Общероссийский математический портал

Н. А. Хисамутдинова, Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса в неограниченной области с несколькими выходами на бесконечность, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 83–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:41:15

УДК 517.95

Н. А. Хисамутдинова

Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса в неограниченной области с несколькими выходами на бесконечность

В работе исследуется поведение при $t \rightarrow \infty$ решения смешанной задачи с условием Дирихле на границе для системы уравнений Навье–Стокса в неограниченной двумерной области с несколькими выходами на бесконечность. Выделен класс областей, для которых при экспоненциально убывающих начальных скоростях доказана определяемая геометрией области оценка, характеризующая убывание решения. Аналогичная оценка решения первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности является точной в широком классе областей с несколькими выходами на бесконечность.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

В области $D = (0, \infty) \times \Omega$, где Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, рассматривается следующая задача:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x). \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{u}(t, x) = (u_1, u_2)$ и $p(t, x)$ – неизвестные скорости течения жидкости и давление, а $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – заданные начальные скорости.

Отметим, что в рассматриваемых нами вопросах допустима замена переменных $\mathbf{u} = \nu \mathbf{v}$, $t = \tau/\nu$, $p = \nu^2 q$, приводящая систему (1.1) к аналогичной с $\nu = 1$.

В последние 10–15 лет появилось много работ, посвященных исследованию поведения при $t \rightarrow \infty$ кинетической энергии

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^2(t, x) dx$$

(L_2 -нормы) течения жидкости в неограниченной области. Качественный ответ о стремлении к нулю кинетической энергии в случае трехмерной задачи Коши был дан в работах Т. Като [1] (для сильного решения) и К. Масуды [2] (для слабого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-00934, 02-01-97901).

решения). Более того, в работе [1] получена следующая оценка. Если соленоидальный вектор φ принадлежит пересечению $\mathbf{L}_n(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}_r(\mathbb{R}^n)$, $r \in [1, n]$, и норма $\|\varphi\|_n$ достаточно мала, то существует единственное сильное решение задачи Коши (1.1), (1.2), и справедлива оценка $\|\mathbf{u}(t)\|_\alpha = O(t^{-\gamma})$, $\gamma = (n/r - n/\alpha)/2$, при $\alpha > r$, $t \rightarrow \infty$. Здесь и далее

$$\|\mathbf{v}\|_{\alpha, Q} = \left(\sum_{i=1}^n \int_Q v_i^\alpha(x) dx \right)^{1/\alpha},$$

причем для $\alpha = 2$ и $Q = \Omega$ соответствующие индексы будут опускаться.

Оценка скорости убывания кинетической энергии для слабого решения n -мерной задачи Коши для системы (1.1) была дана в [3] и уточнена в [4], [5]. Сформулируем результат работы [4]. Если соленоидальный вектор φ принадлежит пересечению $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}_r(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, $r \in [1, 2)$, то существует слабое решение задачи Коши (1.1), (1.2), убывающее точно так же, как и в случае уравнения теплопроводности: $\|\mathbf{u}(t)\| = O(t^{-\gamma})$, $\gamma = (n/r - n/2)/2$. В [5] такая же оценка установлена для произвольного слабого решения, удовлетворяющего энергетическому неравенству

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 + 2\nu \int_s^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{u}(s)\|^2$$

для $s = 0$, п.в. $s > 0$ и всех $t > s$. В случае задачи во внешности ограниченной области аналогичные результаты получены для $r \in (1, 2)$ в работах [6] (при $n = 3$) и [7] (при $n \geq 3$).

Таким образом, нелинейные слагаемые и давление, участвующие в системе (1.1), не замедляют скорости затухания течения жидкости, обеспечиваемой входящим в систему (1.1) оператором теплопроводности. Конечно, условие прилипания на границе (1.2) вызывает дополнительное замедление течения, однако, судя по приведенным выше результатам, по-видимому, этот эффект не сказывается существенным образом на поведении решения внешней задачи. Хотя нам неизвестно, являются ли упомянутые результаты для внешней задачи точными.

Затухание течения, обусловленное прилипанием жидкости к границе области, заведомо сказывается в случае некомпактной границы. Это подтверждается результатом работы [8]. В частности, для областей вращения вида

$$\Omega(f) = \{x : x_1^2 + x_2^2 < f^2(x_3), x_3 > 0\}, \quad (1.3)$$

определяемых монотонно неубывающей функцией $f(r) \in C^3(0, \infty)$ такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{f(qr)} < \infty, \quad |f'| + |f''| + |f'''| \leq a_0, \quad r \geq 1,$$

при некотором $q \in (0, 1)$, в этой работе установлены следующие оценки. Определим функцию $r(t)$, $t > 0$, как обратную к монотонно возрастающей функции $rf(r)$, $r > 0$. Пусть $\mathbf{u}(t, x)$ – сильное решение трехмерной задачи (1.1), (1.2) в области $D = (0, \infty) \times \Omega(f)$ с соленоидальной начальной функцией $\varphi \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$,

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > R_0, \quad (1.4)$$

удовлетворяющей условию малости из работы [9]. Тогда найдутся положительные постоянные $\varkappa$, A_1 такие, что при всех $x \in \Omega(f)$ и $t > 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}(t, x)| + \|\nabla p(t)\| &\leq A_1 \exp\left(\frac{-\varkappa r^2(t)}{t}\right), \\ \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)} &\leq A_1 t^{1/2} \exp\left(\frac{-\varkappa r^2(t)}{t}\right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Постоянная $\varkappa$ не зависит от начальной функции φ .

Оценка скорости убывания, аналогичная (1.5), была доказана ранее в [10] для решений первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Более того, для областей вида (1.3) и неотрицательных начальных функций там была доказана точность этой оценки при некоторой регулярности поведения функции f .

Таким образом, прилипание на границе вызывает по крайней мере такую же скорость замедления течения жидкости, какую вызывает отток тепла через границу при первом краевом условии в случае уравнения теплопроводности.

Отметим, что в работах, посвященных исследованию скорости затухания движения вращающейся жидкости, описываемого линейными [11]–[15] и нелинейными [16] уравнениями (задача Коши или первая краевая задача в полупространстве), изучается эффект затухания движения жидкости, вызванный ее вращением, а не условием прилипания на границе, как в данной работе.

Доказательство оценок (1.5) для решения трехмерной задачи в работе [8] существенно опирается на следующий результат Дж. Хейвуда. В [9] для произвольной области Ω , $n = 3$, с границей равномерно класса C^3 доказана оценка $\sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(t, x)| = O(t^{-1/2})$ при $t \rightarrow \infty$. (Термин “граница равномерно класса C^3 ” (см. [9]) означает существование таких положительных чисел d, b , что для произвольной точки $\xi \in \partial\Omega$ пересечение $\partial\Omega \cap \{|x - \xi| < d\}$ в местной декартовой системе координат является графиком функции, производные которой до третьего порядка ограничены постоянной b .) В [8] этот результат несколько усилен до следующего

$$\int_0^\infty \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(t, x)|^2 dt < \infty. \quad (1.6)$$

Напомним, что существование и единственность решения “в целом” задачи (1.1), (1.2) в классе $\mathbf{L}_4$ доказаны в работе О. А. Ладыженской [17]. В совместной работе Лионса и Проди [18] доказывается теорема единственности слабого решения.

В работе Маремонти [19] при соленоидальных начальных скоростях $\varphi \in \mathbf{L}_p(\Omega) \cap \mathbf{L}_2(\Omega)$, $p \in (1, 2]$, для решения задачи (1.1), (1.2) в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ с границей класса C^2 установлены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2} + t^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2} + t \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{L}_2} &= O(t^{-\alpha}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad \alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(x, t)| &= O(t^{-1/2-\alpha+\varepsilon}), \quad \alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В случае соленоидального начального вектора $\varphi \in \mathbf{L}_1(\Omega) \cap \mathbf{L}_2(\Omega)$ из последнего соотношения нетрудно получить (1.6).

Целью настоящей работы является получение оценок вида (1.5) в терминах геометрических характеристик неограниченной области Ω , имеющей несколько выходов на бесконечность. Частично такая задача решена в работе [20]. В ней для внутренностей парабол

$$\Omega(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < x_1^\alpha, x_1 > 1\} \quad (1.7)$$

при $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ доказана оценка

$$|\mathbf{u}(t, x)| \leq A_1 \exp(-kt^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}).$$

В настоящей работе существенно расширен класс областей, для которых установлена оценка убывания решения скорости течения жидкости задачи (1.1), (1.2) при $t \rightarrow \infty$. В частности, этот класс содержит все параболы $\Omega(\alpha)$ с $\alpha \in (0, 1)$. Доказательство наших результатов, в отличие от трехмерного случая, не опирается на соотношение (1.6) и не использует результатов Маремонти.

Пусть двумерная область Ω имеет k выходов на бесконечность, расположенных вдоль лучей s_i , т.е. имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \Omega_i \right),$$

где Ω_i , $i = 1, \dots, k$, — односвязные непересекающиеся неограниченные области, а Ω_0 — ограниченная область, не обязательно односвязная. Будем предполагать, что если выбрать ось Ox_1 направленной вдоль некоторого луча s_i , то область Ω_i расположится в полуплоскости $\{x_1 > 0\}$, причем области $\Omega_i^r = \{x \in \Omega_i : x_1 < r\}$ будут ограничены и односвязны при $r \geq P_i$. Для полной постановки задачи (1.1), (1.2) следует задать потоки через сечения $S_i^r = \{x \in \Omega_i : x_1 = r\}$ областей Ω_i . Мы задаем их нулевыми

$$\int_{S_i^r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} dS = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Через $\lambda_i(r)$ обозначим первое собственное значение оператора $-\Delta$ в области Ω_i^r с условием Неймана на части границы $\partial \Omega_i \cap \Omega$ и условием Дирихле на оставшейся части границы

$$\lambda_i(r) = \inf \left\{ \int_{\Omega_i^r} |\nabla v|^2 dx \left(\int_{\Omega_i^r} v^2 dx \right)^{-1}, v \in C_0^\infty(\Omega_i^r \cup \Omega_0) \right\}, \quad r \geq P_i.$$

Очевидно, $\lambda_i(r)$, $r \geq P_i$, — невозрастающие функции.

Выберем нумерацию так, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_i(r) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.8)$$

и $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_i(r) > 0$, $i = s+1, \dots, k$. При этом допустимо равенство $s = k$. Однако $s \geq 1$, иначе, как хорошо известно, решение будет убывать быстрее, чем $e^{-\varepsilon t}$.

Потребуем, чтобы для области $Q = \Omega \cup (\bigcup_{i=s+1}^k \Omega_i)$ выполнялось неравенство

$$\mu = \inf \left\{ \int_Q |\nabla v|^2 dx \left(\int_Q v^2 dx \right)^{-1}, v \in C_0^\infty(\Omega) \right\} > 0. \quad (1.9)$$

Оно выполнено, если пересечение $\partial Q \cap \partial \Omega$ непусто.

Мы предполагаем также существование таких абсолютно непрерывных монотонно неубывающих положительных функций $l_i(r)$, $r > 0$, $i = 1, \dots, s$, что при $r \geq P_i$ области $\omega_i(r) = \Omega_i^{r+l_i(r)} = \Omega_i^{r+l_i(r)} \setminus \overline{\Omega_i^r}$ удовлетворяют следующему условию D. Известно, что для каждой ограниченной области Q с липшицевой границей уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = g, \quad x \in Q, \quad g \in L_2(Q), \quad \int_Q g dx = 0,$$

имеет решение $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(Q)$, удовлетворяющее оценке (см. [21], а также [22])

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_Q \leq d_1(Q) \|g\|_Q.$$

Условие D заключается в том, что постоянную d_1 в этом неравенстве можно выбрать единой для каждой области $\omega_i(r)$, $r \geq P_i$,

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{\omega_i(r)} \leq d_1 \|g\|_{\omega_i(r)}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.10)$$

Как следует из результатов работы [22], это условие выполнено, в частности, если области $\omega_i(r)$, $r \geq P_i$, равномерно звездны относительно некоторых шаров B_i . Равномерность означает, что отношения $\operatorname{diam} \omega_i(r) / \operatorname{diam} B_i$ ограничены постоянной, не зависящей от $i = 1, \dots, s$ и $r \geq P_i$. Если $\Omega(\alpha)$ – область вида (1.7) с некоторым $\alpha \in (0, 1)$, то, очевидно, области $\omega(r)$, $r \geq P$, равномерно звездны при достаточно большом P , если выбрать $l(r) = r^\alpha$. Поэтому такая область удовлетворяет нашему условию.

Наложим еще на функции l_i следующие условия регулярности. Существуют числа $\alpha, q_i \in (0, 1)$ такие, что

$$\frac{l_i(r)}{l_i(q_i r)} < q_i^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad r \geq P_i. \quad (1.11)$$

Грубо говоря, это условие ограничивает рост функций $l_i(r)$ сверху.

Определим функции $r_i(t)$, $t > P_i l_i(P_i)$, как обратные к монотонно возрастающим функциям $rl_i(r)$, $r > P_i$. Очевидно, что $r_i(t)$, монотонно возрастаая, стремится к бесконечности и удовлетворяет равенствам

$$\frac{t}{l_i^2(r_i(t))} = \frac{r_i(t)}{l_i(r_i(t))} = \frac{r_i^2(t)}{t}. \quad (1.12)$$

Пусть существует число $\delta \in (0, 1]$ такое, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{1-\delta}}{\max_i l_i(r)} = 0. \quad (1.13)$$

Пусть начальная функция φ из $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ является пределом финитных соленоидальных функций и удовлетворяет условию

$$\|\varphi(x)\|_{\Omega_r} \leq e^{-cr^\delta}, \quad r \geq P, \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.14)$$

с некоторыми положительными постоянными c и P , где $\Omega_r = \Omega \setminus \bigcup_i \Omega_i^r$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть двумерная область Ω имеет границу равномерно класса C^3 и функции l_i удовлетворяют (1.11), (1.13) и условию D, а соленоидальная начальная функция φ из $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет условию (1.14). Тогда существуют $\varkappa$, A_2 , T такие, что решение задачи (1.1), (1.2) при всех $x \in \Omega$ и $t > T$ удовлетворяет оценкам

$$|\mathbf{u}(t, x)| + \|\mathbf{u}(t)\| \leq A_2 \exp\left(-t \min_i \left\{ \lambda_i \left(\frac{r_i(t)}{\varkappa} \right), \varkappa^2 l_i^{-2}(r_i(t)) \right\}\right), \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \|\nabla \mathbf{u}(t)\| + \|D^2 \mathbf{u}(t)\| + \|\nabla p(t)\| \\ & \leq A_2 \exp\left(-t \min_i \left\{ \lambda_i \left(\frac{r_i(t)}{\varkappa} \right), \varkappa^2 l_i^{-2}(r_i(t)) \right\}\right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где A_2 зависит только от (d, b) из определения принадлежности границы равномерно классу C^3 , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$, а $\varkappa$ — только от q_i и α из неравенства (1.11) и от d_1 из неравенства (1.10).

В случае, когда области $\omega_i(r)$ равномерно звездны, оценку (1.15) можно привести к виду

$$|\mathbf{u}(t, x)| \leq A_2 \exp(-\tilde{\varkappa} t \min_i \{l_i^{-2}(r_i(t))\}). \quad (1.17)$$

В случае областей с несколькими выходами на бесконечность, когда каждый рукав-выход изометричен области вида $\Omega(\alpha)$, аналогичная (1.17) оценка решения уравнения теплопроводности является точной. В самом деле, для отдельного рукава Ω_i согласно работе [10] точной является оценка вида

$$|\mathbf{u}_i(t, x)| \leq A_2 \exp(-\tilde{\varkappa} t l_i^{-2}(r_i(t))).$$

Далее, для неотрицательных начальных функций справедлив принцип максимума $\mathbf{u}(t, x) \geq \mathbf{u}_i(t, x) \geq 0$. Отсюда $\mathbf{u}(t, x) \geq \max_i \mathbf{u}_i(t, x)$, что и доказывает точность оценки вида (1.17) для решения уравнения теплопроводности.

§ 2. Существование решения и его свойства

Как было отмечено во введении, существование решения задачи (1.1), (1.2) “в целом” было доказано в [17]. Однако нам потребуются некоторые дополнительные дифференциальные свойства решения, которые проще доказываются на этапе построения галёркинских приближений. Поэтому мы вынуждены в некоторой мере воспроизводить здесь известные доказательства в несколько измененном виде, приспособленном для наших целей.

Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ через $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ будем обозначать множество гладких финитных в Ω соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ (в дальнейшем — просто векторы вместо вектор-функций). Далее, пусть $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(D_a^b)$ обозначает множество гладких финитных в цилиндре $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ соленоидальных векторов $\mathbf{v}(t, x): D_a^b \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0$. Через $\mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$ обозначим пополнение множества $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ по норме $\|\mathbf{v}\|$, через $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$ — пополнение того же множества по норме

$\|\mathbf{v}\| + \|\nabla \mathbf{v}\|$, а пространство соленоидальных функций $\mathbf{H}_0(\Omega)$ определим как пополнение $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ по норме $\|\nabla \mathbf{u}\|$. Определим пространство $\mathring{\mathbf{J}}_2^{0,1}(D_a^b)$ как замыкание множества $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(D_{a-1}^{b+1})$ в пространстве $\mathbf{W}_2^{0,1}(D_a^b)$.

Для произвольных векторов $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$ положим

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^2 u_i v_i, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad |\nabla \mathbf{u}|^2 = \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}, \\ |D_x^2 \mathbf{u}|^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{|\alpha|=2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\alpha} \right|^2.\end{aligned}$$

Докажем методом Галёркина существование обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией $\varphi(x) \in \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.4). Затем, после установления некоторых свойств решения, будет доказано его существование при произвольной начальной функции $\varphi \in \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) в $D^T = (0, T) \times \Omega$ называется вектор-функция $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{J}}^{0,1}(D^T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_t - u_k \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{x_k}) dx dt = \int_\Omega \varphi \cdot \mathbf{v}(0, x) dx \quad (2.1)$$

для любой функции $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}^\infty(D_{-1}^T)$. По повторяющемуся индексу $k = 1, 2$ предполагается суммирование.

Докажем сначала существование обобщенного решения для ограниченной области Ω , а затем рассмотрим случай неограниченной. Тогда оператор $\tilde{\Delta} = P\Delta$, где $P: \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$ – оператор ортогонального проектирования, имеет полный ортонормированный в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ набор собственных функций $\mathbf{a}^l \in \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$. Если граница области Ω класса C^2 , то собственные функции $\mathbf{a}^l \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}$ [23; гл. III, § 17, т. 17.1].

Приближенные решения ищутся в виде

$$\mathbf{u}^n(x, t) = \sum_{l=1}^n c_{ln}(t) \mathbf{a}^l(x),$$

где функции $c_{ln}(t)$ определяются из условий

$$(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{a}^l) - (u_k^n \mathbf{u}^n, \mathbf{a}_{x_k}^l) + (\mathbf{u}_{x_k}^n, \mathbf{a}_{x_k}^l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

и начальных данных

$$c_{ln}|_{t=0} = (\mathbf{a}^l, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Здесь $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Равенства (2.2) представляют собой систему дифференциальных уравнений для c_{ln} вида

$$\frac{dc_{ln}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n a_{li}c_{in}(t) - \sum_{i,p=1}^n a_{lip}c_{in}(t)c_{pn}(t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

где a_{li} и a_{lip} — постоянные числа.

Для доказательства однозначной разрешимости системы (2.4) при выполнении условий (2.3) для всех $t \geq 0$ выведем априорную оценку.

Умножим каждое из равенств (2.2) на соответствующее $c_{ln}(t)$ и сложим по всем l в пределах от 1 до n . В результате простых преобразований получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n\|^2 + (\mathbf{u}_{x_k}^n, \mathbf{u}_{x_k}^n) = 0. \quad (2.5)$$

Проинтегрировав это равенство по t от t_0 до t , будем иметь

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}^n(\tau)\|^2 d\tau = \|\mathbf{u}^n(t_0)\|^2, \quad (2.6)$$

откуда при $t_0 = 0$ следует ограниченность функции $\|\mathbf{u}^n(t)\|$ числом $\|\mathbf{u}^n(0)\| \leq \|\varphi\|$.

Чтобы установить нужные нам свойства обобщенного решения, выведем еще ряд неравенств для галёркинских приближений:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \leq \|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2, \quad (2.7)$$

$$\|\mathbf{u}_t^n\|^2 \leq 2\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 + 2\|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2, \quad (2.8)$$

$$\|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \leq 2\|\mathbf{u}_t^n\|^2 + 2\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2 \leq \sum_{k=1}^2 \|(u_k^n \mathbf{u}^n)_t\|^2. \quad (2.10)$$

Чтобы получить (2.7), умножим каждое из равенств (2.2) на соответствующее число λ_l и произведем замену по формулам $\lambda^l \mathbf{a}^l = \tilde{\Delta} \mathbf{a}^l = P \Delta \mathbf{a}^l$. Получим

$$(\mathbf{u}_t^n, P \Delta \mathbf{a}^l) - (u_k^n \mathbf{u}^n, (\tilde{\Delta} \mathbf{a}^l)_{x_k}) + (\mathbf{u}_{x_k}^n, (\tilde{\Delta} \mathbf{a}^l)_{x_k}) = 0. \quad (2.11)$$

В силу простых соотношений

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t^n, P \Delta \mathbf{a}^l) &= (P \mathbf{u}_t^n, \Delta \mathbf{a}^l) = (\mathbf{u}_t^n, \Delta \mathbf{a}^l) = -(\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \mathbf{a}^l), \\ (\mathbf{u}_{x_k}^n, (\tilde{\Delta} \mathbf{a}^l)_{x_k}) &= -(\mathbf{u}_{x_k x_k}^n, P^2 \Delta \mathbf{a}^l) = -(P \Delta \mathbf{u}^n, P \Delta \mathbf{a}^l) \end{aligned}$$

равенства (2.11) запишутся в виде

$$-(\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \mathbf{a}^l) + ((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \tilde{\Delta} \mathbf{a}^l) - (\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n, \tilde{\Delta} \mathbf{a}^l) = 0.$$

Умножая их на c_{ln} и складывая по l от 1 до n , получаем

$$-(\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \mathbf{u}^n) + ((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) - (\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) = 0. \quad (2.12)$$

Отсюда нетрудно вывести неравенство (2.7).

Далее, умножим (2.2) на $\frac{d}{dt}c_{ln}$ и сложим полученные равенства по l от 1 до n , тогда

$$(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{u}_t^n) - (u_k^n \mathbf{u}^n, (\mathbf{u}_t^n)_{x_k}) + (\mathbf{u}_{x_k}^n, (\mathbf{u}_t^n)_{x_k}) = 0.$$

Интегрированием по частям это равенство приводится к виду

$$(\mathbf{u}_t^n, \mathbf{u}_t^n) + ((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \mathbf{u}_t^n) - (\Delta \mathbf{u}^n, P \mathbf{u}_t^n) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t^n\|^2 &= -((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \mathbf{u}_t^n) + (\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n, \mathbf{u}_t^n) \\ &\leq \left(\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{u}_t^n\|^2 \right) + \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{u}_t^n\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (2.8).

Из (2.12) нетрудно получить равенство

$$(\mathbf{u}_t^n, \tilde{\Delta} \mathbf{u}_n) + ((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) - (\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 &= (\mathbf{u}_t^n, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) + ((u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}, \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n) \\ &\leq \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 + \|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2. \end{aligned}$$

Последнее влечет неравенство (2.9).

Продифференцируем неравенства (2.2) по переменной t

$$(\mathbf{u}_{tt}^n, \mathbf{a}^l) - ((u_k^n \mathbf{u}^n)_t, \mathbf{a}_{x_k}^l) + ((\mathbf{u}_{x_k}^n)_t, \mathbf{a}_{x_k}^l) = 0,$$

затем умножим их на $\frac{d}{dt}c_{ln}$ и сложим по l от 1 до n , тогда

$$(\mathbf{u}_{tt}^n, \mathbf{u}_t^n) - ((u_k^n \mathbf{u}^n)_t, (\mathbf{u}_t^n)_{x_k}) + ((\mathbf{u}_{x_k}^n)_t, (\mathbf{u}_{x_k}^n)_t) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2 = ((u_k^n \mathbf{u}^n)_t, (\mathbf{u}_t^n)_{x_k}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \|(u_k^n \mathbf{u}^n)_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2,$$

откуда немедленно следует (2.10).

Приведем неравенства (2.7)–(2.10) к виду

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + \frac{3}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \leq 2c_1 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 + 4c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4, \quad (2.13)$$

$$\|\mathbf{u}_t^n\|^2 \leq 4c_1 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 + \frac{5}{2} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 + 8c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4, \quad (2.14)$$

$$\|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \leq 4\|\mathbf{u}_t^n\|^2 + 8c_1 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 + 16c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2 \leq 2^7 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \|\mathbf{u}_t^n\|^2. \quad (2.16)$$

Здесь и далее постоянные c_1 – c_4 зависят только от (d, b) из определения принадлежности границы равномерно классу C^3 . Для этого докажем неравенства

$$\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 \leq 2c_1 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 + \frac{1}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 + 4c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4, \quad (2.17)$$

$$\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_t\|^2 \leq 128 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2, \quad k = 1, 2. \quad (2.18)$$

Чтобы установить (2.17), достаточно оценить отдельно выражение вида

$$\|u_k^n \mathbf{u}_{x_k}^n\|^2 = \int_{\Omega} (u_k^n \mathbf{u}_{x_k}^n)^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} (u_k^n)^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}_{x_k}^n)^4 dx \right)^{1/2}.$$

Первый множитель оценивается по известному неравенству [24; гл. I, §1, лемма 1] для функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u^4 dx \leq 2 \int_{\Omega} u^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.19)$$

Непосредственно к функции $\mathbf{u}_{x_k}$ такое неравенство неприменимо, поэтому мы строим продолжение этой функции $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_2^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{w}^2 dx &< c_2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}_{x_k}^n)^2 dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx &\leq c_2 \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_{x_k}^n)^2 + |\nabla \mathbf{u}_{x_k}^n|^2) dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_{x_k}^n)^4 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{w}^4 dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{w}^2 dx \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \\ &\leq 2c_2^2 \|\mathbf{u}_{x_k}^n\|^2 (\|\mathbf{u}_{x_k}^n\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_{x_k}^n\|^2). \end{aligned}$$

Соединяя это с предыдущими неравенствами, получаем

$$\|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 \leq 2c_2 \|\mathbf{u}^n\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 (\|\nabla \mathbf{u}^n\| + \|\nabla \mathbf{u}_{x_k}^n\|). \quad (2.20)$$

Пусть функции $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$ удовлетворяют тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

при всех $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$. Тогда функция $\mathbf{f}$ однозначно определяется функцией $\mathbf{w}$, так что можно ввести оператор $\mathbf{f} = \tilde{\Delta} \mathbf{w}$. При этом справедливы неравенства, аналогичные установленным в [9] для случая $n = 3$

$$\|D^2 \mathbf{w}\| \leq c_3(\|\tilde{\Delta} \mathbf{w}\| + \|\nabla \mathbf{w}\|), \quad (2.21)$$

$$\sup_{x \in \Omega} |\mathbf{w}(x)| \leq c_4(\|\tilde{\Delta} \mathbf{w}\| + \|\nabla \mathbf{w}\|). \quad (2.22)$$

Оценим $\|\nabla \mathbf{u}_{x_k}\|$, используя неравенство (2.21). Тогда неравенство (2.20) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} \|(u_k^n \mathbf{u}^n)_{x_k}\|^2 &\leq 2c_2 \|\mathbf{u}^n\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 ((1 + c_3) \|\nabla \mathbf{u}^n\| + c_3 \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|) \\ &\leq 2c_2(1 + c_3) \|\mathbf{u}^n\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 + \frac{1}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 + 4c_2^2(1 + c_3)^2 \|\mathbf{u}^n\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4, \end{aligned}$$

откуда следует (2.17) ввиду неравенства $\|\mathbf{u}^n\| \leq \|\varphi\|$.

Для доказательства (2.18) достаточно оценить отдельное выражение вида

$$\|u_k^n \mathbf{u}_t^n\|^2 \leq \int_{\Omega} (u_k^n \mathbf{u}_t^n)^2 \, dx \leq \left(\int_{\Omega} (u_k^n)^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u}_t^n)^4 \, dx \right)^{1/2}.$$

Первый множитель оценивается по неравенству (2.19). Заметим, что $\mathbf{u}_t^n$ имеет нулевой след на границе $\partial\Omega$, поэтому для этой функции применимо такое же неравенство. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|u_k^n \mathbf{u}_t^n\|^2 &\leq \left(4 \int_{\Omega} (u_k^n)^2 \, dx \int_{\Omega} (\nabla u_k^n)^2 \, dx \right)^{1/2} \left(4 \int_{\Omega} (\mathbf{u}_t^n)^2 \, dx \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}_t^n)^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq 4 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\| \|\mathbf{u}_t^n\| \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|, \end{aligned}$$

откуда следует (2.18).

Теперь при помощи формул (2.17), (2.18) из (2.7)–(2.10) несложно вывести неравенства (2.13)–(2.16).

Докажем оценку

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq A(\|\varphi\|, \|\nabla \varphi\|) \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.23)$$

Применив неравенство

$$2c_1 \|\varphi\| \|\nabla \mathbf{u}^n\|^3 \leq \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4$$

к правой части (2.13), получим

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + \frac{3}{4} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + 5c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4. \quad (2.24)$$

Отбросив второе слагаемое в левой части и разделив полученное неравенство на $\|\nabla \mathbf{u}^n\|^2$, проинтегрируем его по t в пределах от y до t

$$\ln \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \Big|_y^t \leq t - y + 5c_1^2 \|\varphi\|^2 \int_y^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 d\tau, \quad t > y \geq 0.$$

Воспользуемся неравенством (2.6) для оценки второго слагаемого в правой части последнего неравенства. Тогда

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{u}^n(y)\|^2 \exp\left(t - y + \frac{5}{2} c_1^2 \|\varphi\|^4\right). \quad (2.25)$$

Затем вновь проинтегрируем полученное неравенство по y в пределах от δ_0 до t

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 (t - \delta_0) &\leq \int_{\delta_0}^t \|\nabla \mathbf{u}^n(y)\|^2 \exp\left(t - y + \frac{5}{2} c_1^2 \|\varphi\|^4\right) dy \\ &\leq \exp\left(t - \delta_0 + \frac{5}{2} c_1^2 \|\varphi\|^4\right) \int_{\delta_0}^t \|\nabla \mathbf{u}^n(y)\|^2 dy. \end{aligned}$$

Оценим интеграл по неравенству (2.6). Будем иметь

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq \frac{1}{2(t - \delta_0)} \exp\left(t - \delta_0 + \frac{5}{2} c_1^2 \|\varphi\|^4\right) \|\mathbf{u}^n(\delta_0)\|^2, \quad t \geq \delta_0. \quad (2.26)$$

Из (2.25) при $y = 0$ имеем также неравенство

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq \|\nabla \varphi\|^2 \exp\left(t + \frac{5}{2} c_1^2 \|\varphi\|^4\right). \quad (2.27)$$

Теперь (2.23) при $t \in [0, 1]$ следует из (2.27), а при $t > 1$ — из (2.26) с $\delta_0 = t - 1$ и (2.6).

Далее неограниченная область Ω , граница которой принадлежит равномерно классу C^3 , приближается последовательностью ограниченных областей Ω_m , $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$, каждая из которых имеет границу из класса C^3 с постоянными d, b , не зависящими от m . При условии (1.4) можно выбрать Ω_m так, чтобы выполнялись включения $\overline{\Omega_m} \supset \text{supp } \varphi$. Тогда решение задачи (1.1), (1.2) для области Ω получается как слабый предел (в подходящих пространствах) подпоследовательности $\mathbf{u}^m$ решений для ограниченных областей Ω_m с той же начальной функцией φ . В свою очередь, каждое решение $\mathbf{u}^m$ получается как слабый предел при $n \rightarrow \infty$ подпоследовательности галёркинских приближений $\mathbf{u}^{m,n}$. Индекс m ранее опускался ради краткости.

Докажем, что обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) обладает свойствами

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0, \infty; \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)), \quad (2.28)$$

$$D^2 \mathbf{u} \in L^2(0, \infty; \mathbf{L}_2(\Omega)), \quad (2.29)$$

$$\nabla \mathbf{u}_t \in L^2(\varepsilon, \infty; \mathbf{L}_2(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.30)$$

Установим сначала эти соотношения для галёркинских приближений.

Докажем следующую оценку

$$\int_0^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 dt < \infty. \quad (2.31)$$

Для этого проинтегрируем (2.24) по времени от t до ∞ . Применяя (2.23), получим

$$\|\nabla \mathbf{u}^n\|_t^\infty + \frac{3}{4} \int_t^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 dt \leq \int_t^\infty \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 (1 + 5c_1^2 \|\varphi\|^2 A) dt.$$

Откуда по неравенству (2.6) будем иметь

$$\frac{3}{4} \int_t^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 dt \leq c_5 \|\mathbf{u}^n(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2. \quad (2.32)$$

Здесь и далее постоянные c_5 – c_7 могут зависеть только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$. Отсюда, применив (2.6) и (2.23), выводим (2.31).

Из неравенств (2.21), (2.31) и (2.6) получим (2.29).

Из (2.14) имеем

$$\|\mathbf{u}_t^n\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + 12c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4 + \frac{5}{2} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2. \quad (2.33)$$

Проинтегрировав по времени от 0 до t и применив (2.23), (2.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{u}_\tau^n\|^2 d\tau &\leq \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 d\tau + 12c_1^2 \|\varphi\|^2 A \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 d\tau + \frac{5}{2} \int_0^t \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 + 6c_1^2 \|\varphi\|^4 A + \frac{5}{2} \int_0^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.31) следует, что

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0, \infty; \mathbf{L}_2(\Omega)). \quad (2.34)$$

Покажем, что имеет место (2.28). Решение задачи (1.1), (1.2) получается как слабый предел галёркинских приближений $\mathbf{u}^{m,n}$, построенных для последовательности ограниченных областей $\Omega_m \subset \Omega$. Каждое галёркинское приближение удовлетворяет (2.28). После слабого предельного перехода (2.28) останется справедливым и для предельной функции – решения.

Докажем, что

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_t^n\|^2 \leq c_A. \quad (2.35)$$

Постоянная c_A зависит только от $\varepsilon, (d, b), \|\varphi\|, \|\nabla \varphi\|$. Из (2.16), в частности, имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_t^n\|^2 \leq 2^7 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \|\mathbf{u}_t^n\|^2.$$

Из него следует, что

$$\|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2 \leq \|\mathbf{u}_t^n(t_0)\|^2 \exp\left(2^7 \|\varphi\|^2 \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 d\tau\right). \quad (2.36)$$

Благодаря (2.6) будем иметь

$$\|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2 \leq c_6 \|\mathbf{u}_t^n(t_0)\|^2, \quad t \geq t_0. \quad (2.37)$$

Интегрируя это неравенство по $t_0 \in [0, \varepsilon]$ и используя (2.34), установим

$$\|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2 \leq \frac{c_7}{\varepsilon}, \quad t \geq \varepsilon. \quad (2.38)$$

Проинтегрируем (2.16) по τ от ε до t и установим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^t \|\nabla \mathbf{u}_\tau^n\|^2 d\tau &\leq 2^7 \|\varphi\|^2 \int_{\varepsilon}^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \|\mathbf{u}_\tau^n\|^2 d\tau + \|\mathbf{u}_t^n(\varepsilon)\| \\ &\leq 2^7 \|\varphi\|^2 A \int_{\varepsilon}^t \|\mathbf{u}_\tau^n\|^2 d\tau + \|\mathbf{u}_t^n(\varepsilon)\|. \end{aligned}$$

Отсюда, применив (2.34) и (2.38), выводим (2.35) и (2.30).

ТЕОРЕМА. Пусть граница области Ω принадлежит равномерно классу C^3 и $\varphi \in \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$. Тогда для решения задачи (1.1), (1.2) справедливы неравенства

$$\|\nabla \mathbf{u}(T)\|^2 \leq b_1 \|\mathbf{u}(t)\|^2, \quad T \geq t+1, \quad (2.39)$$

$$\|D^2 \mathbf{u}(T)\|^2 \leq b_2 \|\mathbf{u}(t)\|^2, \quad T \geq t+2, \quad (2.40)$$

$$\|\nabla p(T)\|^2 \leq b_3 \|\mathbf{u}(t)\|^2, \quad T \geq t+2, \quad (2.41)$$

$$|\mathbf{u}(T, x)| \leq b_4 \|\mathbf{u}(t)\|, \quad x \in \Omega, \quad T \geq t+2, \quad (2.42)$$

где $t \geq 0$. Здесь постоянные b_1 – b_4 могут зависеть только от $(d, b), \|\varphi\|, \|\nabla \varphi\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим соотношения (2.39)–(2.42) для галёркинских приближений в предположении, что начальная функция φ удовлетворяет условию (1.4). Из (2.26) при $\delta_0 = t - 1$ следует неравенство

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq b_1 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2, \quad t \geq 1.$$

В силу того, что функция $\|\mathbf{u}^n(t)\|^2$ невозрастающая, имеем

$$\|\nabla \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq b_1 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2 \leq b_1 \|\mathbf{u}^n(s-1)\|^2, \quad t \geq s \geq 1.$$

Откуда немедленно следует (2.39).

Из (2.32) и (2.39) с учетом того, что функция $\|\mathbf{u}^n(t)\|$ невозрастающая, следует

$$\int_t^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t)\|^2 dt < \tilde{b}_1 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|, \quad t \geq 1. \quad (2.43)$$

Здесь постоянные $\tilde{b}_1$ и далее $\tilde{b}_2$ – $\tilde{b}_6$ могут зависеть только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$.

Проинтегрируем (2.33). Это даст

$$\int_t^\infty \|\mathbf{u}_t^n\|^2 ds \leq \int_t^\infty \left(\|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 + 12c_1^2 \|\varphi\|^2 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^4 + \frac{5}{2} \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 \right) ds.$$

Применив к последнему неравенства (2.23), (2.43) и (2.6), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \|\mathbf{u}_t^n\|^2 ds &\leq \int_t^\infty \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 (1 + 12c_1^2 \|\varphi\|^2 A) ds + \frac{5}{2} \int_t^\infty \|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n\|^2 ds \\ &\leq \tilde{b}_2 \|\mathbf{u}^n(t)\|^2 + \frac{5}{2} \tilde{b}_1 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2 \leq \tilde{b}_3 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Заменим в (2.37) t на $t+1$ и проинтегрируем по $t_0 \in [t, t+1]$. Вместе с (2.44) это даст

$$\|\mathbf{u}_t^n(t+1)\|^2 \leq c_6 \int_t^{t+1} \|\mathbf{u}_t^n(s)\|^2 ds \leq \tilde{b}_4 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2, \quad t \geq 1.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$\|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2 \leq \tilde{b}_4 \|\mathbf{u}^n(t-2)\|^2, \quad t \geq 2. \quad (2.45)$$

Теперь используя соотношения (2.15), (2.23) и (2.39), нетрудно заключить, что

$$\|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq 4 \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \tilde{b}_5 \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 \leq 4 \|\mathbf{u}_t^n\|^2 + \tilde{b}_6 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2.$$

К последнему применим (2.45)

$$\|\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t)\|^2 \leq 4 \tilde{b}_4 \|\mathbf{u}^n(t-2)\|^2 + \tilde{b}_6 \|\mathbf{u}^n(t-1)\|^2.$$

Отсюда, поскольку функция $\|\mathbf{u}^n(t)\|$ невозрастающая, имеем (2.40).

Докажем, что неравенства (2.39), (2.40), установленные пока для галёркинских приближений $\mathbf{u}^n$, останутся справедливыми и для решения задачи (1.1), (1.2).

Зафиксируем $t > 0$. Выберем подпоследовательность $\mathbf{u}^n$ так, чтобы существовал предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^n(t)\| = L.$$

Убедимся, используя равенства (2.6) для галёркинских приближений $\mathbf{u}^n$ и аналогичное тождество для решения $\mathbf{u}$, что $L \leq \|\mathbf{u}(t)\|$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^n(t)\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|\mathbf{u}^n(0)\|^2 - 2 \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n(\tau)\|^2 d\tau \right) \\ &\leq \|\varphi\|^2 - 2 \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau = \|\mathbf{u}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что подпоследовательность $\mathbf{u}^n$ слабо сходится к функции $\mathbf{u}$ в пространстве $L_2(0, t; \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega_m))$ при $n \rightarrow \infty$. Как известно, норма предельной функции

$$\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|^2 d\tau$$

не превышает нижнего предела

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^n\|^2 d\tau.$$

Докажем неравенство (2.39) для решения $\mathbf{u}^m$ в ограниченной области Ω_m . Пусть оно нарушается на некотором множестве $E \subset [t + 1, \infty)$ положительной меры, тогда

$$\int_E \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|^2 ds > \|\mathbf{u}^m(t)\|^2 \int_E b_1 ds. \quad (2.46)$$

С другой стороны, интегрируя неравенство (2.39), записанное для галёркинских приближений, получаем

$$\int_E \|\nabla \mathbf{u}^{m,n}(s)\|^2 ds \leq \|\mathbf{u}^{m,n}(t)\|^2 \int_E b_1 ds.$$

После предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ будем иметь неравенство

$$\int_E \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|^2 ds \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_E \|\nabla \mathbf{u}^{m,n}(s)\|^2 ds \leq L^2 \int_E b_1 ds,$$

противоречащее (2.46). Следовательно, неравенство (2.39) для функции $\mathbf{u}^m$ выполнено для почти всех $T > t$.

Совершенно аналогично осуществляется переход при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.39) от функций $\mathbf{u}^m$ к решению задачи (1.1), (1.2). Наконец, пусть φ^i — последовательность функций из $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$, сходящаяся к φ . Тогда для соответствующих решений $\mathbf{u}^i$ задачи (1.1), (1.2) будут справедливы энергетическое тождество (2.6),

свойства (2.28)–(2.30) и оценки (2.39)–(2.42). Поэтому среди функций $\mathbf{u}^i$ можно выделить слабо сходящуюся в соответствующих пространствах подпоследовательность. Нетрудно проверить, что предел этой подпоследовательности будет являться решением задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией φ . И для этого решения сохранятся перечисленные выше свойства и неравенства.

Доказательство неравенства (2.40) проводится аналогично тому, как это было сделано для (2.39).

Так как $\|\tilde{\Delta}\mathbf{u}\| = \|P\Delta\mathbf{u}\| \leq \|D^2\mathbf{u}\|$, то неравенство (2.42) является следствием (2.40) и (2.22).

Как известно, решение, обладающее свойствами (2.28)–(2.30), является решением почти всюду [24]. Для доказательства неравенства (2.41) заметим, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(T) \cdot \nabla \mathbf{u}(T)\| &\leq \max_{x \in \Omega} |\mathbf{u}(T, x)| \|\nabla \mathbf{u}(T)\| \leq b_4 b_1^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|^2 \\ &\leq b_4 b_1^{1/2} \|\varphi\| \|\mathbf{u}(t)\|, \quad T \geq t + 2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Далее, из уравнений (1.1) следует равенство

$$\|\nabla p(T)\| \leq \|(1 - P)(\nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})\|.$$

Теперь (2.41) вытекает из (2.40) и (2.47). Теорема доказана.

§ 3. Поведение решения на бесконечности

В этом параграфе мы докажем теорему 1 для соленоидальных начальных функций φ из $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ с условием (1.4), а затем покажем справедливость теоремы 1 и для соленоидальных начальных функций φ из $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ с условием (1.14).

3.1. Поведение решения при $|x| \rightarrow \infty$. Отметим сначала, что, как легко усмотреть из неравенства (2.42), решение $\mathbf{u}$ задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $\mathbf{L}_\infty(\Omega)$ при каждом $t > 0$.

Покажем, что при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\infty, \Omega}^2 d\tau \leq C_1 + C_2 t^\varepsilon. \quad (3.1)$$

Постоянная C_2 зависит только от (d, b) , $\|\varphi\|$, ε , а C_1 — только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$. Воспользуемся неравенством Соболева [25]

$$|\mathbf{v}(x)| \leq C_K (\|\mathbf{v}\|_K + \|D^2 \mathbf{v}\|_K), \quad (3.2)$$

справедливым в любом конусе K для функции $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(K)$; точка x — вершина конуса. Поскольку область Ω имеет границу равномерно класса C^3 , то любой точки $x \in \Omega$ можно коснуться вершиной маленького конуса, лежащего в Ω , одинакового для всех точек x . Размер конуса будет зависеть от постоянных (d, b) . По (3.2) имеем

$$\int_0^t |\mathbf{u}(\tau, x)|^2 d\tau \leq 2C_K^2 \int_0^t \|\mathbf{u}\|_K^2 d\tau + 2C_K^2 \int_0^t \|D^2 \mathbf{u}\|^2 d\tau. \quad (3.3)$$

По неравенству Гёльдера

$$\|\mathbf{u}(t)\|_K^2 = \int_K \mathbf{u}^2 dx \leq \left(\int_K 1^q dx \right)^{1/q} \left(\int_\Omega \mathbf{u}^{2p} dx \right)^{1/p} = C_3(K) \|\mathbf{u}\|_{2p}^2. \quad (3.4)$$

Для функции $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ в двумерном случае справедливо неравенство [23; гл. II, §3, неравенство (3.1)]

$$\|\mathbf{u}\|_{2p,\Omega} \leq \chi_1 \|\nabla \mathbf{u}\|^\varrho \|\mathbf{u}\|^{1-\varrho}, \quad \varrho = 1 - \frac{1}{p}, \quad (3.5)$$

где χ_1 зависит только от $p \in [1, \infty)$. Оценим первый интеграл в правой части (3.3), применив к нему (3.4), (3.5), а затем неравенство Гёльдера и (2.6),

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_K^2 d\tau &\leq C_3(K, p) \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{2p}^2 d\tau \leq C_4(K, p) \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|^{2\varrho} \|\mathbf{u}\|^{2-2\varrho} d\tau \\ &\leq C_4(K, p) \|\varphi\|^{2-2\varrho} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|^{2\varrho} d\tau \\ &\leq C_5 \left(\int_0^t 1^p d\tau \right)^{1/p} \left(\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|^{2\varrho \cdot \frac{1}{\varrho}} d\tau \right)^\varrho \leq C_6 t^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Постоянная C_6 зависит только от $K, \|\varphi\|, p$.

Отсюда, применив (3.6), (2.29) к (3.3), получим (3.1) с $\varepsilon = 1/p$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть i одно из чисел $1, 2, \dots, s$. Пусть область Ω имеет границу равномерно класса C^3 и функция l_i удовлетворяет (1.11) и условию D, а начальная функция φ из $\overset{\circ}{\mathbf{J}}^1(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_{R_0}^\infty. \quad (3.7)$$

Тогда найдутся положительные числа $\Gamma_i > 1$, γ_i и A_3 такие, что при всех $t > 0$ для решения задачи (1.1), (1.2) справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_{R-1}^\infty} \mathbf{u}^2(t, x) dx < t A_3 \exp \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_{\infty, \Omega}^2 d\tau + \frac{\Gamma_i t}{l_i^2(R)} - \frac{2\gamma_i R}{l_i(R)} \right), \quad R \geq \frac{R_0}{q_i^2}, \quad (3.8)$$

где число R_0 достаточно велико. Постоянные Γ_i зависят только от q_i и α из неравенства (1.11), а γ_i — еще и от d_1 из неравенства (1.10), A_3 зависит только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$ и не зависит от R_0 .

Поскольку $R/l_i(R) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, то оценка (3.8) характеризует убывание решения при $x_1 \rightarrow \infty$ в области Ω_i .

Доказательство теоремы проведем с использованием нижеследующих лемм 1 и 2. Положим

$$M(t) = \sup_{x \in \Omega} \mathbf{u}^2(t, x), \quad g(t, r) = M(t) + \frac{2}{l_i^2(r)}.$$

Ввиду (3.1) имеем простое неравенство

$$\int_0^t g(\tau, r) d\tau \leq C_1 + C_2 t^\varepsilon + \frac{2t}{l_i^2(r)}. \quad (3.9)$$

Выберем оси координат так, чтобы ось Ox_1 была направлена вдоль луча s_i . Определим срезающую функцию $\eta(x)$ с носителем в Ω_r равенством

$$\eta(x) = \xi\left(\frac{x_1 - r}{l_i(r)}\right),$$

где $\xi(r)$ — непрерывная функция, равная нулю при $r < 0$, единице при $r > 1$ и линейная в оставшемся интервале. Тогда носитель градиента η лежит в $\Omega_r^{r+l_i(r)}$ и

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{1}{l_i(r)}. \quad (3.10)$$

Кроме того, при $r \geq P_i$ ввиду монотонности функции l_i справедливо неравенство

$$-\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{l_i(r)} + \frac{x_1 - r}{l_i^2(r)} l_i'(r) \geq \frac{1}{l_i(r)}, \quad x \in \omega_i(r). \quad (3.11)$$

Введем обозначения

$$\theta(t) = \exp\left(-\int_0^t M(\tau) d\tau\right)$$

и

$$H(t, r) = \theta(t) \left(\int_{\Omega_i} \eta |\nabla u(t, x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega_i} \eta u_t^2 dx d\tau \right). \quad (3.12)$$

Отметим неравенство

$$H(t, r) \leq b_5, \quad t > 0, \quad r \geq P_i, \quad (3.13)$$

вытекающее из (2.23) и (2.28), где b_5 зависит только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда найдется число $\beta > 1$ такое, что при всех $t > 0$, $r \geq \max\{R_0, P_i\}$ справедливо неравенство

$$H(t, r) \leq -\beta l_i(r) \left(H_r(t, r) + \int_0^t g(\tau, r) H_r(\tau, r) d\tau \right). \quad (3.14)$$

Здесь индекс r обозначает производную; постоянная β зависит только от d_1 из неравенства (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество F состоит из тех значений $t > 0$, для которых $\mathbf{u}_t(t, x) \in \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$. По свойству (2.28) мера дополнения $(0, \infty) \setminus F$ равна нулю. Зафиксируем одно из значений $t \in F$.

Так как $\mathbf{u}(x, t)$ есть обобщенное решение, удовлетворяющее (2.29), то оно почти всюду удовлетворяет системе (1.1). Умножим уравнение Навье–Стокса скалярно на функцию $\eta \mathbf{u}_t$ и проинтегрируем по Ω_i , получим

$$\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_t^2 \eta \, dx + \int_{\Omega_i} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \eta \mathbf{u}_t \, dx = \int_{\Omega_i} \Delta \mathbf{u} \cdot (\eta \mathbf{u}_t) \, dx - \int_{\Omega_i} \nabla p \cdot \eta \mathbf{u}_t \, dx. \quad (3.15)$$

Рассмотрим интеграл справа, используя (3.10),

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_i} \Delta \mathbf{u} \cdot (\eta \mathbf{u}_t) \, dx &= \int_{\Omega_i} \nabla \mathbf{u} : \nabla (\eta \mathbf{u}_t) \, dx \\ &= \int_{\Omega_i} \eta \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}_t \, dx + \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^2 (u_j)_t \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} \, dx \\ &= \int_{\Omega_i} \eta \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}_t \, dx + \int_{\omega_i(r)} \sum_{j=1}^2 (u_j)_t \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{1}{l_i(r)} \, dx. \end{aligned}$$

Теперь (3.15) приводится к виду

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_t^2 \eta \, dx + \int_{\Omega_i} \eta \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}_t \, dx &= - \int_{\Omega_i} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \eta \mathbf{u}_t \, dx \\ &\quad - \int_{\omega_i(r)} \left(\sum_{j=1}^2 (u_j)_t \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{1}{l_i(r)} - p(\mathbf{u}_t \cdot \nabla \eta) \right) \, dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оценим сверху слагаемые в правой части

$$\left| \int_{\Omega_i} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \eta \mathbf{u}_t \, dx \right| \leq \int_{\Omega_i} \frac{\eta}{2} (\mathbf{u}^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}_t^2) \, dx \leq \int_{\Omega_i} \frac{\eta}{2} (M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}_t^2) \, dx.$$

Далее,

$$\left| \int_{\omega_i(r)} \sum_{j=1}^2 (u_j)_t \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{1}{l_i(r)} \, dx \right| \leq \int_{\omega_i(r)} \frac{1}{2} \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{l_i^2(r)} + |\mathbf{u}_t|^2 \right) \, dx. \quad (3.17)$$

Для оценки оставшегося интеграла докажем, что $\int_{\omega_i(r)} (\mathbf{u}_t \nabla \eta) \, dx = 0$. Так как $\mathbf{u}_t(t, x) \in \mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$, то такое равенство достаточно установить для векторов $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$.

По формуле Гаусса–Остроградского будем иметь

$$0 = \int_{\Omega_i^{r_1^2}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial \Omega_i^{r_1^2}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{x_1=r_2} v_1 \, ds - \int_{x_1=r_1} v_1 \, ds.$$

Отсюда, взяв сечение $x_1 = r_2$ за пределами носителя функции $\mathbf{v}$, находим, что

$$\int_{x_1=r_1} v_1 \, ds = \int_{x_1=r_2} v_1 \, ds = 0 \quad \forall r_1 > 0.$$

Итак, доказано, что

$$\int_{\omega_i(r)} v_1 \, dx = \int_r^{r+l_i(r)} dr_1 \int_{x_1=r_1} v_1 \, ds = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\omega_i(r)} (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta) \, dx = \int_{\omega_i(r)} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{1}{l_i(r)}, 0 \right) \, dx = \frac{1}{l_i(r)} \int_{\omega_i(r)} v_1 \, dx = 0. \quad (3.18)$$

Таким образом, по (1.10) найдется вектор $\mathbf{w} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\omega_i(r))$ такой, что $\operatorname{div} \mathbf{w} = (\mathbf{u}_t \cdot \nabla \eta)$ и

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{\omega_i(r)} \leq d_1 \|\mathbf{u}_t \nabla \eta\|_{\omega_i(r)} \leq \frac{d_1}{l_i(r)} \|\mathbf{u}_t\|_{\omega_i(r)}.$$

Неравенство Фридрихса позволяет получить оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{\omega_i(r)} \leq C \|\mathbf{u}_t\|_{\omega_i(r)}.$$

Здесь постоянная C отличается от d_1 абсолютным множителем.

Теперь мы можем для оставшегося интеграла из правой части (3.16) записать следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_i(r)} p(\mathbf{u}_t \cdot \nabla \eta) \, dx \right| &= \left| \int_{\omega_i(r)} p \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx \right| = \left| \int_{\omega_i(r)} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega_i(r)} (\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \mathbf{w} \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega_i(r)} ((\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}) \, dx \right| \\ &\leq \int_{\omega_i(r)} \left(\frac{|\mathbf{u}_t|^2 + |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2}{2} + \mathbf{w}^2 + |\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}| \right) \, dx \\ &\leq \int_{\omega_i(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_t^2 + M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) + C^2 \mathbf{u}_t^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{l_i^2(r)} + |\nabla \mathbf{w}|^2 l_i^2(r) \right) \right) \, dx \\ &\leq \int_{\omega_i(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_t^2 + M(t) \nabla \mathbf{u}^2 \right) + C^2 \mathbf{u}_t^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{l_i^2(r)} + d_1^2 \mathbf{u}_t^2 \right) \right) \, dx. \end{aligned}$$

Подставим полученные оценки в (3.16)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_t^2 \eta \, dx + \int_{\Omega_i} \eta \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}_t \, dx &\leq \int_{\Omega_i} \frac{\eta}{2} (M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}_t^2) \, dx \\ &+ \int_{\omega_i(r)} \left(\frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{l_i^2(r)} + \frac{1}{2} M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta \mathbf{u}_t^2 \right) \, dx. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_t^2 \eta \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \eta |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \\ \leq \int_{\Omega_i} M(t) \eta |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx + \int_{\omega_i(r)} \left(\left(\frac{2}{l_i^2(r)} + M(t) \right) |\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta \mathbf{u}_t^2 \right) \, dx. \end{aligned}$$

Ввиду тождества $\eta \nabla \varphi \equiv 0$ при $r \geq R_0$ имеем $\int_{\Omega} \eta |\nabla \mathbf{u}(0, x)|^2 \, dx = 0$. Поэтому интегрирование по t в пределах $(0, T)$ дает неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \eta \mathbf{u}_t^2 \, dx \, dt + \int_{\Omega_i} \eta |\nabla \mathbf{u}(T, x)|^2 \, dx \leq \int_0^T \int_{\Omega_i} \eta M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt + h(T), \quad (3.19)$$

где введено обозначение

$$h(T) = h_1(T) + h_2(T) = \int_0^T \int_{\omega_i(r)} g(t, r) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt + \beta \int_0^T \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 \, dx \, dt.$$

Из (3.19) для функции

$$z(T) = \int_0^T \int_{\Omega_i} \eta M(t) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt$$

имеем дифференциальное неравенство

$$z' = M(T) \int_{\Omega_i} \eta |\nabla \mathbf{u}(T, x)|^2 \, dx \leq M(T) (z(T) + h(T)).$$

Решая его, находим, что

$$\begin{aligned} z(T) &\leq \int_0^T \exp \left(\int_t^T M(\tau) \, d\tau \right) M(t) h(t) \, dt \\ &= \int_0^T M(t) (h_1(t) + h_2(t)) \exp \left(\int_t^T M(\tau) \, d\tau \right) \, dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Интегрированием по частям легко установить равенство

$$\int_0^T M(t) h_1(t) \exp\left(\int_t^T M(\tau) d\tau\right) dt = -h_1(T) + \int_0^T h_1'(t) \exp\int_t^T M(\tau) d\tau dt.$$

Соединим это с (3.20) и подставим в (3.19), тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \eta \mathbf{u}_t^2 dx dt + \int_{\Omega} \eta |\nabla \mathbf{u}(T, x)|^2 dx \\ & \leq \int_0^T \frac{\theta(t)}{\theta(T)} (M(t) h_2(t) + h_1'(t)) dt + h_2(T). \end{aligned}$$

Умножив на $\theta(T)$ и используя обозначение (3.12), получаем

$$\begin{aligned} H(T, r) & \leq \beta \theta(T) \int_0^T \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 dx dt \\ & \quad + \int_0^T \theta(t) \left(M(t) \beta \int_0^t \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 dx dt + \int_{\omega_i(r)} g(t, r) |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right) dt \\ & \leq \beta \theta(T) \int_0^T \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 dx d\tau \\ & \quad + \int_0^T \theta(t) g(t, r) \left(\beta \int_0^t \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 dx d\tau + \int_{\omega_i(r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right) dt. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Из соотношения (3.11) следует неравенство

$$-l_i(r) \frac{\partial H(t, r)}{\partial r} \geq \theta(t) \left(\int_{\omega_i(r)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + \int_0^t \int_{\omega_i(r)} \mathbf{u}_t^2 dx dt \right).$$

Поэтому утверждение леммы вытекает из (3.21).

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\beta > 1$ — число из леммы 1. Тогда найдется число A_3 такое, что при всех $r_0 \geq \max\{R_0, P_i\}$, $t > 0$, для решения задачи (1.1), (1.2) справедливо неравенство

$$H(t, r) \leq A_3 \exp\left(\frac{2t}{l_i^2(r_0)} - \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{4\beta l_i(\rho)} + \int_0^t \|\mathbf{u}(t)\|_{\infty, \Omega}^2 d\tau\right), \quad r \geq r_0, \quad (3.22)$$

где A_3 зависит только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое число $r_0 \geq \max\{R_0, P_i\}$. Пусть функция $y(\zeta)$ является решением задачи Коши $r' = \beta l_i(r)$, $r(0) = r_0$. Положим $h(t, \zeta) = H(t, y(\zeta))$. Функция $g(t, r)$ монотонно не возрастает по r . Поэтому, фиксируя аргумент этой функции $r = r_0$, неравенство (3.14) можно переписать в виде

$$h(t, \zeta) \leq -h_\zeta(t, \zeta) - \int_0^t g(\tau, r_0) h_\zeta(\tau, \zeta) d\tau, \quad \zeta \geq 0.$$

Интегрируя последнее неравенство по ζ , устанавливаем, что

$$\int_\zeta^\infty h(t, \rho) d\rho \leq h(t, \zeta) + \int_0^t g(\tau, r_0) h(\tau, \zeta) d\tau, \quad \zeta \geq 0. \quad (3.23)$$

Продолжая интегрирование, индукцией по n получаем неравенство

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} h(t, \zeta) d\zeta < \sum_{j=0}^n C_n^j (G^j h)(t, 0), \quad (3.24)$$

где через G обозначен интегральный оператор

$$(Gh)(t, \zeta) = \int_0^t g(\tau, r_0) h(\tau, \zeta) d\tau,$$

C_n^j — биномиальные коэффициенты.

Пользуясь неотрицательностью функции h и ее монотонным невозрастанием по второму аргументу, можем записать

$$\int_{\zeta/2}^\zeta \rho^{n-1} h(t, \rho) d\rho \geq \int_{\zeta/2}^\zeta \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{n-1} h(t, \zeta) d\rho = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n h(t, \zeta). \quad (3.25)$$

Биномиальные коэффициенты не превосходят 2^n , и если оценить сверху функцию h числом b_5 из (3.13), то правая часть (3.24) не будет превосходить числа

$$2^n b_5 \exp\left(\int_0^t g(\tau, r_0) d\tau\right).$$

Из (3.25) и последней оценки будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n h(t, \zeta) &\leq \int_{\zeta/2}^\zeta \frac{\rho^{n-1} h(t, \rho) d\rho}{(n-1)!} \\ &< \int_0^\infty \frac{\zeta^{n-1} h(t, \zeta) ds}{(n-1)!} \leq 2^n b_5 \exp\left(\int_0^t g(\tau, r_0) d\tau\right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$h(t, \zeta) \leq \left(\frac{2}{\zeta}\right)^n (n-1)! 2^n b_5 \exp\left(\int_0^t g(\tau, r_0) d\tau\right).$$

Применив теперь формулу Стирлинга, получаем следствие неравенства (3.24)

$$h(t, \zeta) \leq b_5 \left(\frac{4}{\zeta}\right)^n \frac{n!}{n} \exp\left(\int_0^t g(\tau, r_0) d\tau\right) \leq k_1 \left(\frac{4n}{\zeta e}\right)^n \exp\left(\int_0^t g(\tau, r_0) d\tau\right).$$

Подставим $n = [\zeta/4] \geq \zeta/4 - 1$

$$h(t, \zeta) \leq k_1 \exp\left(\int_0^t M(\tau) d\tau + \frac{2t}{l_i^2(r_0)} + 1 - \frac{\zeta}{4}\right), \quad \zeta \geq 0.$$

Возвращаясь к переменной r , будем иметь (3.22).

Лемма 2 доказана.

Покажем, что при r , больших некоторого числа D_i , выполняется неравенство

$$1 + l_i(r) \leq r(q_i^{-1} - 1), \quad r \geq D_i. \quad (3.26)$$

Пусть n – натуральное число такое, что $q_i P_i < q_i^n r \leq P_i$. Тогда по (1.11)

$$l_i(r) < q_i^{-n\alpha} l_i(q_i^n r) < \left(\frac{r}{q_i P_i}\right)^\alpha l_i(P_i) = C_i r^\alpha. \quad (3.27)$$

Отсюда, поскольку $\alpha \in (0, 1)$, следует (3.26).

Выведем из (3.22) необходимое нам неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega_{iR-1}^\infty} \mathbf{u}_t^2(t, x) dx dt \leq A_3 \exp\left(\frac{\Gamma_i T}{l_i^2(R)} - \frac{\gamma_i R}{l_i(R)} + 2 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_{\infty, \Omega}^2 d\tau\right), \quad (3.28)$$

справедливое при $R \geq \max\{R_0, P_i, D_i\}/q_i^2$ для всех $T > 0$. Для этого положим $R = r_0/q_i^2$, $r = q_i R$. Пользуясь (3.26), заключаем, что $R \geq 1 + l_i(r) + r$ или $R - 1 \geq r + l_i(r)$. Тогда $\eta(x, r) = 1$ при $x_1 > R - 1$, поэтому в силу (3.12) получаем

$$\int_0^T \int_{\Omega_{iR-1}^\infty} \mathbf{u}_t^2(t, x) dx dt \leq H(T, r) \exp\left(\int_0^T M(t) dt\right). \quad (3.29)$$

Из монотонного неубывания функций $l_i(r)$ и (1.11) следуют неравенства

$$l_i(r_0) > q_i^{2\alpha} l_i(R), \quad \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{4\beta l_i(\rho)} \geq \gamma_i \frac{R}{l_i(R)}, \quad r_0 \geq P_i.$$

Теперь, соединяя (3.29) с (3.22), получаем оценку (3.28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $R_0 \geq \max\{P_i, D_i\}$. С учетом начального условия и формулы Ньютона–Лейбница можно записать неравенства

$$|u_j(t, x)| \leq \int_0^t \left| \frac{\partial u_j(\tau, x)}{\partial t} \right| d\tau, \quad j = 1, 2,$$

справедливые для п.в. $x \in \Omega_{R_0}^\infty$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\int_{\Omega_{R-1}^\infty} \mathbf{u}^2(t, x) dx \leq t \int_0^t \int_{\Omega_{R-1}^\infty} \mathbf{u}_t^2 dx d\tau, \quad R \geq R_0 + 1.$$

Теперь (3.8) становится простым следствием (3.28).

3.2. Доказательство теоремы 1. Проведем его сначала для начальной функции, удовлетворяющей условию (3.7) для $i = 1, 2, \dots, s$. Технически более удобно вместо функций $r_i(t)$, определенных во введении, использовать функции $R_i(t)$, определяемые равенствами

$$t = \frac{\gamma_i}{2\Gamma_i} R_i l_i(R_i). \quad (3.30)$$

Отметим, что $r_i(t) < R_i(t)$ при $\gamma_i < 2\Gamma_i$ и $R_i(t) < 2\Gamma_i r_i(t)/\gamma_i$. Положив $\varkappa = \min_{i \leq s} \{\gamma_i/(2\Gamma_i)\}$, можем записать неравенства $R_i(t) < r_i(t)/\varkappa$ и $\lambda_i(R_i(t)) \geq \lambda_i(r_i(t)/\varkappa)$ ввиду монотонного невозрастания функций λ_i . Очевидно,

$$\frac{t}{l_i^2(r_i(t))} > \frac{t}{l_i^2(R_i(t))}.$$

С другой стороны, по (1.12) и (3.30)

$$\frac{t}{l_i^2(r_i(t))} = \frac{r_i^2(t)}{t} < \frac{R_i^2(t)}{t} = \frac{4\Gamma_i^2 t}{\gamma_i^2 l_i^2(R_i(t))}.$$

Итак, выполнены неравенства

$$\frac{t}{l_i^2(R_i(t))} \leq \frac{t}{l_i^2(r_i(t))} \leq \frac{t}{\varkappa^2 l_i^2(R_i(t))}. \quad (3.31)$$

Установим теперь, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-\varepsilon}}{l_i^2(r_i(t))} = \infty \quad (3.32)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. По (3.27) имеем $t = r_i(t) l_i(r_i(t)) < C_i r_i^{1+\alpha}(t)$ и тогда

$$r_i(t) > \left(\frac{t}{C_i} \right)^{1/(1+\alpha)}.$$

Таким образом, по (1.12)

$$\frac{t^{1-\varepsilon}}{l_i^2(r_i(t))} = \frac{r_i^2(t)}{t^{1+\varepsilon}} > \frac{(t/C_i)^{2/(1+\alpha)}}{t^{1+\varepsilon}}.$$

Откуда сразу следует существование подходящего для (3.32) числа $\varepsilon > 0$. Зафиксируем одно из таких чисел ε .

Выберем большое число T так, чтобы $\forall t \geq T$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} R_i(t) &> \frac{\max\{R_0, P_i, D_i\}}{q_i^2}, \quad t > R_i(t), \\ \min_{i \leq s} \lambda_i(R_i(t)) &< \mu, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{\Gamma_i t}{l_i^2(R_i(t))} > C_2 t^\varepsilon. \quad (3.34)$$

Здесь постоянная R_0 — из условия (3.7), μ — из (1.9) и C_2 — из (3.1). Зафиксируем произвольное $t \geq T$.

Неравенство (3.8), пользуясь (3.1) и выбором T , можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{R_i-1}^\infty} \mathbf{u}^2(\tau, x) dx &\leq \tau A_4 \exp\left(C_2 \tau^\varepsilon + \frac{\Gamma_i \tau}{l_i^2(R_i)} - 2\gamma_i \frac{R_i}{l_i(R_i)}\right) \\ &\leq t A_4 \exp\left(\frac{2\Gamma_i t}{l_i^2(R_i)} - 2\gamma_i \frac{R_i}{l_i(R_i)}\right) \end{aligned}$$

$\forall \tau \leq t$. Здесь и далее $R_i = R_i(t)$. Заметим, что из (3.30) следует равенство

$$\frac{2\Gamma_i t}{l_i^2(R_i)} = \gamma_i \frac{R_i}{l_i(R_i)}. \quad (3.35)$$

Поэтому

$$\int_{\Omega_{R_i-1}^\infty} \mathbf{u}^2(\tau, x) dx \leq t A_4 \exp\left(-\gamma_i \frac{R_i}{l_i(R_i)}\right) \equiv \delta_i \quad \forall \tau \leq t. \quad (3.36)$$

Здесь A_4 и далее A_5 зависят только от (d, b) , $\|\varphi\|$, $\|\nabla \varphi\|$. Возьмем функцию $\xi(r)$, равную 1 при $r < R - 1$, нулю при $r > R$ и линейную в оставшемся интервале, тогда для произвольной функции $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_i(R_i) \int_{\Omega_{R_i-1}} \mathbf{v}^2(x) dx &\leq \lambda_i(R_i) \int_{\Omega^{R_i}} \xi^2(x_1) \mathbf{v}^2(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega^{R_i}} |\nabla(\xi \mathbf{v})|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega^{R_i}} \xi^2 |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + 2 \int_{\Omega_{R_i-1}^{R_i}} \mathbf{v}^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + 2\delta_i, \quad \tau \in (0, t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При помощи (3.36), (3.37), (3.33), (1.9) и тождества (2.6), записанного для решения $\mathbf{u}$, для абсолютно непрерывной функции $E(\tau) = \|\mathbf{u}(\tau)\|^2$ выведем дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned} \min_i \lambda_i(R_i) \left(E(\tau) - \sum_{i=1}^s \delta_i \right) &\leq \mu \int_Q \mathbf{u}^2(\tau, x) dx + \sum_{i=0}^s \lambda_i(R_i) \int_{\Omega_i^{R_i-1}} \mathbf{u}^2(\tau, x) dx \\ &\leq \int_Q |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + 2 \sum_{i=1}^s \int_{\Omega_i} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx + 2 \sum_{i=1}^s \delta_i \leq 2 \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|^2 + 2 \sum_{i=1}^s \delta_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^s \delta_i - \frac{d}{d\tau} E(\tau), \quad \tau \in [0, t]. \end{aligned}$$

Для монотонно невозрастающей функции $E(\tau)$ получаем оценку

$$E(t) \leq \left(1 + \frac{2}{\min_i \lambda_i(R_i)} \right) \sum_{i=1}^s \delta_i + E(0) \exp(-t \min_i \lambda_i(R_i)). \quad (3.38)$$

Поскольку поперечный размер области Ω_i^r не превышает r , то из неравенства Фридрихса заключаем, что $\lambda_i(r) \geq r^{-2}$. В силу выбора T имеем $R_i(t) < t$, поэтому $\lambda_i(R_i(t)) \geq t^{-2}$. Теперь (3.38) принимает вид

$$E(t) \leq (1 + 2t^2) \sum_{i=1}^s \delta_i + E(0) \exp(-t \min_i \lambda_i(R_i)).$$

С учетом (3.35) и обозначения (3.36) получаем

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq s(1 + 2t^2)tA_4 \exp\left(\frac{-2\Gamma_i t}{\max_i l_i^2(R_i)}\right) + E(0) \exp(-t \min_i \lambda_i(R_i)).$$

Последнее вследствие соотношений (3.34), (3.31) и $\Gamma_i > 1$ можно записать в виде

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq A_5 \exp\left(-t \min_i \left\{ \lambda_i\left(\frac{r_i(t)}{\varkappa}\right), \varkappa^2 l_i^{-2}(r_i(t)) \right\}\right). \quad (3.39)$$

Отсюда и из (2.42) следует справедливость (1.15) при $t \geq T$ для решений задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией φ из $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$, удовлетворяющей условию (3.7) для $i = 1, 2, \dots, s$. Отметим, что давление и производные функции $\mathbf{u}$ благодаря неравенствам (2.41), (2.40) также удовлетворяют оценке вида (1.16).

Докажем теперь теорему для начальной функции φ , удовлетворяющей условию (1.14). Для этого выберем достаточно большое r и представим функцию φ в виде суммы соленоидальных функций $\varphi = \varphi_1 + \sum_{i=1}^s \psi_i$ таких, что $\varphi_1(x) = 0$ при $x \in \bigcup_{i=1}^s \Omega_i^r$, $\|\varphi_1\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)} \leq A_6 \|\varphi\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$, $\|\psi_i\| \leq A_6 e^{-c(q_i r)^\delta}$, где A_6 зависит только от d_1 . Для этого зафиксируем число i из набора $\{1, 2, \dots, s\}$ и построим функцию ψ_i . Пусть r_i^* такое число, что $r_i^* + l_i(r_i^*) = r$ и $\eta(x, r) =$

$\xi((x_1 - r_i^*)/l_i(r_i^*))$. Тогда соленоидальность вектора $\eta(x)\varphi(x)$ будет нарушена только в области $\omega_i(r_i^*)$, причем

$$\operatorname{div} \eta\varphi = (\varphi \cdot \nabla \eta), \quad x \in \omega_i(r_i^*).$$

Пользуясь соотношением (1.14), нетрудно установить соотношение вида (3.18) для функции $(\varphi \cdot \nabla \eta)$. Поэтому найдется вектор $\mathbf{w}_i(x, r) \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\omega_i(r_i^*))$ такой, что $\operatorname{div} \mathbf{w}_i = (\varphi \cdot \nabla \eta)$ и

$$\|\nabla \mathbf{w}_i\|_{\omega_i(r_i^*)} \leq d_1 \|\varphi \cdot \nabla \eta\|_{\omega_i(r_i^*)} \leq \frac{d_1}{l_i(r_i^*)} \|\varphi\|_{\omega_i(r_i^*)}. \quad (3.40)$$

Неравенство Фридрихса позволяет получить оценку

$$\|\mathbf{w}_i\|_{\omega_i(r_i^*)} \leq d_1 \|\varphi\|_{\omega_i(r_i^*)} \leq d_1 \exp(-c(r_i^*)^\delta). \quad (3.41)$$

Остается положить $\psi_i(x, r) = \eta(x, r)\varphi(x) - \mathbf{w}_i(x, r)$ и воспользоваться неравенством (3.26) $r = r_i^* + l(r_i^*) \leq r_i^*/q_i$.

Покажем теперь, что $\psi_i \in \mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, s$. Хорошо известно, что в случае ограниченной области с липшицевой границей всякая соленоидальная функция из пространства $\mathring{\mathbf{W}}_2^1$ принадлежит также пространству $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$. Отсюда следует, что если область Ω не ограничена, но соленоидальная функция $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1$ имеет ограниченный носитель, то $\mathbf{v}$ также принадлежит пространству $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$. Кроме того, из неравенств (3.40), (3.41) следует, что $\mathbf{w}_i(x, R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$. Следовательно, $\psi_i(x, R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$. Векторы $\psi_i(x, r) - \psi_i(x, R)$ соленоидальны и имеют ограниченный носитель, поэтому принадлежат пространству $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$. Функция $\psi_i(x, r)$ как их предел при $R \rightarrow \infty$ также принадлежит этому пространству. Поскольку начальная функция является пределом финитных соленоидальных функций, то она принадлежит пространству $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$. Следовательно, функция φ_1 также принадлежит пространству $\mathring{\mathbf{J}}^1(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{u}(t, x)$ — решение задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией φ с условием (1.14), а $\mathbf{u}^1(t, x)$ — решение задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией φ_1 . Покажем, что величина $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^1\|$ мала.

Вычтем из тождества (2.1) для $\mathbf{u}$ такое же тождество для $\mathbf{u}^1$. В полученном равенстве положим

$$\Phi = \begin{cases} \mathbf{u} - \mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{v} & \text{для } 0 \leq t \leq t_1; \\ 0 & \text{для } t > t_1, \end{cases}$$

в результате чего будем иметь

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_t \mathbf{v} + \mathbf{v}_{x_k} \mathbf{v}_{x_k} - (u_k \mathbf{v} + v_k \mathbf{u}^1) \mathbf{v}_{x_k}) dx dt = 0.$$

Это равенство преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}(x, t)\|^2 \Big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} v_k \mathbf{u}^1 \mathbf{v}_{x_k} dx dt = 0, \quad (3.42)$$

если учесть, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ [24; гл. VI, § 1, равенство (5)]. Введем обозначение $\sigma(t) = \|\nabla \mathbf{u}^1(t)\|$ и оценим последний интеграл в (3.42)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v_k \mathbf{u}^1 \mathbf{v}_{x_k} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} v_k \mathbf{u}_{x_k}^1 \mathbf{v} dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^1|^2 dx \int_{\Omega} \mathbf{v}^4 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} \sigma(t) \left(\sum_j \int_{\Omega} v_j^4 dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \sigma(t) \sum_j \left(2 \int_{\Omega} v_j^2 dx \int_{\Omega} \nabla v_j^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \sigma(t) \|\mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}\| \leq \sigma^2(t) \|\mathbf{v}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Подставим эту оценку в (3.42)

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}(t_1)\|^2 + \int_0^{t_1} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \|\psi_i\| + \int_0^{t_1} (\sigma^2(t) \|\mathbf{v}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|^2) dt.$$

Отсюда,

$$\|\mathbf{v}(t_1)\|^2 \leq A_3 s \exp(-c(r \min_i q_i)^\delta) + 2 \int_0^{t_1} \sigma^2(t) \|\mathbf{v}\|^2 dt.$$

Обозначив правую часть через $y(t_1)$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{dy(t_1)}{dt_1} \leq 2\sigma^2(t_1)y(t_1).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$y(t) \leq y(0) e^{2 \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}.$$

Из тождества вида (2.6) для функции $\mathbf{u}^1$ следует оценка

$$\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \leq \|\varphi_1\|^2 \leq A_7 \|\varphi\|^2,$$

причем можно взять $A_7 = 2$ при достаточно больших r .

Следовательно, можно записать

$$y(t) \leq A_8 \exp(-c(r \min_i q_i)^\delta).$$

Зафиксируем $t > T$. Тогда при $r = \min_i \{r_i(t) q_i^2\}$ выполнено условие (3.7) с $R_0 = r$, поэтому норму $\|\mathbf{u}^1\|$ можно оценить по (3.39)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\| &\leq \|\mathbf{u}^1\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^1\| \\ &\leq 2\|\varphi_1\| \exp\left(-t \min_i \left\{ \lambda_i \left(\frac{r_i(t)}{\varkappa} \right), \varkappa^2 l_i^{-2}(r_i(t)) \right\}\right) \\ &\quad + A_8 \exp(-c(\min_i q_i^3 \min_i r_i(t))^\delta). \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{c} = c \min_i q_i^{3\delta}$. Заметим, что $\min_i r_i(t)$ и $\max_i l_i(r_i(t))$ достигается при одном и том же индексе j ввиду равенства $t = r_i l_i(r_i)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa^2 t}{\max_i l_i^2(r_i(t))} - \tilde{c} \min_i r_i^\delta(t) &= \frac{\varkappa^2 t}{l_j^2(r_j(t))} - \tilde{c} r_j^\delta(t) = \frac{\varkappa^2 r_j(t)}{l_j(r_j(t))} - \tilde{c} r_j^\delta(t) \\ &= r_j^\delta(t) \left(\frac{\varkappa^2 r_j^{1-\delta}(t)}{l_j(r_j(t))} - \tilde{c} \right) < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из (1.13) при достаточно больших t .

Отсюда следует справедливость теоремы 1.

Рассмотрим случай, когда области $\omega_i(r)$ равномерно звездны. Зафиксируем некоторое i . Из определения равномерной звездности следует

$$\text{diam } \omega_i(r) \leq \tilde{d} \text{diam } B_i \leq \tilde{d} l_i(r),$$

где постоянная $\tilde{d}$ не зависит от $i = 1, 2, \dots, k$ и $r \geq P_i$. Поэтому справедливо неравенство Фридрикса

$$\int_{\omega_i^r} \mathbf{u}^2 dx \leq \tilde{d}^2 l_i^2(r) \int_{\omega_i^r} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx$$

для функций $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)$. Покрывая область Ω_i^R областями вида $\omega_i(r)$, устанавливаем неравенство

$$\int_{\Omega_i^R} \mathbf{u}^2 dx \leq \tilde{d}^2 l_i^2(R) \int_{\Omega_i^R} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.$$

Тогда справедливы оценки $\lambda_i(R) \geq \tilde{d}^{-2} l_i^{-2}(R)$.

Отсюда и из (1.15) следует (1.17).

Список литературы

1. Kato T. Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equations in R^m , with applications to weak solutions // Math. Z. 1984. V. 187. № 4. P. 471–480.
2. Masuda K. Weak solutions of the Navier–Stokes equations // Tohoku Math. J. (2). 1984. V. 37. P. 623–646.
3. Schonbek M. E. L_2 decay for weak solutions of the Navier–Stokes equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 209–222.
4. Kajikiya R., Miyakawa T. On L_2 decay of weak solutions of the Navier–Stokes equations in R_n // Math. Z. 1986. V. 192. P. 135–148.
5. Wiegner M. Decay results for weak solutions of the Navier–Stokes equations // J. London Math. Soc. (2). 1987. V. 35. P. 303–313.
6. Maremonty P. On the asymptotic behaviour of the L^2 norm of suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations in three-dimensional exterior domains // Comm. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 385–400.
7. Borchers S., Miyakawa T. Algebraic L_2 decay for Navier–Stokes flows in exterior domains // Acta Math. 1990. V. 165. P. 189–227.
8. Мукминов Ф. Х. О скорости убывания сильного решения первой смешанной задачи для системы уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 4. С. 149–160.

9. Heywood J. G. The Navier–Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions // *Indiana Univ. Math. J.* 1980. V. 29. P. 639–681.
10. Мукминов Ф. Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // *Матем. сб.* 1980. Т. 111(153). № 4. С. 503–521.
11. Боговский М. Е., Масленникова В. Н. О системах Соболева с тремя пространственными переменными // *Труды сем. им. С. Л. Соболева.* № 2. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976. С. 49–69.
12. Глушко А. В. Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса с нулевой правой частью // *Труды сем. им. С. Л. Соболева.* № 1. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1981. С. 5–33.
13. Глушко А. В., Масленникова В. Н. Теоремы о локализации тауберовского типа и скорость затухания решения системы гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости // *Труды МИАН.* 1988. Т. 181. С. 156–187.
14. Масленникова В. Н. О скорости затухания вихря в вязкой жидкости // *Труды МИАН.* 1973. Т. 126. С. 46–72.
15. Масленникова В. Н. О скорости убывания при большом времени решения системы Соболева с учетом вязкости // *Матем. сб.* 1973. Т. 92(134). № 4. С. 589–610.
16. Петунин И. М. Об асимптотической оценке решения первой краевой задачи в полупространстве для уравнений движения вязкой вращающейся жидкости // *Дифференциальные уравнения и функциональный анализ.* М.: Изд-во УДН, 1983. С. 64–85.
17. Ладженская О. А. Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // *Докл. АН СССР.* 1958. Т. 123. № 3. С. 427–429.
18. Lions J. L., Prodi G. Un theoreme d'existence et unicite dans les equations de Navier–Stokes en dimension 2 // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* 1959. V. 248. P. 3519–3521.
19. Paolo Maremonti. Some results on the asymptotic behavior of Hopf weak solutions to the Navier–Stokes equations in unbounded domains // *Math. Z.* 1992. V. 210. P. 1–22.
20. Мукминов Ф. Х. О затухании плоского течения вязкой несжимаемой жидкости в неограниченной области // *Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и их приложения.* III. Уфа: Институт математики с ВЦ РАН, 1996. С. 122–130.
21. Ладженская О. А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // *Записки научн. сем. ЛОМИ.* 1976. Т. 59. С. 81–116.
22. Боговский М. Е. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // *Труды сем. им. С. Л. Соболева.* № 1. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1980. С. 5–40.
23. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
24. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
25. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.