Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 115–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:16:26

УДК 517.5

И. И. Шарапудинов

Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства

В статье вводятся новые (смешанные) ряды по ультрасферическим полиномам $P_n^{\alpha, \alpha}(x)$. Принципиальное отличие смешанного ряда по полиномам $P_n^{\alpha, \alpha}(x)$ от ряда Фурье по этим же полиномам состоит в том, что смешанный ряд составляется из членов вида $\frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, где $1 \leq r$ – целое, $f_{r,k}^\alpha$ – k -й коэффициент Фурье производной $f^{(r)}(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$. Показано, что частичные суммы $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ смешанного ряда по полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$ выгодно отличаются от сумм Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ по тем же полиномам по своим аппроксимативным свойствам на классах дифференцируемых и аналитических функций, а также на классах функций переменной гладкости. В частности, $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ могут быть использованы для одновременного приближения функции $f(x)$ и ее производных до $(r-1)$ -го порядка, тогда как $S_n^\alpha(f, x)$ для этой цели не подходят.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Нам понадобятся некоторые свойства полиномов Якоби, которые мы определим с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\kappa(x) (1-x^2)^n), \quad (1.1)$$

где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, α, β – произвольные действительные числа. В случае $\alpha = \beta$ мы получим ультрасферические полиномы $P_n^{\alpha, \alpha}(x)$, которые при $\alpha > -1$ образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$ с весом $\kappa(x) = (1-x^2)^\alpha$. Более точно,

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \alpha}(x) P_m^{\alpha, \alpha}(x) \kappa(x) dx = h_n^\alpha \delta_{nm}, \quad (1.2)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)2^{2\alpha+1}}{n! \Gamma(n+2\alpha+1)(2n+2\alpha+1)} \asymp \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00037 а).

Отметим, что полиномы Якоби $P_n^{\alpha, \beta}(x)$, $n = 0, 1, \dots$, при $\min\{\alpha, \beta\} < -1$ не являются ортогональными относительно веса $\varkappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В частности, полиномы $P_k^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, при $\alpha \leq r-1$ не обладают свойством ортогональности, но тем не менее введенные здесь ряды по полиномам $P_k^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, которые мы называем смешанными рядами, ассоциированными с системой $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, в отличие от классических рядов Фурье по этой системе оказались весьма удобным инструментом приближения гладких и аналитических функций и их производных. Дело в том, что ряды Фурье по ортогональным полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, не могут быть использованы для одновременного приближения функций и их производных, если приближаемая функция не обладает достаточной гладкостью. Но даже высокая гладкость функции f на $[-1, 1]$ не обеспечивает хорошее приближение производной $f^{(r)}(x)$ посредством $(S_n^\alpha(f, x))^{(r)}$, где $S_n^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(x)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(x) \quad (1.4)$$

функции f , заданной на $[-1, 1]$, по полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, $k = 0, 1, \dots$. В самом деле нетрудно заметить, что

$$(S_n^\alpha(f, x))^{(r)} = S_{n-r}^{\alpha+r}(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^{n-r} f_{r,k}^{\alpha+r} P_k^{\alpha+r, \alpha+r}(x), \quad (1.5)$$

где $S_{n-r}^{\alpha+r}(f^{(r)}, x)$ — частичная сумма порядка $n-r$ ряда Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha+r, \alpha+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$. С другой стороны уже при $\alpha + r > -\frac{1}{2}$ приближение функции $g \in C[-1, 1]$, доставляемое операторами $S_k^{\alpha+r} = S_k^{\alpha+r}(g)$, вообще говоря в $k^{\alpha+r+1/2}$ раз хуже по порядку (при $k \rightarrow \infty$), чем наилучшее приближение $E_k(g)$ функции g на $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени k (см. [1]–[5]). Следует особо отметить, что этот существенный недостаток присущ суммам Фурье–Якоби $S_n^\alpha(f, x)$ с произвольным $\alpha > -1$, включая суммы Фурье–Чебышёва $S_n^{-1/2}(f, x)$ по полиномам Чебышёва первого рода $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $k = 0, 1, \dots$. Основной причиной такого поведения производных сумм Фурье–Якоби $S_n^\alpha(f, x)$ служит тот факт, что ортонормированные полиномы Якоби $(h_k^{\alpha+r})^{-1/2} P_k^{\alpha+r, \alpha+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, фигурирующие в равенстве (1.5), вблизи точек -1 и 1 имеют порядок роста при $k \rightarrow \infty$ равный $k^{\alpha+r+1/2}$. Это побудило нас конструировать ряды, подобные рядам Фурье, по неортогональным полиномам $P_k^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, которые с точки зрения теории равномерного приближения функций на $[-1, 1]$ обладают значительно лучшими (по сравнению с полиномами $P_k^{\alpha+r, \alpha+r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$) асимптотическими свойствами вблизи точек $-1, 1$.

Предложенные в настоящей работе ряды по полиномам $P_k^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, обладают столь же простой конструкцией, что и ряды Фурье по ортогональным полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, но существенно отличаются от них лучшими аппроксимативными свойствами. Интересно отметить, что частичная сумма $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ построенного ряда отличается от суммы Фурье $S_n^\alpha(f, x)$ присутствием лишь $2r$ новых слагаемых вида $a_k P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, $k = n+1, \dots, n+2r$, и тем не менее

операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ обладают значительно лучшими чем $S_n^\alpha(f)$ аппроксимативными свойствами для гладких и аналитических функций, заданных на $[-1, 1]$.

Конструкция предлагаемых здесь рядов основывается на разложении r -й производной $f^{(r)}$ функции f в ряд по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$ и последующем r -кратном интегрировании этого разложения. В результате если, например, $\alpha > -1$ не является целым или полуцелым, то получается равенство вида

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + A_{r-1}^\alpha(f, x) + \mathcal{F}_r^\alpha(f, x), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{r-1}(f, x) &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (1+x)^\nu, \\ A_{r-1}^\alpha(f, x) &= - \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{(-2)^{r-\nu}}{\Gamma(\alpha-r+\nu+1)\nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]}} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!} \right) (1+x)^\nu, \\ \mathcal{F}_r^\alpha(f, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x), \end{aligned}$$

а $a^{[0]} = 1$, $a^{[j]} = a(a-1) \cdots (a-j+1)$, $f_{r,k}^\alpha$, $k = 0, 1, \dots$, — коэффициенты Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$. Если α представляет собой целое или полуцелое число, то также имеют место соответствующие формулы, аналогичные (1.6) (см. (3.35), (3.36) и (3.40)). При этом следует отметить, что в случае $\alpha = 0$ подобные ряды были введены и исследованы в работе [6].

Для обозначения правой части равенства (1.6) мы будем употреблять термин “смешанный ряд”. Этим же термином мы будем обозначать ряд $\mathcal{F}_r^\alpha(f, x)$, фигурирующий в (1.6). Частичные суммы смешанного ряда мы будем обозначать через $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$, точнее, положим

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = Q_{r-1}(f, x) + A_{r-1}^\alpha(f, x) + \sum_{k=0}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x).$$

Это — полином степени $n+2r$. Основная цель настоящей работы состоит в исследовании аппроксимативных свойств полиномов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ на классах гладких, аналитических и кусочно-гладких функций.

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Здесь приводятся некоторые хорошо известные свойства полиномов Якоби [7], [8] и доказываются две леммы. Нам понадобятся следующее:
производные

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (2.1)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r, \beta+r}(x), \quad (2.2)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_{n+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) = \frac{(n + 2\alpha)^{[r]}}{2^r} P_n^{\alpha, \alpha}(x), \quad (2.3)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1) \cdots (a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[\nu]} = a(a-1) \cdots (a-\nu+1)$;
симметрия

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x); \quad (2.4)$$

частное значение

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}; \quad (2.5)$$

весовая оценка ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \alpha}(x)| \leq c(\alpha) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2}; \quad (2.6)$$

равенства ($P_{-1}^{\gamma, \gamma}(x) = 0$)

$$P_n^{a, a}(x) = \frac{n+2a+2}{2(2n+2a+1)} \left(\frac{n+2a+1}{n+a+1} P_n^{a+1, a+1}(x) - \frac{n+a}{n+2a+2} P_{n-2}^{a+1, a+1}(x) \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{2n+2\alpha+1}{2} (1-x^2) P_{n-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(x) = (n+\alpha) P_{n-1}^{\alpha, \alpha}(x) - \frac{n(n+1)}{n+\alpha+1} P_{n+1}^{\alpha, \alpha}(x), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{a, a}(x)}{P_n^{a, a}(1)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!(\alpha+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-\alpha)_j}{(n-2j)! (2j)! (a+1)_{n-2j} (n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(1)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $[b]$ — целая часть числа b .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha > -1$, k, r — целые, $r \geq 1$, $k \geq r+1$. Тогда

$$P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x),$$

где

$$\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(r, k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (2.9). Поскольку при $j \geq r+1$ $(a-\alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (2.9) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x),$$

где с учетом (2.5)

$$\begin{aligned}
 \lambda_j^\alpha &= \frac{P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(1)} \frac{(k+r)!(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!(2j)!(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \\
 &\quad \times \frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} \\
 &= \frac{(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!} \\
 &\quad \times \frac{(\alpha-r+1)_{k+r}}{(\alpha-r+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j} \\
 &= \frac{(-1)^j(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}(1/2)_j r^{[j]}(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k+r-2j+\alpha+3/2)_j(2j)!}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 2.1 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, λ_j^α и $P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α , то утверждение леммы 2.1 вытекает из уже доказанного случая.

ЛЕММА 2.2. Для чисел $\lambda_j^\alpha = \lambda_j^\alpha(k, r)$, определенных равенством (2.10), имеет место оценка

$$|\lambda_j^\alpha(k, r)| \leq c(\alpha, r).$$

Здесь и далее $c(a)$, $c(a, b)$, $c(a, b, \dots, c)$ – положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \leq j \leq r$, то

$$\frac{(\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} \leq c(\alpha, r).$$

С другой стороны в силу формулы Стирлинга

$$\begin{aligned}
 \frac{(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}} &= \frac{\Gamma(k+r-2j+2\alpha+1)\Gamma(2k-2j+2\alpha+1)}{\Gamma(k-r+2\alpha+1)\Gamma(2k+2r-4j+2\alpha+1)} \\
 &\leq c(\alpha, r).
 \end{aligned}$$

Сопоставляя эти оценки, приходим к утверждению леммы 2.2.

Далее нам понадобятся еще следующие равенства:

$$(1-x^2)^\alpha P_n^{\alpha, \alpha}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} ((1-x^2)^{m+\alpha} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\alpha}(x)); \quad (2.11)$$

$$\binom{n}{l} P_n^{-l, \beta}(x) = \binom{n+\beta}{l} \left(\frac{x-1}{2}\right)^l P_{n-l}^{l, \beta}(x), \quad 1 \leq l \leq n. \quad (2.12)$$

§ 3. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам

Здесь мы покажем конструкцию смешанных рядов, ассоциированных с ультрасферическими полиномами $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, при $-1 < \alpha < 1$. Приходится отдельно рассматривать четыре случая: $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$. Мы начнем со случая $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

3.1. Смешанные ряды, ассоциированные с полиномами $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, когда $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $r-1$ раз на $[-1, 1]$, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha |f^{(r)}(x)| dx < \infty. \quad (3.1)$$

Тогда при $\alpha > -1$ мы можем определить коэффициенты

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha f^{(r)}(x) P_k^{\alpha, \alpha}(x) dx \quad (3.2)$$

и рассмотреть ряд Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(x). \quad (3.3)$$

Запишем формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt, \quad (3.4)$$

где

$$Q_{r-1}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (1+x)^\nu$$

— полином Тейлора, и выполним формальную подстановку в (3.4) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда (3.3). Если эти операции законны, то мы придем к следующему равенству:

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^\alpha \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha, \alpha}(t) dt. \quad (3.5)$$

Если $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, то $(k+2\alpha)^{[r]} \neq 0$, поэтому из (2.3) выводим

$$P_k^{\alpha, \alpha}(t) = \frac{2^r}{(k+2\alpha)^{[r]}} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))^{(r)}, \quad (3.6)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} P_k^{\alpha, \alpha}(t) dt \\ &= \frac{2^r}{(k+2\alpha)^{[r]}(r-1)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))^{(r)} dt \\ &= \frac{2^r}{(k+2\alpha)^{[r]}} \left(P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенство (3.5) с учетом (3.7) мы можем переписать в виде

$$\begin{aligned} f(x) = Q_{r-1}(f, x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(x+1)^{\nu}}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (3.5A)$$

Далее, в силу (2.2)

$$(P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))^{(\nu)} = \frac{(k+2\alpha-r+1)_{\nu}}{2^{\nu}} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(t), \quad (3.8)$$

кроме того из (2.4) и (2.5) следует, что

$$P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(-1) = (-1)^{k+r-\nu} \binom{k+\alpha}{k+r-\nu} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+\nu+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.9)$$

Сопоставляя (3.8) и (3.9), имеем

$$(P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{k+r-\nu} \Gamma(k+\alpha+1)(k+2\alpha-r+\nu)^{[\nu]}}{2^{\nu} \Gamma(\alpha-r+\nu+1)(k+r-\nu)!}. \quad (3.10)$$

Если $-1 < \alpha < 1$, но $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, то из (3.5A) и (3.10) находим

$$f(x) = Q_{r-1}(f, x) + A_{r-1}^{\alpha}(f, x) + \mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x), \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_{r-1}^{\alpha}(f, x) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(x+1)^{\nu}}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \\ &= - \sum_{\nu=0}^{r-1} \left(\frac{(-2)^{r-\nu}}{\Gamma(\alpha-r+\nu+1)\nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]}} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!} \right) (1+x)^{\nu}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x). \quad (3.13)$$

Правую часть равенства (3.11), а также ряд $\mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x)$, фигурирующий в этом равенстве, мы будем называть *смешанными рядами по ультрасферическим полиномам*. Они содержат коэффициенты $f_{r,k}^{\alpha}$, $k = 0, 1, \dots$, r -й производной функции $f(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, умноженные на полиномы вида $P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$. В этом состоит принципиальное отличие смешанных рядов от рядов Фурье по ультрасферическим полиномам.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов $\mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x)$ и справедливость равенства (3.11).

Для $s > -1$ через L_p^s обозначим пространство измеримых функций $f = f(x)$, для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p^s} = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^s |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Пусть $W_{L_p^s}^r$ означает множество функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$ и $f^{(r)} \in L_p^s$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, $f \in W_{L_2^\alpha}^r$. Тогда смешанный ряд $\mathcal{F}_r^\alpha(f, x)$ сходится равномерно на $[-1, 1]$ и при $x \in [-1, 1]$, $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ справедливо равенство (3.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись оценкой (2.6), мы имеем ($-1 \leq x \leq 1$)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r+1}^{\infty} \left| \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) \right| \\ &= 2^r \sum_{k=r+1}^{\infty} |(h_k^\alpha)^{1/2} f_{r,k}^\alpha| \frac{(h_k^\alpha)^{-1/2}}{(k+2\alpha)^{[r]}} |P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)| \\ &\leq 2^r \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(h_k^\alpha)^{-1} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x))^2}{((k+2\alpha)^{[r]})^2} \right)^{1/2} \\ &\leq c(r, \alpha) \|f^{(r)}\|_{L_2^\alpha} \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-2r-2 \min\{0, r-\alpha-1/2\}} \right)^{1/2} \leq c(r, \alpha) \|f^{(r)}\|_{L_2^\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что смешанный ряд $\mathcal{F}_r^\alpha(f, x)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Докажем справедливость равенства (3.11), остановившись сначала на случае $r = 1$. Воспользовавшись (3.13) и (2.7), мы можем представить частичную сумму смешанного ряда $\mathcal{F}_r^\alpha(f, x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1,n+1}^\alpha(f, x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2f_{1,k}^\alpha}{k+2\alpha} P_{k+1}^{\alpha-1, \alpha-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f_{1,k}^\alpha}{2k+2\alpha+1} \left(\frac{k+2\alpha+1}{k+\alpha+1} P_{k+1}^\alpha(x) - \frac{k+\alpha}{k+2\alpha} P_{k-1}^\alpha(x) \right) \\ &= \psi_{n+2}^\alpha(x) - \frac{(\alpha+1)f_{1,1}^\alpha P_0^{\alpha, \alpha}(x)}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(k+2\alpha)f_{1,k-1}^\alpha}{(2k+2\alpha-1)(k+\alpha)} - \frac{(k+\alpha+1)f_{1,k+1}^\alpha}{(2k+2\alpha+3)(k+2\alpha+1)} \right) P_k^{\alpha, \alpha}(x), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\psi_{n+2}^\alpha(x) = \frac{f_{1,n}^\alpha}{2n+2\alpha+1} \frac{n+2\alpha+1}{n+\alpha+1} P_{n+1}^{\alpha, \alpha}(x) + \frac{f_{1,n+1}^\alpha}{2n+2\alpha+3} \frac{n+2\alpha+2}{n+\alpha+2} P_{n+2}^{\alpha, \alpha}(x).$$

Далее, из (1.3), (3.2), (2.8) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(k+2\alpha)f_{1,k-1}^\alpha}{(2k+2\alpha-1)(k+\alpha)} - \frac{(k+\alpha+1)f_{1,k+1}^\alpha}{(2k+2\alpha+3)(k+2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \frac{(k-1)! \Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_{k-1}^{\alpha, \alpha}(t) f'(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \frac{(k+1)! \Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(t) f'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \frac{(k-1)! \Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha \left((k+\alpha) P_{k-1}^{\alpha,\alpha}(t) - \frac{k(k+1)}{k+\alpha+1} P_{k+1}^{\alpha,\alpha}(t) \right) f'(t) dt \\
&= \frac{1}{2^{2\alpha+2}} \frac{(k-1)! \Gamma(k+2\alpha+1)(2k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha+1} P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t) f'(t) dt \\
&= -\frac{1}{2kh_k^\alpha} \int_{-1}^1 f(t) [(1-t^2)^{\alpha+1} P_{k-1}^{\alpha+1,\alpha+1}(t)]' dt \\
&= \frac{1}{h_k^\alpha} \int_{-1}^1 f(t) (1-t^2)^\alpha P_k^{\alpha,\alpha}(t) dt = f_k^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Сопоставляя (3.14) и (3.15), мы находим

$$\mathcal{F}_{1,n+1}^\alpha(f, x) = \psi_{n+2}^\alpha(x) - \frac{(\alpha+1)f_{1,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} + \sum_{k=1}^n f_k^\alpha P_k^{\alpha,\alpha}(x). \tag{3.14A}$$

С другой стороны из сходимости ряда $\sum_{k=r+1}^\infty h_k^\alpha (f_{r,k}^\alpha)^2$ и того, что $h_n^\alpha \asymp 1/n$, вытекает $n^{-1/2} f_{1,n}^\alpha \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и кроме того при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$ справедлива оценка $n^{-1/2} |P_{n+1}^{\alpha,\alpha}(x)| \leq c(\alpha)$. Из этих соотношений следует, что $\psi_{n+2}^\alpha(x)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, а поскольку, как было показано выше, смешанный ряд $\mathcal{F}_1^\alpha(f, x)$ сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, то его частичная сумма $\mathcal{F}_{1,n+1}^\alpha(f, x)$ сходится к $\mathcal{F}_1^\alpha(f, x)$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Поэтому из (3.14A) мы находим

$$\mathcal{F}_1^\alpha(f, x) = -\frac{(\alpha+1)f_{1,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} + \sum_{k=1}^\infty f_k^\alpha P_k^{\alpha,\alpha}(x), \tag{3.16}$$

причем ряд, полученный в правой части равенства (3.16), сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

Тем самым мы доказали, что ряд Фурье функции $f(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и, следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k P_k^{\alpha,\alpha}(x), \quad -1 < \alpha \leq \frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

Сопоставляя (3.16) и (3.17), мы замечаем, что

$$f(x) = f_0^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{1,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} + \mathcal{F}_1^\alpha(f, x), \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{3.18}$$

Далее, поскольку

$$P_{k+1}^{\alpha-1,\alpha-1}(-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+1)! \Gamma(\alpha)}, \tag{3.19}$$

то из (3.18) имеем

$$f_0^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{1,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} = f(-1) - \mathcal{F}_1^\alpha(f, -1) = Q_0 + A_0^\alpha.$$

Подставляя это значение в (3.18), приходим к равенству (3.11) при $r = 1$. Теперь рассмотрим случай $r \geq 2$. Пусть $f^{(r)} \in L_2^\alpha$, тогда мы можем воспользоваться равенством (3.18) для функции $f^{(r-1)}(x)$ (вместо $f(x)$). Это дает

$$f^{(r-1)}(x) = f_{r-1,0}^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^\alpha}{k+2\alpha} P_{k+1}^{\alpha-1, \alpha-1}(x), \quad (3.20)$$

причем последний ряд сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Перепишем формулу Тейлора (3.4), заменяя в ней r на $r-1$, тогда

$$f(x) = Q_{r-2}(f, x) + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t) dt.$$

Подставим сюда вместо $f^{(r-1)}(t)$ ее значение из (3.20) и проинтегрируем полученный ряд почленно. В результате, воспользовавшись равенствами (3.6) и (3.7), мы получим

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_{r-2}(f, x) + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} \left(f_{r-1,0}^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \right) dt \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^\alpha}{k+2\alpha} \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} P_{k+1}^{\alpha-1, \alpha-1}(t) dt \\ &= Q_{r-2}(f, x) + \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f_{r-1,0}^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \left(P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \right) \\ &= Q_{r-2}(f, x) + \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f_{r-1,0}^\alpha + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^\alpha}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \right) \\ &\quad + \mathcal{F}_r^\alpha(f, x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Поскольку в силу (3.12)

$$\begin{aligned} &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \\ &= A_{r-1}^\alpha(f, x) + \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(r-1)}, \end{aligned}$$

а из (3.10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} (P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(t))_{t=-1}^{(r-1)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)} \frac{2\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+1)! \Gamma(\alpha)},$$

то (3.21) мы можем переписать в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_{r-2}(f, x) + \mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x) + A_{r-1}^{\alpha}(f, x) \\ &+ \frac{(x+1)^{r-1}}{(r-1)!} \left(f_{r-1,0}^{\alpha} + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^{\alpha}}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)} \frac{2\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+1)! \Gamma(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее, из (3.19) и (3.20) находим

$$f^{(r-1)}(-1) = f_{r-1,0}^{\alpha} + \frac{(\alpha+1)f_{r,1}^{\alpha}}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)} \frac{2\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+1)! \Gamma(\alpha)}.$$

Сопоставляя это равенство с (3.22), мы получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_{r-2}(f, x) + \frac{f^{(r-1)}(-1)}{(r-1)!} (x+1)^{r-1} + \mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x) + A_{r-1}^{\alpha}(f, x) \\ &= Q_{r-1}(f, x) + A_{r-1}^{\alpha}(f, x) + \mathcal{F}_r^{\alpha}(f, x). \end{aligned}$$

Тем самым теорема 3.1 доказана.

3.2. Смешанные ряды, ассоциированные с полиномами Чебышёва первого и второго родов: случаи $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. При построении смешанных рядов для $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ возникает неудобство, связанное с тем, что формула (3.6) теряет смысл, если $(k+2\alpha)^{[r]} = 0$. Однако если $k \geq r+1$, то $(k+2\alpha)^{[r]} > 0$ и в случае $\alpha = -\frac{1}{2}$ мы можем рассмотреть следующий смешанный ряд:

$$\mathcal{F}_r^{-1/2}(f, x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{-1/2}}{(k-1)^{[r]}} P_{k+r}^{-1/2-r, -1/2-r}(x). \quad (3.23)$$

Если $f \in W_{L_2}^r$, то из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.1, следует, что ряд (3.23) сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Рассмотрим отдельно случай $r = 1$. Сохраняя для краткости обозначение $\alpha = -\frac{1}{2}$, из (3.23) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{\alpha}(f, x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2f_{1,k}^{\alpha}}{k+2\alpha} P_{k+1}^{\alpha-1, \alpha-1}(x) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_{1,k}^{\alpha}}{2k+2\alpha+1} \left(\frac{k+2\alpha+1}{k+\alpha+1} P_{k+1}^{\alpha, \alpha}(x) - \frac{k+\alpha}{k+2\alpha} P_{k-1}^{\alpha, \alpha}(x) \right) \\ &= -\frac{(\alpha+2)f_{1,2}^{\alpha}}{(2\alpha+5)(2\alpha+2)} P_1^{\alpha, \alpha}(x) - \frac{(\alpha+3)f_{1,3}^{\alpha}}{(2\alpha+7)(2\alpha+3)} P_2^{\alpha, \alpha}(x) \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{(k+2\alpha)f_{1,k-1}^{\alpha}}{(2k+2\alpha-1)(k+\alpha)} - \frac{(k+\alpha+1)f_{1,k+1}^{\alpha}}{(2k+2\alpha+3)(k+2\alpha+1)} \right) P_k^{\alpha, \alpha}(x). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из (3.15) и (3.24) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^\alpha(f, x) = & -\frac{(\alpha+2)f_{1,2}^\alpha}{(2\alpha+5)(2\alpha+2)}P_1^{\alpha,\alpha}(x) \\ & -\frac{(\alpha+3)f_{1,3}^\alpha}{(2\alpha+7)(2\alpha+3)}P_2^{\alpha,\alpha}(x) + \sum_{k=3}^{\infty} f_k^\alpha P_k^{\alpha,\alpha}(x), \end{aligned} \quad (3.25)$$

причем ряд, полученный в правой части равенства (3.25) (остаточный член ряда Фурье–Чебышёва функции $f \in W_{L_2^{-1/2}}^r$), сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Это доказывается так же, как была доказана равномерная сходимость на $[-1, 1]$ ряда (3.16).

Таким образом, доказано, что ряд Фурье функции $f \in W_{L_2^{-1/2}}^r$ по полиномам Чебышёва $P_n^{-1/2, -1/2}(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и, следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1/2} P_k^{-1/2, -1/2}(x). \quad (3.26)$$

Сопоставляя (3.25) и (3.26), мы замечаем, что $(-1 \leq x \leq 1)$

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0^{-1/2} + \left(f_1^{-1/2} + \frac{3}{8}f_{1,2}^{-1/2}\right)P_1^{-1/2, -1/2}(x) \\ & + \left(f_2^{-1/2} + \frac{5}{24}f_{1,3}^{-1/2}\right)P_2^{-1/2, -1/2}(x) + \mathcal{F}_1^{-1/2}(f, x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

или

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0^{-1/2} + \left(f_1^{-1/2} + \frac{3}{8}f_{1,2}^{-1/2}\right)P_1^{-1/2, -1/2}(x) \\ & + \left(f_2^{-1/2} + \frac{5}{24}f_{1,3}^{-1/2}\right)P_2^{-1/2, -1/2}(x) \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2f_{1,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(x). \end{aligned} \quad (3.27A)$$

Пусть теперь $r \geq 2$, тогда мы можем применить равенство (3.27) к функции $f^{(r-1)}(x)$ (вместо $f(x)$). Это дает

$$\begin{aligned} f^{(r-1)}(x) = & f_0^{(r-1)-1/2} + \left(f_1^{(r-1)-1/2} + \frac{3}{8}f_{r,2}^{-1/2}\right)P_1^{-1/2, -1/2}(x) \\ & + \left(f_2^{(r-1)-1/2} + \frac{5}{24}f_{r,3}^{-1/2}\right)P_2^{-1/2, -1/2}(x) \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Положим

$$\begin{aligned} G_{r+1}(x) &= f_0^{(r-1)-1/2} + \left(f_1^{(r-1)-1/2} + \frac{3}{8} f_{r,2}^{-1/2} \right) P_1^{-1/2, -1/2}(x) \\ &\quad + \left(f_2^{(r-1)-1/2} + \frac{5}{24} f_{r,3}^{-1/2} \right) P_2^{-1/2, -1/2}(x) \\ &\quad + \sum_{k=2}^r \frac{2f_{r,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(x) \end{aligned} \quad (3.29)$$

и перепишем равенство (3.28) в виде

$$f^{(r-1)}(x) = G_{r+1}(x) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(x), \quad (3.30)$$

где $G_{r+1}(x)$ — полином степени $r+1$, определенный равенством (3.29). Подставим это выражение в формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-2}(f, x) + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t) dt,$$

тогда

$$f(x) = Q_{r-2}(f, x) + G_{2r}^{-1/2}(x) + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(t) dt, \quad (3.31)$$

где

$$G_{2r}^{-1/2}(x) = \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} G_{r+1}(t) dt. \quad (3.32)$$

Далее, воспользовавшись равенством (3.6), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x (x-t)^{r-2} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2f_{r,k}^{-1/2}}{k-1} P_{k+1}^{-3/2, -3/2}(t) dt \\ &= \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{-1/2}}{(k-1)[r]} \left(P_{k+r}^{-1/2-r, -1/2-r}(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu=0}^{r-2} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{-1/2-r, -1/2-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \right) \\ &= \mathcal{F}_r^{-1/2}(x) + B_{r-2}^{-1/2}(x), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} B_{r-2}^{-1/2}(x) &= \sum_{r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{-1/2}}{(k-1)[r]} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} (P_{k+r}^{-1/2-r, -1/2-r}(t))_{t=-1}^{(\nu)} \\ &= - \sum_{\nu=0}^{r-2} \left(\frac{(-2)^{r-\nu}}{\Gamma(-1/2-r+\nu+1)\nu!} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{r,k}^{-1/2}}{(k-1)[r-\nu]} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k+r-\nu)!} \right) (1+x)^\nu. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Сопоставляя (3.31)–(3.34), мы приходим к следующему представлению функции $f \in W_{L_2}^r$ смешанным рядом в случае $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$f(x) = Q_{r-2}(f, x) + G_{2r}^{-1/2}(x) + B_{r-2}^{-1/2}(x) + \mathcal{F}_r^{-1/2}(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3.35)$$

где сумма $Q_{r-2}(f, x) + G_{2r}^{-1/2}(x) + B_{r-2}^{-1/2}(x)$ представляет собой полином степени $2r$.

Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные выше для $\alpha = -\frac{1}{2}$, в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем следующий смешанный ряд:

$$f(x) = Q_{r-2}(f, x) + G_{2r-2}^{1/2}(x) + B_{r-2}^{1/2}(x) + \mathcal{F}_r^{1/2}(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3.36)$$

где $f \in W_{L_2}^r$,

$$\mathcal{F}_r^{1/2}(f, x) = \sum_{k=r-1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^{1/2}}{(k+1)^{[r]}} P_{k+r}^{1/2-r, 1/2-r}(x), \quad (3.37)$$

$Q_{r-2}(f, x) + G_{2r-2}^{1/2}(x) + B_{r-2}^{1/2}(x)$ – полином степени $2r-2$.

3.3. Смешанные ряды, ассоциированные с полиномами Лежандра:
случай $\alpha = 0$. В случае $\alpha = 0$ мы рассмотрим следующий смешанный ряд:

$$\mathcal{F}_r(f, x) = \mathcal{F}_r^0(f, x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^0}{k^{[r]}} P_{k+r}^{-r, -r}(x). \quad (3.38)$$

Поскольку в силу (2.12)

$$P_{k+r}^{-r, -r}(x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^{2r}} P_{k-r}^{r, r},$$

то (3.38) можно переписать еще в виде

$$\mathcal{F}_r(f, x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r, r}(x). \quad (3.39)$$

Если $f \in W_{L_2}^r$, то рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к равенству

$$f(x) = p_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(f, x), \quad (3.40)$$

где $p_{2r-1}(x)$ – некоторый многочлен степени $2r-1$. Из (3.39) и (3.40) следует, что

$$p_{2r-1}^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1.$$

Единственный полином, обладающий этим свойством, имеет вид

$$p_{2r-1}(x) = p_{2r-1}(f, x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}} \right),$$

поэтому (3.40) мы можем переписать также в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}} \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r, r}(x). \end{aligned}$$

§4. Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$

В §3 для любого $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ были построены смешанные ряды $\mathcal{F}_r^\alpha(f, x)$ и для $f \in W_{L_2^\alpha}^r$ было доказано, что

$$f(x) = p(x) + \mathcal{F}_r^\alpha(f, x) = p(x) + \sum_{k=\bar{r}}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x), \quad (4.1)$$

где

$$\bar{r} = \begin{cases} r+1, & \alpha = -\frac{1}{2}; \\ r, & \alpha = 0; \\ r-1, & \alpha = \frac{1}{2}; \\ 0, & \alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, \end{cases} \quad (4.2)$$

$p(x)$ – некоторый полином степени не выше чем $2r$, причем

$$\deg p(x) = \begin{cases} 2r, & \alpha = -\frac{1}{2}; \\ 2r-1, & \alpha = 0; \\ 2r-2, & \alpha = \frac{1}{2}; \\ r-1, & \alpha \notin \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Через $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ мы обозначим частичные суммы правой части равенства (4.1) следующего вида

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = p(x) + \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x), \quad (4.3)$$

а соответствующий остаточный член обозначим через $R_{r,n}^\alpha(f, x)$, т.е.

$$R_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x). \quad (4.4)$$

Положим далее

$$\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f, x) = \mathcal{F}_r^\alpha(f, x) - R_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=\bar{r}}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x). \quad (4.5)$$

Из (4.3)–(4.5) следует, что

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = p(x) + \mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f, x). \quad (4.6)$$

Если $f \in W_{L_2^\alpha}^r$, то из (4.1), (4.3) и (4.4) имеем

$$f(x) = \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) + R_{r,n}^\alpha(f, x). \quad (4.7)$$

Будем рассматривать оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ как аппарат приближения дифференцируемых и аналитических функций. Прежде всего установим связь полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ с суммой Фурье

$$S_n^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^n f_k^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(x) \quad (4.8)$$

по ультрасферическим полиномам $P_k^{\alpha, \alpha}(x)$, где коэффициенты f_k^α определены равенством (3.15). С этой целью перепишем сумму $\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f, x)$, определенную равенством (4.5), следующим образом:

$$\mathcal{F}_{r,n}^\alpha(f, x) = \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f, x) + I_{r,n}^\alpha(f, x), \quad (4.9)$$

где

$$I_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x). \quad (4.10)$$

Пусть $n \geq 2r$, тогда, пользуясь леммой 2.1, можем записать

$$I_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{j=0}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x) = \varphi_{r,n}^\alpha(x) + \psi_{r,n}^\alpha(x), \quad (4.11)$$

где

$$\varphi_{r,n}^\alpha(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{j=[(k+r-n)/2]}^r \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x), \quad (4.12)$$

$$\psi_{r,n}^\alpha(x) = \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{2^r f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}} \sum_{j=0}^{[(k+r-n-1)/2]} \lambda_j^\alpha P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x), \quad (4.13)$$

$[a]$ — целая часть числа a . Сопоставляя (4.6), (4.9)–(4.13), имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = p(x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f, x) + \varphi_{r,n}^\alpha(x) + \psi_{r,n}^\alpha(x), \quad (4.14)$$

а отсюда и из (4.7) выводим

$$f(x) = p(x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f, x) + \varphi_{r,n}^\alpha(x) + \psi_{r,n}^\alpha(x) + R_{r,n}^\alpha(f, x), \quad (4.15)$$

где в силу (4.5) и (4.12) $p(x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f, x) + \varphi_{r,n}^\alpha(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n \geq 2r$ и, следовательно, допускает представление

$$p(x) + \mathcal{F}_{r,n-2r}^\alpha(f, x) + \varphi_{r,n}^\alpha(x) = \sum_{l=0}^n v_l P_l^{\alpha, \alpha}(x), \quad (4.16)$$

а из (4.13) следует, что $\psi_{r,n}^\alpha(x)$ может быть записана в виде

$$\psi_{r,n}^\alpha(x) = \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l P_l^{\alpha, \alpha}(x). \quad (4.17)$$

Далее, из леммы 2.1 и равенства (4.4) имеем

$$R_{r,n}^{\alpha}(f, x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}^{\alpha, \alpha}(x), \quad (4.18)$$

где

$$a_{\nu} = \begin{cases} \sum_{j=0}^r \frac{2^r f_{r, \nu+2j-r}^{\alpha} \lambda_j^{\alpha}(\nu+2j-r, r)}{(\nu+2j-r+2\alpha)^{[r]}}, & n+2r+1 \leq \nu; \\ \sum_{j=[r+1-(\nu-n)/2]}^r \frac{2^r f_{r, \nu+2j-r}^{\alpha} \lambda_j^{\alpha}(\nu+2j-r, r)}{(\nu+2j-r+2\alpha)^{[r]}}, & n+1 \leq \nu \leq n+2r. \end{cases} \quad (4.19)$$

Если $f \in W_{L_2^{\alpha}}^r$, то ряд (4.4) сходится равномерно на $[-1, 1]$, тогда ряд (4.18) также сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. В самом деле, частичная сумма

$$\sum_{\nu=n+1}^m a_{\nu} P_{\nu}^{\alpha, \alpha}(x)$$

ряда (4.18) отличается от частичной суммы

$$\sum_{k=n+r+1}^{m-r} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$$

ряда (4.4) наличием слагаемого

$$u_m(x) = \sum_{\substack{m-r+1 \leq k \leq m+r \\ (k+r-m)/2 \leq j \leq r}} \frac{2^r f_{r,k}^{\alpha}}{(k+2\alpha)^{[r]}} \lambda_j^{\alpha}(k, r) P_{k+r-2j}^{\alpha, \alpha}(x),$$

которое при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $r \geq 1$, $m \rightarrow \infty$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

Равенство (4.15) с учетом (4.16)–(4.18) принимает следующий вид:

$$f(x) = \sum_{l=0}^n v_l P_l^{\alpha, \alpha}(x) + \sum_{l=n+1}^{n+2r} q_l P_l^{\alpha, \alpha}(x) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}^{\alpha, \alpha}(x), \quad (4.20)$$

причем ряд, фигурирующий в правой части равенства (4.20), сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. Из (4.20) и (4.16) следует, что частичная сумма (4.8) может быть записана следующим образом:

$$S_n^{\alpha}(f, x) = \sum_{l=0}^n v_l P_l^{\alpha, \alpha}(x) = p(x) + \mathcal{F}_{r, n-2r}^{\alpha}(f, x) + \varphi_{r, n}^{\alpha}(x). \quad (4.21)$$

Сопоставляя (4.14) и (4.21), мы приходим к равенству

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = S_n^\alpha(f, x) + \psi_{r,n}^\alpha(x). \quad (4.22)$$

Другое важное свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ выражается равенством

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) &= R_{r-\nu, n+\nu}(f^{(\nu)}, x) \\ &= \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-\nu} f_{r,k}^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]}} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(x), \end{aligned} \quad (4.23)$$

которое непосредственно следует из (4.7), (4.4), (2.1) и очевидного равенства $f^{(r)}(x) = (f^{(\nu)}(x))^{(r-\nu)}$.

§ 5. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ на классах дифференцируемых функций

Здесь мы рассмотрим задачу о приближении полиномами $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)$ функций $f \in W_{L_2^{\alpha+m-r}}^m$, где $m \geq r$. При этом нам понадобятся некоторые обозначения: $L_p = L_p^0$, $W^r H_{L_p}^\mu(B)$ – подкласс функций $f = f(x)$ из $W_{L_p}^r$, для которых $\omega(f^{(r)}, \delta)_{L_p} \leq B\delta^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, где

$$\omega(g, \delta)_{L_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_{-1}^{1-h} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции $g = g(x) \in L_p$, $E_n(f)_{L_p^s}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_p^s(-1, 1)$ алгебраическими полиномами степени n , $C[-1, 1]$ – пространство непрерывных функций $f = f(x)$, заданных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом $\|f\|_{C[-1, 1]} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$, $E_n(f)_{C[-1, 1]}$ – наилучшее приближение $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени n .

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $m \geq r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $f \in W_{L_2^{\alpha+m-r}}^m$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| &\leq c(\alpha, r, m) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2} \\ &\times \frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{L_2^{\alpha+m-r}}}{n^{m-\nu-1/2}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) и (2.11) имеем ($k \geq m - r$)

$$\begin{aligned}
 f_{r,k}^\alpha &= \frac{1}{h_k^\alpha} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha f^{(r)}(x) P_k^{\alpha,\alpha}(x) dx \\
 &= \frac{(-1)^{m-r}}{h_k^\alpha 2^{m-r} k^{[m-r]}} \int_{-1}^1 \frac{d^{m-r}}{dx^{m-r}} ((1-x^2)^{\alpha+m-r} P_{k-m+r}^{\alpha+m-r, \alpha+m-r}(x)) f^{(r)}(x) dx \\
 &= \frac{1}{h_k^\alpha 2^{m-r} k^{[m-r]}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha+m-r} P_{k-m+r}^{\alpha+m-r, \alpha+m-r}(x) f^{(m)}(x) dx \\
 &= \frac{h_{k-m+r}^{\alpha+m-r} f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r}}{h_k^\alpha 2^{m-r} k^{[m-r]}}. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Подставим это значение $f_{r,k}^\alpha$ в (4.23), тогда

$$\begin{aligned}
 f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) &= \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{2r-m-\nu} h_{k-m+r}^{\alpha+m-r} f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(x)}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]} k^{[m-r]} h_k^\alpha} \\
 &= \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{2r-m-\nu} (h_{k-m+r}^{\alpha+m-r})^{1/2} f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r}}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]} k^{[m-r]}} \frac{(h_{k-m+r}^{\alpha+m-r})^{1/2}}{h_k^\alpha} P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(x). \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Из (1.3) и (2.6) вытекает оценка

$$\frac{(h_{k-m+r}^{\alpha+m-r})^{1/2}}{h_k^\alpha} |P_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu, \alpha-r+\nu}(x)| \leq c(\alpha, r, m) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2}, \tag{5.3}$$

$-1 \leq x \leq 1.$

С другой стороны, если $f \in W_{L_2^{\alpha+m-r}}^m$, то

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{2r-m-\nu} (h_{k-m+r}^{\alpha+m-r})^{1/2} |f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r}|}{(k+2\alpha)^{[r-\nu]} k^{[m-r]}} \\
 &\leq c(r, m) \left(\sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{((k+2\alpha)^{[r-\nu]} k^{[m-r]})^2} \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=n+r+1}^{\infty} (f_{m,k-m+r}^{\alpha+m-r})^2 h_{k-m+r}^{\alpha+m-r} \right)^{1/2} \\
 &\leq c(\alpha, r, m) \frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{L_2^{\alpha+m-r}}}{n^{m-\nu-1/2}}. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 5.1 вытекает из (5.2)–(5.4).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} \|f - \mathcal{Y}_{n+2r}^0(f)\|_{C[-1,1]} &\asymp \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \\ &\asymp \frac{1}{(n+1)^{r+\mu-1/2}}, \end{aligned}$$

где $a_n \asymp b_n$, $n = 0, 1, \dots$, означает, что найдутся положительные постоянные c_1 и c_2 , для которых $c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$, $n = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5.1 следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} &\leq \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} \|f - \mathcal{Y}_{n+2r}^0(f)\|_{C[-1,1]} \\ &\leq \frac{c(r, \mu)}{(n+1)^{r-1/2}} \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{L_2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Далее, в силу теоремы Джексона

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{L_2} \leq c(r, \mu)(n+1)^{-\mu}. \quad (5.6)$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $f_{r,\mu} = f_{r,\mu}(x) = A_{r,\mu} x^{r-1} |x|^{\mu+1/2}$, где константа $A_{r,\mu} > 0$ выбрана так, что $f_{r,\mu} \in W^r H_{L_2}^\mu(1)$. Известно (см. [9; п. 7.2.2]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{r+\mu-1/2} E_{n+2r}(f_{r,\mu})_{C[-1,1]} > 0, \quad -\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{2},$$

поэтому

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \geq \frac{c(r, \mu)}{(n+1)^{r+\mu-1/2}}. \quad (5.7)$$

Сопоставляя (5.5)–(5.7), приходим к утверждению следствия 5.1.

§ 6. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ на классах аналитических функций

Пусть $0 < q < 1$, $\mathcal{E}_q$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1 , сумма полуосей которого равна $1/q$. Через $A_q(B)$ мы обозначим класс функций $f = f(z)$, принимающих действительные значения на $[-1, 1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных там по модулю числом B . Хорошо известно [9; п. 3.7.3], что если $f \in A_q(B)$, то для коэффициентов Фурье–Чебышёва этой функции

$$a_k(f) = (h_k^{-1/2, -1/2})^{-1/2} \int_{-1}^1 \frac{f(t) P_k^{-1/2, -1/2}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (6.1)$$

имеет место оценка

$$|a_k(f)| \leq \sqrt{2\pi} B q^k \quad (6.2)$$

и как следствие

$$E_n(f)_{C[-1,1]} \leq \frac{2B}{1-q} q^{n+1}. \quad (6.3)$$

Как это показано в [10], эта оценка на всем классе $A_q(B)$ не улучшаема по порядку. В настоящем параграфе мы покажем (теорема 6.1), что среди алгебраических полиномов степени $n+2r$ $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ доставляют приближение наилучшего порядка на классе $A_q(B)$. Более того, если $f \in A_q(B)$, $0 \leq \nu r - 1$, то

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| \leq c(\alpha, r, q, B) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2} \frac{q^n}{n^{r-\nu-1}}.$$

Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 6.1. Пусть $k = n + 2j$, $j = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} & (h_{k+1}^{-1/2})^{-1/2} \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n^{\alpha, \alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+k+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j h_n^\alpha}{(n+2\alpha+1)_n (3/2)_n (n+3/2)_j (n+\alpha+3/2)_j (2j)!}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $a = \frac{1}{2}$, воспользуемся равенством (2.9), тогда

$$\begin{aligned} & \frac{P_k^{1/2, 1/2}(t)}{P_k^{1/2, 1/2}(1)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{k! (\alpha+1)_{k-2\nu} (k+2)_{k-2\nu} (1/2)_\nu (1/2-\alpha)_\nu P_{k-2\nu}^{\alpha, \alpha}(t) / P_{k-2\nu}^{\alpha, \alpha}(1)}{(k-2\nu)! (2\nu)! (3/2)_{k-2\nu} (k-2\nu+2\alpha+1)_{k-2\nu} (k-2\nu+3/2)_\nu (k-2\nu+\alpha+3/2)_\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда находим ($k = n + 2j$)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n^{\alpha, \alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= \frac{P_k^{1/2, 1/2}(1)}{P_n^{\alpha, \alpha}(1)} \frac{k! (\alpha+1)_n (k+2)_n (1/2)_j (1/2-\alpha)_j \int_{-1}^1 (P_n^{\alpha, \alpha}(t))^2 (1-t^2)^\alpha dt}{n! (2j)! (3/2)_n (n+2\alpha+1)_n (n+3/2)_j (n+\alpha+3/2)_j}, \end{aligned}$$

откуда в силу (2.5) и (1.2) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n^{\alpha, \alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= \frac{\Gamma(k+3/2)(k+2)_n (1/2)_j (1/2-\alpha)_j h_n^\alpha}{\Gamma(3/2)(2j)! (3/2)_n (n+2\alpha+1)_n (n+3/2)_j (n+\alpha+3/2)_j}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Далее, из (1.3) имеем

$$(h_{k+1}^{-1/2})^{-1/2} = \sqrt{2} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+3/2)}. \quad (6.5)$$

Замечая, что $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $(k+2)_n = \Gamma(n+k+2)/\Gamma(k+2)$, из (6.4) и (6.5) убеждаемся в справедливости утверждения леммы 6.1.

ЛЕММА 6.2. Если $f \in A_q(B)$, то

$$\begin{aligned} f_{1,n}^\alpha &= \frac{1}{h_n^\alpha} \int_{-1}^1 f'(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) \frac{(n+2j+1)\Gamma(2n+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(n+2\alpha+1)_n(3/2)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j(2j)!}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in A_q(B)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) (h_k^{-1/2, -1/2})^{-1/2} P_k^{-1/2, -1/2}(x)$$

и в силу равенства (2.1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) (h_k^{-1/2, -1/2})^{-1/2} \frac{k}{2} P_{k-1}^{1/2, 1/2}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} (h_{k+1}^{-1/2, -1/2})^{-1/2} P_k^{1/2, 1/2}(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из симметрии (2.4)

$$\begin{aligned} f_{1,n}^\alpha &= \frac{1}{h_n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} (h_{k+1}^{-1/2, -1/2})^{-1/2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) dt \\ &= \frac{1}{h_n^\alpha} \sum_{k=n+2j, j \geq 0} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} (h_{k+1}^{-1/2, -1/2})^{-1/2} \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) dt. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Теперь воспользуемся леммой 6.1, тогда из (6.6) имеем

$$\begin{aligned} f_{1,n}^\alpha &= \frac{1}{h_n^\alpha} \int_{-1}^1 f'(t) P_n^{\alpha,\alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) \frac{(n+2j+1)\Gamma(2n+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(n+2\alpha+1)_n(3/2)_n(n+3/2)_j(n+\alpha+3/2)_j(2j)!}. \end{aligned}$$

Лемма 6.2 доказана.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $n \geq 2r$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| \leq c(r, \alpha, q) B \frac{q^n}{n^{r-\nu-1}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (4.23) с учетом (2.6) имеем

$$\left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| \leq c(r, \alpha) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|f_{r,k}^\alpha|}{k^{[r-\nu]}} k^{-1/2}, \quad (6.7)$$

где в силу леммы 6.2

$$f_{r,k}^\alpha = f_{1,k}^{(r-1)\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f^{r-1})(k+2j+1) \times \frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(k+2\alpha+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j(k+\alpha+3/2)_j(2j)!}. \quad (6.8)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \right)_j^2 &= \frac{1}{\pi} \left(\Gamma \left(j + \frac{1}{2} \right) \right)^2, \quad (2j)! = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2j} \Gamma(j+1) \Gamma \left(j + \frac{1}{2} \right), \\ \Gamma(2k+2j+2) &= \Gamma(2k+2)(2k+2)_{2j}, \\ 2^{2j} \left(k + \frac{3}{2} \right)_j^2 &= [(2k+3)(2k+5) \cdots (2k+2j+1)]^2, \\ \frac{(2k+2)_{2j}}{2^{2j}(k+3/2)_j^2} &= \frac{(2k+2) \cdots (2k+2j)}{(2k+3) \cdots (2k+2j+1)} < 1, \\ \frac{(1/2-\alpha)_j(k+1)_k}{(1/2)_j(k+2\alpha+1)_k} \frac{(k+3/2)_j}{(k+\alpha+3/2)_j} &= \frac{\Gamma(1/2-\alpha+j)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2+j)} \frac{\Gamma(2k+1)\Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2k+2\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+3/2+j)\Gamma(k+\alpha+3/2)}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+\alpha+3/2+j)} \\ &\leq c(\alpha)(j+1)^{-\alpha} k^\alpha (k+j)^{-\alpha} = c(\alpha) \left(\frac{k}{(1+j)(k+j)} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j(1/2-\alpha)_j}{(k+2\alpha+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j(k+\alpha+3/2)_j(2j)!} \\ &= \frac{\Gamma(2k+2j+2)(1/2)_j^2}{(k+1)_k(3/2)_k(k+3/2)_j^2(2j)!} \frac{(1/2-\alpha)_j(k+1)_k(k+3/2)_j}{(1/2)_j(k+2\alpha+1)_k(k+\alpha+3/2)_j} \\ &\leq \frac{\Gamma(2k+2)\Gamma(k+1)(2k+2)_{2j}(\Gamma(j+1/2))^2\Gamma(3/2)c(\alpha)}{\Gamma(2k+1)\Gamma(k+3/2)(k+3/2)_j^22^{2j}\Gamma(j+1)\Gamma(j+1/2)\sqrt{\pi}} \left(\frac{k}{(j+1)(k+j)} \right)^\alpha \\ &= c(\alpha) \frac{(2k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} \frac{(2k+2)_{2j}}{2^{2j}(k+3/2)_j^2} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \left(\frac{k}{(j+1)(k+j)} \right)^\alpha \\ &\leq c(\alpha) \left(\frac{k}{j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{(j+1)(k+j)} \right)^\alpha. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из (6.8) и (6.9)

$$|f_{r,k}^\alpha| \leq c(\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1} (f^{r-1})(k+2j+1) \left(\frac{k}{j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{(j+1)(k+j)} \right)^\alpha.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (6.2) (для $f^{(r-1)}$), находим

$$\begin{aligned} |f_{r,k}^\alpha| &\leq c(\alpha) B \sum_{j=0}^{\infty} q^{k+2j+1} (k+2j+1) \left(\frac{k}{j+1} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{(j+1)(k+j)} \right)^\alpha \\ &\leq c(\alpha, q) B k^{3/2} q^k. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Сопоставляя (6.7) и (6.10), приходим к утверждению теоремы 6.1.

§ 7. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ на классах $S^r H_\Delta^\mu$

Этот параграф посвящается исследованию аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f)$ на классах $S^r H_\Delta^\mu$, введенных в работе [6]. Пусть

$$x_+^\gamma = \begin{cases} x^\gamma, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

где γ — произвольное действительное число, $1 \leq r$ — целое, $0 < \mu \leq 1$, $-1 < a < 1$. Через $S^r H_{a+}^\mu$ мы обозначим линейное пространство функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ $r-1$ раз, для которых на $[-1, a) \cup (a, 1]$ существует производная $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющая следующим условиям: для произвольного положительного ε ($a + \varepsilon < 1$) $f^{(r)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a + \varepsilon, 1]$ и для почти всех $x \in [-1, a) \cup (a, 1]$

$$|f^{(r)}(x)| \leq c(x-a)_+^{\mu-1}, \quad |f^{(r+1)}(x)| \leq c(x-a)_+^{\mu-2}. \quad (7.1)$$

Аналогично определяется класс $S^r H_{a-}^\mu$, состоящий из функций $g(x)$, для которых почти всюду на $x \in [-1, a) \cup (a, 1]$

$$|g^{(r)}(x)| \leq c(a-x)_+^{\mu-1}, \quad |g^{(r+1)}(x)| \leq c(a-x)_+^{\mu-2}.$$

Через $S^r H_a^\mu$ обозначим линейную оболочку пространств $S^r H_{a-}^\mu$ и $S^r H_{a+}^\mu$, т.е.

$$S^r H_a^\mu = S^r H_{a-}^\mu + S^r H_{a+}^\mu.$$

Пусть $-1 < a_1 < a_2 < \dots < a_l < 1$, $\Delta = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. Через $S^r H_\Delta^\mu$ мы обозначим линейную оболочку, натянутую на все пространства $S^r H_{a_i}^\mu$ при $i = 1, 2, \dots, l$, т.е.

$$S^r H_\Delta^\mu = S^r H_{a_1}^\mu + \dots + S^r H_{a_l}^\mu.$$

Если B положительное число, то через $S^r H_\Delta^\mu(B)$ мы обозначим подмножество таких функций $f \in S^r H_\Delta^\mu$, что

$$|f^{(r)}(x)| \leq B \sum_{i=1}^l |x - a_i|^{\mu-1}, \quad (7.2)$$

$$|f^{(r+1)}(x)| \leq B \sum_{i=1}^l |x - a_i|^{\mu-2} \quad (7.3)$$

для почти всех $x \in [-1, 1] \setminus \Delta$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $f \in S^r H_\Delta^\mu(B)$,

$$\lambda_k(\mu) = \begin{cases} 1, & 0 < \mu < 1; \\ \ln(k+1), & \mu = 1. \end{cases}$$

Тогда при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ имеет место оценка

$$|f_{r,k}^\alpha| \leq c(B, \mu, \Delta, \alpha) \lambda_k(\mu) (k+1)^{1/2-\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Delta = \{a\}$, $f \in S^r H_{a+}^\mu \cap S^r H_\Delta^\mu(B)$, где $-1 < a < 1$. Тогда из (3.2) и (7.1) имеем ($k \geq 1$)

$$\begin{aligned} f_{r,k}^\alpha &= \frac{1}{h_k^\alpha} \int_a^{a+1/k} f^{(r)}(t) P_k^{\alpha,\alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt \\ &+ \frac{1}{h_k^\alpha} \int_{a+1/k}^1 f^{(r)}(t) P_k^{\alpha,\alpha}(t) (1-t^2)^\alpha dt = A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Для $f \in S^r H_{a+}^\mu \cap S^r H_\Delta^\mu(B)$ при $a < t \leq 1$ следует $|f^{(r)}(t)| \leq B(t-a)^{\mu-1}$, поэтому с учетом весовой оценки (2.6) имеем

$$|A_1| \leq c(B, a, \alpha) \sqrt{k+1} \int_a^{a+1/k} (t-a)^{\mu-1} dt \leq c(B, \mu, a) (k+1)^{1/2-\mu}. \quad (7.5)$$

Что касается интеграла A_2 , то, используя формулу (2.11) и применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= f^{(r)} \left(a + \frac{1}{k} \right) \frac{(1 - (a + 1/k)^2)^{\alpha+1}}{2k h_k^\alpha} P_{k-1}^{\alpha+1, \alpha+1} \left(a + \frac{1}{k} \right) \\ &+ \frac{1}{2k h_k^\alpha} \int_{a+1/k}^1 f^{(r+1)}(t) (1-t^2)^{\alpha+1} P_{k-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(t) dt = A'_2 + A''_2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Поскольку $f \in S^r H_{a+}^\mu \cap S^r H_\Delta^\mu(B)$, то

$$\left| f^{(r)} \left(a + \frac{1}{k} \right) \right| \leq B k^{1-\mu}, \quad |f^{(r+1)}(t)| \leq B(t-a)^{\mu-2} \quad (7.7)$$

для почти всех $t \in (a, 1)$, а в силу весовой оценки (2.6)

$$\sqrt{k+1} (1-t^2)^{\alpha+1} |P_{k-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(t)| \leq c(\alpha). \quad (7.8)$$

Из (7.6)–(7.8) мы выводим

$$|A'_2| \leq c(B, \mu, a, \alpha) \lambda_k(\mu) (k+1)^{1/2-\mu}. \quad (7.9)$$

Далее, из (7.6)–(7.8) имеем ($0 < \mu \leq 1$)

$$\begin{aligned} |A''_2| &\leq \frac{c(B, \alpha)}{\sqrt{k+1}} \int_{a+1/k}^1 (t-a)^{\mu-2} dt \\ &= \frac{c(B, \alpha)}{\sqrt{k+1}} \begin{cases} \ln((1-a)k), & \mu = 1; \\ \frac{1}{1-\mu} [k^{1-\mu} - (1-a)^{\mu-1}], & 0 < \mu < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Сопоставляя (7.4)–(7.6), (7.9), (7.10), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 7.1.

ЛЕММА 7.2. Пусть m, l, r, n — целые, $r \geq 1$, $m \geq 0$, $m+1 \leq l \leq n$, $\alpha > -1$. Тогда

$$\begin{aligned} (x-t) \sum_{k=l}^n (2k+2\alpha+1) P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \\ = (n+\alpha+1) (P_{n+r+1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{n-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{n+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{n-m+1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)) \\ - (l+\alpha) (P_{l+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{l-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{l+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{l-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)) \\ + \sum_{k=l}^n \frac{1}{k+\alpha+1} ((\alpha-r)^2 P_{k+r+1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \\ - (\alpha+m)^2 P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{k-m+1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известной [8] рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} P_{-1}^{\alpha, \beta}(x) = 0, \quad P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha, \beta}(x) \\ = (2n + \alpha + \beta - 1)((2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2)P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\ - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha, \beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

которую в случае $\alpha = \beta$ перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2n(n + 2\alpha)P_n^{\alpha, \alpha}(x) = (2n + 2\alpha - 1)(2n + 2\alpha)xP_{n-1}^{\alpha, \alpha}(x) \\ - 2(n + \alpha - 1)(n + \alpha)P_{n-2}^{\alpha, \alpha}(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (n + \alpha)^2 P_n^{\alpha, \alpha}(x) + (n - 1 + \alpha)(n + \alpha)P_{n-2}^{\alpha, \alpha}(x) \\ = (2n + 2\alpha - 1)(n + \alpha)xP_{n-1}^{\alpha, \alpha}(x) + \alpha^2 P_n^{\alpha, \alpha}(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (n + \alpha)P_n^{\alpha, \alpha}(x) + (n - 1 + \alpha)P_{n-2}^{\alpha, \alpha}(x) \\ = (2n + 2\alpha - 1)xP_{n-1}^{\alpha, \alpha}(x) + \frac{\alpha^2}{n + \alpha}P_n^{\alpha, \alpha}(x). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Заменяем здесь n на $k + r$, а α — на $\alpha - r$, тогда

$$\begin{aligned} (k + \alpha)P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) + (k - 1 + \alpha)P_{k+r-2}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) \\ = (2k + 2\alpha - 1)xP_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) + \frac{(\alpha - r)^2}{k + \alpha}P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Если в (7.11) заменим n на $k - m$, а α — на $\alpha + m$, то получим

$$\begin{aligned} (k + \alpha)P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) + (k - 1 + \alpha)P_{k-m-2}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \\ = (2k + 2\alpha - 1)tP_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) + \frac{(\alpha + m)^2}{k + \alpha}P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Из равенства (7.12), умноженного на $P_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)$, вычтем равенство (7.13), умноженное на $P_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)$, тогда

$$\begin{aligned} & (k + \alpha)(P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)) \\ & - (k - 1 + \alpha)(P_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m-2}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{k+r-2}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)) \\ & = (2k + 2\alpha - 1)P_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \\ & + \frac{1}{k + \alpha}((\alpha - r)^2 P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m-1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \\ & - (\alpha + m)^2 P_{k+r-1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Суммируя правые и левые части равенств, полученных из (7.14) при $k = l+1, l+2, \dots, n+1$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 7.2.

Положим

$$\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+m}(x, t) = (1 - t^2)^{\alpha+m} \sum_{l=n+r+1}^k (2l + 2\alpha + 1) P_{l+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{l-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t). \quad (7.15)$$

Нам понадобятся некоторые оценки для $|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha}(x, t)|$ и $|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)|$.

ЛЕММА 7.3. Пусть $-1 < a < 1$, $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon \leq x \leq 1$, $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $r \geq 1$. Тогда

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha}(x, t)| \leq \frac{c(\alpha, r, a)}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}, \quad a \leq t \leq a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.16)$$

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)| \leq \frac{c(\alpha, r, a)}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}, \quad a \leq t \leq a + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.17)$$

$$\int_a^1 |\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)| dt \leq c(\alpha, r) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \ln(k+1). \quad (7.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 7.2, тогда

$$|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+m}(x, t)| \leq A_1 + A_2 + A_3, \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(k + \alpha + 1)(1 - t^2)^{\alpha+m}}{|x - t|} \\ &\quad \times |P_{k+r+1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{k-m+1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)|, \\ A_2 &= \frac{(n + r + \alpha + 1)}{|x - t|} (1 - t^2)^{\alpha+m} \\ &\quad \times |P_{n+2r+1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{n+r-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) - P_{n+2r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)P_{n+r-m+1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= (1 - t^2)^{\alpha+m} |x - t|^{-1} \\
&\times \left| \sum_{l=n+r+1}^k \frac{1}{l + \alpha + 1} ((\alpha - r)^2 P_{l+r+1}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{l-m}^{\alpha+m, \alpha+m}(t) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha + m)^2 P_{l+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{l-m+1}^{\alpha+m, \alpha+m}(t)) \right|.
\end{aligned}$$

Неравенства (7.16) и (7.17) вытекают непосредственно из (7.19) с учетом весовой оценки (2.6). Чтобы доказать (7.18), мы представим интеграл в правой части этого неравенства в следующем виде:

$$\int_a^1 = \int_a^{x-1/k} + \int_{x-1/k}^{x+1/k} + \int_{x+1/k}^1 = B_1 + B_2 + B_3. \quad (7.20)$$

При оценке B_2 воспользуемся равенством (7.15) и весовой оценкой (2.6), тогда

$$\begin{aligned}
B_2 &= \int_{x-1/k}^{x+1/k} |\mathcal{H}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)| dt \\
&\leq \sum_{l=n+m+1}^k (2l + 1 + \alpha) |P_{l+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)| \int_{x-1/k}^{x+1/k} |P_{l-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(t)| (1 - t^2)^{\alpha+1} dt \\
&\leq c(\alpha, r) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{l=n+r+1}^k \int_{x-1/k}^{x+1/k} dt \\
&\leq c(\alpha, r) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \quad (7.21)
\end{aligned}$$

При оценке B_1 и B_3 воспользуемся оценками (2.6) и (7.19). Это дает

$$B_i \leq c(\alpha, r) \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \ln(k + 1), \quad i = 1, 3. \quad (7.22)$$

Сопоставляя (7.20)–(7.22), приходим к оценке (7.18). Лемма 7.3 доказана.

Перейдем к вопросу о приближении функций $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$ посредством сумм Фурье S_n^{α} и операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}^{\alpha}(f)$. Прежде всего заметим, что если $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$ и $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, то смешанный ряд $\mathcal{F}_r^{\alpha}(f)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. В самом деле из леммы 7.1 и весовой оценки (2.6) имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2^r |f_{r,k}^{\alpha}|}{(k + 2\alpha)^{[r]}} |P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)| \leq c(B, \Delta, \alpha, \mu) \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\mu)}{k^{r+\mu}} \leq c(B, \Delta, \alpha, \mu).$$

Из равномерной сходимости ряда $\mathcal{F}_r^{\alpha}(f)$ следует, как это было показано при доказательстве теоремы 3.1, справедливость равенств (3.11), (3.35) и (3.36) и, как следствие, имеют место равенства (4.22) и (4.23). Теперь может быть доказана следующая

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $f \in S^r H_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $n \geq r + 1$, $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - S_n^\alpha(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \alpha, \Delta)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \times \left(1 + n \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r \right), \quad (7.23)$$

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)| \leq \frac{c(r, \mu, \alpha, \Delta)}{n^{r-1+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \quad (7.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что оценки вида (7.23) и (7.24) справедливы для функции $f \in S^r H_\Delta^\mu(1) \cap S^r H_{a+}^\mu$, где $-1 < a < 1$, $\Delta = \{a\}$. Для такой функции f в силу (4.7) и (4.22) имеем

$$f(x) - S_n^\alpha(f, x) = \psi_{r,n}^\alpha(x) + \mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x), \quad (7.25)$$

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) = \mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x). \quad (7.26)$$

Оценим $\mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x)$. В силу леммы 7.1 и весовой оценки (2.6) имеем

$$|\mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x)| \leq c(r, \mu, \alpha, a) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\mu)}{k^{r+\mu}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{k} \right)^{r-\alpha-1/2},$$

отсюда

$$|\mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x)| \leq \frac{c(r, \mu, \alpha, a)}{n^{r+\mu-1}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \quad (7.27)$$

Оценка (7.23) вытекает из (7.26) и (7.27). Далее, из равенства (4.13), оценки (2.6), лемм 2.2 и 7.1 имеем

$$|\psi_{r,n}^\alpha(x)| \leq \frac{c(r, \mu, \alpha, a)}{n^{r+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2}. \quad (7.28)$$

Из (7.26)–(7.28) выводим оценку (7.24). Теорема 7.1 доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$. Тогда при $n \geq r + 1$ имеет место оценка

$$\sup_{f \in S^r H_\Delta^\mu(1)} \|f - S_n^\alpha(f)\|_{C[-1,1]} \leq c(r, \mu, \Delta) \sup_{f \in S^r H_\Delta^\mu(1)} E_n(f)_{C[-1,1]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле при $0 < \mu < 1$ функция

$$f_{r,\mu}(x) = \frac{1}{r!} (x - a_1)^{r-1} |x - a_1|^\mu,$$

очевидно, принадлежит классу $S^r H_\Delta^\mu(1)$, следовательно,

$$\sup_{f \in S^r H_\Delta^\mu(1)} E_n(f) \geq E_n(f_{r,\mu})_{C[-1,1]}.$$

С другой стороны хорошо известно [9; п. 7.2.2], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-1+\mu} E_n(f_{r,\mu})_{C[-1,1]} > 0.$$

Сопоставляя эти оценки с (7.23), убеждаемся в справедливости утверждения следствия 7.1.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$, $\varepsilon > 0$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $\Delta_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^l (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\hat{\Delta}_\varepsilon = [-1, 1] \setminus \Delta_\varepsilon$, $x \in \hat{\Delta}_\varepsilon$, $f \in S^r H_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $n \geq r + 1$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n^\alpha(f, x)| &\leq c(r, \mu, \alpha, \Delta) \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}} \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\ln n}{\lambda_n(\mu)} (\varepsilon n)^{\mu-1} + \frac{1}{n\delta\lambda_n(\mu)} \right) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^r \right) \\ &\times \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x)| &\leq c(r, \mu, \alpha, \Delta) \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+\mu}} \\ &\times \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\ln n}{\lambda_n(\mu)} (\varepsilon n)^{\mu-1} + \frac{1}{n\delta\lambda_n(\mu)} \right) \\ &\times \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где $\delta = \min\{1/n, \varepsilon/2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x)$ при $x \in \hat{\Delta}_\varepsilon$. При этом, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Delta = \{a\}$, $-1 < a < 1$, $a + \varepsilon \leq x \leq 1$ и $f \in S^r H_\Delta^\mu(1) \cap S^r H_{a+}^\mu$. Равенство (4.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{r,n}^\alpha(x) &= \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}} \frac{1}{h_k^\alpha} \int_a^1 f^{(r)}(t) (1-t^2)^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(t) dt \\ &= Z_1 + Z_2, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где

$$Z_1 = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}} \frac{1}{h_k^\alpha} \int_a^{a+\delta} f^{(r)}(t) (1-t^2)^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(t) dt, \quad (7.32)$$

$$Z_2 = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^r P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x)}{(k+2\alpha)^{[r]}} \frac{1}{h_k^\alpha} \int_{a+\delta}^1 f^{(r)}(t) (1-t^2)^\alpha P_k^{\alpha, \alpha}(t) dt. \quad (7.33)$$

Оценим Z_1 . Из леммы 7.3 нетрудно заметить, что при $-1 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ и $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{(k+2\alpha)^{[r]}} \left| \int_a^\delta f^{(r)}(t) \mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha}(x, t) dt \right| \leq \frac{c(r, \alpha, a)}{(k+2\alpha)^{[r]}} \int_a^{a+1/n} |f^{(r)}(t)| dt \rightarrow 0,$$

поэтому к сумме (7.32) мы можем применить преобразование Абеля:

$$Z_1 = \sum_{k=n+r+1}^{\infty} b_k(\alpha, r) \int_a^{a+\delta} f^{(r)}(t) \mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha}(x, t) dt, \quad (7.34)$$

где в силу (1.3)

$$\begin{aligned} b_k(\alpha, r) &= \frac{2^r / h_k^\alpha}{(k+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+1)} - \frac{2^r / h_{k+1}^\alpha}{(k+1+2\alpha)^{[r]}(2k+2\alpha+3)} \\ &= \frac{k! \Gamma(k+2\alpha+1) 2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r]}} - \frac{(k+1)! \Gamma(k+2\alpha+2) 2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+2)(k+1+2\alpha)^{[r]}} \\ &= \frac{k! \Gamma(k+2\alpha+1) 2^{r+2\alpha+1}}{\Gamma^2(k+\alpha+1)(k+2\alpha)^{[r-1]}} \left(\frac{1}{k+2\alpha-r+1} - \frac{k+1}{(k+\alpha+1)^2} \right) \\ &= \frac{k! \Gamma(k+2\alpha+1)}{\Gamma^2(k+\alpha+1)} \frac{r(k+1) + \alpha^2}{(k+\alpha+1)^2(k+1+2\alpha-r)} \frac{2^{r+2\alpha+1}}{(k+2\alpha)^{[r-1]}} \\ &\leq \frac{c(\alpha, r)}{k^{r+1}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из (7.1), леммы 7.3 (оценка (7.16)) и неравенства (7.35) выводим ($f \in S^r H_\Delta(1)^\mu \cap S^r H_{a+}^\mu$)

$$\begin{aligned} |Z_1| &\leq \frac{c(\alpha, r, a)}{\varepsilon} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} k^{-r-1} \int_a^{a+\delta} |f^{(r)}(t)| dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, r, a)}{\varepsilon} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} k^{-r-1} \int_a^{a+\delta} (t-a)^{\mu-1} dt \\ &\leq \frac{c(\alpha, r, a)}{\varepsilon n^{r+\mu}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Оценим Z_2 . Используя метод интегрирования по частям и формулу (2.11), из (7.33) находим

$$Z_2 = Z_{21} + Z_{22}, \quad (7.37)$$

где

$$Z_{21} = f^{(r)}(a + \delta) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-1}(1 - (a + \delta)^2)^{\alpha+1}}{k(k + 2\alpha)^{[r]} h_k^{\alpha}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{k-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(a + \delta),$$

$$Z_{22} = \int_{a+\delta}^1 f^{(r+1)}(t) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2^{r-1}(1 - t^2)^{\alpha+1}}{k(k + 2\alpha)^{[r]} h_k^{\alpha}} P_{k+r}^{\alpha-r, \alpha-r}(x) P_{k-1}^{\alpha+1, \alpha+1}(t) dt.$$

Используя преобразование Абеля, мы можем записать эти равенства следующим образом:

$$Z_{21} = f^{(r)}(a + \delta) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} v_k(\alpha, r) \mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, a + \delta), \quad (7.38)$$

$$Z_{22} = \int_{a+\delta}^1 f^{(r+1)}(t) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} v_k(\alpha, r) \mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t) dt, \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} v_k(\alpha, r) &= \frac{2^{r-1}/h_k^{\alpha}}{k(k + 2\alpha)^{[r]}(2k + 2\alpha + 1)} - \frac{2^{r-1}/h_{k+1}^{\alpha}}{(k + 1)(k + 1 + 2\alpha)^{[r]}(2k + 2\alpha + 3)} \\ &= \frac{(k - 1)! \Gamma(k + 2\alpha + 1) 2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k + \alpha + 1)(k + 2\alpha)^{[r]}} - \frac{k! \Gamma(k + 2\alpha + 2) 2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k + \alpha + 2)(k + 1 + 2\alpha)^{[r]}} \\ &= \frac{(k - 1)! \Gamma(k + 2\alpha + 1) 2^{r+2\alpha}}{\Gamma^2(k + \alpha + 1)(k + 2\alpha)^{[r-1]}} \left(\frac{1}{k + 2\alpha - r + 1} - \frac{k}{(k + \alpha + 1)^2} \right) \\ &\leq \frac{c(\alpha, r)}{k^{r+2}}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Из леммы 7.3 (оценка (7.17)) и неравенства (7.40) имеем

$$\begin{aligned} |Z_{21}| &\leq \frac{c(r, \mu, a, \alpha) \delta^{\mu-1}}{n^{r+1} \varepsilon} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \\ &\leq \frac{c(r, \mu, a, \alpha)}{n^{r+\mu} n \delta \varepsilon} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Что касается интеграла Z_{22} , то из (7.39) и (7.40) имеем

$$|Z_{22}| \leq c(r, \alpha) \int_{a+\delta}^1 |f^{(r+1)}(t)| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)|}{k^{r+2}} dt. \quad (7.42)$$

Последний интеграл мы представим в виде

$$\int_{a+\delta}^1 = \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon/2} + \int_{a+\varepsilon/2}^1 = Z'_{22} + Z''_{22}. \quad (7.43)$$

При оценке Z'_{22} мы можем считать, что $\delta = 1/n$ (иначе $Z'_{22} = 0$). В силу леммы 7.3 (оценки (7.17) и (7.18))

$$\begin{aligned} Z'_{22} &\leq c(r, a, \alpha) \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} \int_{a+1/n}^{a+\varepsilon/2} (t-a)^{\mu-2} dt \\ &\leq c(r, a, \alpha) \frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \frac{\lambda_n(\mu)}{n^{r+2}}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} |Z''_{22}| &\leq c(r, \alpha) \int_{a+\varepsilon/2}^1 (t-a)^{\mu-2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)|}{k^{r+2}} dt \\ &\leq c(r, \alpha) \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\mu-2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} \int_{a+\varepsilon/2}^1 |\mathcal{K}_{n,k}^{\alpha-r, \alpha+1}(x, t)| dt \\ &\leq c(r, \alpha) \varepsilon^{\mu-2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{n^{r+2}} \\ &\leq c(r, \alpha) \varepsilon^{\mu-2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2} \frac{\ln(n+1)}{n^{r+2}}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Сопоставляя (7.42)–(7.45), имеем

$$|Z_{22}| \leq \frac{c(r, \alpha, a)}{n^{r+2}} \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda_n(\mu) + \frac{\ln n}{(n\varepsilon)^{1-\mu}} \right) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \quad (7.46)$$

Из (7.37), (7.41) и (7.46) выводим

$$|Z_2| \leq \frac{c(r, \alpha, a, \mu)}{n^{r+2}} \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda_n(\mu) + \frac{1}{n\delta} + \frac{\ln n}{(n\varepsilon)^{1-\mu}} \right) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\alpha-1/2}. \quad (7.47)$$

Утверждение теоремы 7.2 вытекает из (7.25), (7.26), (7.28), (7.31), (7.36) и (7.47).

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $0 < \mu \leq 1$, $0 < \varepsilon < 1$, $\Delta = \{a_1, \dots, a_l\} \subset (-1, 1)$, $\Delta_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^l (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon)$, $\widehat{\Delta}_\varepsilon = [-1, 1] \setminus \Delta_\varepsilon$, $f \in S^r H_\Delta^\mu(1)$. Тогда при $n \geq r+1$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| &\leq \frac{c(r, \mu, \alpha, \Delta)}{n^{r-\nu-1+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2}, \\ &\quad -1 \leq x \leq 1, \\ \left| f^{(\nu)}(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} \mathcal{Y}_{n+2r}^\alpha(f, x) \right| &\leq \frac{c(r, \mu, \alpha, \Delta, \varepsilon)}{n^{r-\nu+\mu}} \lambda_n(\mu) \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \right)^{r-\nu-\alpha-1/2}, \\ &\quad x \in \widehat{\Delta}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из равенства (4.23) и оценок (7.24) и (7.30), примененных к функции $f^{(\nu)}(x)$ (вместо $f(x)$).

Список литературы

1. Агаханов С. А., Натансон Г. И. Функция Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астроном. 1968. Т. 1. №1. С. 11–23.
2. Агаханов С. А., Натансон Г. И. Приближение функций суммами Фурье–Якоби // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. №1. С. 9–10.
3. Бадков В. М. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. №6. С. 1263–1283.
4. Бадков В. М. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным многочленам // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 51–106.
5. Шарапудинов И. И. О наилучшем приближении и суммах Фурье–Якоби // Матем. заметки. 1983. Т. 34. №5. С. 651–661.
6. Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191. №5. С. 143–160.
7. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
8. Gasper G. Positivity and special functions // Theory and application of special functions. Proc. Adv. Semin., Madison, 1975 / ed. R. A. Askey. New York: Academic Press, 1975. P. 375–433.
9. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
10. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

Дагестанский научный центр РАН,
г. Махачкала

Поступила в редакцию
25.10.2001 и 12.11.2002