Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Треугольники Релея и нематричная интерполяция матричных бета-интегралов, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 49–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:48:23

УДК 519.46

Ю. А. Неретин

Треугольники Релея и нематричная интерполяция матричных бета-интегралов

Треугольник Релея размера n — это набор $n(n+1)/2$ вещественных чисел λ_{kl} , где $1 \leq l \leq k \leq n$, которые убывают с ростом k при фиксированном l и возрастают с ростом k при фиксированном $k-l$. Мы строим семейство бета-интегралов по пространству треугольников Релея, которые интерполируют матричные интегралы типа Зигеля, Хуа Ло Кена и Гиндикина по размерности основного поля ($\mathbb{R}$, Сили кватернионы $\mathbb{H}$). Мы также интерполируем меры Хуа–Пикреля на обратных пределах симметрических пространств $U(n)$, $U(n)/O(n)$, $U(2n)/Sp(n)$.

Наше семейство интегралов включает в себя также интеграл Сельберга.

Библиография: 30 названий.

§ 0. Введение

0.1. Интерполяция однородных пространств. Известно, что теория представлений полупростых групп может быть частично проинтерполирована на уровне спецфункций. Напомним самую старую (и самую простую) конструкцию такого рода — преобразование Ганкеля [1], [2]. Пусть f — функция на $\mathbb{R}^n$, зависящая только от $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Рассмотрим ее преобразование Фурье

$$\widehat{f}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(r) e^{-iax} dx.$$

Усредняя e^{iax} по сферам радиуса $\rho = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$, мы получаем, что $\widehat{f}(\rho)$ задается формулой

$$\widehat{f}(\rho) = H_n f(\rho) := \int_0^\infty J_{n/2-1}(r\rho) f(r) r^{n/2} dr, \quad (0.1)$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)}.$$

Очевидно, оператор H_n является унитарным оператором из пространства $L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$ в себя и удовлетворяет свойству $H_n^2 = 1$.

Работа выполнена при поддержке NWO (грант № 047-008-009).

Число n по построению является целым — это размерность пространства $\mathbb{R}^n$. Однако *преобразование Ганкеля*¹ (0.1) определено при любых комплексных n , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} n > 0$. Согласно теореме Ганкеля при любых n выполнено $H_n^2 = 1$, а при вещественных $n > 0$ оператор H_n унитарен в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1}dr)$.

Аналогично, индексное гипергеометрическое преобразование при выделенных значениях параметров дает сферические преобразования для всех гиперболических симметрических пространств [3]–[5]. В случае полупростых групп ранга > 1 интерполяцию удастся провести для функций, зависящих лишь от собственных или сингулярных чисел матриц. Различные сюжеты, связанные с такой интерполяцией, обсуждаются в [6]–[10].

0.2. Цели работы. Настоящая статья имеет две цели:

- построить интерполяцию для мер Хуа–Пикреля [11]–[14] на обратных пределах симметрических пространств;
- построить интерполяцию для матричных B -функций (см. [15], [16]);

в последнем случае мы хотим заменить размерность основного поля $\dim \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, на произвольное комплексное число.

Отметим, что вторая задача нестандартна с точки зрения существующей сейчас интерполяционной идеологии, так как матричная B -функция не выражается через собственные числа матрицы. Обе цели достигнуты частично, а именно для групп серии A_n . Интересно, что наше семейство бета-интегралов включает в себя и интеграл Сельберга.

0.3. Меры Хуа–Пикреля и их интерполяция. Объясним более подробно задачу о мерах Хуа–Пикреля. Позднее мы уже не будем к этому возвращаться, и дальнейший текст статьи устроен как “игра в интегралы”.

Обозначим через $U(n)$ группу унитарных матриц порядка n . Рассмотрим отображение $\Upsilon: U(n+1) \rightarrow U(n)$, заданное формулой

$$\Upsilon \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} = T - R(1 + P)^{-1}Q,$$

где $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} \in U(n+1)$ – блочная матрица размера $(1+n) \times (1+n)$. Легко проверить, что образ меры Хаара на $U(n+1)$ при отображении Υ является мерой Хаара на $U(n)$. Таким образом, мы можем построить обратный предел $\mathfrak{U}$ цепочки

$$\dots \xleftarrow{\Upsilon} U(n-1) \xleftarrow{\Upsilon} U(n) \xleftarrow{\Upsilon} U(n+1) \xleftarrow{\Upsilon} \dots. \quad (0.2)$$

Рассмотрим последовательность матриц $g_n \in U(n)$ такую, что

$$g_n = \Upsilon(g_{n+1})$$

¹Мы используем для него нестандартное обозначение.

(множество таких цепочек находится во взаимно однозначном соответствии с точками пространства $\mathfrak{U}$). Обозначим через $\nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}$ собственные числа матрицы g_n . Итак, каждому элементу пространства $\mathfrak{U}$ и каждому $n = 1, 2, \dots$ мы поставили в соответствие набор точек $\nu_{n1}, \dots, \nu_{nn}$ окружности $|\nu| = 1$.

Иными словами, мы получили случайный процесс с дискретным временем, и его значением в момент n является n -точечное подмножество окружности.

Конструкция допускает три следующие вариации, см. [12].

Во-первых, мы можем заменить меру Хаара dg на $U(n)$ на двухпараметрическое семейство мер Хау–Пикреля

$$c_n(\sigma) \det(1 + g)^\sigma \det(1 + \bar{g})^{\bar{\sigma}} dg,$$

где $\sigma \in \mathbb{C}$ фиксировано, а нормировочный множитель $c_n(\sigma)$ выбран так, чтобы мера всей группы $U(n)$ была равна единице. Тогда эти меры образуют согласованное семейство относительно отображений Υ , и мы снова можем рассмотреть проективный предел полученной цепочки.

Во-вторых, меры Хау–Пикреля могут быть заменены на семейство мер, зависящее от бесконечного числа комплексных параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. В этом случае мера на группе $U(n)$ задается формулой

$$c_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \det(1 + g)^{\sigma_n} \det(1 + \bar{g})^{\bar{\sigma}_n} \times \prod_{j=1}^{n-1} \det(1 + [g]_j)^{\sigma_j - \sigma_{j+1}} \prod_{j=1}^{n-1} \det(1 + [\bar{g}]_j)^{\bar{\sigma}_j - \bar{\sigma}_{j+1}} dg,$$

где $[g]_j$ обозначает левый верхний угол матрицы g размера $j \times j$.

В-третьих, данная конструкция выживает для всех классических компактных симметрических пространств. Нас интересуют обратные пределы $\mathfrak{U}/\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{U}/\mathfrak{Sp}$ еще двух цепочек

$$\dots \longleftarrow U(n-1)/O(n-1) \longleftarrow U(n)/O(n) \longleftarrow \dots, \quad (0.3)$$

$$\dots \longleftarrow U(2n-2)/Sp(2n-2) \longleftarrow U(2n)/Sp(2n) \longleftarrow \dots. \quad (0.4)$$

По-видимому, сами по себе три пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}/\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}/\mathfrak{Sp}$ проинтерполировать нельзя. Однако нашу основную конструкцию (см. теорему 1.3) можно понимать так. Мы строим большой класс случайных марковских процессов, значение которых в момент времени n есть n -точечное подмножество на окружности. Этот класс процессов содержит, в частности, процессы на окружности, связанные с цепочками (0.2)–(0.4).

Автор благодарит Г. И. Ольшанского за обсуждение затронутой темы.

§ 1. Основные утверждения

1.1. Треугольники Релея. Пусть A – эрмитова матрица размера $n \times n$, а B – ее левый верхний блок размера $(n-1) \times (n-1)$. Обозначим через $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$

собственные числа матрицы A , а через $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ – собственные числа матрицы B .

Согласно теореме Релея (см., например, [17], [18])

$$\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_n. \quad (1.1)$$

Мы определяем *треугольник Релея* $\mathcal{L}$ размера n как набор из $n(n+1)/2$ вещественных чисел

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \lambda_{11} & & & \\ & & & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & \\ & & & \lambda_{31} & & \lambda_{32} & & \lambda_{33} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & & \lambda_{n3} & \dots & \lambda_{n(n-2)} & & \lambda_{n(n-1)} & \lambda_{nn}, \end{array} \quad (1.2)$$

удовлетворяющих системе неравенств

$$\dots \leq \lambda_{(j+1)k} \leq \lambda_{jk} \leq \lambda_{(j+1)(k+1)} \leq \dots \quad (1.3)$$

для всевозможных j, k . Иными словами, числа $\lambda_{j\alpha}$ убывают в юго-западном направлении и возрастают в юго-восточном.

Пространство всех треугольников Релея размера n мы обозначим через $\mathcal{R}_n$. Через $\mathcal{R}_n[a, b]$ мы обозначим множество всех треугольников Релея размера n , удовлетворяющих условию

$$a \leq \lambda_1^{(n)}, \quad \lambda_n^{(n)} \leq b$$

(иными словами, все $\lambda_{j\alpha}$ лежат между a и b).

Известно, что некоторые матричные интегралы можно свести к интегрированию по пространствам $\mathcal{R}_n[a, b]$; по крайней мере, примерно так вычислялись сферические функции группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ в книге И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [19]. А. Окуньков и Г. И. Ольшанский [20] получили представление многочленов Джека как некоторых интегралов по пространству треугольников Релея. Эта работа была основной отправной точкой для настоящей статьи; см. также работу Казарновского-Кроля [21].

1.2. Естественные меры на $\mathcal{R}_n$. Через $\mathbb{K}$ мы обозначим $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Положим

$$\theta = \frac{1}{2} \dim \mathbb{K}.$$

Введем на $\mathbb{K}$ естественную меру $\{dx\}$: в случае вещественных чисел это мера Лебега, для комплексных чисел $x = u + iv$ полагаем $\{d(u + iv)\} = du dv$, а для кватернионов $x = u + iv + jw + kz$ берем $\{d(u + iv + jw + kz)\} = du dv dw dz$.

Рассмотрим пространство $\mathrm{Herm}_{\mathbb{K}}(n)$ всех эрмитовых матриц² над $\mathbb{K}$ размера $n \times n$. Снабдим это пространство мерой Лебега

$$\prod_{k > l} \{dt_{kl}\} \prod_k dt_{kk}.$$

²Квадратная матрица Z над $\mathbb{K}$ называется эрмитовой, если ее матричные элементы $z_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию $z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}$.

Для матрицы T обозначим через $[T]_j$ ее левый верхний блок размера $j \times j$.
 Для каждого блока $[T]_j$ матрицы T обозначим через

$$\lambda_{j1} \leq \lambda_{j2} \leq \dots \leq \lambda_{jj}$$

собственные числа матрицы $[T]_j$. Таким образом, мы получаем отображение

$$\text{Herm}_{\mathbb{K}}(n) \rightarrow \mathcal{R}_n(-\infty, \infty).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1³. *Образ меры Лебега на $\text{Herm}_{\mathbb{K}}(n)$ при отображении на $\mathcal{R}_n$ равен*

$$C_n(\theta) \mathfrak{r}_{\theta}(\mathcal{L}) d\mathcal{L}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathfrak{r}_{\theta}(\mathcal{L}) = \frac{\prod_{2 \leq j \leq n} \prod_{1 \leq \alpha \leq j-1, 1 \leq p \leq j} |\lambda_{(j-1)\alpha} - \lambda_{jp}|^{\theta-1}}{\prod_{2 \leq j \leq n-1} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{2\theta-2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}), \quad (1.5)$$

$d\mathcal{L}$ есть мера Лебега на пространстве треугольников Релея

$$d\mathcal{L} = \prod_{1 \leq j \leq n} \prod_{1 \leq \alpha \leq j} d\lambda_{j\alpha}$$

и $C_n(\theta)$ — нормировочная константа:

$$C_n(\theta) = \frac{\pi^{n(n-1)\theta/2}}{\Gamma^{n(n-1)/2}(\theta)}.$$

Через $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)$ мы обозначим пространство матриц над $\mathbb{K}$ размера $n \times m$. Положим $n \leq m$, т.е. число строк не превышает числа столбцов. Через $\{T\}_j$ мы обозначим матрицу, состоящую из первых j строчек матрицы T . Для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ мы обозначим через

$$\lambda_{j1} \leq \lambda_{j2} \leq \dots \leq \lambda_{jj}$$

собственные числа матрицы $\{T\}_j \{T\}_j^*$; очевидно, все они неотрицательны. Таким образом, мы получаем отображение

$$\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m) \rightarrow \mathcal{R}_n[0, \infty). \quad (1.6)$$

³ Автор не знает, опубликовано ли где-либо это предложение; оно легко усматривается из вычисления [19; § II.9]. В фольклоре оно известно (от него идеологически зависят интегральные представления джековских гипергеометрических функций из [20], [21]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Образ меры Лебега на $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)$ при отображении (1.6) равен*

$$\tilde{C}_{nm}(\theta) \psi(\mathcal{L}) \mathfrak{r}_{\theta}(\mathcal{L}) d\mathcal{L},$$

где $\mathfrak{r}_{\theta}(\mathcal{L})$ задается формулой (1.5),

$$\psi(\mathcal{L}) = \prod_{p=1}^n \lambda_{np}^{(m-n+1)\theta-1}$$

и

$$\tilde{C}_{nm}(\theta) = \frac{\pi^{mn\theta}}{\Gamma^{n(n-1)/2}(\theta) \prod_{j=1}^n \Gamma((m-j+1)\theta)}.$$

1.3. Ультра-бета-интегралы. Мы выводим следующие два интеграла (1.7), (1.8) по пространству треугольников Релея.

Фиксируем комплексные числа σ_j, τ_j , где $j = 1, \dots, n$, а также комплексные числа $\theta_{j\alpha}$, где индексы j, α пробегает область $1 \leq \alpha \leq j \leq n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_n[0, \infty)} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j \frac{\lambda_{j\alpha}^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}}}{(1 + \lambda_{j\alpha})^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta_{j\alpha}}} \cdot \prod_{p=1}^n \frac{\lambda_{np}^{\sigma_n - 1}}{(1 + \lambda_{np})^{\tau_n}} \\ & \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\ & = \prod_{1 \leq \alpha \leq j \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j - \sigma_j - \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha})}{\Gamma(\tau_j)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Условия абсолютной сходимости этого интеграла:

$$\text{Re } \theta_{j\alpha} > 0, \quad \text{Re } \sigma_j > 0, \quad \text{Re } \tau_j > \text{Re } \sigma_j + \sum_{\alpha=1}^{j-1} \text{Re } \theta_{(j-1)\alpha}.$$

Пусть, по-прежнему, $\tau_j, \sigma_j, \theta_{j\alpha}$ — комплексные числа. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_n(-\infty, \infty)} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j (1 + i\lambda_{j\alpha})^{-\sigma_j + \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}} (1 - i\lambda_{j\alpha})^{-\tau_j + \tau_{j+1} - \theta_{j\alpha}} \\ & \times \prod_{p=1}^n (1 + i\lambda_{np})^{-\sigma_n} (1 - i\lambda_{np})^{-\tau_n} \\ & \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\ & = \pi^n 2^{2n - \sum_{j=1}^n (\sigma_j + \tau_j)} \prod_{1 \leq \alpha \leq j \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \\ & \times \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j + \tau_j - 1 - \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha})}{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где i – мнимая единица. Условия абсолютной сходимости этого интеграла:

$$\operatorname{Re} \theta_{j\alpha} > 0, \quad \operatorname{Re} \left\{ \sigma_j + \tau_j - 1 - \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha} \right\} > 0.$$

В §3 мы выводим еще три интеграла (3.1)–(3.3) в том же духе.

1.4. Матричные интегралы. Ультра-бета-интегралы включают в себя много различных матричных бета- и гамма-интегралов типа Уишарта–Ингхама [22], Зигеля [23], Хуа Ло Кена [24] и Гиндикина [15].⁴ Мы приведем две серии таких интегралов сейчас и еще несколько серий в п. 4.3. Некоторых из этих интегралов автор в литературе не встречал. По-видимому, варьируя условия симметрии на матрицы, можно получить еще довольно много интегралов в этом стиле.

Рассмотрим пространство $\operatorname{Pos}_{\mathbb{K}}(n)$ всех эрмитовых положительно определенных матриц T размера $n \times n$ над телом $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$; пусть, по-прежнему, $\theta = \frac{1}{2} \dim \mathbb{K}$. Фиксируем комплексные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и $\tau_1, \dots, \tau_n$. Бета-интегралы Гиндикина (см. [15], а также [25]; они обобщают интегралы Зигеля [23]) имеют вид

$$\begin{aligned} & \int_{\operatorname{Pos}_{\mathbb{K}}(n)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\det^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta} [T]_j}{\det^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta} [1 + T]_j} \frac{\det^{\sigma_n - 1} T}{\det^{\tau_n} (1 + T)} dT \\ &= \pi^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j - \sigma_j - (j-1)\theta)}{\Gamma(\tau_j)}. \end{aligned}$$

Покажем, как свести их к нашим интегралам. В обозначениях п. 1.4 мера dT переписывается в виде (1.4), а подынтегральная функция – как

$$\prod_{j=1}^n \frac{\lambda_{j\alpha}^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta}}{(1 + \lambda_{j\alpha})^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta}} \prod_{p=1}^n \frac{\lambda_{np}^{\sigma_n - 1}}{(1 + \lambda_{np})^{\tau_n}},$$

и мы получаем частный случай интеграла (1.7).

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \int_{\operatorname{Herm}_{\mathbb{K}}(n)} \prod_{j=1}^{n-1} \det(1 + i[T]_j)^{-\sigma_j + \sigma_{j+1} - \theta} \\ & \times \det(1 - i[T]_j)^{-\tau_j + \tau_{j+1} - \theta} \det(1 + iT)^{-\sigma_n} \det(1 - iT)^{-\tau_n} dT \\ &= \pi^{n(n+1)/2} 2^{2n - \sum \sigma_j - \sum \tau_j} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\tau_j + \sigma_j - 1 - (j-1)\theta)}{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j)}. \end{aligned}$$

Для поля $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ этот интеграл был вычислен в [26], [12], частным случаем этого интеграла является интеграл Хуа Ло Кена [24]

$$\int_{\operatorname{Herm}_{\mathbb{K}}(n)} \det(1 + T^2)^{-\sigma} dT,$$

⁴Интегралы из работы автора [16] ультра-бета-интегралами не поглощаются.

он получается при

$$\sigma_j = \tau_j = \sigma - (n - j)\theta.$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\det(\{T\}_j \{T\}_j^*)^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta}}{\det(1 + \{T\}_j \{T\}_j^*)^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta}} \cdot \frac{\det(T^* T)^{\sigma_n - (m - n + 1)\theta}}{\det(1 + TT^*)^{\tau_n}} dT \\ &= \pi^{mn\theta} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j - \sigma_j - (j - 1)\theta)}{\Gamma(\tau_j) \Gamma((m - j + 1)\theta)}. \end{aligned}$$

Эта серия интегралов включает в себя интегралы Хуа Ло Кена [24]

$$\int_{\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)} \det(1 + T^2)^{-\tau} dT.$$

Еще несколько серий матричных интегралов обсуждаются ниже в п. 4.3.

1.5. Проективные системы мер. Фиксируем бесконечную последовательность комплексных чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Положим $\tau_j = \bar{\sigma}_j$. Фиксируем также вещественные числа $\theta_{j\alpha}$, где $1 \leq \alpha \leq j$. Пусть эти числа удовлетворяют неравенствам

$$\theta_{j\alpha} > 0, \quad 2 \operatorname{Re} \sigma_j > 1 + \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha}.$$

Далее фиксируем n . Обозначим через $\mathfrak{P}_n(\mathcal{L})$ подынтегральное выражение в интеграле (1.8). Рассмотрим вероятностную меру

$$\varkappa_n = c_n \cdot \mathfrak{P}_n(\mathcal{L}) d\mathcal{L}$$

на $\mathcal{R}_n(-\infty, \infty)$, где c_n — нормировочная константа (выбранная так, чтобы мера была вероятностной).

Рассмотрим отображение

$$\Upsilon: \mathcal{R}_{n+1}(-\infty, \infty) \rightarrow \mathcal{R}_n(-\infty, \infty),$$

состоящее в стирании последней строчки таблицы Релея $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_{n+1}(-\infty, \infty)$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Образ меры $\varkappa_{n+1}$ при отображении Υ совпадает с $\varkappa_n$.*

Следовательно, по теореме Колмогорова об обратных пределах существует каноническая вероятностная мера $\varkappa_\infty$ на пространстве бесконечных треугольников Релея такая, что ее проекции на $\mathcal{R}_n(-\infty, \infty)$ совпадают с $\varkappa_n$ для всех n .

Возможно, что эта конструкция является чрезмерно общей. Приведем ее заведомо разумный частный случай. Положим $\theta_{j\alpha} = \theta$ для всех j, α и $\sigma_j = \sigma + j\theta$. Тогда мы получаем серию мер, интерполирующую меры Хуа–Пикреля на обратных пределах симметрических пространств

$$\lim_{\infty \leftarrow n} \text{U}(n)/\text{O}(n), \quad \lim_{\infty \leftarrow n} \text{U}(n), \quad \lim_{\infty \leftarrow n} \text{U}(2n)/\text{Sp}(n);$$

эти случаи соответствуют $\theta = 1/2, 1, 2$. По сравнению с п. 0.3 у нас сменены обозначения, а именно $\lambda_{j\alpha}$ связаны с $\nu_{j\alpha}$ из п. 0.3 по формуле

$$\lambda_{j\alpha} = \frac{i(1 - \nu_{j\alpha})}{1 + \nu_{j\alpha}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обсуждаемое в этом пункте пространство $\mathcal{R}_n[-\infty, \infty]$ имитирует пространство всех эрмитовых матриц, а в п. 0.3 мы говорили об унитарных матрицах. Переход от унитарных матриц к эрмитовым осуществляется с помощью преобразования Кэли

$$iT = -1 + (1 + g)^{-1}, \quad g \in \mathrm{U}(n), \quad T \in \mathrm{Herm}_{\mathbb{C}}(n).$$

Для матрицы T обозначим через $\langle T \rangle_j$ ее правый нижний уголок размера $j \times j$. Тогда (см. [12])

$$\det(1 + [g]_k) = 2^{-n+k} \det(1 + \langle T \rangle_{n-k}) \cdot \det(1 + T)^{-1},$$

и это позволяет привести меры из п. 0.3 к виду $c_n \cdot \mathfrak{P}_n(\mathcal{L}) d\mathcal{L}$.

1.6. Трапеции. Интегралы (1.7), (1.8), а также выписанные ниже интегралы (3.1)–(3.3) допускают небольшое усложнение. Мы для определенности обсудим интеграл (1.7).

Назовем *трапецией Релея* набор чисел

$$\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_{m1} & & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mm} \\ & & & & & & \\ & \lambda_{(m+1)1} & & \lambda_{(m+1)2} & & \dots & \lambda_{(m+1)(m+1)} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \lambda_{n3} & \dots & \lambda_{n(n-1)} & \lambda_{nn}, \end{array}$$

удовлетворяющий условию чередования (1.3). Множество таких трапеций мы обозначим через $\mathcal{R}_n^m$. Имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_n^m[0, \infty)} \prod_{j=m}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j \frac{\lambda_{j\alpha}^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}}}{(1 + \lambda_{j\alpha})^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta_{j\alpha}}} \cdot \prod_{p=1}^n \frac{\lambda_{np}^{\sigma_n - 1}}{(1 + \lambda_{np})^{\tau_n}} \\ & \times \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} (\lambda_{m\beta} - \lambda_{m\alpha})^{2\kappa - 1} \\ & \times \frac{\prod_{j=m}^{n-1} \prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{j=m}^{n-1} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\ & = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\Gamma((j+1)\kappa) \Gamma(\sigma_m + j\kappa) \Gamma(\tau_m - \sigma_m - (m+j-1)\kappa)}{\Gamma(\kappa) \Gamma(\tau_m - j\kappa)} \\ & \times \prod_{m \leq \alpha \leq j \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \prod_{j=m}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j - \sigma_j - \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha})}{\Gamma(\tau_j)}. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Отметим, что при $m = n$ мы получаем интеграл Сельберга (см. [27]–[29]):

$$\begin{aligned} & \int_{0 < \mu_1 < \dots < \mu_n} \prod_{p=1}^n \frac{\mu_p^{\sigma - 1}}{(1 + \mu_p)^{\tau}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p)^{2\theta} d\mu_1 \dots d\mu_n \\ & = \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma + \theta(j-1)) \Gamma(\tau - \sigma - \theta(n-j+1)) \Gamma(j\theta)}{\Gamma(\tau - \theta(j-1)) \Gamma(\theta)} \quad (1.10) \end{aligned}$$

(мы обозначили переменные λ_{np} через μ_p , а κ через θ ; остальные параметры при $m = n$ отсутствуют).

1.7. Гипотеза. Наши ультра-бета-интегралы являются своего рода “надстройкой” над интегралами типа Сельберга. Интеграл Сельберга является простейшим представителем многомерных бета-интегралов. Кажется правдоподобным, что такого рода “надстройки” должны существовать для других бета-интегралов, связанных с системами корней типа A_n , например для весовой функции многочленов Макдональда. Во всяком случае, для многочленов Макдональда возможны интегральные представления типа [20], [21], см. [30].

1.8. Дальнейшая структура статьи. Наш §2 содержит основные леммы, из них в §3 легко выводятся теорема проективности, интегралы (1.7), (1.8) и (1.9), а также (3.1)–(3.3). В §4 доказаны предложения 1.1, 1.2, там же обсуждается еще несколько матричных интегралов.

§ 2. Замена переменных

Мы используем замены переменной типа Андерсона [28].

2.1. Основные леммы. Фиксируем вещественные числа $a < b$; мы допускаем, что $a = -\infty$ или $b = \infty$. Пусть фиксированные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам

$$a < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < b. \quad (2.1)$$

Обозначим через $\Xi[a, b; \lambda]$ множество всех наборов $\mu_1, \dots, \mu_n$, удовлетворяющих неравенству

$$a < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \mu_n < b. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть комплексные σ , τ и $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \theta_\alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \sigma > 0, \quad \operatorname{Re} \tau > \operatorname{Re} \sigma - \sum_{\alpha} \operatorname{Re} \theta_\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi[0, \infty; \lambda]} \prod_{p=1}^n \frac{\mu_p^{\sigma-1}}{(1 + \mu_p)^\tau} \cdot \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq p \leq n} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_\alpha-1} \\ & \times \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq p \leq n} d\mu_p \\ & = \frac{\Gamma(\tau - \sigma - \sum \theta_\alpha) \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} \Gamma(\theta_\alpha)}{\Gamma(\tau)} \\ & \times \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1} \cdot \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} \frac{\lambda_\alpha^{\sigma-1+\theta_\alpha}}{(1 + \lambda_\alpha)^{\tau-\theta_\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть комплексные $\sigma, \tau, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \theta_\alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \left(\sigma + \tau - \sum_{\alpha} \operatorname{Re} \theta_\alpha - 1 \right) > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi[-\infty, \infty; \lambda]} \prod_{p=1}^n (1 + i\mu_p)^{-\sigma} (1 - i\mu_p)^{-\tau} \cdot \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq p \leq n} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_\alpha - 1} \\ & \times \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq p \leq n} d\mu_p \\ & = \frac{\pi 2^{2-\sigma-\tau} \Gamma(\sigma + \tau - \sum \theta_\alpha - 1) \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} \Gamma(\theta_\alpha)}{\Gamma(\tau) \Gamma(\sigma)} \\ & \times \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1} \cdot \prod_{1 \leq \alpha} (1 + i\lambda_\alpha)^{-\sigma - \theta_\alpha} (1 - i\lambda_\alpha)^{-\tau - \theta_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. Варианты. Есть три следующих варианта лемм 2.1, 2.2.

А) Пусть $\operatorname{Re} \sigma > 0, \operatorname{Re} \theta_\alpha > 0, \operatorname{Re} \psi > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi[0, \infty; \lambda]} \prod_{p=1}^n \mu_p^{\sigma-1} e^{-\psi \mu_p} \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq p \leq n} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_\alpha - 1} \\ & \times \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq p \leq n} d\mu_p \\ & = \psi^{-\sigma - \sum \theta_\alpha} \Gamma(\sigma) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \Gamma(\theta_\alpha) \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} \lambda^{\sigma-1+\theta_\alpha} e^{-\psi \lambda_\alpha} \\ & \times \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В) Пусть $\operatorname{Re} \psi > 0, \operatorname{Re} \theta_\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi[-\infty, \infty; \lambda]} \prod_{p=1}^n e^{-\psi \mu_p^2} \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq p \leq n} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_\alpha - 1} \\ & \times \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq p \leq n} d\mu_p \\ & = \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\psi}{2} \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^2 \right\} \psi^{-1/2 - \sum \theta_\alpha} \\ & \times \prod_{\alpha=1}^{n-1} \Gamma(\theta_\alpha) \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С) Пусть $-\infty < a < b < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \int_{\Xi[a, b; \lambda]} \prod_{p=1}^n (\mu_p - a)^{\sigma-1} (b - \mu_p)^{\tau-1} \\
& \times \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1, 1 \leq p \leq n} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_\alpha-1} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq p \leq n} d\mu_p \\
& = (b - a)^{\sigma+\tau+\sum \theta_\alpha-1} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\tau) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \Gamma(\theta_\alpha)}{\Gamma(\sigma + \tau + \sum \theta_\alpha)} \\
& \times \prod_{\alpha=1}^{n-1} (\lambda_\alpha - a)^{\sigma+\theta_\alpha-1} (b - \lambda_\alpha)^{\tau+\theta_\alpha-1} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha+\theta_\beta-1}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

2.3. Замена переменных. Пусть параметры $\lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1}$ фиксированы, а переменные $\mu_1, \dots, \mu_n$ удовлетворяют условию чередования

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \mu_n. \tag{2.8}$$

Введем новые переменные $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta$ по формулам

$$\xi_\alpha = - \frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (\mu_p - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq \beta \leq n-1, \beta \neq \alpha} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}, \tag{2.9}$$

$$\eta = \sum_{1 \leq p \leq n} \mu_p - \sum_{1 \leq \beta \leq n-1} \lambda_\beta. \tag{2.10}$$

ЛЕММА 2.3. а) *Отображение $(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta)$, заданное формулами (2.9), (2.10), взаимно однозначно отображает область (2.8) на область*

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

б) *Если дополнительно $\lambda_1 > 0$, то неравенства*

$$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \mu_n \tag{2.12}$$

равносильны

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} > 0, \quad \eta > \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{\lambda_\alpha}. \tag{2.13}$$

с) *Якобиан замены (2.9), (2.10) равен*

$$\frac{\prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}. \tag{2.14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$R(x) := \frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (x - \mu_p)}{\prod_{1 \leq \beta \leq n-1} (x - \lambda_\beta)}. \quad (2.15)$$

Вычеты функции $R(x)$ равны

$$\operatorname{res}_{x=\lambda_\alpha} R(x) = -\xi_\alpha, \quad (2.16)$$

поэтому

$$R(x) = x - \eta - \sum_{1 \leq \alpha \leq n-1} \frac{\xi_\alpha}{x - \lambda_\alpha}. \quad (2.17)$$

Положительность переменных ξ_α непосредственно вытекает из неравенств (2.8).

Обратно, положим, что все ξ_α положительны. Из разложения (2.17) видно, что функция $R(x)$ на левом конце интервала $(\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+1})$ равна $+\infty$, а на правом конце равна $-\infty$. Поэтому у нее есть по крайней мере один корень на этом интервале. Буквально то же самое верно на лучах $(-\infty, \lambda_1)$ и $(\lambda_{n-1}, +\infty)$. Поэтому в случае положительных ξ_α все корни μ_p уравнения $R(x) = 0$ вещественны и удовлетворяют неравенствам (2.8).

Итак, утверждение а) доказано. Мы знаем, что на интервале $(-\infty, \lambda_1)$ есть один корень уравнения $R(x) = 0$. Чтобы он был положительным, должно быть выполнено $R(0) < 0$; это доказывает б).

Чтобы вычислить якобиан, заметим, что

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \mu_p} = \frac{\xi_\alpha}{\mu_p - \lambda_\alpha}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mu_p} = 1.$$

Поэтому якобиан равен

$$\Delta \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha,$$

где

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} & \frac{1}{\mu_1 - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{\mu_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\mu_2 - \lambda_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\mu_n - \lambda_1} & \frac{1}{\mu_n - \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\mu_n - \lambda_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

ЛЕММА 2.4. *Имеет место равенство*

$$\Delta = \frac{\prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_p - \mu_q) \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq p \leq n, 1 \leq \alpha \leq n-1} (\mu_p - \lambda_\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем определитель Коши

$$\det_{1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq l \leq n} \frac{1}{\mu_\alpha - \lambda_l} = \frac{\prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq p \leq n, 1 \leq \alpha \leq n} (\mu_p - \lambda_\alpha)}. \quad (2.19)$$

Далее мы домножаем последний столбец определителя на λ_n и устремляем λ_n к бесконечности. Это и доказывает лемму 2.4.

Осталось заметить, что

$$|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{n-1}| = \frac{\prod_{1 \leq p \leq n, 1 \leq \alpha \leq n-1} |\mu_p - \lambda_\alpha|}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^2},$$

и это доказывает лемму 2.3.

ЛЕММА 2.5. В обозначениях леммы 2.3 для любого $a \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\prod_{1 \leq p \leq n} (\mu_p + a) = \prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} (\lambda_\alpha + a) \cdot \left\{ a + \eta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{\lambda_\alpha + a} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$Q(x) = \frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (x - \mu_p)}{(x + a) \prod_{1 \leq \beta \leq n-1} (x - \lambda_\beta)}.$$

Ее вычеты равны

$$\operatorname{res}_{x=\lambda_\alpha} Q(x) = \frac{-\xi_\alpha}{\lambda_\alpha + a}, \quad \operatorname{res}_{x=-a} Q(x) = -\frac{\prod (\mu_p + a)}{\prod (\lambda_\beta + a)}, \quad \operatorname{res}_{x=\infty} Q(x) = \eta + a.$$

Сумма вычетов равна нулю, что равносильно утверждению леммы.

2.4. Доказательство леммы 2.1. Обозначим наш интеграл через I_1 . Положим

$$W = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1}. \quad (2.20)$$

Переходя к переменным ξ_α, η с помощью лемм 2.3 и 2.5, получаем

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{W} &= \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\lambda_\alpha^{\sigma-1}}{(1 + \lambda_\alpha)^\tau} \int \left(\eta - \sum \frac{\xi_\alpha}{\lambda_\alpha} \right)^{\sigma-1} \left(1 + \eta - \sum \frac{\xi_\alpha}{1 + \lambda_\alpha} \right)^{-\tau} \\ &\quad \times \prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha^{\theta_\alpha - 1} d\eta \prod_{\alpha=1}^{n-1} d\xi_\alpha, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где интегрирование ведется по области $\xi_\alpha > 0, \eta > \sum \xi_\alpha / \lambda_\alpha$.

Далее мы заменяем η и ξ_α на новые переменные

$$u = \eta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{\lambda_\alpha}, \quad v_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{\lambda_\alpha(1 + \lambda_\alpha)}.$$

В этих переменных

$$1 + \eta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{1 + \lambda_\alpha} = 1 + u + \sum_{\alpha=1}^{n-1} v_\alpha,$$

а

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha^{-1} \cdot d\eta d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \prod_{\alpha=1}^{n-1} v_\alpha^{-1} \cdot du dv_1 \cdots dv_{n-1}.$$

Интеграл преобразуется к виду

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\lambda_\alpha^{\sigma+\theta_\alpha-1}}{(1 + \lambda_\alpha)^{\tau-\theta_\alpha}} \int \frac{u^{\sigma-1} \prod v_\alpha^{\theta_\alpha-1}}{(1 + u + v_1 + \cdots + v_{n-1})^\tau} du dv_1 \cdots dv_{n-1},$$

где интегрирование ведется по области $u > 0$, $v_\alpha > 0$, и мы получили вариант интеграла Дирихле, см. следующий пункт.

2.5. Интегралы Дирихле. Интегралы Дирихле – это три следующих интеграла:

$$\int_{\substack{t_1 > 0, \dots, t_n > 0 \\ \sum t_n < 1}} \prod_{j=1}^n t_j^{x_j-1} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n t_j\right)^{x_{n+1}-1} dt_1 \cdots dt_n = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(x_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^{n+1} x_j)}; \quad (2.22)$$

$$\int_{t_1 > 0, \dots, t_n > 0} \frac{\prod_{j=1}^n t_j^{x_j-1} dt_1 \cdots dt_n}{(1 + \sum_{j=1}^n t_j)^y} = \frac{\Gamma(y - \sum_{j=1}^n x_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(x_j)}{\Gamma(y)}; \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1 > 0, \dots, t_{n-1} > 0; s \in \mathbb{R}} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} t_j^{x_j-1} ds dt_1 \cdots dt_{n-1}}{(1 + is + \sum_{j=1}^{n-1} t_j)^y (1 - is + \sum_{j=1}^{n-1} t_j)^z} \\ &= \frac{2^{2-y-z} \pi \Gamma(y + z - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j) \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(x_j)}{\Gamma(y) \Gamma(z)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Все эти интегралы легко вычисляются последовательным интегрированием по $t_1, t_2, \dots$, см. также теорему 1.8.6 из [29].

2.6. Доказательство леммы 2.2. Обозначим наш интеграл через I_2 , величину W зададим формулой (2.20). Тогда с помощью лемм 2.3, 2.5 получаем

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{W} &= \prod_{\alpha=1}^{n-1} (1 + i\lambda_\alpha)^{-\sigma} (1 - i\lambda_\alpha)^{-\tau} \\ &\times \int \left(1 + i\eta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{1 + i\lambda_\alpha}\right)^{-\sigma} \left(1 - i\eta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{1 - i\lambda_\alpha}\right)^{-\tau} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha^{\theta_\alpha-1} d\eta \prod d\xi_\alpha, \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по области (2.11).

Первые два сомножителя под интегралом преобразуем к виду

$$\left(1+i\left\{\eta-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\xi_{\alpha}\lambda_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}\right\}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\xi_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}\right)^{-\sigma}\left(1-i\left\{\eta-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\xi_{\alpha}\lambda_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}\right\}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\xi_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}\right)^{-\tau}.$$

Далее введем новые переменные

$$v_{\alpha} = \frac{\xi_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}, \quad u = \eta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_{\alpha}\lambda_{\alpha}}{1+\lambda_{\alpha}^2}.$$

Наш интеграл принимает вид

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} (1+i\lambda_{\alpha})^{-\sigma+\theta_{\alpha}} (1-i\lambda_{\alpha})^{-\tau+\theta_{\alpha}} \times \int_{v_1>0, \dots, v_{n-1}>0, u \in \mathbb{R}} \frac{\prod v_{\alpha}^{\theta_{\alpha}-1} du \prod dv_{\alpha}}{(1+iu + \sum v_{\alpha})^{\sigma} (1-iu + \sum v_{\alpha})^{\tau}},$$

и остается применить интеграл Дирихле (2.24).

2.7. Вывод интеграла (2.5). Обозначим наш интеграл через I_3 , величину W зададим формулой (2.20). Тогда

$$\frac{I_3}{W} = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_{\alpha}^{\sigma-1} e^{-\psi\lambda_{\alpha}} \int \left(\eta - \sum \frac{\xi_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}}\right)^{\sigma-1} e^{-\psi\eta} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_{\alpha}^{\theta_{\alpha}-1} d\eta \prod_{\alpha=1}^{n-1} d\xi_{\alpha},$$

где интегрирование ведется по положительным ξ_{α} и $\eta > \sum \xi_{\alpha}$. Вводя новые переменные

$$u = \eta - \sum \frac{\xi_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}}, \quad v_{\alpha} = \frac{\xi_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}},$$

получаем

$$\frac{I_3}{W} = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_{\alpha}^{\sigma+\theta_{\alpha}-1} e^{-\psi\lambda_{\alpha}} \int_{u>0, v_1>0, \dots, v_{n-1}>0} u^{\sigma-1} \prod v_{\alpha}^{\theta_{\alpha}-1} \times \exp\left\{-\psi\left(u + \sum v_{\alpha}\right)\right\} du \prod dv_{\alpha},$$

что сводится к произведению Г-функций.

2.8. Вывод формулы (2.6).

ЛЕММА 2.6. Пусть λ_{α} , μ_p , ξ_{α} , η связаны формулами (2.9), (2.10). Тогда

$$\sum_{p=1}^n \mu_p^2 = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_{\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \xi_{\alpha} + \eta^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию (2.15) в виде

$$R(x) = x \prod \left(1 - \frac{\mu_p}{x}\right) \prod \left(1 - \frac{\lambda_\alpha}{x}\right)^{-1}.$$

Коэффициент при x^{-1} ее лорановского разложения на бесконечности равен

$$c = \sum_{p < q} \mu_p \mu_q + \sum_{\alpha < \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum \lambda_\alpha \mu_p + \sum \lambda_\alpha^2 = \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \sum \lambda_\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum \mu_p^2.$$

С другой стороны, сумма вычетов равна нулю, т.е. $c = -\sum \xi_\alpha$.

Обозначим наш интеграл (2.6) через I_4 . Переходя к переменным ξ_α, η , получаем тривиальный интеграл

$$\frac{I_4}{W} = \exp \left\{ -\frac{\psi}{2} \sum \lambda_\alpha^2 \right\} \int_{\xi_\alpha > 0, \eta \in \mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{\psi}{2} \eta^2 - \psi \sum \xi_\alpha \right\} \prod \xi_\alpha^{\theta_\alpha - 1} d\eta \prod d\xi_\alpha.$$

2.9. Другой вывод интегралов (2.5), (2.6). Заметим, что

$$e^{-\mu} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{k}\right)^{-k}, \quad e^{-\mu^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\mu}{\sqrt{k}}\right)^{-k} \left(1 - \frac{i\mu}{\sqrt{k}}\right)^{-k},$$

поэтому интеграл (2.5) может быть получен из (2.3) подстановкой

$$\tau = k, \quad \mu_p = \frac{\tilde{\mu}_p}{k}, \quad \lambda_\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_\alpha}{k}$$

и предельным переходом при $k \rightarrow \infty$. Аналогично выводится (2.6) из (2.4).

2.10. Вывод формулы (2.7). Здесь можно почти дословно продублировать вычисление п. 2.4 и свести наш интеграл к интегралу Дирихле (2.23).

Можно также сделать в (2.7) замену

$$\tilde{\mu}_p = \frac{b-a}{\mu_p-a}, \quad \tilde{\lambda}_\alpha = \frac{b-a}{\lambda_\alpha-a}$$

и сразу свести этот интеграл к (2.3).

2.11. Еще один интеграл. Пусть $\mu_1 < \dots < \mu_{n+1}$ — фиксированные постоянные, а переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \mu_{n+1}. \quad (2.25)$$

ЛЕММА 2.7. Пусть $\operatorname{Re} \theta_1 > 0, \dots, \operatorname{Re} \theta_{n+1} > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int \prod_{1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq p \leq n+1} |\lambda_\alpha - \mu_p|^{\theta_p - 1} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha) \prod_{\alpha=1}^n d\lambda_\alpha \\ &= \prod_{1 \leq p < q \leq n+1} (\mu_q - \mu_p)^{\theta_p + \theta_q - 1} \cdot \frac{\prod_{\alpha=1}^{n+1} \Gamma(\theta_\alpha)}{\Gamma(\sum_{\alpha=1}^{n+1} \theta_\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.12. Еще одна замена переменных. Введем новые переменные $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}$ по формуле

$$\zeta_p = \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq n} (\lambda_\alpha - \mu_p)}{\prod_{1 \leq q \leq n+1, q \neq p} (\mu_q - \mu_p)}. \quad (2.27)$$

ЛЕММА 2.8. а) *Отображение $\lambda \mapsto \zeta(\lambda)$ переводит множество, заданное неравенствами (2.8), в симплекс*

$$\sum_{p=1}^{n+1} \zeta_p = 1, \quad \zeta_1 > 0, \dots, \zeta_{n+1} > 0.$$

б) *Якобиан замены*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

равен

$$\frac{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq p < q \leq n+1} (\mu_p - \mu_q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$H(x) = \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq n} (x - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq p \leq n+1} (x - \mu_p)}.$$

Вычеты этой функции равны

$$\operatorname{res}_{x=\mu_p} H(x) = \zeta_p, \quad \operatorname{res}_{x=\infty} H(x) = -1.$$

Сумма всех вычетов равна нулю, поэтому $\sum \zeta_p = 1$. Неравенства (2.8) очевидным образом влекут положительность ζ_p . Обратно, пусть все ζ_p положительны. Из разложения

$$H(x) = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{\zeta_p}{x - \mu_p}$$

видно, что функция $H(x)$ имеет по одному нулю на каждом интервале (μ_p, μ_{p+1}) . Это доказывает утверждение а).

Далее,

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\zeta_p}{\lambda_\alpha - \mu_p}.$$

Поэтому вычисление якобиана сводится к вычислению определителя Коши (2.19).

2.13. Доказательство леммы 2.7. После замены переменных (2.27) интеграл (2.26) приводится к виду

$$\prod_{1 \leq p < q \leq n+1} (\mu_q - \mu_p)^{\theta_\alpha + \theta_\beta - 1} \int_{\zeta_1 > 0, \dots, \zeta_n > 0} \prod_{p=1}^{n+1} \zeta_p^{\theta_p - 1} \prod_{p=1}^n d\zeta_p.$$

Учитывая, что $\zeta_{n+1} = 1 - \zeta_1 - \dots - \zeta_n$, мы получаем интеграл Дирихле (2.22).

§3. Большие интегралы

Здесь мы доказываем теорему проективности 1.3, а также выводим ультра-бета-интегралы (1.7), (1.8) и (1.9), а также похожие интегралы (3.1)–(3.3).

3.1. Вывод интегралов (1.7), (1.8). Рассмотрим для определенности интеграл (1.7). Лемма 2.1 позволяет провести интегрирование в нем по переменным $\lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nn}$. В итоге получается интеграл того же вида, но уже по пространству $\mathcal{R}_{n-1}[0, \infty)$ треугольников Релея меньшего размера.

Далее интегрируем по $\lambda_{(n-1)1}, \dots, \lambda_{(n-1)(n-1)}$ и т. д.

3.2. Проективность. Пусть в обозначениях п. 1.1 $f(\mathcal{L})$ – функция на $\mathcal{R}_{n+1}(-\infty, \infty)$, зависящая лишь от первых n строк треугольника Релея. Для вывода теоремы 1.3 мы должны показать, что

$$\int_{\mathcal{R}_{n+1}(-\infty, \infty)} f(\mathcal{L}) d\kappa_{n+1}(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{R}_n(-\infty, \infty)} f(\mathcal{L}) d\kappa_n(\mathcal{L}).$$

Но лемма 2.2 позволяет явно провести интегрирование по переменным $\lambda_{(n+1)1}, \dots, \lambda_{(n+1)(n+1)}$, и мы получаем желаемый результат.

3.3. Варианты. Формулы (2.5)–(2.7) влекут следующие интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_n[0, \infty)} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j \lambda_{j\alpha}^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}} e^{-(\psi_j - \psi_{j+1})\lambda_\alpha} \cdot \prod_{p=1}^n \lambda_{np}^{\sigma_n - 1} e^{-\psi_n \lambda_{np}} \\ & \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\ & = \prod_{1 \leq \alpha \leq j \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \prod_{j=1}^n \Gamma(\sigma_j) \psi_j^{-\sigma_j - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \theta_{(j-1)\alpha}}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_n(-\infty, \infty)} \prod_{j=1}^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\psi_j - \psi_{j+1}) \sum_{\alpha=1}^j \lambda_{j\alpha}^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\psi_n \sum_{p=1}^n \lambda_{np}^2\right\} \\ & \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\ & = (2\pi)^{n/2} \prod_{1 \leq \alpha \leq j \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \prod_{j=1}^n \psi_j^{-n/2 - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \theta_{(j-1)\alpha}}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{R}_n[a, b]} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j (\lambda_{j\alpha} - a)^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}} (b - \lambda_{j\alpha})^{\tau_j - \tau_{j+1} - \theta_{j\alpha}} \\
& \times \prod_{p=1}^n (\lambda_{np} - a)^{\sigma_n - 1} (b - \lambda_{np})^{\tau_n - 1} \\
& \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L} \\
& = (b - a)^{\sum_{j=1}^n (\sigma_j + \tau_j - 1) + \sum_{1 \leq j \leq \alpha \leq n-1} \theta_{j\alpha}} \\
& \times \prod_{1 \leq j \leq \alpha \leq n-1} \Gamma(\theta_{j\alpha}) \cdot \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j)}{\Gamma(\sigma_j + \tau_j + \sum_{\alpha=1}^{j-1} \theta_{(j-1)\alpha})}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

3.4. Трапеции. Мы начинаем с интеграла

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{R}_n[0, \infty)} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\kappa - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{2\kappa - 2}} \\
& \times \prod_{j=m}^{n-1} \prod_{\alpha=1}^j \frac{(\lambda_{j\alpha})^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta_{j\alpha}}}{(1 + \lambda_{j\alpha})^{\tau_j - \tau_{j+1} + \theta_{j\alpha}}} \cdot \prod_{p=1}^n \frac{\lambda_{np}^{\sigma_n - 1}}{(1 + \lambda_{np})^{\tau_n}} \\
& \times \prod_{j=m}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq \alpha \leq j, 1 \leq p \leq j+1} |\lambda_{j\alpha} - \lambda_{(j+1)p}|^{\theta_{j\alpha} - 1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq j} (\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha})^{\theta_{j\alpha} + \theta_{j\beta} - 2}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\lambda_{nq} - \lambda_{np}) d\mathcal{L}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

который является частным случаем интеграла (1.7), уже вычисленного нами. Далее мы интегрируем по λ_{11} , что сводится к вычислению интеграла

$$\int_{\lambda_{21}}^{\lambda_{22}} (\lambda_{11} - \lambda_{21})^{\kappa - 1} (\lambda_{22} - \lambda_{11})^{\kappa - 1} d\lambda_{11}.$$

После этого мы получаем интеграл по $\mathcal{R}_n^2[0, \infty)$ вида (1.9). Интегрирование в нем по $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ сводится к лемме 2.7. Далее, с помощью той же леммы 2.7 интегрируем по $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ и т. д. В итоге мы получаем интеграл (1.9) по $\mathcal{R}_n^m[0, \infty)$.

§ 4. Отображение из матриц в треугольники Релея

Здесь мы доказываем предложения 1.1, 1.2, а также сводим еще несколько матричных интегралов к ультра-бета-интегралам.

4.1. Вывод предложения 1.1. Рассмотрим пространство $\text{Herm}_{\mathbb{K}}(n)$ эрмитовых матриц T размера $n \times n$ над телом $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Вычислим распределение собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы T при условии, что блок $[T]_{n-1}$ фиксирован.

Запишем T в виде блочной $((n-1) + 1) \times ((n-1) + 1)$ -матрицы:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Мы уже фиксировали T_{11} ; блок T_{12} пробегает координатное пространство $\mathbb{K}^{n-1}$ со стандартной мерой Лебега, блок T_{22} пробегает вещественные числа, и, наконец, блок $T_{21} = T_{12}^*$ полностью определяется блоком T_{12} .

Возьмем унитарную матрицу $g \in U(n-1, \mathbb{K})$ такую, что $\Lambda = gT_{11}g^{-1}$ является диагональной матрицей. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & gT_{12} \\ T_{21}g^{-1} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что вектор T'_{12} распределен так же, как и вектор T_{12} , а $T'_{22} = T_{22}$.

Итак, задача свелась к следующей. Пусть T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & x_{n-1} \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_{n-1} & y \end{pmatrix},$$

где $x_\alpha \in \mathbb{K}$, $y \in \mathbb{R}$. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — ее собственные числа. Пусть $\{dx\}$ — стандартная мера Лебега на теле $\mathbb{K}$ (см. п. 1.2). *Нужно найти образ меры $\{dx_1\} \cdots \{dx_{n-1}\} dy$ при отображении*

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_n). \quad (4.1)$$

Введем новые переменные

$$\xi_\alpha = |x_\alpha|, \quad \eta = y. \quad (4.2)$$

Образ меры $\{dx_1\} \cdots \{dx_{n-1}\} dy$ при отображении (4.2), очевидно, равен

$$\frac{\pi^{(n-1)\theta}}{\Gamma^{n-1}(\theta)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha^{\theta-1} \cdot d\eta \prod_{\alpha=1}^{n-1} d\xi_\alpha. \quad (4.3)$$

Характеристическое уравнение для матрицы T имеет вид

$$\mu - \eta - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\xi_\alpha}{\mu - \lambda_\alpha} = 0. \quad (4.4)$$

Так как нули этого уравнения суть $\mu_1, \dots, \mu_n$, левая часть уравнения (4.4) должна переписываться в виде

$$\frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (\mu - \mu_p)}{\prod_{1 \leq \beta \leq n-1} (\mu - \lambda_\beta)}.$$

Отсюда мы находим

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= - \frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (\mu_p - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq \beta \leq n-1, \beta \neq \alpha} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}, \\ \eta &= \sum_{1 \leq p \leq n} \mu_p - \sum_{1 \leq \beta \leq n-1} \lambda_\beta, \end{aligned}$$

т.е. мы получаем уже знакомую нам замену переменных (2.9), (2.10); собственно отсюда формулы (2.9), (2.10) и происходят.

Применяя лемму 2.3 и формулу (4.3), получаем, что искомое распределение собственных чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$ имеет вид

$$\frac{\pi^{(n-1)\theta}}{\Gamma^{n-1}(\theta)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq p \leq n, 1 \leq \alpha \leq n-1} |\mu_p - \lambda_\alpha|^{\theta-1}}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^{2\theta-2}} \cdot \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p) \prod_{p=1}^n d\mu_p.$$

Это, в свою очередь, влечет предложение 1.1.

4.2. Доказательство предложения 1.2. Рассмотрим $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, n+k-1)$ – пространство матриц размера $n \times (n+k-1)$.

Представим такую матрицу в виде блочной $((n-1)+1) \times ((n-1)+k)$ -матрицы $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$. Вычислим распределение собственных чисел матрицы TT^* при условии, что блоки T_{11}, T_{12} фиксированы. Для этого возьмем унитарные матрицы $h \in U(n-1, \mathbb{K})$, $g \in U(n-1+k)$ такие, что матрица $h \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} g$ имеет вид $(\Lambda \ 0)$, где Λ – диагональная матрица. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ T_{21}g_{11} + T_{22}g_{21} & T_{21}g_{12} + T_{22}g_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы видим, что блок T'_{12} зануляется, а вектор-строка $(T'_{21} \ T'_{22})$ распределена так же, как $(T_{21} \ T_{22})$.

Итак, задача сводится к следующей. Дана матрица

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1}^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix},$$

где $x_\alpha, y_r \in \mathbb{K}$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ вещественны и неотрицательны; пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – собственные числа матрицы TT^* .

Нужно найти образ меры Лебега $\{dx_1\} \dots \{dx_{n-1}\} \{dy_1\} \dots \{dy_k\}$ при отображении

$$(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_k) \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Имеем

$$TT^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1^{1/2} \bar{x}_1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \lambda_2^{1/2} \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^{1/2} \bar{x}_{n-1} \\ \lambda_1^{1/2} x_1 & \lambda_2^{1/2} x_2 & \dots & \lambda_{n-1}^{1/2} x_{n-1} & \sum |x_\alpha|^2 + \sum |y_l|^2 \end{pmatrix}.$$

Введем новые переменные

$$\xi_\alpha = |x_\alpha|^2, \quad \eta = \sum_{l=1}^k |y_l|^2.$$

Образ меры $\{dx_1\} \cdots \{dx_{n-1}\} \{dy_1\} \cdots \{dy_k\}$ при отображении

$$(x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_k) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta),$$

очевидно, равен

$$\frac{\pi^{(n-1)\theta}}{\Gamma^{n-1}(\theta)} \frac{\pi^{k\theta}}{\Gamma(k\theta)} \eta^{k\theta-1} \cdot \prod_{k=1}^n \xi_\alpha^{\theta-1} d\eta \prod d\xi_\alpha. \quad (4.5)$$

Уравнение на собственные числа μ матрицы TT^* принимает вид

$$\eta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \xi_\alpha - \mu - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\lambda_\alpha \xi_\alpha}{\lambda_\alpha - \mu} = 0. \quad (4.6)$$

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — корни этого уравнения; иными словами, мы представляем левую часть уравнения (4.6) в виде $\frac{\prod(\mu_p - \mu)}{\prod(\lambda_\alpha - \mu)}$. Очевидно,

$$\xi_\alpha = -\frac{1}{\lambda_\alpha} \frac{\prod_{1 \leq p \leq n} (\mu_p - \lambda_\alpha)}{\prod_{1 \leq \beta \leq n-1, \beta \neq \alpha} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)}, \quad (4.7)$$

$$\eta + \sum \xi_\alpha = \sum \mu_p - \sum \lambda_\alpha. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.1. *Имеет место равенство*

$$\eta = \frac{\prod_{p=1}^n \mu_p}{\prod_{\beta=1}^{n-1} \lambda_\beta}. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$U(x) = \frac{\prod(x - \mu_p)}{x \prod(x - \lambda_\alpha)}.$$

Ее вычеты равны

$$\operatorname{res}_{x=\lambda_\alpha} U(x) = -\xi_\alpha, \quad \operatorname{res}_{x=0} U(x) = -\frac{\prod \mu_p}{\prod \lambda_\alpha}, \quad \operatorname{res}_{x=\infty} U(x) = \sum \mu_p - \sum \lambda_\alpha.$$

Сумма вычетов равна нулю. Сравнивая это с (4.8), получаем (4.9).

Итак, ξ_α и η выражаются через $\mu_1, \dots, \mu_p$ по формулам (4.7), (4.9). Якобиан преобразования $(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta)$ легко вычисляется с помощью определителя Коши (2.19). В итоге получаем

$$d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} d\eta = \frac{\prod_{1 \leq p < q \leq n} (\mu_q - \mu_p)}{\prod_{1 \leq \alpha \leq n-1} \lambda_\alpha \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n-1} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} d\mu_1 \cdots d\mu_n. \quad (4.10)$$

Остается подставить (4.7), (4.9) и (4.10) в (4.5).

4.3. Матричные интегралы. Пусть $n \leq m$. Обозначим через $B_{n,m}(\mathbb{K})$ множество матриц над $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ размера $n \times m$ с нормой меньше единицы; под нормой мы подразумеваем норму оператора из евклидова пространства $\mathbb{K}^n$ в евклидово пространство $\mathbb{K}^m$. Пусть, по-прежнему, $\theta = \frac{1}{2} \dim \mathbb{K}$.

Интеграл (3.3) и предложение 1.2 очевидным образом влекут

$$\begin{aligned} & \int_{B_{n,m}(\mathbb{K})} \prod_{j=1}^{n-1} \left[\det(\{T\}_j \{T\}_j^*)^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta} \det(1 - \{T\}_j \{T\}_j^*)^{\tau_j - \tau_{j+1} - \theta} \right] \\ & \times \det(TT^*)^{\sigma_n - (m-n+1)\theta} \det(1 - TT^*)^{\tau_n - 1} dT \\ & = \pi^{mn\theta} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j)}{\Gamma(\sigma_j + \tau_j + (j-1)\theta) \Gamma((m-j+1)\theta)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Частным случаем интеграла (3.3) является (см. предложение 1.1) и бета-функция Гиндикина (см. [23], [15], [25])

$$\begin{aligned} & \int_{T=T^*, 0 < T < 1} \prod_{j=1}^{n-1} \det[T]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta} \\ & \times \det(1 - [T]_j)^{\tau_j - \tau_{j+1} - \theta} \det T^{\sigma_n - 1} \det(1 - T)^{\tau_n - 1} dT \\ & = \pi^{n(n-1)\theta/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \Gamma(\tau_j)}{\Gamma(\sigma_j + \tau_j + (j-1)\theta)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где интегрирование ведется по множеству эрмитовых матриц над $\mathbb{K}$, удовлетворяющих условию $0 < T < 1$.

Гамма-функция Уишарта–Гиндикина

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Pos}_{\mathbb{K}}(n)} \prod_{j=1}^{n-1} \det[T]_j^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta} \\ & \times \exp\{-(\psi_j - \psi_{j+1}) \text{tr}[T]_j\} \det T^{\sigma_n - 1} \exp\{-\psi_n \text{tr} T\} dt \\ & = \pi^{n(n-1)\theta/2} \prod_{j=1}^n \Gamma(\sigma_j) \psi_j^{-\sigma_j - (j-1)\theta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

является частным случаем интеграла (3.1). Другим частным случаем интеграла (3.1) является интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n,m)} \prod_{j=1}^{n-1} \det(\{T\}_j \{T\}_j^*)^{\sigma_j - \sigma_{j+1} - \theta} \exp\{-(\psi_j - \psi_{j+1}) \text{tr}\{T\}_j \{T\}_j^*\} \\ & \times \det(TT^*)^{\sigma_n - \theta(m-n+1)} \exp\{-\psi_n \text{tr} TT^*\} dT \\ & = \pi^{mn\theta} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(\sigma_j) \psi_j^{-\sigma_j - (j-1)\theta}}{\Gamma((m-j+1)\theta)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Что касается интеграла (3.3) типа Мехты, то он интерполирует матричные гауссовы интегралы

$$\int_{\text{Herm}_{\mathbb{K}}(n)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\psi_j - \psi_{j+1}) \text{tr}[T]_j^2 - \frac{1}{2} \psi_n \text{tr} T^2 \right\} dT.$$

Впрочем, эти интегралы вполне очевидны и сами по себе, так как в показателе экспоненты стоит диагональная квадратичная форма от матричных элементов.

Список литературы

1. *Hankel H.* Bestimmte Integrale mit Cylinder Functionen // *Math. Ann.* 1876. V. 8. P. 453–470.
2. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
3. *Олевский М. Н.* О представлении произвольной функции через интеграл с ядром, включающим гипергеометрическую функцию // *Докл. АН СССР.* 1949. Т. 69. № 1. С. 11–14.
4. *Koornwinder T. H.* Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // *Special functions: group theoretical aspects and applications* / ed. R. Askey et al. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1984. P. 1–85.
5. *Неретин Ю. А.* Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. № 3. С. 83–114.
6. *Heckman G. J., Opdam E. M.* Root systems and hypergeometric functions. I // *Compositio Math.* 1987. V. 64. P. 329–352.
7. *Heckman G. J., Schlichtkrull H.* Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces. Orlando, FL: Academic Press, 1994.
8. *MacDonald I. G.* Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1998.
9. *Cherednik I.* Inverse Harish-Chandra transform and difference operators // *Internat. Math. Res. Notices.* 1997. V. 15. P. 733–750.
10. *Cherednik I., Ostrik V.* From double affine Hecke algebra to Fourier transform // Preprint, <http://arXiv.org/abs/math/0111130>.
11. *Pickrell D.* Measures on infinite-dimensional Grassmann manifold // *J. Funct. Anal.* 1987. V. 70. P. 323–356.
12. *Neretin Yu. A.* Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups // *Duke Math. J.* 2002. V. 114. № 2. P. 239–266; <http://arXiv.org/abs/math/0010014>.
13. *Borodin A., Olshanski G.* Infinite random matrices and ergodic measures // *Comm. Math. Phys.* 2001. V. 223. P. 87–123.
14. *Olshanski G.* Gelfand–Tsetlin schemes and measures of hypergeometric type (to appear).
15. *Гундикин С. Г.* Анализ на однородных пространствах // *УМН.* 1964. Т. 19. № 4. С. 3–92.
16. *Неретин Ю. А.* Матричные аналоги *B*-функции и формула Планшереля для ядер-представлений Березина // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 5. С. 67–100.
17. *Bhatia R.* Matrix analysis. New York: Springer-Verlag, 1996.
18. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
19. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп // *Труды МИАН.* 1950. Т. 36.
20. *Okounkov A., Olshanski G.* Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications // *Math. Res. Lett.* 1997. V. 4. P. 69–78.
21. *Kazarnovski-Krol A.* Cycles for asymptotic solutions and the Weyl group // *The Gelfand mathematical seminars, 1993–1995.* Boston: Birkhäuser, 1996. P. 123–150.
22. *Ingham A. E.* An integral which occurs in statistics // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1933. V. 29. P. 271–276.

23. *Siegel C. L.* Über die analytische Theorie der quadratischen Formen // *Ann. of Math.* (2). 1935. V. 36. P. 527–606.
24. *Хуа Ло Кен* Гармонический анализ функций нескольких комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
25. *Faraut J., Koranyi A.* Analysis on symmetric cones. Oxford: Clarendon Press, 1994.
26. *Неретин Ю. А.* О разделении спектров в анализе ядер Березина // *Функц. анализ и его прилож.* 2000. Т. 34. №3. С. 49–62.
27. *Selberg A.* Bemerkninger om et multipelt integral // *Norske Mat. Tiddsskr.* 1944. V. 26. P. 71–78.
28. *Anderson G. W.* A short proof of Selberg's generalized beta-formula // *Forum Math.* 1991. V. 3. №4. P. 415–417.
29. *Andrews G. R., Askey R., Roy R.* Special functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
30. *Kazarnovski-Krol A.* Matrix elements of vertex operators of the deformed WA_n algebras and the Harish-Chandra solutions to Macdonald's difference equations // *Selecta Math.* (N.S.). 1999. V. 5. №2. P. 257–301.

Институт теоретической
и экспериментальной физики, Москва
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
08.07.2002