Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Кесельман, Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 29–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:11:19

УДК 517.54+514.774

В. М. Кесельман

Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях

Доказано, что на любом некомпактном римановом многообразии конформно-гиперболического типа изопериметрическое неравенство посредством конформной замены метрики приводится к тому же линейному каноническому виду, какой оно имеет в стандартном гиперболическом пространстве Лобачевского. При этом получено не только абсолютное, но и относительное изопериметрическое неравенство, применимое к многообразиям с краем.

Мы развиваем результаты и методы нашей совместной с В. А. Зоричем работы, в которой абсолютное изопериметрическое неравенство было получено при некотором дополнительном условии, и приходим к формулировкам, в определенном смысле окончательным.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Как известно, изопериметрическое неравенство – это соотношение вида

$$P(v(D)) \leq s(\partial D)$$

между объемом $v(D)$ области D и площадью $s(\partial D)$ ее границы, где P – функция, называемая *изопериметрической функцией* пространства. Разумеется, интерес представляет только нетривиальная и, скорее, даже максимальная изопериметрическая функция. Например, для евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ таковой, с точностью до постоянного множителя, является функция $P(x) = x^{\frac{n-1}{n}}$, а для пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ – линейная функция $P(x) = x$.

В настоящей работе пространством является произвольное n -мерное некомпактное риманово многообразие (M, g) с краем ∂M , возможно пустым, и римановой метрикой (метрическим тензором) g .

Наряду с исходной метрикой мы будем рассматривать на M также римановы метрики $\tilde{g}$ вида $\tilde{g} = \lambda^2 g$, где λ – некоторая положительная регулярная функция на M . Такие метрики $\tilde{g}$ называются *конформно эквивалентными* или, короче, *конформными* метрике g .

Нас интересует вопрос о приведении к каноническому виду изопериметрического неравенства в конформном классе его метрики, т.е. посредством перехода к метрике, конформно эквивалентной исходной метрике многообразия. Ответ на этот вопрос связан с *конформным типом* рассматриваемого риманова многообразия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01086).

Подобно пространствам Евклида и Лобачевского произвольные некомпактные римановы многообразия можно конформно-инвариантно (т.е. инвариантно относительно конформных замен метрики) разделить на два класса в соответствии с тем, какова конформная емкость абсолюта (“бесконечности”) многообразия.

Если эта емкость нулевая (как у пространства Евклида), многообразие относится к конформно-параболическому типу; если эта емкость положительна (как в случае пространства Лобачевского), многообразие относится к конформно-гиперболическому типу.

Мы показываем, что на любом римановом многообразии конформно-гиперболического типа посредством конформной замены исходной римановой метрики изопериметрическое неравенство приводится к тому же каноническому виду $v(D) \leq s(\partial D)$, какой оно имеет в стандартном гиперболическом пространстве Лобачевского.

Точная формулировка этого основного результата работы приводится в §3. Отметим, что этот результат в менее полном виде впервые был получен в работе [1] (подробнее об этом сказано в замечании §3).

§2. Конформный тип риманова многообразия

Напомним точные определения конформной емкости и конформного типа n -мерного риманова многообразия M .

Пусть G – область в M , а C – отличный от точки континуум (связный компакт) в G . Конформной емкостью конденсатора (C, G) называется величина

$$\text{cap}(C, G) = \inf \int_G |\nabla f|^n dv,$$

где нижняя грань берется по всем гладким финитным в G функциям f таким, что $f \equiv 1$ на C и $0 \leq f \leq 1$ в G .

Понятно, что значение емкости не изменится, если нижнюю грань здесь брать по более широкому множеству всех функций f соболевского пространства $\dot{L}_n^1(G)$, для которых $f|_C = 1$ в пространстве $L_n^1(G)$.

Обратим внимание, что в случае, если многообразие M рассматривается с непустым краем, область G может, вообще говоря, содержать краевые точки многообразия. Хотя формальное определение емкости в этом случае не требует уточнений, стоит отметить, что при рассмотрении емкости $\text{cap}(C, G \setminus \partial M)$ класс допустимых функций, вообще говоря, более узкий, чем в случае емкости $\text{cap}(C, G)$, поскольку финитная в G функция может не быть финитной в $G \setminus \partial M$.

Оказывается, что для данного многообразия M величина $\text{cap}(C, M)$ либо положительна, либо равна нулю независимо от выбора невырожденного континуума C . Таким образом, указанное свойство обращения или необращения в нуль емкости $\text{cap}(C, M)$ определяется только геометрией многообразия M на “бесконечности”. (Под окрестностью “бесконечности” понимается, как обычно, внешность произвольного компакта в M .)

В этом смысле часто говорят о положительной или нулевой конформной емкости абсолюта многообразия. Например, для пространства Лобачевского конформная емкость его абсолюта положительна, а для евклидова пространства она равна нулю.

Будем говорить, что некомпактное многообразие M имеет *конформно-гиперболический тип*, если конформная емкость его абсолюта положительна, т.е. $\text{сар}(C, M) > 0$ для любого (или хотя бы одного) невырожденного континуума $C \subset M$; в противном случае будем называть M многообразием *конформно-параболического типа*.

Поскольку величина $\text{сар}(C, G)$ не меняется при конформных заменах исходной метрики многообразия, то конформный тип многообразия также является инвариантом в классе конформно эквивалентных римановых метрик на нем.

§ 3. Формулировка основных результатов

Рассмотрим произвольное n -мерное некомпактное риманово многообразие (M, g) с кусочно гладким краем ∂M (возможно, пустым).

ТЕОРЕМА. Пусть многообразие (M, g) имеет конформно-гиперболический тип.

Тогда существует конформно эквивалентная метрике g риманова метрика $\tilde{g}$ бесконечного объема, в которой для всех $\tilde{g}$ -регулярных областей $D \subset M$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство Лобачевского

$$\tilde{v}(D) \leq \tilde{s}(\partial D \setminus \partial M), \quad (\star)$$

в частности, если многообразие M имеет пустой край ∂M , то

$$\tilde{v}(D) \leq \tilde{s}(\partial D).$$

Здесь и всюду далее под $\tilde{g}$ -регулярной областью понимается область D с кусочно гладкой границей ∂D , имеющая в метрике $\tilde{g}$ конечный объем $\tilde{v}(D)$ и конечную площадь границы $\tilde{s}(\partial D)$ (в случае, когда $\tilde{s}(\partial D) = \infty$, неравенство $(\star)$ очевидно). При этом объем и площадь определяются как n - и $(n-1)$ -мерные меры Хаусдорфа соответственно.

ДОПОЛНЕНИЕ. Указанное в теореме неравенство $(\star)$ является асимптотически точным в том смысле, что отношение $\tilde{s}(\partial D \setminus \partial M)/\tilde{v}(D)$ может быть сколь угодно близким к единице для регулярных областей D сколь угодно большого $\tilde{g}$ -объема.

Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ указанную в теореме метрику $\tilde{g}$ можно подобрать так, что $1 \leq \tilde{s}(\partial D \setminus \partial M)/\tilde{v}(D) \leq 1 + \varepsilon$ для некоторой последовательности областей D , исчерпывающей M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенные результаты были получены ранее в [1] в менее полной форме. Именно

1) основные результаты в [1] приводились для многообразия без края, и поэтому относительное изопериметрическое неравенство $(\star)$ самостоятельно не выделялось, хотя и содержалось, по существу, в приводимых там рассмотрениях;

2) сформулированная выше теорема была доказана в [1] для “метрики” $\tilde{g}$ вида $\tilde{g} = \lambda^2 g$, где функция λ , вообще говоря, могла обращаться в нуль на некотором подмножестве в M (т.е., строго говоря, $\tilde{g}$ могла не быть регулярной метрикой, а быть лишь псевдометрикой);

3) по указанной причине в работе [1] “метрика” $\tilde{g}$ была подправлена и доведена до гладкой и невырожденной метрики, конформной исходной метрике многообразия; однако при этом в новой метрике неравенство $(\star)$ уже выполнялось не для всех регулярных областей из M , а только для тех, объем которых в этой метрике был больше некоторого фиксированного положительного числа (хотя само это число можно было сделать сколь угодно малым).

Вместе с тем принципиальная возможность распространения неравенства $(\star)$ на области произвольно малого объема представляется вполне естественной: в самом деле, локально на любом римановом многообразии выполняется евклидово изопериметрическое неравенство, которое для “малых” областей сильнее неравенства Лобачевского.

Используя это соображение, в настоящей работе мы показываем, как построенную в [1] псевдометрику $\tilde{g}$ можно регуляризовать так, чтобы получить конформную исходной метрику, в которой неравенство $(\star)$ имеет место *для всех* регулярных областей на M .

Доказательство основных результатов будет приведено в § 7.

§ 4. Ключевое предложение

Мы будем опираться на результат работы [1], который приведем здесь с развитием, необходимым для доказательства сформулированной выше основной теоремы.

Предварительно сделаем некоторые пояснения, связанные с известными фактами (см., например, [2]–[4]).

Возьмем в $M \setminus \partial M$ произвольную предкомпактную регулярную область O с границей, не пересекающейся с ∂M (например, δ -окрестность точки), и рассмотрим многообразие $M_O = M \setminus O$ с краем $\partial M_O = \partial M \cup \partial O$.

Поскольку (по условию теоремы) многообразие M имеет конформно-гиперболический тип, то существует отличная от постоянной экстремальная функция для емкости $\text{cap}(\overline{O}, M)$, т.е. функция u класса $\mathring{L}_n^1(M)$ такая, что $u|_{\overline{O}} = 1$ и

$$\text{cap}(\overline{O}, M) = \int_{M_O} |\nabla u|^n dv > 0.$$

При этом функция u является n -гармонической в $M_O \setminus \partial O$, т.е. удовлетворяет (в обобщенном смысле) в $M_O \setminus \partial O$ следующему уравнению:

$$\Delta_n u \equiv \text{div}(|\nabla u|^{n-2} \nabla u) = 0, \quad (1)$$

являющемуся уравнением Эйлера вариационной задачи из определения конформной емкости.

Более того, функция u принадлежит классу $C^{1,\alpha}(M_O)$, $\alpha > 0$, причем является C^∞ -гладкой в окрестности тех точек из M_O , где $\nabla u \neq 0$.

Кроме того, в силу строгого принципа экстремума для n -гармонических функций $0 < u < 1$ всюду в M_O .

Теперь мы можем точно сформулировать ключевое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть многообразие (M, g) имеет конформно-гиперболический тип.

Возьмем в $M \setminus \partial M$ предкомпактную регулярную область O с границей, не пересекающейся с ∂M , и определим в $M_O = M \setminus O$ “метрику” $\tilde{g}$, полагая

$$\tilde{g} = \left((n-1) \frac{|\nabla u|}{u} \right)^2 \cdot g, \quad (2)$$

где функция u является экстремальной для емкости $\text{cap}(\overline{O}, M)$.

Тогда многообразие $(M_O, \tilde{g})$ имеет бесконечный объем и для любой $\tilde{g}$ -регулярной области $D \subset M_O$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство следующего вида:

$$\tilde{v}(D) \leq \tilde{s}(\partial D \setminus \partial M_O) - \tilde{s}(\partial O \cap \overline{D}) \quad (\star\star)$$

(в частности, на многообразии $(M_O, \tilde{g})$ выполняется неравенство $(\star)$).

При этом неравенство $(\star\star)$ является точным (обращается в равенство) на семействе областей вида $D_t = \{x \in M : u > t\}$, $t \in (0, 1)$, исчерпывающем многообразие M_O при $t \searrow 0$.

Здесь и далее замыкания множеств берутся в исходном многообразии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством неравенства $(\star\star)$ в случае предкомпактной области $D \subset M_O$. Распространение доказательства на произвольную $\tilde{g}$ -регулярную область проводится так же, как в [1].

Прежде всего отметим (и это известный факт), что в точках края многообразия M градиент экстремальной функции u касателен к краю многообразия, т.е.

$$\langle \nabla u, \tau \rangle = 0 \quad \text{всюду на } \partial M, \quad (3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, τ – единичный вектор нормали к ∂M (в метрике g).

В самом деле, выполнимость уравнения (1) в $M_O \setminus \partial O$ (в смысле обобщенных функций) означает, что

$$\int_{M_O} |\nabla u|^{n-2} \langle \nabla u, \nabla f \rangle dv = 0$$

для любой C^1 -гладкой финитной в $M_O \setminus \partial O$ функции f . Поскольку

$$|\nabla u|^{n-2} \langle \nabla u, \nabla f \rangle = \text{div}(f |\nabla u|^{n-2} \nabla u) - f \Delta_n u,$$

то, применяя к M_O формулу Стокса и используя равенство (1) во внутренних точках многообразия M_O , получаем

$$\int_{\partial M} f |\nabla u|^{n-2} \langle \nabla u, \tau \rangle ds = 0,$$

где ds – элемент $(n-1)$ -меры Хаусдорфа. Отсюда ввиду произвольности функции f на ∂M и следует (3).

Применим теперь формулу Стокса к области D , рассматривая D как многообразие с краем ∂D . Учитывая вновь (1), имеем равенство:

$$-\int_{\partial D} |\nabla u|^{n-2} \frac{\langle \nabla u, \tau \rangle}{u^{n-1}} ds = (n-1) \int_D \frac{|\nabla u|^n}{u^n} dv, \quad (4)$$

где τ — единичный вектор внешней по отношению к области D нормали к ∂D .

Заметим здесь, что край ∂D является объединением следующих трех множеств:

$$\partial O \cap \overline{D}, \quad \partial M \cap \overline{D}, \quad \partial D \setminus \partial M_O,$$

на первом из которых скалярное произведение $\langle \nabla u, \tau \rangle$, очевидно, совпадает с $|\nabla u|$, на втором из указанных множеств оно равно нулю в силу (3). Поэтому из (4) получаем неравенство

$$(n-1) \int_D \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right)^n dv \leq \int_{\partial D \setminus \partial M_O} \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right)^{n-1} ds - \int_{\partial O \cap \overline{D}} \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right)^{n-1} ds,$$

которое и есть искомое неравенство $(\star\star)$.

Другие утверждения сформулированного предложения, связанные с бесконечностью объема многообразия $(M_O, \tilde{g})$ и точностью неравенства $(\star\star)$, выводятся из равенства (4) так же, как в работе [1], и мы здесь на этом не останавливаемся. Предложение доказано.

§ 5. Вспомогательные утверждения

Доказательство теоремы, по существу, состоит в соединении предложения и следующего основного результата этого параграфа.

Если “метрика” $\tilde{g}$ вида $\tilde{g} = \lambda^2 g$ вырождается на некотором множестве, то, изменив ее сколь угодно мало и гладко в окрестности этого множества, можно получить такую конформную исходной регулярную метрику, что при условии выполнения относительного изопериметрического неравенства $(\star)$ для псевдометрики $\tilde{g}$ это неравенство сохранится и для полученной уже регулярной метрики.

Чтобы точно сформулировать указанное утверждение, введем несколько обозначений, используемых и в дальнейшем изложении.

Для произвольной неотрицательной непрерывной на римановом многообразии (M, g) функции λ положим

$$g_\lambda = \lambda^2 g.$$

Поскольку функция λ может обращаться в нуль, g_λ — вообще говоря, лишь псевдометрика на M . Но мы позволим себе называть g_λ метрикой.

Будем обозначать далее через v_λ и s_λ соответственно объем и площадь относительно метрики g_λ . Однако для исходной метрики g (в случае $\lambda \equiv 1$) сохраним обозначения v и s .

Наконец, для произвольного множества $D \subset M$ введем обозначение

$$\partial_i D = \partial D \setminus \partial M$$

для его внутренней (относительно M) границы. Она совпадает с ∂D , когда M — многообразие без края.

ЛЕММА (основная). Пусть λ – неотрицательная непрерывная на M функция, для которой $v_\lambda(M) = \infty$.

Возьмем неотрицательную непрерывную на M функцию ω , отличную от нуля на множестве

$$\Lambda = \{x \in M : \lambda(x) = 0\}, \quad (5)$$

и зададим число $\varepsilon > 0$.

Тогда существует строго положительная непрерывная на M функция μ , обладающая следующими свойствами:

- 1) всюду в M имеют место неравенства

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + \omega; \quad (6)$$

- 2) классы регулярных относительно метрик g_λ и g_μ областей в M совпадают, и если для регулярной области $D \subset M$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство

$$v_\lambda(D) \leq cs_\lambda(\partial_i D), \quad (7)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от D , то для этой же области D выполняется относительное изопериметрическое неравенство

$$v_\mu(D) \leq (1 + \varepsilon)cs_\mu(\partial_i D). \quad (8)$$

При этом указанную функцию μ на множестве

$$\Omega = \{x \in M : \omega(x) > 0\} \quad (9)$$

можно считать сколь угодно гладкой.

Для доказательства асимптотической точности изопериметрического неравенства (*) нам потребуется наряду с основной леммой следующее близкое к ней утверждение, которое можно рассматривать как иной вариант основной леммы в частном случае, когда множество нулей функции λ компактно, а объем многообразия M в исходной метрике бесконечен.

ЛЕММА (о продолжении). Предположим, что многообразие (M, g) имеет бесконечный объем.

Пусть λ – непрерывная неотрицательная на M функция, отличная от нуля вне некоторой предкомпактной регулярной области $G \subset M$.

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ функцию λ можно непрерывно продолжить на множество G до такой всюду строго положительной функции μ (полагая при этом $\mu = \lambda$ вне G), которая обладает следующим свойством:

если для регулярной области $D \subset M$ выполняется изопериметрическое неравенство

$$v_\lambda(D \setminus G) \leq cs_\lambda(\partial_i D \setminus G), \quad (10)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от D , то для этой же области D выполняется неравенство

$$v_\mu(D \cap G) \leq \varepsilon cs_\mu(\partial_i D) \quad (11)$$

и, следовательно, выполняется изопериметрическое неравенство (8).

Доказательства основной леммы и леммы о продолжении будут даны в §9.

§ 6. Евклидово изопериметрическое неравенство

Здесь мы отметим один общий геометрический факт, используемый ниже при доказательстве сформулированных лемм. Он состоит в том, что для произвольного риманова многообразия (M, g) локально и на любом компактном подмногообразии в M выполняется *евклидово относительное* изопериметрическое неравенство. Точнее, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть (K, g) – компактное риманово многообразие с кусочно гладким краем ∂K (возможно, пустым).

Тогда существует положительная постоянная $I(K)$ – изопериметрическая константа – такая, что для любой регулярной области $U \subset K$, для которой $v(U) \leq \frac{1}{2}v(K)$, выполняется неравенство:

$$v^{\frac{n-1}{n}}(U) \leq I(K) \cdot s(\partial U \setminus \partial K), \quad (12)$$

где v и s обозначают соответственно объем и площадь относительно метрики g указанных множеств.

Отсюда, конечно, следует, что

$$\min\{v(U), v(K \setminus U)\}^{\frac{n-1}{n}} \leq I(K) \cdot s(\partial U \setminus \partial K)$$

для любой регулярной области $U \subset K$.

В случае, когда K представляет собой замкнутый шар евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, наделенный стандартной евклидовой метрикой g , неравенство (12) – хорошо известное классическое относительное изопериметрическое неравенство (в котором известно даже значение наилучшей константы $I(K)$ и эта константа зависит только от n ; см., например, монографии [5], [6]).

Поэтому в случае произвольного риманова многообразия (M, g) неравенство (12) выполняется по крайней мере для достаточно малой (отвечающей замкнутому шару) окрестности K любой точки из M . Тогда для распространения этого неравенства на произвольную компактную регулярную область в M достаточно доказать выполнимость изопериметрического неравенства вида (12) на многообразии, полученном объединением (склеиванием) двух многообразий, на каждом из которых такое неравенство уже имеет место.

ЛЕММА (о склеивании). Пусть два подмногообразия K_1 и K_2 многообразия (M, g) таковы, что их пересечение $K_1 \cap K_2$ непусто.

Предположим, что на каждом из них, т.е. при $K = K_1$ и при $K = K_2$, выполняется изопериметрическое неравенство следующего вида:

$$v(U) \leq I(K) \cdot s^\alpha(\partial U \setminus \partial K) \quad (\alpha > 0) \quad (13)$$

для любой регулярной области $U \subset K$ такой, что $v(U) \leq \frac{1}{2}v(K)$.

Положим $I = \max\{I(K_1), I(K_2)\}$. Тогда на многообразии $(K_1 \cup K_2, g)$ также выполняется изопериметрическое неравенство (13), где теперь $K = K_1 \cup K_2$, с изопериметрической константой

$$I(K_1 \cup K_2) = \frac{3 \min\{v(K_1), v(K_2)\}}{v(K_1 \cap K_2)} \cdot I,$$

если хотя бы один из объемов $v(K_1)$ или $v(K_2)$ конечен, и $I(K_1 \cup K_2) = 2I$, если оба объема $v(K_1)$ и $v(K_2)$ бесконечны.

Доказательство леммы о склеивании (и тем самым утверждения) будет дано в § 8.

Как уже было отмечено, приведенные в этом параграфе утверждение и лемма выражают известные геометрические факты (см., например, диссертацию А. А. Григорьяна [7], где проведены построения единой изопериметрической функции общего вида на склеенных многообразиях, а также работу [8], в которой неявно содержится указанное выше утверждение).

В настоящей работе мы приводим доказательство леммы о склеивании (с некоторым, правда не используемым здесь, улучшением по сравнению с [7] окончательной оценки) только для замкнутости изложения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно, изопериметрическое неравенство (12) распространяется и на некомпактные многообразия (K, g) при некоторых дополнительных ограничениях на кривизну многообразия (см., например, монографию [6], где приводятся оценки изопериметрической постоянной $I(K)$, а также работу [8]).

Следует отметить, что в вопросах, связанных с изопериметрическими неравенствами, отыскание определенного, а тем более точного значения изопериметрической постоянной в конкретном пространстве является самостоятельной, как правило непростой задачей, которая решена лишь в некоторых специальных, но важных случаях (например, для евклидова пространства, сферы, пространства Лобачевского).

Однако в контексте нашей работы само по себе значение изопериметрической постоянной не играет роли, поскольку вид $(\star)$ изопериметрического неравенства мы получаем не в исходной метрике многообразия, а в метрике, ей конформно эквивалентной. При этом изопериметрическая постоянная в неравенстве $(\star)$ всегда может быть приведена к единице простым изменением масштаба.

Кроме того, как будет видно из дальнейшего доказательства основных результатов (точнее, вспомогательных утверждений), значение постоянной $I(K)$ в изопериметрическом неравенстве (12) евклидова типа для нас несущественно, важным является лишь конечность этой постоянной.

§ 7. Доказательство основных результатов

Опираясь на ключевое предложение § 4 и вспомогательные леммы, сформулированные в §§ 5, 6, изложим теперь доказательства основных результатов этой работы, приведенных в § 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть в соответствии с условием теоремы некомпактное многообразие (M, g) имеет конформно-гиперболический тип.

Возьмем в $M \setminus \partial M$ произвольную предкомпактную область O с регулярной границей, не пересекающейся с ∂M , и определим на подмногообразии $M_O = M \setminus O$ псевдометрику

$$\tilde{g} = \left((n-1) \frac{|\nabla u|}{u} \right)^2 \cdot g,$$

где функция u является экстремальной для емкости $\text{cap}(\overline{O}, M)$.

На основании предложения (§ 4) многообразие $(M_O, \tilde{g})$ имеет бесконечный объем и для любой $\tilde{g}$ -регулярной области $D \subset M_O$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство $(\star\star)$, а значит, неравенство (7) (с постоянной $c = 1$) для функции

$$\lambda = (n - 1) \frac{|\nabla u|}{u}.$$

При этом $\partial_i D = \partial D \setminus \partial M_O$.

Тогда в силу основной леммы (§ 5), примененной к указанной функции λ , для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и для какой-либо функции ω , удовлетворяющей условию леммы, существует строго положительная гладкая функция μ на M_O такая, что для любой g_μ -регулярной области $D \subset M_O$ выполняется неравенство (8) с постоянной $c = 1$ (а также условие (6), которое будет использовано ниже при доказательстве дополнения).

Таким образом, на многообразии (M_O, g_μ) выполняется относительное изопериметрическое неравенство Лобачевского с изопериметрической постоянной $1 + \varepsilon$. Для завершения доказательства теоремы осталось распространить это неравенство на все многообразие M .

В силу леммы о продолжении построенную на M_O функцию μ можно продолжить по непрерывности (и с сохранением ее гладкости) на само множество O таким образом, что теперь уже на всем многообразии (M, g_μ) , точнее, для любой g_μ -регулярной области $D \subset M$ также выполняется изопериметрическое неравенство вида (8):

$$v_\mu(D) \leq (1 + \varepsilon) s_\mu(\partial_i D) \quad (14)$$

(в котором мы заменили $(1 + \varepsilon)^2$ на $1 + \varepsilon$).

Но последнее неравенство при переходе к новой, конформной исходной, римановой метрике

$$\tilde{g} = (1 + \varepsilon)^{-2} g_\mu \quad (15)$$

превращается в неравенство $(\star)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Стоит отметить, что здесь в отличие от доказательства дополнения (об асимптотической точности полученного неравенства) можно было бы обойтись общей леммой о склеивании, не используя более специальную лемму о продолжении.

Действительно, продолжим любым способом построенную на M_O функцию μ с M_O на множество O , сохраняя ее положительность и класс гладкости, и оставим за полученной таким образом (положительной гладкой на M) функцией прежнее обозначение μ .

Возьмем какой-либо регулярный компакт K , содержащий множество O . Поскольку согласно утверждению (§ 6) на многообразии (K, g_μ) выполняется евклидово относительное изопериметрическое неравенство (т.е. неравенство вида (12) с некоторой постоянной $I(K)$), то на (K, g_μ) выполняется также и относительное изопериметрическое неравенство Лобачевского (с изопериметрической постоянной равной $v_\mu^{1/n}(K) I(K)$).

Таким образом, многообразие (M, g_μ) является объединением двух подмногообразий M_O и K , на каждом из которых выполняется относительное изопериметрическое неравенство Лобачевского. Но тогда в силу леммы о склеивании (при $\alpha = 1$

в (13)) относительное изопериметрическое неравенство Лобачевского с некоторой изопериметрической постоянной I имеет место и на всем многообразии (M, g_μ) .

Переходя к новой, конформной исходной, метрике $\tilde{g} = I^{-2}g_\mu$, получаем искомое неравенство $(\star)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОПОЛНЕНИЯ. Согласно приведенному выше доказательству теоремы искомое изопериметрическое неравенство $(\star)$ выполняется в метрике (15), причем функция μ удовлетворяет по построению условию (6) из основной леммы (для некоторой функции ω , условия выбора которой будут уточнены ниже).

Тогда асимптотическая точность (в том смысле, который указан в условии дополнения) для неравенства $(\star)$ в указанной метрике (15) означает справедливость следующих неравенств:

$$1 - \varepsilon \leq \frac{v_\mu(D)}{(1 + \varepsilon)s_\mu(\partial_i D)} \leq 1 \quad (16)$$

для некоторой последовательности областей D , исчерпывающей многообразие M .

Правое неравенство соотношения (16) выполняется в силу (14) для любой регулярной области D .

Возьмем теперь какую-либо последовательность областей D_k , для которых неравенство $(\star\star)$ обращается в равенство. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_\lambda(D_k)}{s_\lambda(\partial_i D_k)} = 1. \quad (17)$$

Указанную выше функцию ω ввиду ее произвольности можно считать такой, что все величины $v_\omega(D_k)$ и $s_\omega(\partial_i D_k)$ равномерно ограничены. Тогда с учетом (6)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_\mu(D_k)}{s_\mu(\partial_i D_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_\lambda(D_k)}{s_\lambda(\partial_i D_k)}.$$

Отсюда в силу (17) заключаем, что левое неравенство соотношения (16) выполнено для почти всех областей D_k выбранного семейства. Дополнение доказано.

§ 8. Доказательство евклидова изопериметрического неравенства

Здесь мы приведем доказательство леммы о склеивании, сформулированной в § 6.

Для доказательства возьмем произвольную регулярную область $U \subset K_1 \cup K_2$ такую, что

$$v(U) \leq \frac{1}{2} v(K_1 \cup K_2). \quad (18)$$

Чтобы получить искомое неравенство вида (13) для $v(U)$ с указанной константой $I(K_1 \cup K_2)$, заметим, что

$$v(U) \leq v(U_1) + v(U_2),$$

где обозначено $U_1 = U \cap K_1$, $U_2 = U \cap K_2$, и воспользуемся уже имеющимися неравенствами вида (13) для областей U_1 и U_2 на многообразиях K_1 и K_2 соответственно, дополнив их очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} s(\partial U_1 \setminus \partial K_1) &\leq s(\partial U \setminus \partial(K_1 \cup K_2)), \\ s(\partial U_2 \setminus \partial K_2) &\leq s(\partial U \setminus \partial(K_1 \cup K_2)). \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть для определенности

$$v(K_1) \geq v(K_2).$$

Рассмотрим отдельно следующие возможные случаи.

1-й случай: $v(U_1) \geq \frac{1}{2}v(K_1)$. В этом случае неравенство (13) применимо к $v(K_1 \setminus U_1)$, поэтому

$$v(U) \leq \frac{v(U)}{v(K_1 \setminus U_1)} I \cdot s^\alpha(\partial U_1 \setminus \partial K_1).$$

Поскольку ввиду условия (18) $v(K_1 \setminus U_1) \geq \frac{1}{2}(v(K_1) - v(K_2 \setminus K_1))$, то имеем неравенство:

$$v(U) \leq \frac{v(K_1) + v(K_2 \setminus K_1)}{v(K_1) - v(K_2 \setminus K_1)} I \cdot s^\alpha(\partial U_1 \setminus \partial K_1). \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{v(K_1) + v(K_2 \setminus K_1)}{v(K_1) - v(K_2 \setminus K_1)} \leq \frac{3v(K_2)}{v(K_1 \cap K_2)}. \quad (21)$$

Действительно, если $v(K_1) \geq 2v(K_2 \setminus K_1)$, то в силу монотонного убывания функции $f(x) = (x + a)/(x - a)$ при $x > a$ левая часть неравенства (21) не превышает числа 3. Если же $v(K_1) \leq 2v(K_2 \setminus K_1)$, то

$$\frac{v(K_1) + v(K_2 \setminus K_1)}{v(K_1) - v(K_2 \setminus K_1)} \leq \frac{3v(K_2 \setminus K_1)}{v(K_1 \cap K_2)},$$

поскольку $v(K_1) - v(K_2 \setminus K_1) \geq v(K_1 \cap K_2)$, и неравенство (21) по-прежнему верно. Подставляя его в (20), с учетом (19) получаем искомое неравенство.

2-й случай: $v(U_1) \leq \frac{1}{2}v(K_1)$ и $v(U_2) \leq \frac{1}{2}v(K_2)$. В этом случае, применяя неравенства вида (13) к $v(U_1)$ и $v(U_2)$, с учетом (19) получаем неравенство

$$v(U) \leq 2I \cdot s^\alpha(\partial U \setminus \partial(K_1 \cup K_2)),$$

которое является даже более сильным, чем искомое.

В частности, если объемы $v(K_1)$ и $v(K_2)$ бесконечны, то для любой регулярной области $U \subset K_1 \cup K_2$ мы всегда будем находиться в условиях рассматриваемого 2-го случая и, следовательно, тогда в качестве константы $I(K_1 \cup K_2)$ можно взять величину $2I$.

3-й случай: $v(U_1) \leq \frac{1}{2}v(K_1)$ и $v(U_2) \geq \frac{1}{2}v(K_2)$. При этом имеются следующие альтернативные возможности.

1) $v(U_1 \cap U_2) \geq \frac{1}{2}v(K_1 \cap K_2)$. В этом случае имеем

$$v(U_2) \leq \frac{2v(K_2)}{v(K_1 \cap K_2)} v(U_1 \cap U_2) \leq \frac{2v(K_2)}{v(K_1 \cap K_2)} I \cdot s^\alpha(\partial U_1 \setminus \partial K_1).$$

Складывая это неравенство с неравенством вида (13) для $v(U_1)$, получаем искомое неравенство для $v(U)$.

2) $v(U_1 \cap U_2) \leq \frac{1}{2}v(K_1 \cap K_2)$. Следовательно,

$$v(K_2 \setminus U_2) \geq v(K_1 \cap K_2) - v(U_1 \cap U_2) \geq \frac{1}{2}v(K_1 \cap K_2).$$

Поэтому, используя неравенство (13) для $v(K_2 \setminus U_2)$, получаем

$$v(U_2) \leq \frac{v(K_2)}{\frac{1}{2}v(K_1 \cap K_2)}v(K_2 \setminus U_2) \leq \frac{2v(K_2)}{v(K_1 \cap K_2)}I \cdot s^\alpha(\partial U_2 \setminus \partial K_2).$$

Складывая это неравенство с неравенством вида (13) для $v(U_1)$, получаем искомое неравенство для $v(U)$. Лемма доказана полностью.

§9. Доказательства вспомогательных утверждений

Докажем, наконец, вспомогательные утверждения из §5.

Для удобства читателя сначала проведем доказательство основной леммы при некотором дополнительном предположении. Это избавит от второстепенных технических деталей и прояснит последующие доказательства в общем случае.

Предположим, что *множество Λ нулей функции λ компактно, а объем всего многообразия (M, g) бесконечен.*

Будем исправлять исходную функцию λ в некоторой регулярной предкомпактной окрестности G множества Λ . Ввиду предположения о компактности множества Λ такая окрестность существует.

Возьмем содержащее G компактное подмногообразие $K \subset M$ достаточно большого объема $v(K)$ и для положительного числа h рассмотрим множество

$$G_h = \{x \in K : \lambda < h\},$$

которое можно считать (уменьшая при необходимости значение h) содержащимся в G .

Покажем, что искомой функцией μ может служить функция

$$\mu = \begin{cases} h & \text{на } G_h, \\ \lambda & \text{на } M \setminus G_h \end{cases} \quad (\text{I})$$

при подходящем выборе окрестности G , компакта K и числа h .

Действительно, функция μ будет удовлетворять соотношению (6) (т.е. свойству 1) из условия основной леммы, если в качестве G выбрать множество, на котором $\omega > \lambda$. Это можно сделать ввиду условия $\omega > 0$ на Λ . При таком выборе, очевидно, $\omega > h$, так как $G_h \subset G$ по построению.

Проверим главное свойство 2) из условия основной леммы. Предположим, что для регулярной области $D \subset M$ выполняется неравенство (7). Тогда

$$v_\mu(D \setminus G_h) \leq cs_\mu(\partial_i D), \quad (\text{II})$$

поскольку $\mu = \lambda$ вне множества G_h и $\lambda \leq \mu$ всюду в M . Поэтому для получения искомого неравенства (8) достаточно установить, что

$$v_\mu(D \cap G_h) \leq \varepsilon cs_\mu(\partial_i D). \quad (\text{III})$$

Введем обозначение $D_K = D \cap K$ и рассмотрим отдельно следующие два альтернативных случая.

1-й случай: пусть $v(D_K) \geq \frac{1}{2}v(K)$. Будем считать, что компакт K выбран удовлетворяющим условию

$$\frac{1}{2}v(K) \geq (1 + \varepsilon^{-1})v(G).$$

Это можно сделать ввиду бесконечности объема многообразия M . Тогда в рассматриваемом случае $\varepsilon^{-1}v(G) \leq v(D_K) - v(G) \leq v(D_K \setminus G)$, так что $v(G) \leq \varepsilon v(D_K \setminus G_h)$. Следовательно, ввиду (I)

$$v_\mu(G_h) = h^n v(G_h) \leq \varepsilon v_\lambda(D_K \setminus G_h) = \varepsilon v_\mu(D_K \setminus G_h)$$

и требуемое неравенство (III) вытекает теперь из неравенства (II).

2-й случай: пусть $v(D_K) \leq \frac{1}{2}v(K)$. В этом случае на компактном многообразии (K, g) для области $U = D_K$ выполняется евклидово изопериметрическое неравенство (12). Используем его для оценки величины $v_\mu(D \cap G_h) = h^n v(D \cap G_h)$. Учитывая, что $h \leq \mu$ всюду в K , имеем

$$v_\mu^{\frac{n-1}{n}}(D \cap G_h) \leq h^{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}(D_K) \leq I(K) s_\mu(\partial_i D_K \setminus \partial K).$$

Применяя последнее неравенство к правой части очевидного соотношения

$$v_\mu(D \cap G_h) \leq h v^{\frac{1}{n}}(G) \cdot v_\mu^{\frac{n-1}{n}}(D \cap G_h),$$

окончательно получаем

$$v_\mu(D \cap G_h) \leq \{h v^{\frac{1}{n}}(G) I(K)\} s_\mu(\partial_i D).$$

Отсюда видно, что если исходное значение h выбрать удовлетворяющим условию

$$h v^{\frac{1}{n}}(G) I(K) \leq \varepsilon c,$$

то неравенство (III) окажется выполненным и в этом случае.

Тем самым, основная лемма доказана при дополнительном предположении о компактности множества Λ и бесконечности объема исходного многообразия. В этом случае мы исправили функцию λ , просто заменив ее в окрестности множества Λ достаточно малой положительной постоянной h .

Проведенные рассуждения будут использованы и развиты при доказательстве как основной леммы в общем случае, так и леммы о продолжении.

Дадим теперь полные доказательства этих лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ. В условиях рассматриваемой леммы при построении искомой функции μ теперь уже нельзя, вообще говоря, заменить функцию λ постоянной на множестве G , не нарушая при этом ее непрерывности.

Однако можно положить $\mu = h$ на множестве $B \subset G$, близком к множеству G по объему, и, меняя затем функцию λ лишь на множестве $G \setminus B$, добиться непрерывности искомой функции μ при сохранении других нужных нам свойств этой функции.

Итак, проведем построение функции μ в наших условиях. Сначала для заданного в условии леммы числа $\varepsilon > 0$ зафиксируем содержащее множество G компактное подмногообразие $K \subset M$, объем которого $v(K)$ удовлетворяет условию

$$2(1 + 2\varepsilon^{-1})v(G) \leq v(K). \quad (22)$$

Это можно сделать, как отмечалось и выше, ввиду бесконечности объема всего многообразия (M, g) .

Подберем теперь положительное число h настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$h \leq \min_{K \setminus G} \lambda, \quad (23)$$

$$2h v^{\frac{1}{n}}(G) I(K) \leq \varepsilon c, \quad (24)$$

где $I(K)$ — некоторая фиксированная изопериметрическая константа многообразия (K, g) , определенная в утверждении § 6, а c — постоянная из неравенства (10).

Наконец, для найденного числа h выберем замкнутое регулярное множество $B \subset G$ такое, что

$$v(G \setminus B) \left(\frac{\max_{\partial G} \lambda}{h} \right)^{n^2} \leq v(G). \quad (25)$$

Теперь функцию μ определим следующим образом:

$$\mu = \begin{cases} h & \text{на } B, \\ \lambda & \text{на } M \setminus G, \end{cases} \quad (26)$$

а на множество $G \setminus B$ функцию μ продолжим непрерывно с соблюдением условия

$$h \leq \mu \leq \max_{\partial G} \lambda, \quad (27)$$

что возможно ввиду соотношения (23). Тем самым, функция μ определена на всем многообразии M .

Прежде чем доказывать, что функция μ уже обладает нужными свойствами, отметим одно простое соотношение, вытекающее из самого определения этой функции. А именно для любого регулярного множества $U \subset G$ имеет место неравенство

$$v_\mu(U) \leq 2h^n v^{\frac{1}{n}}(G) v^{\frac{n-1}{n}}(U). \quad (28)$$

В частности, если $U = G$, то $v_\mu(G) \leq 2h^n v(G)$.

Действительно, ввиду условия (27)

$$v_\mu(U \setminus B) \leq \left(\max_{\partial G} \lambda \right)^n v(U \setminus B),$$

следовательно, в силу условия (25)

$$v_\mu(U \setminus B) \leq h^n v^{\frac{1}{n}}(G) v^{\frac{n-1}{n}}(U),$$

а поскольку $v_\mu(U \cap B)$, очевидно, тоже не превышает значения правой части последнего неравенства, то (28) доказано.

Докажем теперь, что построенная функция μ является искомой. С этой целью в соответствии с условием леммы предположим, что для какой-либо регулярной области $D \subset M$ выполняется неравенство (10).

Обозначим, как и прежде,

$$D_K = D \cap K$$

и рассмотрим отдельно каждую из следующих двух возможностей.

1-й случай: пусть $v(D_K) \geq \frac{1}{2}v(K)$. Тогда в силу условия (22)

$$2v(G) \leq \varepsilon v(D_K \setminus G).$$

В таком случае, используя неравенство (28) при $U = G$, имеем

$$v_\mu(D \cap G) \leq v_\mu(G) \leq \varepsilon h^n v(D_K \setminus G),$$

следовательно, учитывая условие (23),

$$v_\mu(D \cap G) \leq \varepsilon v_\lambda(D_K \setminus G).$$

Отсюда, применяя к правой части неравенство (10), приходим к требуемому неравенству (11).

2-й случай: пусть $v(D_K) \leq \frac{1}{2}v(K)$. Тогда на многообразии (K, g) для множества D_K выполняется евклидово изопериметрическое неравенство (12). Используя его для оценки объема области $D \cap G \subset D_K$, имеем

$$v^{\frac{n-1}{n}}(D \cap G) \leq I(K) s(\partial_i D_K \setminus \partial K)$$

и, применяя последнее неравенство к правой части неравенства (28) при $U = D \cap G$, получаем

$$v_\mu(D \cap G) \leq 2h^n v^{\frac{1}{n}}(G) I(K) s(\partial_i D_K \setminus \partial K).$$

Отсюда в силу условия (24) и очевидного ввиду (23) соотношения

$$h^{n-1} s(\partial_i D_K) \leq s_\mu(\partial_i D_K \setminus \partial K) \leq s_\mu(\partial_i D)$$

приходим к требуемому неравенству (11). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. В первой части доказательства мы построим нужную непрерывную строго положительную в M функцию μ , согласованную с заданными функцией ω и числом ε , а затем во второй части проверим, что метрика g_μ является искомой.

Построение функции μ . Наряду с исходной метрикой g рассмотрим конформную ей метрику g_γ , где

$$\gamma = \lambda + \omega.$$

При этом, не ограничивая общности, можно считать, что ω — гладкая функция и $v_\omega(M) < \infty$. В таком случае

$$v_\gamma(M) = \infty, \quad v_\gamma(\Lambda) < \infty, \quad (29)$$

где множество Λ определено в (5).

Основой для построения функции μ будет функция H , которую мы сейчас опишем. Обозначим через $B(r)$ замкнутый в M шар g -радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке, и пусть $R(t, r) = \overline{B(r)} \setminus B(t)$ для $0 < t < r$.

Рассмотрим какую-либо исчерпывающую многообразие M последовательность шаров $\{B(r_k)\}$, где $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k < \dots$. Пусть $\{h_k\}$ — некоторая положительная убывающая числовая последовательность, $1 > h_1 > \dots > h_k > \dots$, значения h_k которой будут определены ниже в зависимости от геометрии шаров $B(r_k)$. Кроме того, будет определена еще одна последовательность $\{t_k\}$, связанная с $\{r_k\}$ условиями: $t_1 = r_1$ и $r_{k-1} < t_k < r_k$ при $k \geq 2$.

Определим вспомогательную функцию $H = H(x)$, $x \in M$, полагая $H = h_1$ в шаре $B(r_1)$, а на каждом кольце $R(r_{k-1}, r_k)$ (при $k = 2, 3, \dots$)

$$H(x) = \begin{cases} \frac{h_{k-1} - h_k}{r_{k-1} - t_k}(r(x) - t_k) + h_k & \text{при } x \in R(r_{k-1}, t_k), \\ h_k & \text{при } x \in R(t_k, r_k), \end{cases} \quad (30)$$

где $r(x)$ — расстояние в (M, g) от точки x до общего центра шаров $B(r_k)$.

В окрестности G множества Λ , выбор которой будет сделан ниже, рассмотрим множество

$$G_H = \{x \in G : \lambda < H \cdot \gamma\}, \quad (31)$$

также являющееся окрестностью множества Λ .

Наконец, искомую функцию μ определим следующим образом:

$$\mu = \begin{cases} H \cdot \gamma & \text{на } G_H, \\ \lambda & \text{на } M \setminus G_H. \end{cases} \quad (32)$$

Конкретный вид последовательностей $\{r_k\}$, $\{t_k\}$ и $\{h_k\}$, участвующих в определении функции H , мы сейчас укажем.

Прежде всего, опираясь на условие (29), выберем внутри множества Ω (определенного в (9)) первоначальную окрестность G множества Λ конечного γ -объема $v_\gamma(G)$ и построим последовательность шаров $B(r_k)$, удовлетворяющих при $k \geq 1$ следующим условиям:

$$2(1 + 4\varepsilon^{-1})v_\gamma(G) \leq v_\gamma(R(r_{k-1}, r_k)). \quad (33)$$

На основании утверждения § 6, примененного к каждому множеству $R(r_{k-1}, r_k)$ как многообразию $(R(r_{k-1}, r_k), g_\gamma)$, существует положительная постоянная I_k такая, что

$$\min\{v_\gamma(U), v_\gamma(R(r_{k-1}, r_k) \setminus U)\}^{\frac{n-1}{n}} \leq I_k s_\gamma(\partial_i U \setminus \partial R(r_{k-1}, r_k)) \quad (34)$$

для любой регулярной области $U \subset R(r_{k-1}, r_k)$.

Тогда выбор убывающей последовательности $\{h_k\}$ подчиним условию

$$4h_k v_\gamma^{\frac{1}{n}}(G) I_k < \varepsilon c, \quad (35)$$

где c — постоянная из неравенства (7), а также условию

$$h_k \leq \min\{\lambda(x) \cdot \gamma^{-1}(x) : x \in B(r_{k+1}) \setminus G\}. \quad (36)$$

Теперь, имея последовательность $\{h_k\}$, найдем последовательность значений $\{t_k\}$ ($t_1 = r_1$, $t_k \in (r_{k-1}, r_k)$ при $k \geq 2$) такую, что

$$v_\gamma(R(r_{k-1}, t_k)) \left(\frac{h_{k-1}}{h_k} \right)^{n^2} < v_\gamma(G). \quad (37)$$

Таким образом, функция μ , а вместе с ней и конформная исходной метрике метрика g_μ , вполне определяются формулой (32).

ЗАМЕЧАНИЕ. Благодаря условию (36) и самому определению (30) функция H удовлетворяет неравенству $H\gamma \leq \lambda$ на множестве $M \setminus G$, а значит, ввиду (31) и на множестве $M \setminus G_H$. Поэтому определение (32) функции μ может быть задано в виде

$$\mu = \max\{\lambda, H \cdot \gamma\}. \quad (38)$$

В частности, функция μ непрерывна в M .

Доказательство свойств метрики g_μ . Проверим, что построенная функция μ обладает свойствами 1) и 2) из условия основной леммы.

Действительно, выполнение свойства 1) для функции μ следует из (38), поскольку $\gamma = \lambda + \omega$ и $H < 1$.

Обратимся теперь к свойству 2). Совпадение классов регулярных относительно метрик g_λ и g_μ областей в M очевидно, поскольку указанные метрики отличаются друг от друга только на множестве G_H , которое имеет конечный объем относительно этих метрик.

Предположим теперь, что для регулярной области $D \subset M$ выполняется неравенство (7). Докажем, что тогда в метрике g_μ справедливо неравенство (8).

Сначала рассмотрим множество $D \setminus G_H$. Поскольку на нем $\mu = \lambda$, причем $\mu \geq \lambda$ в M , то $v_\mu(D \setminus G_H) \leq v_\lambda(D)$ и $s_\lambda(\partial_i D) \leq s_\mu(\partial_i D)$. Следовательно, в силу (7) имеем неравенство

$$v_\mu(D \setminus G_H) \leq c s_\mu(\partial_i D). \quad (39)$$

Чтобы получить аналогичное неравенство для объема $v_\mu(D \cap G_H)$, можно применить рассуждения, проведенные выше при доказательстве леммы о продолжении, считая, что роль многообразия (K, g) играет каждое компактное многообразие $(R(r_{k-1}, r_k), \gamma)$.

При таком сопоставлении все условия, которые налагались на функцию μ в ходе доказательства леммы о продолжении, имеют соответствующие аналоги для построенной здесь функции $\mu \cdot \gamma^{-1}$. А именно условиям (22), (23), (24), (25), (27) отвечают соответственно условия (33), (36), (35), (37), (38).

Тогда, следуя доказательству леммы о продолжении, прежде всего получаем аналогичное неравенству (28) соотношение:

$$v_\mu(U) \leq 2 h_k^n v_\gamma^{\frac{1}{n}}(G) v_\gamma^{\frac{n-1}{n}}(U) \quad (40)$$

для любого регулярного множества $U \subset R(r_{k-1}, r_k) \cap G_H$.

Введем теперь обозначение

$$D_k = D \cap R(r_{k-1}, r_k)$$

и рассмотрим отдельно каждую из следующих двух возможностей.

1-й случай: пусть $v_\gamma(D_k) \geq \frac{1}{2} v_\gamma(R(r_{k-1}, r_k))$. Тогда в силу условия (33) $4v_\gamma(G) \leq \varepsilon v_\gamma(D_k \setminus G_H)$. В таком случае, используя (40) для всего множества $R(r_{k-1}, r_k) \cap G_H$ и учитывая затем условие (36), получаем неравенство

$$v_\mu(D_k \cap G_H) \leq \frac{\varepsilon}{2} v_\mu(D_k \setminus G_H). \quad (41)$$

2-й случай: пусть $v_\gamma(D_k) \leq \frac{1}{2} v_\gamma(R(r_{k-1}, r_k))$. В этом случае изопериметрическое неравенство (34) для множества $U = D_k$ принимает вид:

$$v_\gamma(D_k)^{\frac{n-1}{n}} \leq I_k s_\gamma(\partial_i D_k \setminus \partial R(r_{k-1}, r_k)).$$

Применяя это неравенство к правой части неравенства (40) для множества $U = D_k \cap G_H$, имеем

$$v_\mu(D_k \cap G_H) \leq 2 h_k^n v_\gamma^{\frac{1}{n}}(G) I_k s_\gamma(\partial_i D_k \setminus \partial R(r_{k-1}, r_k)).$$

Следовательно, ввиду условий (35) и (36) имеет место неравенство

$$v_\mu(D_k \cap G_H) \leq \frac{\varepsilon}{2} c s_\mu(\partial_i D_k \setminus \partial R(r_{k-1}, r_k)). \quad (42)$$

Таким образом, для каждого $k = 1, 2, \dots$ выполняется одно из двух неравенств (41) или (42). Суммируя тогда эти неравенства по всем k , получаем неравенство

$$v_\mu(D \cap G_H) \leq \frac{\varepsilon}{2} \{v_\mu(D \setminus G_H) + c s_\mu(\partial_i D)\}.$$

Применяя здесь к правой части неравенство (39), имеем

$$v_\mu(D \cap G_H) \leq \varepsilon c s_\mu(\partial_i D).$$

Наконец, складывая это неравенство и неравенство (39), получаем искомое изопериметрическое неравенство (8). Основная лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы сознательно оставили пока без внимания последнее утверждение основной леммы, касающееся возможной гладкости искомой функции μ , поскольку оно никак не связано с деталями проведенного построения и вытекает теперь из следующей элементарной леммы общего характера.

ЛЕММА (о сглаживании). *Предположим, что существует строго положительная непрерывная в M функция μ , удовлетворяющая условиям 1) и 2) основной леммы.*

Тогда существует строго положительная непрерывная в M функция со свойствами 1) и 2), сколь угодно гладкая (в пределах гладкости самого многообразия) на множестве Ω , определенном в (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если μ — указанная в условии леммы функция, то, как легко видеть, можно построить непрерывную на M функцию $\tilde{\mu}$ требуемого класса гладкости, удовлетворяющую всюду в M следующим неравенствам:

$$\mu \leq \tilde{\mu} \leq \min \left\{ \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1/n} \mu, \mu + \omega \right\}.$$

Отсюда: во-первых, с учетом свойства 1) для функции μ

$$\lambda \leq \tilde{\mu} \leq \lambda + 2\omega,$$

т.е. функция $\tilde{\mu}$ также удовлетворяет свойству 1);

во-вторых, поскольку для области $D \subset M$

$$v_{\tilde{\mu}}(D) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) v_{\mu}(D),$$

то из неравенства (8), справедливого для функции μ , вытекает неравенство

$$v_{\tilde{\mu}}(D) \leq (1 + 2\varepsilon) cs_{\mu}(\partial_i D) \leq (1 + 2\varepsilon) cs_{\tilde{\mu}}(\partial_i D),$$

т.е. функция $\tilde{\mu}$ удовлетворяет и свойству 2). Лемма доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Зоричу за полезные советы и ценные обсуждения, в результате которых и появилась настоящая работа.

Список литературы

1. Зорич В. А., Кесельман В. М. Изопериметрическое неравенство на многообразиях конформно-гиперболического типа // Функц. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 12–23.
2. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Ладженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
4. Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
5. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.
7. Григорьян А. А. О свойствах гармонических функций на многообразиях // Дис. . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1982.
8. Grigor'yan A. Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1999. V. 273. P. 140–225.

Московский государственный
индустриальный университет
E-mail: kvlm@online.ru

Поступила в редакцию
08.04.2002 и 04.02.2003