Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Пространства Смирнова–Соболева и их вложения, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 75–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 02:42:17

УДК 517.53

А. А. Пекарский

Пространства Смирнова–Соболева и их вложения

Пусть G – односвязная ограниченная область со спрямляемой границей ∂G и $0 < p < \infty$. Через $E_p(G)$ обозначим пространство В.И. Смирнова функций f , аналитических в G . Пространство Смирнова–Соболева $E_p^s(G)$, $s \in \mathbb{N}$, состоит из функций f , аналитических в G , таких, что $f^{(s)} \in E_p(G)$. Если G – круг, то $E_p(G)$ есть пространство Харди, а $E_p^s(G)$ – пространство Харди–Соболева. В последнем случае известно следующее вложение Харди–Литтлвуда:

$$E_\sigma^s(G) \subset E_p(G), \quad 1/\sigma = s + 1/p.$$

Это вложение недавно было обобщено автором на пространства Смирнова–Соболева в областях Лаврентьева. В настоящей работе получено дальнейшее обобщение вложения Харди–Литтлвуда. Именно показано, что это вложение выполняется, если область G удовлетворяет условию: для любых точек ξ и η из ∂G справедливо неравенство

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leq \chi \rho^+(\xi, \eta), \quad \chi = \chi(G) \geq 1.$$

Здесь $|\Gamma(\xi, \eta)|$ – длина наименьшей из двух дуг ∂G , соединяющих точки ξ и η ; $\rho^+(\xi, \eta)$ – внутреннее расстояние (относительно G) между точками ξ и η .

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Пусть K – компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $C = C(K)$ обозначим пространство непрерывных комплексных функций f на K , наделенных нормой $\|f\|_C = \|f\|_{C(K)} = \max_{z \in K} |f(z)|$, а через $C_A = C_A(K)$ – подпространство $C(K)$, состоящее из функций, аналитических во внутренних точках K (если таковые имеются).

Пусть S – спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) в $\mathbb{C}$ и $0 < p \leq \infty$. Через $L_p = L_p(S)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на S с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p \leq \infty$):

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &= \|f\|_{L_p(S)} = \left(\int_S |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p} && \text{при } 0 < p < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty} &= \|f\|_{L_\infty(S)} = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in S} |f(\xi)| && \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Согласно определению [1]–[3] функция g , аналитическая в круге $D = \{w : |w| < 1\}$, принадлежит *пространству Харди* H_p , $0 < p \leq \infty$, если конечна квазинорма

$$\|g\|_{H_p} = \sup_{r \in (0,1)} \|g\|_{L_p(S_r)},$$

где S_r – окружность $|\xi| = r$. Как известно, почти для всех $\xi \in \partial D$ (∂D – граница круга D) функция $g(w)$, $w \in D$, имеет некасательные предельные значения. Для этих предельных значений мы сохраним обозначение $g(\xi)$. Таким образом, функция $g \in H_p$ определена не только в D , но и почти всюду на ∂D . При этом оказывается, что $\|g\|_{H_p} = \|g\|_{L_p(\partial D)}$.

Пусть $p \in (0, +\infty]$ и $s \in \mathbb{N}$. Через H_p^s обозначим *пространство функций Харди–Соболева*: $g \in H_p^s$, если g аналитична в D и $g^{(s)} \in H_p$.

В теории пространств Харди хорошо известны следующие вложения:

$$H_1^1 \subset C_A(\overline{D}), \quad (1)$$

$$H_\sigma^s \subset H_p \text{ при } 0 < p < \infty, \quad s \in \mathbb{N} \text{ и } \frac{1}{\sigma} = s + \frac{1}{p}. \quad (2)$$

Вложение (1) принадлежит Ф. Риссу. Функции из H_1^1 абсолютно непрерывны на ∂D . Вложение (2) получено Харди и Литтлвудом. Более подробно об этом см. [1]–[5].

Одним из наиболее известных обобщений пространства H_p является пространство Смирнова $E_p = E_p(G)$. Именно пусть G – жорданова ограниченная односвязная область со спрямляемой границей ∂G . Через $z = \varphi(w)$ обозначим какую-либо функцию Римана, осуществляющую конформное отображение круга D на область G . Как известно, φ продолжается до гомеоморфного отображения $\overline{D}$ на $\overline{G}$ и $\varphi \in H_1^1$. Согласно В. И. Смирнову [1], [2] функция f , аналитическая в G , принадлежит пространству E_p , $0 < p \leq \infty$, если функция $g(w) = f[\varphi(w)] \sqrt[p]{\varphi'(w)}$ принадлежит H_p (при $p = \infty$ мы полагаем $\sqrt[p]{\varphi'(w)} = 1$). Это определение не зависит от выбора функции $z = \varphi(w)$. Отметим также, что М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев дали эквивалентное определение класса E_p (см., например, [1], [2]), которое не использует функцию Римана.

Пространство E_p обладает многими свойствами, аналогичными свойствам H_p . В частности, $f \in E_p$ имеет почти для всех $\xi \in \partial G$ некасательные предельные значения, которые мы обозначаем через $f(\xi)$. При этом имеет место равенство $\|f\|_{L_p(\partial G)} = \|g\|_{H_p}$. В связи с этим полагают $\|f\|_{E_p} = \|f\|_{L_p(\partial G)}$ или $\|f\|_{E_p} = \|g\|_{H_p}$.

Вложение (1) сохраняется для пространства Смирнова–Соболева E_1^1 без каких-либо ограничений на границу области G . А именно [1], [2] для любой односвязной ограниченной области G со спрямляемой границей ∂G выполняется вложение

$$E_1^1(G) \subset C_A(\overline{G}). \quad (3)$$

При этом функции из $E_1^1(G)$ абсолютно непрерывны на ∂G .

В связи с задачей рациональной аппроксимации в E_p нами рассматривался вопрос о распространении вложения (2) на пространства Смирнова–Соболева [6]. Оказалось, что вложение $E_\sigma^s(G) \subset E_p(G)$ (s, p и σ те же, что и в (2)) выполняется лишь при дополнительных условиях на ∂G . Основной результат настоящей статьи – теорема 1 – дает дальнейшее обобщение вложения (2). Обобщение заключается в том, что на границу области G налагаются более слабые ограничения, чем в [6].

Введем необходимые нам классы кривых, областей и связанные с ними понятия. Если Γ – спрямляемая кривая Жордана, то через $|\Gamma|$ обозначаем ее длину. Везде

через G обозначаем жорданову ограниченную односвязную область со спрямляемой границей ∂G . Для ξ и η из ∂G через $\rho^+(\xi, \eta)$ ($\rho^-(\xi, \eta)$) обозначим $\inf |\Lambda(\xi, \eta)|$, где $\inf$ берется по всем простым спрямляемым дугам $\Lambda(\xi, \eta) \subset \overline{G}$ ($\Lambda(\xi, \eta) \subset \mathbb{C} \setminus G$) с концами в точках ξ, η . Будем говорить, что область G принадлежит классу $\mathfrak{F}$, если для любых ξ и η из ∂G выполняется неравенство

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leq \chi \rho^+(\xi, \eta), \quad \chi = \chi(G) \geq 1, \quad (4)$$

где $\Gamma(\xi, \eta)$ — одна из двух дуг кривой ∂G с концами в точках ξ и η , имеющая наименьшую длину.

ТЕОРЕМА 1. *Если область G принадлежит классу $\mathfrak{F}$, то для любых $0 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$ и $1/\sigma = s + 1/p$ выполняется вложение*

$$E_\sigma^s(G) \subset E_p(G). \quad (5)$$

Из вложений (3) и (5) легко получается

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $G \in \mathfrak{F}$ и $s \geq 2$, то*

$$E_{1/s}^s(G) \subset C_A(\overline{G}). \quad (6)$$

При этом функции из $E_{1/s}^s(G)$ абсолютно непрерывны на ∂G .

Теорема 1 и следствие 1 в [6] были получены для областей Лаврентьева: область G называется *областью Лаврентьева*, если для любых ξ и η из ∂G выполняется неравенство

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leq \chi |\xi - \eta|, \quad \chi = \chi(G) \geq 1. \quad (7)$$

Здесь $\Gamma(\xi, \eta)$ имеет тот же смысл, что и в (4). Легко заметить, что (7) равносильно условию (ср. с (4)): существует постоянная $\chi = \chi(G) \geq 1$ такая, что для любых ξ и η из ∂G выполняется неравенство

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leq \chi \min\{\rho^+(\xi, \eta), \rho^-(\xi, \eta)\}. \quad (8)$$

Отсюда видно, что класс областей $\mathfrak{F}$ является более широким, чем класс областей Лаврентьева. Например, области класса $\mathfrak{F}$ могут иметь нулевые внешние углы; области Лаврентьева не имеют ни внешних, ни внутренних нулевых углов. В [6] приводится пример области Альфорса (определение дано ниже в §2), имеющей один нулевой внутренний угол, для которой вложения (5) и (6) не выполняются.

На наш взгляд, класс $\mathfrak{F}$ является максимальным классом областей, для которых вложения (5) и (6) имеют место.

§ 2. Свойства областей класса $\mathfrak{F}$ и их функций Римана

2.1. Будем придерживаться принятых выше обозначений. Следуя [7], говорим, что область G принадлежит классу $\mathcal{H}$, если для любых ξ и η из ∂G выполняется неравенство

$$\rho^-(\xi, \eta) \leq \chi |\xi - \eta|, \quad \chi = \chi(G) \geq 1. \quad (9)$$

На самом деле, в [7] рассматриваются области, для которых неравенство (9) выполняется с заменой $\rho^-(\xi, \eta)$ на $\rho^+(\xi, \eta)$. Разумеется, основные результаты из [7] имеют свои аналоги для областей класса $\mathcal{H}$ с нашим условием (9).

Область G будем называть *областью Альфорса* (см., например, [8]), если для любых $\xi \in \partial G$ и $r > 0$ выполняется неравенство

$$|\partial G \cap \{z : |z - \xi| < r\}| \leq \chi r, \quad \chi = \chi(G) \geq 2. \quad (10)$$

Здесь следует отметить, что если множество $\Gamma = \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_k$ есть объединение конечного или счетного множества спрямляемых попарно дизъюнктивных дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, то $|\Gamma| = \sum_{k \geq 1} |\Gamma_k|$.

ЛЕММА 1. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ и η — произвольные точки на ∂G . Множество $[\xi, \eta] \cap G$ открыто и, следовательно, состоит из конечного или счетного числа интервалов $I_1, I_2, \dots$. Через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ обозначим замкнутые дуги кривой ∂G , имеющие те же концы, что и интервалы $I_1, I_2, \dots$ соответственно, причем $|\Gamma_k| \leq \frac{1}{2}|\partial G|$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Множество

$$\Lambda(\xi, \eta) = \left(\bigcup_{k \geq 1} \Gamma_k \right) \cup \left([\xi, \eta] \setminus \left(\bigcup_{k \geq 1} I_k \right) \right)$$

либо является простой кривой Жордана, принадлежащей $\mathbb{C} \setminus G$ и соединяющей точки ξ и η , либо содержит в себе такую кривую. Следовательно, из определения класса $\mathfrak{F}$ (см. (4)) получим

$$\begin{aligned} \rho^-(\xi, \eta) &\leq |\Lambda(\xi, \eta)| \leq \sum_{k \geq 1} |\Gamma_k| + \left| [\xi, \eta] \setminus \left(\bigcup_{k \geq 1} I_k \right) \right| \\ &\leq \chi \sum_{k \geq 1} |I_k| + |\xi - \eta| - \sum_{k \geq 1} |I_k| = (\chi - 1) \sum_{k \geq 1} |I_k| + |\xi - \eta| \leq \chi |\xi - \eta|. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если область G принадлежит классу $\mathfrak{F}$, то она является областью Альфорса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \partial G$ и $r > 0$. Нужно показать (см. (10)), что функция $\theta(r, \xi) = |\{z : |z - \xi| < r\} \cap \partial G|$ удовлетворяет условию $\theta(r, \xi) \leq \chi_1 r$, где $\chi_1 = \chi_1(G) \geq 2$.

Поскольку ∂G — спрямляемая кривая, то $\theta(r, \xi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и фиксированном ξ . Из принципа компактности Больцано–Коши отсюда заключаем, что функция $\theta(r) = \sup\{\theta(r, \xi) : \xi \in \partial G\}$ является бесконечно малой при $r \rightarrow 0$. Следовательно, существует такое $r_0 > 0$, что

$$\theta(r) + 2\pi\chi r \leq \frac{1}{2}|\partial G|, \quad r \in (0, r_0]. \quad (11)$$

Здесь $\chi \geq 1$ — постоянная из условия (4).

Пусть $0 < r \leq r_0$. Множество $\Omega = \{z : |z - \xi| < r\} \cap G$ непусто, открыто и не совпадает ни с кругом $|z - \xi| < r$, ни с областью G . Очевидно так же, что Ω состоит из конечного или счетного числа односвязных областей. Разобьем множество этих областей на два класса. Первый класс есть множество $\{\Omega_{1m}\}_{m \geq 1}$ областей Ω_{1m} таких, что $\partial\Omega_{1m}$ состоит из одной дуги окружности $|z - \xi| = r$ и одной дуги кривой ∂G . Второй класс есть множество $\{\Omega_{2n}\}_{n \geq 1}$ областей Ω_{2n} , не являющихся областями первого класса. Может случиться, что один из указанных классов пуст.

Рассмотрим области первого класса. Имеем $\partial\Omega_{1m} = I_{1m} \cup \Gamma_{1m}$, где I_{1m} – замкнутая дуга окружности $|z - \xi| = r$, а Γ_{1m} – открытая дуга кривой ∂G . Ввиду условий (4) и (11) имеем

$$|\Gamma_{1m}| \leq \chi |I_{1m}| \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Рассмотрим области второго класса. Пусть $\Omega_{2n} \neq \emptyset$ при некотором фиксированном n . Тогда $\partial\Omega_{2n} = (\bigcup_{\nu \geq 1} I_{2n}^\nu) \cup \Gamma_{2n}$, где I_{2n}^ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, – попарно дизъюнктивные замкнутые дуги окружности $|z - \xi| = r$, а $\Gamma_{2n} \subset \partial G$. Через S_{2n}^ν обозначим открытую дугу кривой ∂G , имеющую те же концы, что и дуга I_{2n}^ν , и не содержащую точек Γ_{2n} . Предположим, что $|S_{2n}^\nu| \leq \frac{1}{2}|\partial G|$ при всех ν . Тогда ввиду условий (4) и (11) получим

$$|\partial G| \leq \theta(r) + \sum_{\nu \geq 1} |S_{2n}^\nu| \leq \theta(r) + \chi \sum_{\nu \geq 1} |I_{2n}^\nu| \leq \theta(r) + 2\pi\chi r \leq \frac{1}{2}|\partial G|,$$

т.е. $|\partial G| \leq \frac{1}{2}|\partial G|$ – противоречие. Следовательно, при фиксированном n одна и только одна дуга S_{2n}^ν удовлетворяет условию $|S_{2n}^\nu| > \frac{1}{2}|\partial G|$. Будем считать, что это дуга S_{2n}^1 . Поскольку $\Gamma_{2n} \subset (\partial G) \setminus S_{2n}^1$, то с учетом условия (4) получим

$$|\Gamma_{2n}| \leq |(\partial G) \setminus S_{2n}^1| \leq \chi |I_{2n}^1| \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Из (12) и (13) находим, что

$$\theta(r, \xi) = \sum_{m \geq 1} |\Gamma_{1m}| + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_{2n}| \leq \chi \sum_{m \geq 1} |I_{1m}| + \chi \sum_{n \geq 1} |I_{2n}^1| \leq 2\pi\chi r.$$

Таким образом, $\theta(\xi, r) \leq 2\pi\chi r$ при всех $\xi \in \partial G$ и $r \in (0, r_0]$. Если же положить $\chi_1 = \max \left\{ 2\pi\chi, \frac{1}{r_0}|\partial G| \right\}$, то неравенство $\theta(\xi, r) \leq \chi_1 r$ будет выполняться для всех $\xi \in \partial G$ и $r > 0$. Лемма 2 доказана.

2.2. Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in G$ и через $z = \varphi(w)$ обозначим функцию Римана, отображающую конформно круг D на область G и нормированную условиями $\varphi(0) = z_0$, $\varphi'(0) > 0$.

Из теоремы Кёбе об $\frac{1}{4}$ выводится (см. [9]) следующее свойство функции $z = \varphi(w)$. Для любого $w \in D$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{4}(1 - |w|)|\varphi'(w)| \leq \rho(\varphi(w), \partial G) \leq 4(1 - |w|)|\varphi'(w)|. \quad (14)$$

Для $t \in [0, 2\pi)$ и $h \in (0, \frac{1}{2}]$ введем “полярный квадрат”

$$Q(t, h) = \{re^{is} : 1 - 2h \leq r \leq 1 - h, t \leq s \leq t + h\}.$$

Из теоремы искажения (см., например, [10]) легко получить, что существует постоянная $c = c(G, z_0) \geq 1$, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{c} \leq \left| \frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)} \right| \leq c \quad \text{при } w_1, w_2 \in Q(t, h). \quad (15)$$

ЛЕММА 3 (В.В. Андриевский [7]). Пусть область G принадлежит классу $\mathcal{H}$. Тогда для любой точки $w \in D \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$c_1 \left| \varphi(w) - \varphi\left(\frac{w}{|w|}\right) \right| \leq \rho(\varphi(w), \partial G) \leq c_2 \left| \varphi(w) - \varphi\left(\frac{w}{|w|}\right) \right|,$$

где c_1 и c_2 – положительные постоянные, зависящие лишь от G и z_0 .

Пусть $0 < \rho < 1$ и $0 \leq s < 2\pi$, причем s такое, что $\varphi'(e^{is})$ существует. На множестве точек $w = \rho e^{is} \in D$ с указанными s введем функцию

$$W(w) = W(\rho e^{is}) = |\varphi'(e^{is})| \cdot |\varphi'(\rho e^{is})|^{-1} \cdot \rho^{-1}.$$

На оставшемся множестве точек $w \in D$ для определенности будем считать $W(w) = 0$.

Через m_2 будем обозначать плоскую меру Лебега в $\mathbb{C}$.

Следующая лемма играет решающую роль при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 4. Если область G принадлежит классу $\mathfrak{F}$, то для любых $t \in [0, 2\pi]$ и $h \in (0, \frac{1}{2}]$ выполняется неравенство

$$\int_{Q(t,h)} W(w) dm_2(w) \leq ch^2, \quad c = c(G, z_0) > 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $0 \leq s \leq h$ и $t \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(e^{i(t+s)}) - \varphi(e^{it})| &\leq |\varphi(e^{i(t+s)}) - \varphi((1-h)e^{i(t+s)})| \\ &\quad + |\varphi((1-h)e^{i(t+s)}) - \varphi((1-h)e^{it})| + |\varphi((1-h)e^{it}) - \varphi(e^{it})|. \end{aligned}$$

Используя неравенство (14) и лемму 3, заключаем, что

$$\begin{aligned} |\varphi(e^{i(t+s)}) - \varphi((1-h)e^{i(t+s)})| &\leq c_3 h |\varphi'((1-h)e^{i(t+s)})|, \\ |\varphi((1-h)e^{it}) - \varphi(e^{it})| &\leq c_3 h |\varphi'((1-h)e^{it})|. \end{aligned}$$

Отметим еще очевидное неравенство

$$|\varphi((1-h)e^{i(t+s)}) - \varphi((1-h)e^{it})| \leq \int_t^{t+s} |\varphi'((1-h)e^{i\tau})| d\tau.$$

Возьмем произвольно точку $w_1 \in Q(t, h)$. С учетом неравенства (15) из последних четырех оценок получим

$$|\varphi(e^{i(t+s)}) - \varphi(e^{it})| \leq c_4 h |\varphi'(w_1)|, \quad c_4 = c_4(G, z_0) > 0.$$

Это означает, что дуга $\Gamma = \{\varphi(e^{i(t+s)}) : 0 \leq s \leq h\}$ кривой ∂G лежит в круге $|z - \varphi(e^{it})| \leq c_4 h |\varphi'(w_1)|$. Согласно лемме 2 G – область Альфорса и, значит,

$$|\Gamma| \leq c_5 h |\varphi'(w_1)|, \quad c_5 = c_5(G, z_0) > 0. \quad (17)$$

Предположим сейчас, что w_1 – точка минимума функции $|\varphi'(w)|$ в области $Q(t, h)$. Используя (17), получаем неравенство (16):

$$\begin{aligned} \int_{Q(t,h)} W(w) dm_2(w) &\leq \frac{1}{\varphi'(w_1)} \int_{Q(t,h)} \left| \varphi'\left(\frac{w}{|w|}\right) \right| \frac{dm_2(w)}{|w|} \\ &= \frac{h}{|\varphi'(w_1)|} \int_t^{t+h} |\varphi'(e^{is})| ds = \frac{h}{|\varphi'(w_1)|} |\Gamma| \leq c_5 h^2. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Здесь мы получим вложение (5) для $s = 1$. Этим теорема 1 будет доказана, так как общий случай следует отсюда с помощью итераций. Условимся придерживаться обозначений, принятых в §§ 1, 2.

Пусть $p \in (0, +\infty)$, $1/q = 1 + 1/p$, G – область класса $\mathfrak{F}$, $f \in E_q(G)$ и $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$. Мы покажем, что $F \in E_p(G)$ и

$$\|F\|_{E_p} \leq c \|f\|_{E_q}, \quad c = c(G, z_0, p) > 0. \quad (18)$$

В свою очередь, это утверждение достаточно получить для алгебраических многочленов. Действительно, пусть f – многочлен. Тогда F – также многочлен и вложение $F \in E_p$ очевидно. Предположим, что (18) выполняется для любого алгебраического многочлена. Согласно лемме 2 G является областью Альфорса. В свою очередь, область Альфорса ввиду теоремы Давида (см., например, [8]) является областью Смирнова. Следовательно (см., например, [2]), при любом $0 < t < \infty$ множество алгебраических многочленов всюду плотно в $E_t(G)$. Поэтому если (18) выполняется для любого многочлена f , то оно выполняется для любой функции $f \in E_q$.

Если же f – алгебраический многочлен, то (18) равносильно неравенству

$$\left(\int_{\partial G} |F(z)|^p |dz| \right)^{1/p} \leq c \left(\int_{\partial G} |f(z)|^q |dz| \right)^{1/q}.$$

С помощью замены $z = \varphi(w)$ это неравенство преобразуется к равносильному неравенству

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\partial D} \left| \int_0^w f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta \right|^p \cdot |\varphi'(w)| |dw| \right)^{1/p} \\ & \leq c \left(\int_{\partial D} |f[\varphi(w)]|^q \sqrt[q]{|\varphi'(w)|} |dw| \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Как отмечено во введении, $f \in E_q$ в том и только том случае, когда функция $g(w) = f[\varphi(w)] \sqrt[q]{|\varphi'(w)|}$ принадлежит H_q . При этом имеет место равенство $\|f\|_{E_q} = \|g\|_{H_q}$. Поэтому для получения (19) достаточно доказать, что для любой функции $g \in H_q$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 |g(\rho e^{it})| \varphi'(\rho e^{it})^{-1/p} d\rho \right)^p |\varphi'(e^{it})| dt \right]^{1/p} \leq c \|g\|_{H_q}, \\ & c = c(G, z_0, p) > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведем некоторые результаты из теории пространств Харди, которые будут использованы при доказательстве неравенства (20). Введем семейство $\mathfrak{A}$ областей, дающих разбиение типа Уитни (см., например, [6]) круга $D = \{w : |w| \leq 1 - \pi/4\}$:

$$Q\left(\frac{\pi j}{2^{k+2}}, \frac{\pi}{2^{k+2}}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 2^{k+3} - 1.$$

Напомним, “полярные квадраты” $Q(t, h)$ введены в § 2. Области семейства $\mathfrak{A}$ будем обозначать через Q ; в случае необходимости их будем нумеровать в каком-либо порядке: $Q_1, Q_2, \dots$. Очевидно, любые две области семейства $\mathfrak{A}$ пересекаются разве лишь по границам и $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Для $g \in H_q$, $0 < q < \infty$, положим

$$\lambda_q(g, Q) = \rho(Q, \partial D)^{1/q} \|g\|_{C(Q)}, \quad Q \in \mathfrak{A}.$$

ЛЕММА 5 [6]. Точка 0 является единственной предельной точкой множества $\{\lambda_q(g, Q)\}_{Q \in \mathfrak{A}}$, и если $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, соответствующая невозрастающей последовательности $\{\lambda_q(g, Q_k)\}_{k=1}^{\infty}$, то

$$\lambda_q(g, Q_k) \leq \frac{c}{k^{1/q}} \|g\|_{H_q}, \quad c = c(q) > 0.$$

ЛЕММА 6. Пусть G — область класса $\mathfrak{F}$, $0 < q < \infty$ и $\beta > 0$. Тогда для любой функции $g \in H_q$ выполняется неравенство

$$\int_D |g(w)|^{q(\beta+1)} (1 - |w|)^{\beta-1} W(w) dm_2(w) \leq c \|g\|_{H_q}^{q(\beta+1)}, \quad (21)$$

где $c > 0$ и не зависит от g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пронумеруем области Q семейства $\mathfrak{A}$ так, как сказано в формулировке леммы 5. Через A обозначим левую часть неравенства (21). Имеем

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g\|_{C(Q_k)}^{q(\beta+1)} \cdot \int_{Q_k} (1 - |w|)^{\beta-1} W(w) dm_2(w) \\ &\leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} [\rho(Q_k, \partial D)^{1/q} \|g\|_{C(Q_k)}]^{q(\beta+1)} \cdot \frac{1}{\rho(Q_k, \partial D)^2} \int_{Q_k} W(w) dm_2(w). \end{aligned}$$

Продолжим оценку с учетом лемм 4 и 5:

$$A \leq c_2 \|g\|_{H_q}^{q(\beta+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta+1}} \leq c_3 \|g\|_{H_q}^{q(\beta+1)}.$$

Лемма 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Лемма 6 с весовой функцией $W(w) \equiv 1$ известна (см., например, [2]).

2) Нам понадобится также незначительное усиление неравенства (21). Именно, как видно из доказательства, неравенство (21) сохранится, если в нем $|g(w)|$ заменить максимальной функцией $g^{\#}(w)$. Эта функция определяется следующим образом. Пусть $\rho_k = 1 - \pi/2^{k+1}$ и $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} g^{\#}(w) &= \max_{|\lambda| \leq \rho_1} |g(\lambda)| \quad \text{при } |w| \leq \rho_1, \\ g^{\#}(w) &= \max_{\rho \in [\rho_{k-1}, \rho_k]} \left| g\left(\rho \frac{w}{|w|}\right) \right| \quad \text{при } \rho_{k-1} < |w| \leq \rho_k \text{ и } k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

ЛЕММА 7 [2], [3]. Пусть $g \in H_q$, $0 < q < \infty$, и $g^*(\rho) = \max_{t \in [0, 2\pi]} |g(\rho e^{it})|$, $0 \leq \rho < 1$, — круговая максимальная функция. Тогда

$$\int_0^1 g^*(\rho)^q d\rho \leq c \|g\|_{H_q}^q, \quad c = c(q) > 0.$$

Докажем неравенство (20). Будем рассматривать три случая: $p = 1$, $1 < p < \infty$ и $0 < p < 1$. Если $p = 1$, то (20) немедленно следует из леммы 6 с $\beta = 1$ и $q = \frac{1}{2}$.

В дальнейшем при рассмотрении случаев $1 < p < \infty$ и $0 < p < 1$ левую часть неравенства (20) будем обозначать через $A_p(g)$.

Пусть сейчас $1 < p < \infty$. Опеним $A_p(g)$ сверху при помощи обобщенного неравенства Гёльдера. Согласно этому неравенству “норма интеграла не превышает интеграла от нормы”. В данном случае имеем

$$A_p(g) \leq \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} |g(\rho e^{it})|^p W(\rho e^{it}) \rho dt \right]^{1/p} d\rho.$$

Поскольку $1 < p < \infty$, то $q = p/(p-1) < p/2$ и, следовательно, $|g(\rho e^{it})|^p \leq g^*(\rho)^{p-2q} \cdot |g(\rho e^{it})|^{2q}$. Поэтому

$$A_p(g) \leq \int_0^1 g^*(\rho)^{1-2q/p} \left[\int_0^{2\pi} |g(\rho e^{it})|^{2q} W(\rho e^{it}) \rho dt \right]^{1/p} d\rho. \quad (22)$$

Пусть p' — сопряженный с p показатель, т.е. $1/p + 1/p' = 1$. Тогда

$$p' \left(1 - \frac{2q}{p} \right) = p' q \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{p} \right) = p' q \left(1 - \frac{1}{p} \right) = q.$$

Значит, если к интегралу из (22) по отрезку $[0, 1]$ применить неравенство Гёльдера с показателями p и p' , то получим

$$A_p(g) \leq \left(\int_0^1 g^*(\rho)^q d\rho \right)^{1/p'} \cdot \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} |g(\rho e^{it})|^{2q} W(\rho e^{it}) \rho dt \right] d\rho \right\}^{1/p}.$$

С учетом леммы 7 отсюда находим

$$A_p(g) \leq c_1 \|g\|_{H_q}^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_D |g(w)|^{2q} W(w) dm_2(w) \right)^{1/p}.$$

Рассмотрение случая $1 < p < \infty$ завершается применением леммы 6 с $\beta = 1$.

Рассмотрим, наконец, случай $0 < p < 1$. Пусть, как и раньше (см. замечание 2) к лемме 6), $\rho_k = 1 - \pi/2^{k+1}$ при $k = 1, 2, 3, \dots$ и $\rho_0 = 0$. Введем в рассмотрение выражение

$$B_p(g, t) = \left(\int_0^1 |g(\rho e^{it})| \varphi'(\rho e^{it})^{-1/p} d\rho \right)^p$$

из левой части неравенства (20). Поскольку $0 < p < 1$, то

$$\begin{aligned} B_p(g, t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} |g(\rho e^{i\varphi})| \cdot |\varphi'(\rho e^{it})|^{-1/p} d\rho \right)^p \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} |g(\rho e^{i\varphi})| \cdot |\varphi'(\rho e^{it})|^{-1/p} d\rho \right)^p. \end{aligned}$$

Далее, для оценки $|g|$ сверху будем использовать максимальную функцию $g^\#$, а для оценки $|\varphi'|$ снизу применим неравенство (15). В результате получим

$$B_p(g, t) \leq c_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_{k+1} - \rho_k)^p g^\#(\rho_k e^{i\varphi})^p |\varphi'(\rho_k e^{it})|^{-1}.$$

Применив еще раз неравенство (15), легко убедиться, что последнюю сумму можно мажорировать интегралом. Именно

$$B_p(g, t) \leq c_3 \int_0^1 g^\#(\rho e^{i\varphi})^p |\varphi'(\rho e^{it})|^{-1} (1 - \rho)^{p-1} d\rho.$$

Поскольку

$$A_p(g) = \left[\int_0^{2\pi} B_p(g, t) |\varphi'(e^{it})| dt \right]^{1/p},$$

то

$$A_p(g) \leq c_3 \left[\int_D g^\#(w)^p W(w) (1 - |w|)^{p-1} dm_2(w) \right]^{1/p}.$$

Согласно замечанию 2) к лемме 6 правая часть этого неравенства не превышает $c_4 \|g\|_{H_q}$. При этом следует положить $\beta = p$ и учесть, что $p = q(1 + p) = q(1 + \beta)$. Неравенство (20) доказано.

Список литературы

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Duren P. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970.
3. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
4. Alexandrov A. B. Essay on non locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math. 1981. V. 864. P. 1–89.
5. Lorentz G. G., Golitschek M., Makovoz Yu. Constructive approximation. Advanced problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
6. Пекарский А. А. Рациональные приближения функций с производными из пространства В. И. Смирнова // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. №2. С. 165–190.
7. Андриевский В. В. Геометрические свойства областей В. К. Дзядыка // Укр. матем. журн. 1981. Т. 33. №6. С. 723–727.
8. Дынькин Е. М. Методы теории сингулярных интегралов – II. Теория Литтлвуда–Пэли и ее приложения // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 42. М.: ВИНТИ, 1989. С. 105–198.
9. Дынькин Е. М. Оценки аналитических функций в жордановых областях // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 70–90.
10. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

Белорусский государственный
технологический университет,
г. Минск
E-mail: pekarski@bstu.unibel.by

Поступила в редакцию
28.09.2001 и 02.09.2002