Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. ЩигOLEв, Конечная базирuемость некоторых классов неприводимых представлений симметрических групп, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 3, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:09:06

УДК 512.547.2

В. В. Щиголев

Конечная базируемость некоторых классов неприводимых представлений симметрических групп

В работе исследуется возможность задания неприводимых представлений симметрических групп при помощи конечного числа соотношений. Доказана конечная базируемость классов представлений, соответствующих разбиениям на две части и разбиениям из фундаментального алькова.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В этой работе мы продолжим исследование, начатое в [1]. Напомним основные использованные там определения. Пусть $X_n = \{x_t^s : t \in \mathbb{N}, s = 1, \dots, n\}$ – множество коммутирующих переменных, K – поле и $F_n = K[X_n]$ – свободная коммутативная алгебра с единицей. Через F_n^r обозначим подпространство алгебры F_n , натянутое на мономы вида $x_{i_1}^{j_1} \cdots x_{i_r}^{j_r}$, где $\{i_1, \dots, i_r\} = \{1, \dots, r\}$. Симметрическая группа $G(r)$ степени r действует на F_n^r слева по формуле $\pi x_{i_1}^{j_1} \cdots x_{i_r}^{j_r} = x_{\pi i_1}^{j_1} \cdots x_{\pi i_r}^{j_r}$.

Положим $[x_{t_1}, \dots, x_{t_k}] = \sum_{\sigma \in G(k)} \text{sgn}(\sigma) x_{t_1}^{\sigma(1)} \cdots x_{t_k}^{\sigma(k)}$, где $k = 1, \dots, n$. Пусть λ – разбиение числа r на не более чем n частей. Через S^λ обозначим подпространство в F_n^r , натянутое на многочлены вида $\prod_{i=1}^{\lambda_1} [x_{t_{i,1}}, \dots, x_{t_{i,\mu_i}}]$, где μ – разбиение, сопряженное с λ , и $\{t_{i,j} : 1 \leq i \leq \lambda_1, 1 \leq j \leq \mu_i\} = \{1, \dots, r\}$. Для любого натурального i через $\lambda + (i^n)$ обозначим разбиение $(\lambda_1 + i, \dots, \lambda_n + i)$ (см. § 3).

Пусть U – некоторый $KG(r)$ -подмодуль модуля F_n^r . Через $U \uparrow$ (или более точно через $U \uparrow_n$, если нужно явно указать n) мы обозначим $KG(r+n)$ -подмодуль модуля F_n^{r+n} , порожденный подпространством $U[x_{r+1}, \dots, x_{r+n}]$. Заметим, что если $U \subset S^\lambda$, то $U \uparrow \subset S^{\lambda+(1^n)}$.

Обратно, пусть V – некоторый $KG(r+n)$ -подмодуль модуля F_n^{r+n} . Через $V \downarrow$ (или через $V \downarrow_n$) мы обозначим множество таких многочленов $f \in F_n^r$, что $f[x_{r+1}, \dots, x_{r+n}] \in V$. Понятно, что $V \downarrow$ есть $KG(r)$ -модуль. С помощью следствия 17.18 работы [2] легко доказать, что если $V \subset S^{\lambda+(1^n)}$, то $V \downarrow \subset S^\lambda$.

Через $U \uparrow^t$ или $U \downarrow^t$ будем обозначать результат t кратного применения к U операции $\uparrow$ или $\downarrow$ соответственно, конечно, если это возможно (для $U \downarrow^t$). Отметим следующие простые свойства: $U \downarrow \uparrow \subset U \subset U \uparrow \downarrow$ и $U \downarrow \uparrow \downarrow = U \downarrow$ для любого подмодуля U модуля F_n^r , где $r \geq n$.

В работе [1] была сформулирована следующая

ПРОБЛЕМА 2. Пусть $V_i \subset S^{\lambda+(q_i^n)}$, $i \in \mathbb{N}$, где $0 \leq q_1 < q_2 < \dots$, — некоторая последовательность подмодулей таких, что $V_i \uparrow^{q_{i+1}-q_i} \subset V_{i+1}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Существует ли такое число N , что для каждого $i > N$ выполнено $V_N \uparrow^{q_i-q_N} = V_i$?

Эта проблема рассматривалась как некоторый частный, но важный случай следующей проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. Предположим, что $\text{char } K = p > 0$. Верно ли, что любая последовательность многочленов алгебры A конечно базисуема?

Здесь A — свободная коммутативная K -алгебра со свободными порождающими $f_i(x_{t_1}, \dots, x_{t_{n(i)}})$, где $i = 1, \dots, k$ и $t_1, \dots, t_{n(i)} \in \mathbb{N}$, полилинейность многочленов понимается относительно кратностей переменных x_j (например, многочлен $f(x_1, x_2)f(x_2, x_3)$ не считается полилинейным) и следствие понимается относительно K -линейных действий, умножений на элементы из A и переименований переменных x_j .

Проблему 1 можно рассматривать как аналог проблемы Шпехта для форм. Роль тождеств при этом играют соотношения с формами. Примером таких соотношений могут служить хорошо известные соотношения Гарни. В случае $\text{char } K = 0$ последние полностью определяют модули Шпехта, а следовательно, и неприводимые модули. В случае $\text{char } K = p > 0$ это уже неверно и возникает вопрос о существовании конечного количества соотношений, определяющих некоторые классы неприводимых модулей. В силу результатов работы [1] естественно рассматривать классы вида $D^{\lambda+(i^n)}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $\lambda + (1^n)$ — p -регулярное разбиение. Такой выбор соответствует решению проблемы 2 в случае, когда $q_i = i - 1$ и V_i — максимальный подмодуль модуля $S^{\lambda+(i-1^n)}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$.

Положительное решение последней проблемы для тех разбиений λ , для которых выполнено условие 1, сформулированное далее в § 3, получено в теореме 1. В силу результатов работ [3] и [4] существуют разбиения λ , для которых условие 1 не выполнено. Однако точно известно, что оно выполнено для разбиений λ , содержащих не более n ненулевых частей и удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 - \lambda_n \leq p - n$, и для разбиений, состоящих из двух частей. Проверка этого произведена в § 4 на основании результатов работ [5] и [6]. Заметим, что случай $n = 2$ рассмотрен просто для примера, так как теорема 6 работы [1] решает частный случай $n = 2$ проблемы 1 без каких-либо ограничений на подмодули V_i .

§ 2. Предварительные сведения

Фиксируем алгебраически замкнутое поле K положительной характеристики p и натуральное число $n \geq 2$. Пусть E — линейное пространство над K с базисом $v_1, \dots, v_n$ и $GL_n(K)$ — группа всех K -линейных автоморфизмов пространства E . Группа $GL_n(K)$ естественным образом снабжается структурой алгебраической K -группы, и мы можем рассматривать полиномиальные (рациональные) $GL_n(K)$ -модули относительно этой структуры. Через Λ обозначим множество всех наборов целых чисел длины n . Будем писать $\lambda \geq \mu$, где $\lambda, \mu \in \Lambda$, если для любого $i = 1, \dots, n$ выполнено $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$. Если V — полиномиальный $GL_n(K)$ -модуль и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — набор целых чисел, то через V^λ обо-

значим множество векторов $v \in V$ таких, что $\text{diag}(t_1, \dots, t_n)v = t_1^{\lambda_1} \dots t_n^{\lambda_n}v$ для любых $t_1, \dots, t_n \in K^*$. Очевидно, что V^λ – линейное пространство над K . Это пространство называется *весовым пространством модуля V , соответствующим λ* . В случае $V^\lambda \neq 0$ набор λ называется *весом модуля V* . Через Λ^+ обозначим подмножество множества Λ , состоящее из наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ таких, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

В работах [7] и [8] развита теория так называемых наклонных модулей (“tilting modules”). В этой работе мы считаем, что любой наклонный модуль есть конечномерный полиномиальный $GL_n(K)$ -модуль. Мы не будем давать определения этих объектов. Вместо этого перечислим их основные свойства, необходимые для дальнейшего изложения.

- 1) Модуль E наклонный (в силу определений работ [7] и [8]).
- 2) Тензорное произведение наклонных модулей – наклонный модуль (первое полное доказательство в общем случае получено О. Матье в [9]).
- 3) Для любого $\lambda \in \Lambda^+$ существует неразложимый наклонный модуль $P(\lambda)$ такой, что $\dim P(\lambda)^\lambda = 1$ и, если для некоторого $\mu \in \Lambda$ выполнено $\dim P(\lambda)^\mu > 0$, то $\mu \leq \lambda$ (см. [7; теорема (1.1)]).
- 4) Любой наклонный модуль разлагается в прямую сумму наклонных модулей, изоморфных $P(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$ (см. [7; теорема (1.1)]).

Для любого натурального r через $G(r)$ обозначим симметрическую группу степени r , т.е. множество таких биекций σ множества натуральных чисел, что $\sigma(i) = i$ для любого $i > r$. Такая реализация симметрических групп влечет включения $G(r) \subset G(r')$ при $r \leq r'$. Через $\text{sgn}(\sigma)$ обозначим знак перестановки σ . Обозначим также через Λ_r^+ подмножество множества Λ^+ , состоящее из наборов неотрицательных чисел, сумма которых равна r . Для любого множества S через i_S обозначим тождественное отображение из S в себя.

Рассмотрим произвольное разложение $E^{\otimes r} = \bigoplus_{i=1}^{h_r} M_i(r)$ в прямую сумму неразложимых $GL_n(K)$ -модулей. В силу свойств 1) и 2) модуль $E^{\otimes r}$ наклонный. Поэтому в силу свойства 4) и теоремы Крулля–Шмидта модули $M_i(r)$ неразложимые наклонные. Положим $A(r) = \text{End}_{GL_n(K)} E^{\otimes r}$. Мы имеем естественные проекции $\pi_i^r: E^{\otimes r} \rightarrow M_i(r)$ и вложения $\varepsilon_i^r: M_i(r) \rightarrow E^{\otimes r}$. Положим $e_i^r = \varepsilon_i^r \pi_i^r$. Эндоморфизмы e_i^r – примитивные идемпотенты и $e_i^r e_j^r = 0$ при $i \neq j$.

Непосредственно из определения видно, что любой вес модуля $E^{\otimes r}$ имеет неотрицательные компоненты, сумма которых равна r . Поэтому имеет место разбиение $\{1, \dots, h_r\} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_r^+} I_\lambda$, где I_λ – возможно пустые множества чисел и для $i \in I_\lambda$ выполнено $M_i(r) \cong P(\lambda)$.

Для каждой пары $i, j \in I_\lambda$ выберем некоторый изоморфизм $\tau_{i,j}^r$ из $M_j(r)$ в $M_i(r)$ таким образом, что $\tau_{i,i}^r = i_{M_i(r)}$ и $\tau_{i,j}^r \tau_{j,k}^r = \tau_{i,k}^r$ для любых $i, j, k \in I_\lambda$.

Рассмотрим следующие идемпотенты $e_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} e_i^r$. При этом если I_λ пусто, то положим $e_\lambda = 0$. Имеет место представление $A(r) = S(r) \oplus J(r)$, где $S(r)$ – множество эндоморфизмов вида

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_r^+} \sum_{i,j \in I_\lambda} \alpha_{i,j} \varepsilon_i^r \tau_{i,j}^r \pi_j^r,$$

где $\alpha_{i,j} \in K$, а $J(r)$ – множество эндоморфизмов вида

$$\sum_{i,j=1}^{h_r} \varepsilon_i^r \varphi_{i,j} \pi_j^r,$$

где $\varphi_{i,j} \in \text{Hom}_{GL_n(K)}(M_j(r), M_i(r))$ такие, что если $i, j \in I_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda_r^+$, то эндоморфизм $\varphi_{i,j} T_{j,i}^r$ нильпотентен. Это разложение легко следует из леммы Фитинга, алгебраической замкнутости поля K и конечномерности всех рассматриваемых модулей. Имеют место следующие формулы

$$A(r) = \bigoplus_{i,j=1}^{h_r} e_i^r A(r) e_j^r = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_r^+} S(r) e_\lambda \oplus \bigoplus_{\lambda, \mu \in \Lambda_r^+} e_\lambda J(r) e_\mu.$$

При этом $S(r)$ – подалгебра алгебры $A(r)$ и $S(r) e_\lambda = e_\lambda S(r) = e_\lambda S(r) e_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda_r^+$.

Для $\pi \in G(r)$ рассмотрим элемент $\sigma_r(\pi)$ из $A(r)$, действующий по формуле

$$\sigma_r(\pi)(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) = v_{i_{\pi^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\pi^{-1}(r)}}.$$

Продолжая действие σ_r по линейности на $KG(r)$, получаем гомоморфизм из $KG(r)$ в $A(r)$. Пользуясь этим гомоморфизмом, мы будем рассматривать каждый A -модуль как $KG(r)$ -модуль.

ЛЕММА 1 [10]. *Отображение σ_r – эпиморфизм. При $r \leq n$ отображение σ_r – изоморфизм, а при $r \geq n+1$ ядро $\text{Ker } \sigma_r$ порождено как двусторонний идеал алгебры $KG(r)$ многочленом $\sum_{\sigma \in KG(n+1)} \text{sgn}(\sigma) \sigma$.*

Под *разбиением* числа r понимаем набор целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ такой, что $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = r$. При этом этот набор называется *p -регулярным*, если никакие p чисел λ_i не равны некоторому ненулевому числу. Иначе набор называется *p -сингулярным*. Имеется стандартный способ (см. [2]) сопоставления каждому p -регулярному разбиению λ числа r неприводимого $KG(r)$ -модуля D^λ . При этом любой неприводимый $KG(r)$ -модуль изоморфен одному из таких D^λ . Используя выше определенный эпиморфизм σ_r , можно каждый неприводимый $KG(r)$ -модуль N , изоморфный некоторому D^λ для p -регулярного $\lambda \in \Lambda_r^+$, превратить в $A(r)$ -модуль по формуле $at = xt$, где $t \in N$, $a \in A(r)$, $x \in KG(r)$ и $\sigma_r(x) = a$. Это определение корректно, так как по лемме 1 и непосредственной конструкции D^λ имеем $(\text{Ker } \sigma_r) D^\lambda = 0$. Используя лемму 1, легко проверить, что любой неприводимый $A(r)$ -модуль изоморфен одному из D^λ для некоторого p -регулярного $\lambda \in \Lambda_r^+$.

Будем говорить, что идемпотенту e_λ соответствует неприводимое представление D^μ , если $e_\lambda D^\mu \neq 0$. При этом очевидно, что $e_\lambda t = t$ для любого $t \in D^\mu$ и $e_\nu D^\mu = 0$, если $\nu \neq \lambda$. Из общей теории следует, что каждому ненулевому идемпотенту соответствует единственное с точностью до изоморфизма неприводимое представление.

ЛЕММА 2. Любому идемпотенту e_λ , где λ – p -регулярное разбиение из Λ_r^+ , соответствует представление D^λ . Если λ – p -сингулярное разбиение, то $e_\lambda = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $G = G(r)$, $A = A(r)$, $M_i = M_i(r)$ и $e_i = e_i^r$. Через X обозначим множество таких $\lambda \in \Lambda_r^+$, что $e_\lambda \neq 0$. Для $\lambda \in X$ через $t(\lambda)$ обозначим такое p -регулярное разбиение из Λ_r^+ , что $e_\lambda D^{t(\lambda)} \neq 0$. Очевидно, что t – биективное отображение множества X на подмножество p -регулярных разбиений множества Λ_r^+ .

Для любого $\lambda \in \Lambda_r^+$ положим

$$v(\lambda) = c_1 \cdots c_{\lambda_1} \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_1}_{\lambda_1 \text{ раз}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{v_n \otimes \cdots \otimes v_n}_{\lambda_n \text{ раз}},$$

где c_i – сумма элементов вида $\text{sgn}(\sigma)\sigma$ по всем $\sigma \in G$ таким, что $\sigma(i) = i$ для любого i , не принадлежащего множеству $\{i + \sum_{j=1}^s \lambda_j : 0 \leq s \leq n-1, i \leq \lambda_{s+1}\}$. Понятно, что модуль $Av(\lambda) = KGv(\lambda)$ изоморфен как KG -модуль модулю Шпехта S^λ , определенному в [2]. Действительно, поставим в соответствие элементу $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$ из $(E^{\otimes r})^\lambda$ таблоид, у которого каждое число s , $s = 1, \dots, r$, стоит в строке i_s . Такое соответствие, продолженное линейно на все $(E^{\otimes r})^\lambda$, задает изоморфизм KG -модулей $(E^{\otimes r})^\lambda$ и M^λ . Таблоиды и модуль M^λ понимаем в смысле определений 3.9 и 4.1 работы [2] с той лишь разницей, что в нашем случае симметрическая группа действует слева. Легко видеть, что ограничение этого изоморфизма на $Av(\lambda)$ дает требуемое соответствие.

Возьмем произвольное $\lambda \in X$. Пусть P – максимальный A -подмодуль модуля $Av(t(\lambda))$. Модули $Av(t(\lambda))/P$ и $D^{t(\lambda)}$ изоморфны как KG -модули, а значит, и как A -модули. Отсюда и из $e_\lambda D^{t(\lambda)} \neq 0$ следует $e_\lambda Av(t(\lambda)) \neq 0$ и $e_i Av(t(\lambda)) \neq 0$ для некоторого $i \in I_\lambda$. Все элементы ненулевого пространства $e_i Av(t(\lambda))$ имеют вес $t(\lambda)$. С другой стороны, $e_i Av(t(\lambda)) \subset M_i \cong P(\lambda)$. Отсюда $t(\lambda)$ – вес модуля $P(\lambda)$ и $t(\lambda) \leq \lambda$ в силу свойства 3).

Докажем обратное неравенство. Без ограничения общности можно считать, что $I_\lambda = \{1, \dots, l\}$. Здесь $l \geq 1$, так как $e_\lambda \neq 0$. Известно, что модуль $KG L_n(K)v(\lambda)$ изоморфен так называемому модулю Вейля со старшим весом λ . Но этот же модуль вкладывается в $P(\lambda)$. Поэтому существует вложение $GL_n(K)$ -модулей $\tau: KGL_n(K)v(\lambda) \rightarrow M_1$. Пусть $v = \tau(v(\lambda))$.

Пусть U – подгруппа группы $GL_n(K)$, порожденная такими автоморфизмами φ , что $\varphi(v_k) = v_k$ при $k \neq i$ и $\varphi(v_i) = v_i + \alpha v_j$, где $\alpha \in K$ и $j < i$. Следствие 17.18 работы [2] фактически означает, что элемент $m \in (E^{\otimes r})^\lambda$ принадлежит $Av(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $um = m$ для любого $u \in U$. Используя этот факт и то, что τ – вложение $GL_n(K)$ -модулей, мы получаем $v \in Av(\lambda)$.

Если бы идемпотент e_λ аннулировал любой композиционный фактор модуля Av , то мы бы имели $e_\lambda Av = (e_\lambda)^s Av = 0$. Однако $v \in e_\lambda Av$. Поэтому $e_\lambda D^\mu \neq 0$, где D^μ – композиционный фактор модуля Av , а следовательно, и модуля $Av(\lambda)$. Так как $Av(\lambda) \cong S^\lambda$, то $\mu \geq \lambda$. По определению $\mu = t(\lambda)$ и, следовательно, по ранее доказанному $\mu \leq \lambda$. Отсюда мы получаем $t(\lambda) = \lambda$ и $Av = Av(\lambda)$. Лемма доказана.

В процессе доказательства мы одновременно получили

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть v – ненулевой элемент из $M_i \cong P(\lambda)$ веса λ . Тогда $GL_n(K)$ -модуль, порожденный v , изоморфен модулю Вейля со старшим весом λ , а $G(r)$ -модуль, порожденный v , изоморфен модулю Шпекта S^λ .

Лемма 2 очень важна для нашей теории. Она дает описание через примитивные идемпотенты алгебры A тех же самых неприводимых модулей, которые описаны в [2] и которые изучались в [1]. Без нее выше описанный подход был бы неэффективен. Автору не известно, как точно сослаться на это утверждение. Поэтому здесь приведено его доказательство.

§ 3. Операторы вложения

В предыдущем параграфе мы выбрали произвольное разложение модуля $E^{\otimes r}$ в прямую сумму неразложимых наклонных модулей. Однако нам будет удобно, чтобы такие разложения для разных r были согласованы. Поэтому далее мы будем строить их по индукции следующим образом.

Сначала положим $M_1(1) = E$. Пусть имеется разложение

$$E^{\otimes r} = \bigoplus_{i=1}^{h_r} M_i(r).$$

В силу свойств 1) и 2) каждый модуль $M_i(r) \otimes E$ наклонный. Поэтому по свойству 4) он разложим в прямую сумму неразложимых наклонных модулей. Собирая все такие слагаемые, получаем разложение модуля $E^{\otimes r+1}$.

Пусть $r < r'$ два натуральных числа. Определим оператор вложения

$$f_{r',r}: A(r) \rightarrow A(r')$$

по формуле $f_{r',r}(\varphi) = \varphi \otimes i_{E^{\otimes r'-r}}$. В этом случае имеем $f_{r',r} \circ \sigma_r = \sigma_{r'}|_{KG(r)}$ и $f_{r'',r'} \circ f_{r',r} = f_{r'',r}$. Понятно, что если $M_i(r) \otimes E^{\otimes r'-r} = \bigoplus_{j \in X} M_j(r')$, то $f_{r',r}(e_i^r) = \sum_{j \in X} e_j^{r'}$.

Напомним терминологию и обозначения, использованные в [1]. Разбиение $\lambda \in \Lambda_r^+$ называется *вырожденным* (*n -вырожденным*), если $\lambda_n = 0$. Для двух разбиений $\lambda, \mu \in \Lambda_r^+$ и целых α, β через $\alpha\lambda + \beta\mu$ обозначаем покомпонентную линейную комбинацию этих разбиений. Через (i^n) обозначаем набор длины n , в котором все компоненты равны i . Через d_r обозначаем сумму идемпотентов e_λ по всем вырожденным $\lambda \in \Lambda_r^+$.

Предположим теперь, что λ – разбиение из Λ_r^+ , для которого выполнено

УСЛОВИЕ 1. Существует a такое, что для любого вырожденного $\mu \in \Lambda_{r+an}^+$ и $k \geq a$ у модуля $P(\mu) \otimes E^{\otimes (k-a)n}$ нет прямого слагаемого, изоморфного $P(\lambda + (k^n))$.

Отсутствие выше упомянутого прямого слагаемого для любого вырожденного μ эквивалентно тому, что $e_{\lambda+(k^n)} f_{r+kn, r+an}(d_{r+an}) = 0$. Как мы увидим в § 4, такое предположение не лишено смысла.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что разбиение $\lambda + (1^n)$ p -регулярное. Пусть $k \geq r^2/n + (2r+1)a + a^2n$ и μ – вырожденное p -регулярное разбиение из Λ_{r+kn}^+ . Тогда любой $KG(r+kn)$ -модуль M длины 2 с факторами $D^{\lambda+(k^n)}$ и D^μ разложим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя, если необходимо, к двойственным модулям, можно без ограничения общности считать, что существует такой подмодуль $N \subset M$, что $N \cong D^\mu$ и $M/N \cong D^{\lambda+(k^n)}$.

Пусть x и y такие элементы из $KG(r+an)$, что $\sigma_{r+an}(x) = 1 - d_{r+an}$ и $\sigma_{r+an}(y) = d_{r+an}$. При этом $\sigma_{r+kn}(x) = f_{r+kn, r+an}(1 - d_{r+an})$ и $\sigma_{r+kn}(y) = f_{r+kn, r+an}(d_{r+an})$.

Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{r+kn}(y)e_{\lambda+(k^n)} &= 0, & \sigma_{r+kn}(x)e_\mu &= 0, \\ \sigma_{r+kn}(y)e_\mu &= e_\mu, & \sigma_{r+kn}(x)e_{\lambda+(k^n)} &= e_{\lambda+(k^n)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое из них следует из сделанного предположения о λ . Второе следует из того, что для любого невырожденного $\nu \in \Lambda_{r+an}^+$ у модуля $P(\nu) \otimes E^{\otimes(k-a)n}$ нет прямого слагаемого, изоморфного $P(\mu)$. Последние два равенства следуют из уже доказанных и формулы $\sigma_{r+kn}(x) + \sigma_{r+kn}(y) = 1$.

Рассмотрим сдвиги элемента x , определенные формулой $x_i = \pi_i x \pi_i^{-1}$, $i = 1, \dots, r+an+1$, где $\pi_i = \prod_{j=1}^{r+an} (j + (i-1)(r+an), j)$. Заметим, что $\text{supp}(x_i) = \{1 + (i-1)(r+an), \dots, i(r+an)\}$. Так как $\text{supp}(x_i)$ для различных i не пересекаются, то элементы x_i коммутируют. Ограничение k снизу в условии теоремы обеспечивает принадлежность всех x_i алгебре $KG(r+kn)$.

Имеют место соотношения

$$yM \subset N, \quad x_i N = 0, \quad yN \neq 0, \quad (2)$$

которые следуют из первых трех равенств (1) и леммы 2.

Выберем произвольный элемент $m \in M \setminus N$ и докажем, что справедливо соотношение $x_1 \cdots x_{r+an+1} m \notin N$. Предположим противное. Тогда

$$\sigma_{r+kn}(x_1) \cdots \sigma_{r+kn}(x_{r+an+1}) \overline{m} = 0,$$

где $\overline{m}$ – образ m при проекции $M \rightarrow M/N$. Отсюда, используя последнюю из формул (1) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{r+kn}(x_i) \overline{m} &= \sigma_{r+kn}(\pi_i) \sigma_{r+kn}(x) \sigma_{r+kn}(\pi_i^{-1}) \overline{m} \\ &= \sigma_{r+kn}(\pi_i) \sigma_{r+kn}(x) e_{\lambda+(k^n)} \sigma_{r+kn}(\pi_i^{-1}) \overline{m} = \overline{m}. \end{aligned}$$

В результате $\overline{m} = 0$. Приходим к противоречию.

Пусть P – $KG(r+kn)$ -модуль, порожденный элементом $x_1 \cdots x_{r+an+1} m$. Вычислим, чему равно yP . Возьмем $\alpha \in G(r+kn)$. Мощность множества $\text{supp}(\alpha^{-1}y\alpha)$ не превосходит $r+an$. Поэтому существует $i = 1, \dots, r+an+1$ такое, что элементы $\alpha^{-1}y\alpha$ и x_i коммутируют. Имеем

$$y\alpha x_1 \cdots x_{r+an+1} m \in \alpha x_i (\alpha^{-1}y\alpha) M \subset \alpha x_i N = 0.$$

Отсюда $yP = 0$. Так как $yN \neq 0$, то $P \cap N = 0$ и $M = P \oplus N$. Теорема доказана.

Индукцией по длине легко доказать, что в условиях теоремы 1 любой $KG(r+kn)$ -модуль M конечной длины, у которого один фактор изоморфен $D^{\lambda+(k^n)}$, а остальные вырождены, содержит подмодуль, изоморфный $D^{\lambda+(k^n)}$.

§4. Примеры

Мы доказали теорему 1 в предположении, что λ удовлетворяет условию 1. В этом параграфе мы приведем два примера таких разбиений.

ПРИМЕР 1. Предположим, что $n < p$. Для любого натурального R положим $C_0(R) = \{\lambda \in \Lambda_R^+ : \lambda_1 - \lambda_n \leq p - n\}$. Лемма 12(2) работы [5] утверждает, что если $\mu \in \Lambda_R^+ \setminus C_0(R)$, то у модуля $P(\mu) \otimes E$ нет прямого слагаемого, изоморфного $P(\nu)$, где $\nu \in C_0(R + 1)$. Отсюда очевидно следует, что для любого i у модуля $P(\mu) \otimes E^i$ нет прямого слагаемого, изоморфного $P(\nu)$, где $\nu \in C_0(R + i)$.

Выберем произвольное λ из $C_0(r)$ и докажем, что оно удовлетворяет условию 1.

ЛЕММА 3. Пусть $R \geq (n - 1)(p - n) + 1$ и μ — вырожденное разбиение из Λ_R^+ . Тогда $\mu \notin C_0(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $(n - 1)\mu_1 \geq \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} = R > (n - 1)(p - n)$. Отсюда $\mu_1 - \mu_n = \mu_1 > p - n$ и $\mu \notin C_0(R)$. Лемма доказана.

Выберем некоторое, например, минимальное a , удовлетворяющее неравенству $r + an \geq (n - 1)(p - n) + 1$. Тогда в силу леммы 12(2) работы [5] и леммы 3 разбиение λ удовлетворяет условию 1 для данного a . Следовательно, к разбиению λ можно применить теорему 1. Однако учитывая специфику случая $n < p$, возможно улучшить оценку этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda \in C_0(r)$, $\lambda_n \geq (n - 1)(p - n) + 2$ и μ — вырожденное разбиение из Λ_r^+ . Тогда любой $KG(r)$ -модуль M длины 2 с факторами D^λ и D^μ разложим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО отличается от доказательства теоремы 1 в основном выбором элементов x и y . Аналогично теореме 1 без ограничения общности можно считать, что существует такой подмодуль $N \subset M$, что $N \cong D^\mu$ и $M/N \cong D^\lambda$. Для краткости положим $R = (n - 1)(p - n) + 1$.

Пусть $x = (1/n!) \sum_{\sigma \in G(n)} \text{sgn}(\sigma) \sigma$ и $x_i = \pi_i g \pi_i^{-1}$, $i = 1, \dots, R + 1$, где $\pi_i = \prod_{j=1}^n (j + (i - 1)n, j)$. Выберем $y \in KG(R)$ так, чтобы $\sigma_R(y) = d_R$. Тогда $\sigma_r(y) = f_{r,R}(d_R)$. По лемме 12(2) работы [5] и лемме 3 тогда получаем $\sigma_r(y)e_\lambda = 0$. Первая и третья из формул (2) проверяются так же, как в теореме 1. Вторая формула следует из того, что μ содержит не более $n - 1$ нулевых частей. Из непосредственной конструкции модуля D^λ как фактормодуля модуля Шпехта S^λ и неравенства $\lambda_n \geq R + 1$ следует, что существует $m \in M$, для которого $x_1 \dots x_{R+1} m \notin N$. Через P обозначим $KG(r)$ -подмодуль модуля M , порожденный элементом $x_1 \dots x_{R+1} m$, и аналогично теореме 1 покажем, что $yP = 0$. Отсюда $M = P \oplus N$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Предположим, что $n = 2$. Выберем произвольное $\lambda \in \Lambda_r^+$. Пусть $\mu \in \Lambda_{r+1}^+$ такое, что модуль $P(\mu)$ есть прямое слагаемое модуля $P(\lambda) \otimes E$. Предположим, что k — некоторое натуральное число, для которого $\lambda_1 - \lambda_2 \geq p^k - 1$. Докажем, что тогда $\mu_1 - \mu_2 \geq p^k - 1$. Доказательство будет заключаться в применении формул для произведения наклонных модулей §1 работы [6]. В этих формулах речь идет о наклонных модулях над $SL_2(K)$. Однако понятно, что если вместо верной

формулы вида $T(s) \otimes T(1) = T(s')$ мы напомним

$$P\left(\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2}\right)\right) \otimes E = P\left(\left(\frac{r+1+s'}{2}, \frac{r+1-s'}{2}\right)\right),$$

то опять получим верную формулу. Будем иметь в виду такие переформулировки при цитировании формул из работы [6] в ниже приведенных вычислениях.

Положим для краткости $m = \lambda_1 - \lambda_2$ и $m' = \mu_1 - \mu_2$. Будем считать, что $m > 0$ и $k > 0$, так как иначе доказываемое утверждение очевидно. Пусть $m = \sum_{s=0}^{\infty} i_s p^s$, где $0 \leq i_s \leq p-1$, — разложение числа m по основанию p .

Если $i_0 = p-1$, то по лемме 1.5(1) работы [6] получаем $m' = m+1 \geq p^k$. Если $0 \leq i_0 \leq p-3$ (случай $p > 2$), то $m \geq p^k$. По лемме 1.5(2),(3) работы [6] получаем, что $m' = m+1$ или $m' = m-1$. В обоих случаях $m' \geq p^k - 1$.

Предположим теперь, что $i_0 = p-2$. Через t обозначим такое положительное число, что $i_s = p-1$ для $s = 1, \dots, t-1$ и $i_t < p-1$. Положим $\sigma = \sum_{s=t+1}^{\infty} i_s p^{s-t-1}$. Тогда $m+2 = (i_t+1)p^t + \sigma p^{t+1}$.

Случай $p > 2$. Для вычислений будем применять лемму 1.7.3 работы [6]. Для доказательства неравенства $m' \geq p^k - 1$ достаточно проверить, что $m+1-2p^{t-1} \geq p^k - 1$ и что $m+1-2p^t \geq p^k - 1$ в случае, когда $i_t = 1$ и $\sigma > 0$ или когда $i_t \geq 2$.

Предположим, что $t < k$. Из того что $m \geq p^k$, получаем $i_{k'} > 0$ для некоторого $k' \geq k$. Отсюда $m+2 \geq (i_t+1)p^t + p^k$ и $m+1-2p^{t-1} \geq p^k - 1 + p^t - 2p^{t-1} > p^k - 1$. Если $i_t \geq 1$, то $m+1-2p^t \geq p^k - 1 + (i_t-1)p^t \geq p^k - 1$.

Предположим, что $t = k$. Из того что $m \geq p^k$, получаем либо $i_k > 0$ и $\sigma = 0$, либо $\sigma > 0$. В первом случае $m+2 \geq 2p^k$ и $m+1-2p^{t-1} \geq 2p^k - 1 - 2p^{k-1} > p^k - 1$. При этом если $i_k \geq 2$, то $m+2 \geq 3p^k$ и $m+1-2p^t \geq p^k - 1$. Во втором случае $m+2 \geq 3p^k$ и $m+1-2p^t \geq p^k - 1$.

Предположим, что $t > k$. Так как $m+2 \geq p^t$, то $m+1-2p^{t-1} \geq p^{t-1} - 1 \geq p^k - 1$. Если $\sigma > 0$ или $i_t \geq 2$, то $m+2 \geq 3p^t$ и $m+1-2p^t \geq p^t - 1 > p^k - 1$.

Случай $p = 2$. Для вычислений будем применять лемму 1.7.2 работы [6]. В данном случае для доказательства неравенства $m' \geq 2^k - 1$ достаточно проверить, что $m+1-2^{t-1} \geq 2^k - 1$ и что $m+1-2^t \geq 2^k - 1$ в случае $\sigma > 0$.

Предположим, что $t < k$. Аналогично случаю $p > 2$ получаем $m+2 \geq 2^t + 2^k$. Отсюда $m+1-2^t \geq 2^k - 1$.

Предположим, что $t = k$. Аналогично случаю $p > 2$ получаем либо $i_k > 0$, либо $\sigma > 0$. В обоих случаях $m+2 \geq 2^{k+1}$ и $m+1-2^t \geq 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^k - 1$.

Предположим, что $t > k$. Так как $m+2 \geq 2^t$, то $m+1-2^{t-1} \geq 2^{t-1} - 1 \geq 2^k - 1$. Если $\sigma > 0$, то $m+2 \geq 2^{t+1}$ и $m+1-2^t \geq 2^t - 1 > 2^k - 1$.

Теперь можно проверить выполнение условия 1 для любого разбиения $\lambda \in \Lambda_r^+$. Выберем некоторое, например, минимальное k такое, что $\lambda_1 - \lambda_2 < p^k - 1$, и положим $a = p^k - 1 - r$. Из выше приведенных вычислений видно, что для таким образом выбранного a условие 1 выполнено.

§5. Конечная базиримость

Посмотрим, какие следствия из результатов §4 можно получить применительно к операции $\uparrow$, введенной в [1].

Для любого $KG(r)$ -модуля V через $d(V)$ обозначим модуль, дуальный к V . При этом существует такая невырожденная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times d(V) \rightarrow K$, что $\langle \sigma v, u \rangle = \langle v, \sigma^{-1} u \rangle$ для любых $v \in V$, $u \in d(V)$ и $\sigma \in G(r)$. Для подмножества A в V или в $d(V)$ через $V^\perp$ будем обозначать множество $\{u \in d(V) : \langle A, u \rangle = 0\}$ или $\{v \in V : \langle v, A \rangle = 0\}$ соответственно.

ЛЕММА 4. Пусть λ — p -регулярное невырожденное разбиение из Λ_r^+ и V — собственный подмодуль модуля Шпекта S^λ . Рассмотрим следующие условия:

- 1) $V \downarrow \uparrow \subsetneq V$;
- 2) существует $KG(r)$ -модуль L и неизоморфное вложение $\iota: d(S^\lambda/V) \rightarrow L$ такое, что $\text{Im } \iota$ — существенный подмодуль модуля L и все факторы модуля $L/\text{Im } \iota$ вырожденные.

Условие 2) всегда следует из 1). Обратное следствие верно при $n < p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2) Положим $L = d(S^\lambda/V \downarrow \uparrow)$ и ι равным вложению, индуцированному проекцией $S^\lambda/V \downarrow \uparrow \rightarrow S^\lambda/V$. Из очевидного равенства $V \downarrow \uparrow \downarrow = V \downarrow$ (см. § 1) и теоремы 5(a) работы [1] следует, что все факторы модуля $V/V \downarrow \uparrow$ вырожденные. Поэтому все факторы модуля $L/\text{Im } \iota$ тоже вырожденные. Осталось доказать, что модуль $\text{Im } \iota$ существенный в L . Пусть N — подмодуль модуля L и $N \cap \text{Im } \iota = 0$. Тогда $N^\perp + (V/V \downarrow \uparrow) = S^\lambda/V \downarrow \uparrow$. Так как $P^\lambda/V \downarrow \uparrow$ — единственный максимальный подмодуль модуля $S^\lambda/V \downarrow \uparrow$ и $V \subset P^\lambda$, то $N^\perp = S^\lambda/V \downarrow \uparrow$. Отсюда $N = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) при условии $n < p$. Без ограничения общности можно считать, что $L/\text{Im } \iota \cong D^\mu$, где μ — вырожденное p -регулярное разбиение.

В оставшейся части доказательства мы будем следовать обозначениям работы [11]. Выберем произвольное $N \geq r$ и положим $G = G(r)$, $S = S_K(N, r)$, $\omega = (1^r, 0^{N-r})$, $e = \xi_\omega$. Фиксируем набор $u(r) = (1, \dots, r)$. Отображение $\xi_{u(r)\pi, u(r)} \mapsto \pi$ задает изоморфизм между кольцами eSe и KG . Поэтому мы будем рассматривать каждый KG -модуль как eSe -модуль и наоборот.

Пусть $V_{\lambda', K}$ — модуль Вейля со старшим весом λ' . В работе [11] при помощи изоморфизма (6.3d) устанавливается изоморфизм модулей $V_{\lambda', K}^\omega$ и $d(S^{\lambda'})$ ($\bar{S}_{T, K}$ в обозначениях [11]).

Через K_s обозначим знакопеременное представление группы G . Модуль $V \otimes K_s$ стандартно вкладывается в $d(S^{\lambda'})$ и, следовательно, в $V_{\lambda', K}^\omega$. Пусть V' — образ V при таком вложении.

Положим $U = SV'$. Этот модуль является подмодулем модуля $V_{\lambda', K}$. В работе [11] введены левые S -модули $D_{\lambda', K}$ и $A_K(N, r)$. Последний модуль — также правый S -модуль. При этом $D_{\lambda', K}$ — подмодуль модуля ${}^{\lambda'} A_K(N, r)$, который является правым весовым пространством модуля $A_K(N, r)$.

Согласно § 5.1 работы [11] ограничение естественной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определенной на $E^{\otimes r}$, дает невырожденную контравариантную форму $(\cdot, \cdot): V_{\lambda', K} \times D_{\lambda', K} \rightarrow K$. Положим $W = \{w \in D_{\lambda', K} : (U, w) = 0\}$. Модуль W контравариантно дуален модулю $V_{\lambda', K}/U$ в смысле § 2.7 работы [11]. Поэтому модуль eW двойствен модулю $V_{\lambda', K}^\omega/V'$ как KG -модуль в обычном смысле (см. [11; теорема 6.3f]). При этом $V_{\lambda', K}^\omega/V' \cong S^\lambda/V \otimes K_s$. Отсюда получаем $eW \cong d(S^\lambda/V) \otimes K_s$. Рассмотр-

рим некоторый изоморфизм $\theta: eW \rightarrow d(S^\lambda/V) \otimes K_s$. Положим $M = L \otimes K_s$ и $\varphi = (\iota \otimes i_{K_s})\theta$. Понятно, что φ – вложение модуля eW в M . При этом $\text{Im } \varphi$ – существенный подмодуль модуля M и $M/\text{Im } \varphi \cong D^\mu \otimes K_s$.

Положим $h(M) = Se \otimes_{eSe} M$. Через W' обозначим K -подпространство пространства $h(M)$, порожденное элементами вида $se \otimes \varphi(ew)$, где $s \in S$ и $w \in W$. Очевидно, что W' есть S -модуль. Рассмотрим отображение $\psi: W' \rightarrow W$, определенное формулой $\psi(se \otimes \varphi(ew)) = sew$.

Так как $W \subset {}^{\lambda'}A_K(N, r)$ и последний модуль инъективен, то существует продолжение $\bar{\psi}: h(M) \rightarrow {}^{\lambda'}A_K(N, r)$ отображения ψ . Рассмотрим изоморфизм $\varepsilon: M \rightarrow eh(M)$, заданный формулой $\varepsilon(m) = e \otimes m$. Пусть $\tau = \bar{\psi}\varepsilon$ – их композиция. Понятно, что $\tau\varphi = i_{eW}$. Следовательно, τ изоморфно отображает $\text{Im } \varphi$ на eW . Так как $\text{Im } \varphi$ – существенный подмодуль модуля M , то τ – вложение M в $e^{\lambda'}A_K(N, r)$.

Модуль $e^{\lambda'}A_K(N, r)$ можно отождествить с модулем $M^{\lambda'}$ в обозначениях работы [2]. При этом модулю $eD_{\lambda', K}$ будет соответствовать модуль Шпехта $S^{\lambda'}$. Применяя результаты §17 работы [2], получаем, что существует фильтрация модуля $e^{\lambda'}A_K(N, r)/eD_{\lambda', K}$ с факторами, изоморфными S^ν , где $\nu \triangleright \lambda'$. Поэтому либо $\tau(M) \subset eD_{\lambda', K}$, либо некоторый модуль S^ν , где $\nu \triangleright \lambda'$, содержит подмодуль, изоморфный $D^\mu \otimes K_s$.

Покажем, что последний случай невозможен. Так как $S^\nu \subset M^\nu$ (см. [2]) и модули $D^\mu \otimes K_s$ и M^ν самодвойственные, то существует эпиморфизм $\pi: M^\nu \rightarrow D^\mu \otimes K_s$. Положим $g = \sum_{\sigma \in G(n)} \sigma$. Так как $\nu \triangleright \lambda'$, то $\nu_1 \geq n$. Отсюда и из неравенства $n < p$ получаем, что у модуля M^ν существует циклическая порождающая вида gv , где $v \in M^\nu$. Применяя π , получаем $\pi(gv) = g\pi(v) \in g(D^\mu \otimes K_s) = 0$. Последнее равенство следует из вырожденности μ . Приходим к противоречию.

Итак, мы получили $eW \subset \tau(M) \subset eD_{\lambda', K}$. Применяя формулу $(\cdot, \cdot)$ и умножая на K_s , получаем, что существует некоторый подмодуль V_0 модуля V такой, что $V/V_0 \cong D^\mu$. В силу следствия 6 работы [1] имеем $V \downarrow \uparrow \subsetneq V$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В первой части доказательства достаточно считать, что поле любое, а во второй – бесконечное. Впрочем, вторая часть приведена только для иллюстрации связи свойств 1) и 2) и нигде в данной работе не применяется.

Для любого p -регулярного разбиения ν через P^ν обозначим единственный максимальный подмодуль модуля Шпехта S^ν . Легко проверить, что если ν невырожденное, то $P^\nu \downarrow = P^{\nu - (1^n)}$. Теперь в силу первой части леммы 4 получаем, что в условиях теорем 1 и 2 выполнены равенства

$$P^{\lambda + (k-1^n)} \uparrow = P^{\lambda + (k^n)}, \quad P^{\lambda - (1^n)} \uparrow = P^\lambda \quad (3)$$

соответственно. Если поле K не алгебраически замкнуто, то, применяя естественный изоморфизм $S_K^\nu \otimes \bar{K} \cong S_{\bar{K}}^\nu$, при котором $P_K^\nu \otimes \bar{K}$ переходит в $P_{\bar{K}}^\nu$, получаем справедливость формул (3) для любого поля той же характеристики. Из этих формул следует, что для λ , удовлетворяющего условию 1, существует конечное количество соотношений, определяющих все неприводимые модули $D^{\lambda + (k^n)} \cong S^{\lambda + (k^n)} / P^{\lambda + (k^n)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Список литературы

1. *Shchigolev V. V.* On the stabilization problem for submodules of Specht modules // J. Algebra. 2002. V. 251. №2. P. 790–812.
2. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрической группы. М.: Мир, 1980.
3. *Kleshchev A. S.* Branching rules for modular representations of symmetric groups. I // J. Algebra. 1995. V. 178. №2. P. 493–511.
4. *Kleshchev A. S.* Branching rules for modular representations of symmetric groups. II // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 459. P. 163–212.
5. *Mathieu O.* On the dimension of some modular irreducible representations of the symmetric group // Lett. Math. Phys. 1996. V. 38. №1. P. 23–32.
6. *Erdmann K.* Tensor products and dimensions of simple modules for symmetric groups // Manuscripta Math. 1995. V. 88. №3. P. 357–386.
7. *Donkin S.* On tilting modules for algebraic groups // Math. Z. 1993. V. 212. №1. P. 39–60.
8. *Ringel C. M.* The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences // Math. Z. 1991. V. 208. №2. P. 209–223.
9. *Mathieu O.* Filtrations of G -modules // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1990. V. 23. №4. P. 625–644.
10. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory // Adv. Math. 1976. V. 21. №3. P. 330–354.
11. *Green J. A.* Polynomial representations of $GL_n(K)$. Berlin: Springer-Verlag, 1980. (Lecture Notes in Math. V. 830.)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
06.05.2002