п. 3]).

Несложно найти, что области значений операторов A_w , A_{w^0} и A_η имеют вид

$$R(A_w) = \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = x'(1) = 0\}, \quad (3.2)$$

$$R(A_{w^0}) = \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = x(1) = 0\}, \quad (3.3)$$

$$R(A_\eta) = \{x \in C^2[0, 1] : x(0) + x(1) = x'(0), x'(0) = -x'(1)\}, \quad (3.4)$$

здесь $C^2[0, 1]$ — пространство дважды дифференцируемых на $[0, 1]$ функций. На этих множествах определены обратные операторы

$$A_w^{-1}y = -y'', \quad y \in R(A_w), \quad (3.5)$$

$$A_{w^0}^{-1}y = -y'', \quad y \in R(A_{w^0}),$$

$$A_\eta^{-1}y = -\frac{1}{2}y'', \quad y \in R(A_\eta). \quad (3.6)$$

Если x не входит в область определения $\text{Dom}(A^{-1})$ оператора A^{-1} , то будем полагать $\langle x, A^{-1}x \rangle = \infty$.

В этих обозначениях для функционала (1.2) имеет место утверждение (см. [1], [2]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $p > 0$ и μ — гауссовская мера на пространстве L^a со средним нуль и ковариационным оператором A . Пусть квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle \geq 0$ достигает на множестве $D := \{x \in L^a : G(x) \geq 1\}$ своего минимума $\sigma^{-2} > 0$ в конечном числе точек $x_1, \dots, x_m$ из границы D , причем $\langle x_i, G'(x_i) \rangle \neq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть конечен и положителен определитель

$$\det B_i := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda \beta_n^i),$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2 p}, \quad (3.7)$$

$B_i := I - \lambda AG''(x_i)$, $i = 1, \dots, m$, β_n^i – собственные значения оператора $AG''(x_i): L^a \rightarrow L^a$, I – тождественный оператор в L^a .

Тогда имеет место равенство

$$x_i = \lambda AG'(x_i) \quad (3.8)$$

и при $n \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mu(uD) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det B_i \langle B_i^{-1} x_i, A^{-1} x_i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (3.9)$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Как уже указывалось выше, мы рассмотрим только случай, когда $0 < p \leq 1$.

Доказательство формулы (1.3) для этих значений p основано на теоремах 7 и 8 и проводится по той же схеме, что и в работе [2]. Мы укажем только основные моменты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. (i) ТЕОРЕМЫ 1.

Применим теорему 8. Решение экстремальной задачи из теоремы 8 методом множителей Лагранжа сводится к решению уравнения (3.8), где $x \in \text{Dom}(A_w^{-1})$ и $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа. В нашем случае в силу формул (2.19), (2.22) и (3.1) уравнение (3.8) является интегральным уравнением Хаммерштейна и имеет вид (индекс i опущен)

$$x(t) = \lambda p \int_0^1 \min\{t, s\} |x(s)|^{p-1} \text{sign } x(s) ds, \quad G(x) = 1. \quad (4.1)$$

Учитывая (3.2), (3.5), легко убедиться, что уравнение (4.1) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p |x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t), & t \in [0, 1]; \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Рассуждая так же, как в [2; п. 3], приходим к выводу, что краевая задача (4.2) имеет два нормированных (т.е. когда $G(x) = 1$) решения, доставляющих минимум в рассматриваемой экстремальной задаче: $x_1(t) \geq 0$ и $x_2(t) \equiv -x_1(t)$. Причем $x_1(t)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$x(t) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C_0}\right) = \sqrt{2\lambda C_0} t, \quad t \in [0, 1], \quad (4.3)$$

где $F(\cdot, \cdot; \cdot; z)$ – гипергеометрическая функция и $C_0 := x^p(1)$.

Несложный подсчет нам дает $C_0 = 1 + p/2$ и значение σ , указанное в (1.4).

Вычисление остальных констант из формулы (3.9) проводится на основе (2.20), (2.23) точно так же, как в работе [2; п. 3] и здесь опущено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПУНКТА (ii) ТЕОРЕМЫ 1 проводится аналогично, с использованием формул (2.19), (2.20), (2.23) и теоремы 8. Так краевая задача для нахождения экстремали $x(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), & t \in [0, 1]; \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Дальнейшие вычисления повторяют выкладки, подробно изложенные в работе [27; § 4] (где доказано соотношение (1.5) для $p \geq 1$), и здесь не приводятся.

Теорема 1 доказана.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству п. (i) теоремы 2.

Доказательство проводится отдельно для значений $0 < p \leq 1$ и $1 < p \neq 2$. Различие связано с выбором основного банахова пространства, на котором рассматривается функционал G . Мы подробно рассмотрим наиболее сложный первый случай. Рассуждения при $1 < p \neq 2$ проводятся аналогично и являются более простыми, так как в этом случае в качестве основного пространства можно взять само пространство L^p . При этом вычисления и вид окончательного результата — одни и те же.

§ 5. Решение экстремальной задачи

ЛЕММА 1. Пусть $0 < p \leq 1$. Квадратичная форма $\langle x, A_\eta^{-1} x \rangle$ достигает на множестве $D := \{x \in L^a : G(x) \geq 1\}$ своего минимума

$$\sigma_0^{-2} = \frac{4ph^2}{2+p-2hp} > 0 \quad (5.1)$$

в двух точках $x_0(t)$ и $-x_0(t)$. Функция $x_0(t)$ положительна, симметрична относительно точки $t = \frac{1}{2}$ (т.е. $x_0(t) = x_0(1-t)$ для $t \in [0, \frac{1}{2}]$) и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & 2^{1/p} \Gamma(1+1/p) C^{1/(2p)} \sqrt{x(t)} P_{-1/p}^{-1/p} \left(\sqrt{1 - \frac{x^p(t)}{C}} \right) \\ & = C^{1/p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1+1/p)}{\Gamma(1/2+1/p)} + \sqrt{\lambda C} (2t-1), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$C = \frac{2+p+2hp}{4}, \quad \lambda = \frac{4h^2}{2+p-2hp}, \quad (5.3)$$

$h = x_0(0)$ определено в (1.9), причем $0 < h < (1+p/2)^{1/p} < \sqrt{e}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как правило для широкого класса множеств $D, 0 \notin D$, минимум в экстремальной задаче

$$\langle x, A_\eta^{-1} x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D,$$

достигается на положительной функции (см. [2], [4; лемма 2]). Поэтому ниже особое внимание уделено поиску и описанию положительной экстремальной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Решим экстремальную задачу методом множителей Лагранжа. Уравнение (3.8) для экстремальной функции $x(t)$ согласно соотношениям (1.6), (2.22) и (3.1) имеет вид (индекс i вновь опущен)

$$x(t) = \lambda p \int_0^1 (1 - |t - s|) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad (5.4)$$

где $x \in \operatorname{Dom}(A_\eta^{-1})$ удовлетворяет также условию связи

$$G(x) = 1 \quad (5.5)$$

и $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа.

Учитывая (3.4), (3.6), заключаем, что интегральное уравнение Хаммерштейна (5.4) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} x''(t) = -2\lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), & t \in [0, 1]; \\ x(0) + x(1) = x'(0), & x'(0) = -x'(1). \end{cases} \quad (5.6)$$

Решим задачу (5.5), (5.6), действуя так же, как при решении задачи (4.4), отметив тот факт, что задачи (4.2), (4.4) и (5.6) отличаются только граничными условиями.

Записывая первое уравнение в (5.6) в виде

$$d(x'(t))^2 = -4\lambda d|x(t)|^p,$$

получаем

$$(x'(t))^2 = 4\lambda(C - |x(t)|^p), \quad t \in [0, 1], \quad (5.7)$$

где

$$C = |x(0)|^p + \frac{(x'(0))^2}{4\lambda}. \quad (5.8)$$

Так как $|x'(0)| = |x'(1)|$, то из (5.7) следует

$$|x(0)| = |x(1)|. \quad (5.9)$$

Исследуем свойства функции $x(t)$, удовлетворяющей соотношениям (5.6)–(5.9).

Рассмотрим последовательно две возможности.

1) Значения $x(0)$ и $x(1)$ имеют одинаковый знак; пусть для определенности

$$x(0) = x(1) =: h > 0 \quad (5.10)$$

(очевидно, $h \neq 0$, так как случай $h = 0$ соответствует иному процессу – броуновскому мосту).

Тогда из граничных условий в (5.6) получаем

$$x'(0) = 2h > 0, \quad x'(1) = -2h < 0. \quad (5.11)$$

Найдем сначала *положительное* решение, т.е. будем считать, что $x(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$.

Из соотношений (5.10), (5.11) следует, что найдется точка $0 < t_0 < 1$ такая, что $x'(t_0) = 0$. В силу соотношения (5.7) имеем $x(t_0) = C^{1/p}$. Очевидно, что точка t_0 – точка локального максимума функции $x(t)$, причем согласно дифференциальному уравнению из (5.6) функция $x(t)$ не может иметь интервалов постоянства. Других

критических точек у функции $x(t)$ нет. В самом деле, предположим противное, пусть $t_1 \in (t_0, 1)$ — точка локального минимума функции $x(t)$ и $x'(t_1) = 0$. Вновь из формулы (5.7) получаем $x(t_1) = C^{1/p}$, это противоречит тому, что $x(t_0) \neq x(t_1)$.

Итак, функция $x(t)$ положительна на $[0, 1]$ и имеет на этом отрезке единственный максимум в точке t_0 . Из формулы (5.7) далее получаем

$$x'(t) = \begin{cases} 2\sqrt{\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & t \in [0, t_0]; \\ -2\sqrt{\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & t \in [t_0, 1]. \end{cases} \quad (5.12)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.12) на отрезке $[0, t_0]$

$$x'(t) = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (5.13)$$

Интегрируя, из (5.13) с учетом (5.10) для $t \in [0, t_0]$ получаем

$$\int_h^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{C - x^p}} = 2\sqrt{\lambda}t.$$

Отсюда, используя формулу 3 из [28; гл. 1, § 1.2, п. 1.2.4], приходим к следующему функциональному уравнению для $x(t)$ на отрезке $[0, t_0]$:

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = hF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{h^p}{C}\right) + 2\sqrt{\lambda C}t, \quad t \in [0, t_0], \quad (5.14)$$

где, как и выше, $F(\cdot, \cdot; \cdot; z)$ — гипергеометрическая функция.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (5.12) на отрезке $[t_0, 1]$

$$x'(t) = -2\sqrt{\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, \quad t \in [t_0, 1]. \quad (5.15)$$

Из (5.15) с учетом (5.10) для $t \in [t_0, 1]$ получаем

$$\int_{x(t)}^h \frac{dx}{\sqrt{C - x^p}} = -2\sqrt{\lambda}(1 - t).$$

Отсюда, действуя аналогично предыдущему, получаем функциональное уравнение для $x(t)$ на отрезке $[t_0, 1]$

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = hF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{h^p}{C}\right) + 2\sqrt{\lambda C}(1 - t), \quad t \in [t_0, 1]. \quad (5.16)$$

Положив в уравнениях (5.14) и (5.16) $t = t_0$, находим $t_0 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = C^{1/p}, \quad x'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (5.17)$$

Используя формулу 15.1.20 из справочника [16; гл. 15, § 15.1], находим

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; 1\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)}. \quad (5.18)$$

Положив в (5.14) $t = \frac{1}{2}$ и учитывая (5.18), получаем

$$hF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{h^p}{C}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)} C^{1/p} - \sqrt{\lambda C}. \quad (5.19)$$

Вывод: из соотношений (5.8), (5.19) следует, что при выполнении условия (5.10) краевая задача (5.5), (5.6) имеет единственное положительное решение – функцию $x_0(t)$, которая симметрична относительно точки $t = \frac{1}{2}$, возрастает при $t \in [0, \frac{1}{2}]$ и удовлетворяет уравнению

$$x(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 + 1/p)}{\Gamma(1/2 + 1/p)} C^{1/p} - \sqrt{\lambda C} (1 - 2t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (5.20)$$

где

$$C = h^p + \frac{h^2}{\lambda}. \quad (5.21)$$

Переходя в уравнении (5.20) к функциям Лежандра, по формуле 15.4.13 из [16; гл. 15, §15.4] получаем искомое уравнение (5.2).

Рассматривая вместо (5.10) условие $x(0) = x(1) < 0$, аналогично заключаем, что второе знакопостоянное решение задачи (5.5), (5.6) есть функция $-x_0(t)$.

Установим соотношения между величинами $\sigma_0^{-2} = \langle x_0, A_\eta^{-1} x_0 \rangle$, C , h и λ .

Из (5.7) имеем

$$C = 1 + \frac{1}{4\lambda} \int_0^1 (x'_0(t))^2 dt. \quad (5.22)$$

Интегрируя по частям, с учетом (5.5), (5.6), (5.10) получаем

$$\int_0^1 (x'_0(t))^2 dt = x'_0(1)x_0(1) - x'_0(0)x_0(0) - \int_0^1 x_0(t)x''_0(t) dt = 2\lambda p - 4h^2.$$

Следовательно,

$$C = 1 + \frac{p}{2} - \frac{h^2}{\lambda}. \quad (5.23)$$

Из (5.21) и (5.23) находим выражения для C и λ , фигурирующие в (5.3). Учитывая формулы (3.8), (2.19) и (5.5), находим

$$\sigma_0^{-2} = \lambda \langle x_0, G'(x_0) \rangle = \lambda p. \quad (5.24)$$

Отсюда и из (5.3) следует формула (5.1). Уравнение (1.9) для определения h получаем, подставив в (5.2) значения C и λ из (5.3) и положив $t = 0$. Оценка сверху для h получается из условия $\lambda > 0$.

Нелинейная краевая задача (5.5), (5.6), (5.10) имеет и другие *знакопеременные* решения $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, которым соответствуют числа $\tilde{C}_i$, $\tilde{h}_i$, $\tilde{\lambda}_i$. Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, показывают, что для таких решений выполнены соотношения $h < \tilde{h}_i$ и

$$\langle y_i, A_\eta^{-1} y_i \rangle = \frac{4p\tilde{h}_i^2}{2 + p - 2\tilde{h}_i^p} > \sigma_0^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

2) Пусть теперь значения $x(0)$ и $x(1)$ имеют разный знак; для определенности предположим, что

$$x(0) = -x(1) =: h_1 > 0. \quad (5.25)$$

Тогда из граничных условий в (5.6) получаем

$$x'(0) = x'(1) = 0. \quad (5.26)$$

Далее уравнения (5.6), (5.7) исследуются аналогично предыдущему случаю. Мы укажем ниже только выводы.

При выполнении условия (5.25) краевая задача (5.5), (5.6) имеет единственное решение, *меняющее знак один раз*, — функцию $g_1(t)$, которая кососимметрична относительно точки $t = \frac{1}{2}$ (т.е. $g_1(t) = -g_1(1-t)$ для $t \in [0, \frac{1}{2}]$), убывает на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет уравнению

$$g(t)F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{g^p(t)}{C_1}\right) = \sqrt{\lambda_1 C_1} (1-2t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = h_1^p = 1 + \frac{p}{2}, \quad \lambda_1 = \pi \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{(2-p)/p} \left(\frac{\Gamma(1+1/p)}{\Gamma(1/2+1/p)}\right)^2, \\ \sigma_1^{-2} = \langle g_1, A_\eta^{-1} g_1 \rangle = \lambda_1 p. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Рассматривая вместо (5.25) условие $x(0) = -x(1) < 0$, аналогично заключаем, что второе решение задачи (5.5), (5.6), *меняющее знак один раз*, есть функция $-g_1(t)$.

Сравним теперь значения (5.24) и (5.27), т.е. λ и λ_1 . Учитывая, что $F(1/2, 1/p; 1 + 1/p; h^p/C) > 0$, из (5.19) получаем

$$\sqrt{\lambda} < \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1+1/p)}{\Gamma(1/2+1/p)} C^{(2-p)/(2p)} < \sqrt{\lambda_1},$$

поскольку $C < 1 + p/2$ в силу (5.23). Следовательно, $\sigma_0^{-2} < \sigma_1^{-2}$.

Нелинейная краевая задача (5.5), (5.6), (5.25) имеет и другие решения $g_i(t)$, $i = 2, 3, \dots$, *меняющие знак более одного раза*, которым соответствуют числа C_i, h_i, λ_i . Здесь также несложно показать, что

$$\langle g_i, A_\eta^{-1} g_i \rangle > \sigma_0^{-2}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Таким образом, минимум квадратичной формы $\langle x, A_\eta^{-1} x \rangle$ на множестве D составляют только две функции $x_0(t)$ и $-x_0(t)$.

Лемма 1 доказана.

§6. Исследование спектра интегрального оператора $A_\eta G''(x_0)$

Из положительности оператора A_η и формулы (2.23) следует, что при $0 < p \leq 1$ оператор $-A_\eta G''(x_0): L^a \rightarrow L^a$ является положительным, поэтому все собственные числа оператора $A_\eta G''(x_0)$ отрицательны.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p \leq 1$. Компактный интегральный оператор $A_\eta G''(x_0)$ имеет следующую последовательность собственных чисел $\{\beta_n, n = 0, 1, \dots\}$:

$$\beta_0 = \frac{p-1}{\lambda}, \quad \beta_n = \frac{1-p}{2p\lambda\alpha_n(1/2 - 1/p - \alpha_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1)$$

где λ определено в (5.3), числа $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq \frac{1}{2}$, удовлетворяют уравнению (1.10).

Корни уравнения (1.10) удовлетворяют либо уравнению (1.15), либо уравнению (1.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения собственных чисел β_k и соответствующих собственных функций z_k оператора $AG''(x_0)$, рассмотрим линейное интегральное уравнение (относительно β и z)

$$AG''(x_0)z = \beta z, \quad z \in L^a.$$

Согласно соотношениям (1.6), (2.23) и (3.1) это уравнение равносильно следующей краевой задаче на отрезке $[0, 1]$ (ср. с (5.6)):

$$\begin{cases} p(p-1)(x_0(t))^{p-2}z(t) = -\frac{\beta}{2}z''(t), & t \in [0, 1]; \\ z(0) + z(1) = z'(0), & z'(0) = -z'(1). \end{cases} \quad (6.2)$$

Сразу отметим, что функция $x_0(t)$ и число $\beta_0 = (p-1)/\lambda$ удовлетворяют задаче (6.2).

Найдем другие собственные числа. Покажем, что функция $z(t)$, удовлетворяющая задаче (6.2), является симметричной относительно точки $t = \frac{1}{2}$ (наследуя тем самым аналогичное свойство функции $x_0(t)$).

Обозначим

$$\theta := \frac{x_0^p(0)}{x_0^p(1/2)} = \frac{h^p}{C} \in (0, 1), \quad (6.3)$$

где h и C определены в лемме 1 (см. (5.3) и (5.17)).

Замена $s = x_0^p(t)/C$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$, приводит дифференциальное уравнение из формулы (6.2) к гипергеометрическому уравнению для функции $y(s) = z(t)$ на отрезке $[\theta, 1]$

$$s(1-s)y''(s) + \left(1 - \frac{1}{p} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)s\right)y'(s) + \frac{p-1}{2\lambda p\beta}y(s) = 0, \quad s \in [\theta, 1]. \quad (6.4)$$

Деля в дифференциальном уравнении из (6.2) ту же замену $s = (x_0(t)/x_0(1/2))^p$ на отрезке $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, заключаем, что функция $v(s) = z(t)$ удовлетворяет на отрезке $s \in [\theta, 1]$ тому же гипергеометрическому уравнению (6.4). Легко найти, что

$$z'(t) = \frac{p}{C}x_0^{p-1}(t)x_0'(t)y'\left(\frac{x_0^p(t)}{C}\right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (6.5)$$

$$z'(t) = \frac{p}{C}x_0^{p-1}(t)x_0'(t)v'\left(\frac{x_0^p(t)}{C}\right), \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (6.6)$$

Из граничных условий в (6.2), формул (6.5), (6.6) и симметрии функции $x_0(t)$ получаем

$$y(1) = v(1), \quad y'(\theta) = v'(\theta).$$

Таким образом, функции $y(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют на отрезке $s \in [\theta, 1]$ одному и тому же гипергеометрическому уравнению (6.4) и одинаковым граничным условиям. Следовательно, $y(s) \equiv v(s)$, $s \in [\theta, 1]$. Возвращаясь к функции $z(t)$, удовлетворяющей задаче (6.2), убеждаемся, что

$$z(t) = z(1-t), \quad t \in [0, 1]. \quad (6.7)$$

Отсюда получаем $z'(t) = -z'(1-t)$, $t \in [0, 1]$, и

$$z'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (6.8)$$

Из (6.7) и граничных условий в (6.2) следует, что

$$z(0) = z(1) = \frac{1}{2}z'(0). \quad (6.9)$$

Итак, для решения граничной задачи (6.2) достаточно решить граничную задачу для гипергеометрического уравнения (6.4) на отрезке $s \in [\theta, 1]$. Первое граничное условие для уравнения (6.4) определяется из формул (6.3), (6.5), (6.9) и имеет вид

$$y(\theta) = p\theta y'(\theta). \quad (6.10)$$

Найдем второе условие. Используя соотношение (5.13) при $t_0 = \frac{1}{2}$, имеем

$$x'_0(t) = 2\sqrt{\lambda C} \sqrt{1-s}, \quad s = \frac{x_0^p(t)}{C}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (6.11)$$

Из (6.5) и (6.11) получаем

$$z'(t) = 2p\sqrt{\lambda} C^{1/2-1/p} s^{1-1/p} \sqrt{1-s} y'(s), \quad s = \frac{x_0^p(t)}{C}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (6.12)$$

Отсюда и из формулы (6.8) находим второе граничное условие для уравнения (6.4)

$$\lim_{s \uparrow 1} \sqrt{1-s} y'(s) = 0. \quad (6.13)$$

Гипергеометрическое уравнение

$$s(1-s)y''(s) + (c_1 - (a_1 + b_1 + 1)s)y'(s) - a_1 b_1 y(s) = 0$$

(a_1, b_1, c_1 – параметры) хорошо изучено (см., например, [16; § 15.5], [17; § 2.1], [29; ч. 3, гл. 2, п. 2.260], [30; § 8–10, гл. 5]). При сравнении с уравнением (6.4) для значений параметров a_1, b_1, c_1 получаем соотношения

$$c_1 = 1 - \frac{1}{p}, \quad a_1 + b_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \quad a_1 b_1 = \frac{1-p}{2\lambda p\beta}. \quad (6.14)$$

Поскольку a_1 и b_1 входят в соотношения (6.14) симметрично и $\beta < 0$, то для определенности будем считать, что $a_1 > 0$, $b_1 = 1/2 - 1/p - a_1 < 0$. Ниже сохраним в качестве параметра только a_1 , который мы для краткости обозначим через $\alpha := a_1$.

Общее решение гипергеометрического уравнения (6.4) в окрестности особой точки $s = 1$ имеет вид (см. (9.02), (10.07), (10.08) из [30; гл. 5, §§ 9, 10])

$$y_0(s) = \frac{K_1}{\Gamma(1/2)} F\left(\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{1}{2}; 1-s\right) + \frac{K_2}{\Gamma(3/2)} \sqrt{1-s} F\left(1 - \frac{1}{p} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha; \frac{3}{2}; 1-s\right), \quad s \in [\theta, 1], \quad (6.15)$$

где $K_1 = K_1(\alpha)$ и $K_2 = K_2(\alpha)$ — постоянные.

Используя (6.15) и формулы 15.2.1, 15.2.4 из [16; гл. 15, § 15.2], находим

$$y'_0(s) = -\frac{2K_1}{\sqrt{\pi}} \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha\right) F\left(1 + \alpha, \frac{3}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{3}{2}; 1-s\right) - \frac{K_2}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-s}} F\left(1 - \frac{1}{p} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha; \frac{1}{2}; 1-s\right), \quad s \in [\theta, 1]. \quad (6.16)$$

Поскольку $F(a_2, b_2; c_2; 0) = 1$ для любых $c_2 \neq 0, -1, -2, \dots$ и всех a_2, b_2 , то из формул (6.13) и (6.16) получаем $K_2 = 0$.

Итак, общее решение задачи (6.4), (6.13) имеет вид

$$y_0(s) = \frac{K_3}{F} \left(\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{1}{2}; 1-s\right), \quad s \in [\theta, 1], \quad (6.17)$$

где $K_3 \neq 0$ — постоянная.

Для определения искомого множества чисел $\{\alpha\}$ (а тем самым и множества собственных чисел $\{\beta_k\}$) используем оставшееся однородное граничное условие (6.10). Записав это условие для решения (6.17), получаем требуемое уравнение относительно параметра α

$$F\left(\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{1}{2}; 1-\theta\right) + 2p\theta\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \alpha\right) F\left(1 + \alpha, \frac{3}{2} - \frac{1}{p} - \alpha; \frac{3}{2}; 1-\theta\right) = 0. \quad (6.18)$$

Это и есть уравнение (1.10).

Докажем второе утверждение леммы.

Учитывая особенности гамма-функции, рассмотрим последовательно два случая.

а) Пусть

$$\alpha \neq \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p} + 1, \quad \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p} + 2, \quad \dots \quad (6.19)$$

Перейдем к функциям Лежандра, используя формулы 15.4.23 и 15.4.26 из [16; § 15], справедливые при условии (6.19); в результате уравнение (6.18) примет следующий вид:

$$P_{2\alpha-1+1/p}^{1/p}(\sqrt{1-\theta}) + P_{2\alpha-1+1/p}^{1/p}(-\sqrt{1-\theta}) - 2p\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} - a_1\right) \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}} (P_{2\alpha-1+1/p}^{-1+1/p}(\sqrt{1-\theta}) - P_{2\alpha-1+1/p}^{-1+1/p}(-\sqrt{1-\theta})) = 0. \quad (6.20)$$

Имеет место рекуррентное соотношение (см. (11) в [17; гл. 3, § 3.8])

$$P_\nu^{\mu+2}(t) + 2(\mu+1) \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} P_\nu^{\mu+1}(t) + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1) P_\nu^\mu(t) = 0, \quad t \in (0, 1). \quad (6.21)$$

Применим дважды тождество (6.21), положив в нем $\mu = 1/p - 1$, $\mu = 2\alpha - 1 + 1/p$, $t = \pm\sqrt{1-\theta}$. Тогда, как легко проверить, уравнение (6.20) эквивалентно уравнению

$$P_{2\alpha-1+1/p}^{1+1/p}(\sqrt{1-\theta}) - P_{2\alpha-1+1/p}^{1+1/p}(-\sqrt{1-\theta}) = 0,$$

что совпадает с (1.15).

б) Пусть теперь

$$\alpha = \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 1, \quad \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p} + 2, \quad \dots \quad (6.22)$$

Рассматривая левую часть уравнения (6.18) как функцию от α , обозначим ее через $\Psi(\alpha)$. Зафиксируем произвольное число α_0 из множества (6.22).

Пусть последовательность положительных чисел $\{\tau_n\}$, удовлетворяющих условию (6.19), стремится к α_0 при $n \rightarrow \infty$. Тогда в силу непрерывности гипергеометрической функции по первым двум параметрам [30; гл. 5, теорема 9.1] выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(\tau_n) = \Psi(\alpha_0). \quad (6.23)$$

Используя те же формулы 15.4.23 и 15.4.26 из [16; гл. 15], известное тождество для гамма-функции (см. 6.1.17 из [16; гл. 6, § 6.1])

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

и (6.23), убеждаемся, что равенство

$$\Psi(\alpha_0) = 0 \quad (6.24)$$

эквивалентно соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(\pi(\tau_n + 1/p))} (P_{2\tau_n-1+1/p}^{1+1/p}(\sqrt{1-\theta}) - P_{2\tau_n-1+1/p}^{1+1/p}(-\sqrt{1-\theta})) = 0. \quad (6.25)$$

Вычисляя предел (6.25) на основании формулы (см. (14) в [17; гл. 3, § 3.4])

$$P_\nu^\mu(-t) = P_\nu^\mu(t) \cos(\pi(\nu + \mu)) - \frac{2}{\pi} Q_\nu^\mu(t) \sin(\pi(\nu + \mu)), \quad t \in (0, 1),$$

закключаем, что соотношение (6.24) эквивалентно равенству

$$Q_{2\alpha_0-1+1/p}^{1+1/p}(\sqrt{1-\theta}) = 0,$$

что совпадает с (1.16).

Лемма 2 полностью доказана.

§ 7. Завершение доказательства
п. (i) теоремы 2. Заключительные замечания

Согласно теореме 8, леммам 1 и 2 для завершения доказательства п. (i) теоремы 2 осталось вычислить величину $\langle B^{-1}x_0, A^{-1}x_0 \rangle$, где $B := I - \lambda AG''(x_0)$.

Легко видеть, что $AG''(x_0)x_0 = \beta_0 x_0$, где $\beta_0 = (p-1)/\lambda$ определено в (6.1). Отсюда $B^{-1}x_0 = (1/(2-p))x_0$ и, следовательно,

$$\langle B^{-1}x_0, A^{-1}x_0 \rangle = \frac{1}{\sigma_0^2(2-p)}. \quad (7.1)$$

Вычисления для второй экстремальной функции $-x_0(t)$ совершенно аналогичны.

Подставляя найденные величины в (3.9), завершаем доказательство.

Пункт (i) теоремы 2 доказан.

Доказательство п. (ii) теоремы 2 легко провести непосредственно, используя в качестве основных по-прежнему пространства L^a и L^b . Здесь мы укажем только, что при $p = 1$ имеется две минимальные функции, а именно

$$x_0(t) = \frac{9}{8} - \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right)^2, \quad t \in [0, 1],$$

и $-x_0(t)$. Простые вычисления дают $\sigma^{-2} = \lambda = \frac{3}{2}$, $B = I$ и на основании теоремы 8 получаем формулу (1.11).

Утверждение п. (iii) теоремы 2 сформулировано в условиях гильбертова пространства и доказывается классическим методом (см., например, [1], [9]).

Доказательство п. (i) следствия 1 основано на прямом вычислении интеграла в формуле

$$\int_h^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{C - x^p}} = 2\sqrt{\lambda} t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad (7.2)$$

при $p = \frac{1}{2}$ и применении формул леммы 1 и замечания 1 п. (iii).

То же самое тождество (7.2) использовано при выводе формул (1.17), (1.18). Спектр, описанный формулой (1.19), найден на основании уравнения (1.10) и формул 15.1.15, 15.1.17, 15.2.14 из главы 15 справочника [16].

Список литературы

1. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 57–150.
2. Фаталов В. Р. Большие отклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ // Теория вероятностей и ее прим. 1996. Т. 41. № 3. С. 682–689.
3. Фаталов В. Р. Большие отклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 3. С. 429–436.
4. Фаталов В. Р. Асимптотики больших отклонений винеровских полей в L^p -норме, нелинейные уравнения Хаммерштейна и гиперболические краевые задачи высокого порядка // Теория вероятностей и ее прим. 2002. Т. 47. № 4. С. 710–726.
5. Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших отклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве // Изв. НАН РА. Матем. 1992. Т. 27. № 5. С. 43–57.
6. Shepp L. A. First passage time for a particular Gaussian process // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. № 3. P. 946–951.
7. Zakai M., Ziv J. On the threshold effect in radar range estimation // IEEE Trans. Inform. Theory. 1969. V. IT-15. P. 167–170.

8. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
9. Фаталов В. Р. Асимптотики вероятностей малых уклонений в L^2 -норме для двух классов гауссовских стационарных процессов // Теория вероятностей и ее прим. (в печати).
10. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
11. Takács L. On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion // Ann. Appl. Probab. 1993. V. 3. P. 186–197.
12. Tolmatz L. Asymptotics of the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian bridge for large arguments // Ann. Probab. 2000. V. 28. №1. P. 132–139.
13. Podkorytova O. A. On tail asymptotics for L^1 -norm of centered Brownian bridge // Matematiche (Catania). 1998. V. 53. №1. P. 3–9.
14. Rice S. O. The integral of the absolute value of the pinned Wiener process – calculation of its probability density by numerical integration // Ann. Probab. 1982. V. 10. №1. P. 240–243.
15. Aki S., Kashiwagi N. Asymptotic properties of some goodness-of-fit tests based on the L^1 -norm // Ann. Inst. Statist. Math. 1989. V. 41. №4. P. 753–764.
16. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
17. Бейтмен Г., А. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
18. Robin L. Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. V. 1–3. Paris: Gauthier-Villars, 1957–1959.
19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966.
20. Фаталов В. Р. Точные константы в асимптотиках малых уклонений гауссовских мер // УМН. (в печати).
21. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
22. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
23. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
24. Вахания Н. Н., Тарисладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
25. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.
26. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВИМС, 1995.
27. Фаталов В. Р. Точные асимптотики типа Лапласа для умеренных уклонений сумм независимых банаховозначных случайных элементов // Теория вероятностей и ее прим. (в печати).
28. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
29. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
30. Олвер Ф. Асимптотики и специальные функции. М.: Наука, 1990.