Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Пилипенко, Преобразования мер в бесконечномерных пространствах потоком, порожденным стохастическим дифференциальным уравнением, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 85–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:57:24

УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко

**Преобразования мер в бесконечномерных
пространствах потоком, порожденным
стохастическим дифференциальным уравнением**

Пусть μ – гауссовская мера в пространстве X , H – пространство Камерона–Мартина меры μ . Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(u, t) = a_t(\xi(u, t)) dt + \sum_n \sigma_t^n(\xi(u, t)) d\omega_n(t), \quad t \in [0, T],$$

$$\xi(u, 0) = u,$$

где $u \in X$, a, σ_n – функции, принимающие значения в H , $\omega_n(t)$, $n \geq 1$, – независимые одномерные винеровские процессы. Определим мерозначный случайный процесс $\mu_t := \mu \circ \xi(\cdot, t)^{-1}$. При некоторых естественных условиях на коэффициенты исходного уравнения доказано, что для почти всех ω меры $\mu_t(\omega)$ эквивалентны μ . Для плотностей Радона–Никодима получены явные выражения.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим поток $\xi(u, t)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$, порожденный стохастическим дифференциальным уравнением в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$d\xi(u, t) = a_t(\xi(u, t)) dt + \sum_n \sigma_t^n(\xi(u, t)) d\omega_n(t),$$

$$\xi(u, 0) = u. \tag{1.1}$$

Предположим, что мера μ в $\mathbb{R}^d$ имеет гладкую положительную плотность относительно меры Лебега. Х. Кунитой [1] было доказано, что при некоторых естественных условиях на гладкость и ограниченность коэффициентов (1.1) меры $\mu_t(\omega) := \mu \circ \xi(\cdot, t, \omega)^{-1}$ абсолютно непрерывны для п.в. ω , и для плотности $\rho_t(\omega)(u) = \frac{d\mu_t(\omega)}{d\mu}(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$, имеет место стохастический аналог теоремы Лиувилля.

В настоящей статье рассматривается подобная задача о преобразовании мер потоком, порожденным стохастическим дифференциальным уравнением в бесконечномерном пространстве. Отметим несколько существенных различий между конечномерным и бесконечномерным случаем. Во-первых, даже линейное стохастическое уравнение может не порождать потока в бесконечномерном пространстве [2]. Во-вторых, это связано с отсутствием канонической бесконечномерной меры Лебега и, соответственно, мер с гладкой плотностью. Естественным обобщением

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины (грант № 01.07/103).

мер с гладкой плотностью на бесконечномерный случай являются дифференцируемые меры. Наиболее интересным и исследуемым классом таких мер являются гауссовские меры, которые будут рассматриваться в нашей статье.

Преобразования мер потоками, порожденными обыкновенными (но не стохастическими) дифференциальными уравнениями в бесконечномерном случае, рассматривались многими авторами, см., например, работы [3]–[6] и ссылки в них.

Основным результатом настоящей статьи является теорема 3.1, в которой получены условия на коэффициенты a_t, σ_t^n уравнения (1.1), гарантирующие эквивалентность мер μ и $\mu_t(\omega)$ для п.в. ω в случае, когда μ – радоновская гауссовская мера. Для плотностей Радона–Никодима получены явные выражения, совпадающие с соответствующими формулами конечномерного случая [1].

§ 2. Определения, вспомогательные результаты

Пусть X – локально выпуклое пространство, μ – радоновская центрированная гауссовская мера на X , $H \subset X$ – пространство Камерона–Мартин меры μ с гильбертовой нормой $\|\cdot\|_H$.

Пусть E – сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{FC}_b^\infty(E)$ множество цилиндрических гладких функций вида

$$F = \sum_{k=1}^n f_k(\langle x_1^*, \cdot \rangle, \dots, \langle x_n^*, \cdot \rangle) e_k: X \rightarrow E,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $x_k^* \in X^*$, $e_k \in E$, $f_k \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть D – производная по Фреше вдоль направлений пространства H функций из $\mathcal{FC}_b^\infty(E)$.

Производные высших порядков определяются итеративно.

Введем соболевские пространства $W_p^k(E)$ как замыкание $\mathcal{FC}_b^\infty(E)$ по норме

$$\|F\|_{p,k} = \sum_{j=1}^k \|D^j F\|_{L_p(X, \mu, H^{\otimes j} \otimes E)}.$$

Замыкание оператора D^k относительно нормы $\|\cdot\|_{p,k}$ называется *стохастической производной* и будет обозначаться тем же символом.

Положим

$$W_\infty^k(E) := \{f \mid \forall p \geq 1, \forall f \in W_p^k(E) \quad \|D^j f\|_{L_\infty(X, \mu, H^{\otimes j} \otimes E)} < \infty, 0 \leq j \leq k\},$$

$$\|f\|_{\infty,k} := \max_{0 \leq j \leq k} \|D^j f\|_{L_\infty(X, \mu, H^{\otimes j} \otimes E)}.$$

Сопряженный оператор $\delta = D^*$, где $\mathcal{D}(D) = W_p^1(E)$,

$$\delta = \delta_q: \mathcal{D}(\delta_q) \subset L_q(X, \mu, H \otimes E) \rightarrow L_q(X, \mu, H), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

называется *оператором дивергенции* (или расширенным интегралом Скорохода).

Некоторые моментные неравенства для оператора дивергенции и стохастической производной приведены в следующем утверждении.

ЛЕММА 2.1 [7; с. 50]. Если $f \in W_p^k(H)$, то $\delta f \in W_p^{k-1}(\mathbb{R})$, причем существует такая константа $c_{p,k}$, что $\forall f \in W_p^k(H)$

$$\|\delta f\|_{W_p^{k-1}} \leq c_{p,k} \|\delta f\|_{W_p^k(H)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $f: X \rightarrow E$ называется H -липшицевой с константой L , если $\forall x \in X, \forall h \in H$

$$\|f(x+h) - f(x)\|_E \leq L\|h\|_H.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $f: X \rightarrow E$ принадлежит классу $\mathcal{H}C^n(E)$, если для любого $x \in X$ отображение $H \ni h \rightarrow f(x+h) \in E$ является n раз непрерывно дифференцируемым по Фреше.

Имеет место следующий известный факт о существовании H -липшицевой модификации у функций из класса W_∞^1 (см., например, [8]).

ЛЕММА 2.2. Предположим, что $f \in W_\infty^1(E)$. Тогда существует H -липшицева модификация f с константой $\text{ess sup}_\omega \|Df(\omega)\|$.

Пространство Камерона–Мартин H естественным образом можно отождествить с пространством квадратически интегрируемых функционалов $H(\mu)$. Обозначим через $\hat{h}$ элемент $H(\mu)$, соответствующий вектору $h \in H$. Нам понадобится следующее известное утверждение о действии стохастической производной на условное математическое ожидание дифференцируемой случайной величины.

ЛЕММА 2.3. Пусть H_0 – линейное подпространство H , σ_0 – σ -алгебра, порожденная функционалами $\{\hat{h}, h \in H_0\}$, π – ортопроектор в H на H_0 . Тогда для любой функции $f \in W_p^k$, $p \geq 1$, $k \geq 1$, условное математическое ожидание $E(f/\sigma_0)$ также принадлежит W_p^k и справедлива формула

$$DE(f/\sigma_0) = \pi E(Df/\sigma_0).$$

§3. Основные результаты

Пусть μ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X , $H \subset X$ – пространство Камерона–Мартин, $\{\omega_n(t), t \in [0, T], n \geq 1\}$ – последовательность независимых одномерных винеровских процессов, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение в X , зависящее от начального условия $u \in X$:

$$\varphi_{s,t}(u) = u + \int_s^t a_z(\varphi_{s,z}(u)) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \sigma_z^n(\varphi_{s,z}(u)) d\omega_n(z), \quad (3.1)$$

где $a: [0, T] \times X \rightarrow H$, $\sigma^n: [0, T] \times X \rightarrow H$, $n \geq 1$, – измеримые по паре переменных функции.

Иногда более удобно исследовать уравнение (3.1), записанное в форме Стратоновича:

$$\varphi_{s,t}(u) = u + \int_s^t \tilde{a}_z(\varphi_{s,z}(u)) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \sigma_z^n(\varphi_{s,z}(u)) \circ d\omega_n(z), \quad (3.1')$$

где

$$\tilde{a}_t = a_t - \frac{1}{2} \sum_n \langle D\sigma_z^n, \sigma_z^n \rangle_H.$$

Рассмотрим также обращенное уравнение Стратоновича

$$\varphi_{t,s}(u) = u - \int_s^t \tilde{a}_z(\varphi_{z,t}(u)) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \sigma_z^n(\varphi_{z,t}(u)) \circ d\tilde{\omega}_n(z) \quad (3.1'')$$

с новыми винеровскими процессами $\tilde{\omega}_n(t) = \omega_n(T) - \omega_n(t)$. Данное уравнение в конечномерном пространстве задает обратный стохастический поток $\varphi_{t,s}, t \geq s [1]$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *I. Предположим, что для всех $t \in [0, T]$, $n \geq 1$ выполняется*

$$a_t \in W_{\infty}^2(H), \quad \sigma_t^n \in W_{\infty}^3(H)$$

и

$$A_j := \sup_t \operatorname{ess\,sup}_u \|D^j a_t(u)\|_{H^{\otimes(j+1)}} < \infty, \quad j \in \{0, 1, 2\},$$

$$S_l := \sup_t \operatorname{ess\,sup}_u \sum_n \|D^l \sigma_t^n(u)\|_{H^{\otimes(l+1)}}^2 < \infty, \quad l \in \{0, \dots, 3\}.$$

Тогда существуют случайный элемент $\varphi = \varphi_{s,t}(u, \omega): [0, T] \times [0, T] \times X \times \Omega \rightarrow X$, измеримый по четверке переменных (s, t, u, ω) , и множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, такие, что для всех $\omega \in \Omega_0$ справедливы следующие утверждения:

- a) соотношения (3.1'), (3.1'') выполняются для всех $s \leq t$, где стохастические интегралы рассматриваются как интегралы от $L_2(X, \mu, H)$ -значных случайных элементов;
- b) для всех $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \varphi_{t_2, t_3}(\varphi_{t_1, t_2}(u, \omega), \omega) &= \varphi_{t_1, t_3}(u, \omega) \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } u \in X, \\ \varphi_{t_1, t_1}(\cdot, \omega) &= \operatorname{id}_X; \end{aligned}$$

- c) для всех $s, t \in [0, T]$ меры $\mu_{s,t}(\omega) = \mu \circ (\varphi_{s,t}(\cdot, \omega))^{-1}$ и μ эквивалентны;
- d) плотность Радона–Никодима $\rho_{s,t}(\omega)(u) := \frac{d\mu_{s,t}(\omega)}{d\mu}(u)$ имеет вид

$$\rho_{t,s}(u) = \exp \left\{ - \int_s^t (\delta \tilde{a}_z)(\varphi_{s,z}(u)) dz - \sum_n \int_s^t (\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s,z}(u)) \circ d\omega_n(z) \right\}, \quad (3.2)$$

где $s \leq t$, и

$$\rho_{s,t}(u) = (\rho_{t,s}(\varphi_{s,t}(u)))^{-1}. \quad (3.3)$$

II. *Предположим, что $a_t \in \mathcal{H}C^2(H)$, $\sigma_t^n \in \mathcal{H}C^3(H)$ для всех $t \in [0, T]$, $n \geq 1$, и A_j, S_k , определенные в первой части теоремы, конечны. Тогда существует процесс $\varphi_{s,t}$ такой, что для каждого $u \in X$ соотношения (3.1'), (3.1'') выполняются P-п.н. и $\varphi_{s,t}(u)$ непрерывно по s, t для P-п.в. ω . При этом любая модификация $\varphi_{s,t}(u)$, непрерывная по s, t , удовлетворяет условиям а)–d) первой части теоремы.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Множество μ -нулевой меры в b) зависит, вообще говоря, от t_1, t_2, t_3 и ω .

2) Мы рассматриваем суперпозицию функций в (3.3), однако $\varphi_{t,s}$ определена с точностью до множеств μ -нулевой меры. Данная композиция корректно определена, так как меры μ и $\mu_{t,s}$ эквивалентны по утверждению с). Суперпозиция $\varphi_{t_2,t_3} \circ \varphi_{t_1,t_2}$ в b) корректно определена по той же причине.

3) Для $\omega \in \Omega_0$, $s, t \in [0, T]$ отображение $\varphi_{s,t}(\cdot, \omega): X \rightarrow X$ является μ -п.н. обратимым (см. b)) и $\varphi_{t,s}(\cdot, \omega)$ задает обратное отображение, т.е.

$$\varphi_{t,s}(\varphi_{s,t}(\cdot, \omega), \omega) = \varphi_{s,t}(\varphi_{t,s}(\cdot, \omega), \omega) = \text{id}_X \quad \mu\text{-п.н.}$$

4) Стохастические интегралы Стратоновича в (3.1'), (3.1''), (3.2) рассматриваются ради простоты обозначений и означают интегралы Ито от случайных элементов со значениями в L_2 с необходимой добавкой. Например, выражение $\int_s^t (\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s,z}(u)) \circ d\omega_n(z)$ означает

$$\int_s^t (\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s,z}(u)) d\omega_n(z) + \frac{1}{2} \int_s^t \langle D(\delta(\sigma_z^n)), \sigma_z^n \rangle(\varphi_{s,z}) dz.$$

§ 4. Конечномерные аппроксимации

Пусть $\{e_m\}$ – ортонормированный базис в H , причем квадратически интегрируемые функционалы $\{\hat{e}_m\}$ являются элементами $X^* \subset H(\mu)$. Линейное отображение $j: X \ni u \mapsto (\langle \hat{e}_1, u \rangle, \langle \hat{e}_2, u \rangle, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ переводит меру μ в меру γ – произведение гауссовских $\mathcal{N}(0, 1)$ мер. При этом H переходит в l_2 , а классы $W_p^k(X, \mu, H)$ – в $W_p^k(\mathbb{R}^\infty, \gamma, l_2)$. Можно проверить существование γ -измеримого отображения $k: \mathbb{R}^\infty \rightarrow X$ такого, что $(kj)(u) = u$ μ -п.н. Легко видеть также, что функции $\mathbb{R}^\infty \ni y \mapsto ja(ky)$, $\mathbb{R}^\infty \ni y \mapsto j\sigma_n(ky)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 3.1. Поэтому далее достаточно доказывать теорему в предположении $X = \mathbb{R}^\infty$, где $\mu = \gamma$. Пусть π_m – проектор на первые m координат, π^m – проектор на оставшиеся координаты. Уравнение (3.1) будет аппроксимироваться следующей последовательностью:

$$\varphi_{s,t}^{(m)}(u) = u + \int_s^t a_z^m(\varphi_{s,z}^{(m)}(u)) dz + \sum_n \int_s^t \sigma_z^{m,n}(\varphi_{s,z}^{(m)}(u)) d\omega_n(z), \quad (4.1)$$

где функции $a_z^m, \sigma_z^{m,n}$ будут такими, что

$$a_z^m(u) = \pi_m a_z^m(\pi_m u), \quad \sigma_z^{m,n} = \pi_m \sigma_z^{m,n}(\pi_m u). \quad (4.2)$$

Заметим, что в этом случае поток $\varphi_{s,t}^{(m)}$ изменяет лишь координаты $\pi_m u$ и не затрагивает $\pi^m u$. Поэтому если коэффициенты (4.1) удовлетворяют (4.2), то нам остается рассмотреть конечномерную задачу, детально исследованную в [1] не только для гауссовских мер, но и для мер с гладкой плотностью.

Таким образом, нашей целью является аппроксимация коэффициентов a, σ^n “конечномерными” функциями $a^m, \sigma^{m,n}$, а затем обоснование предельного перехода для $\varphi_{s,t}^{(m)}$ и плотностей Радона–Никодима

$$\rho_{s,t}^{(m)} := \frac{d\mu \circ (\varphi_{s,t}^{(m)})^{-1}}{d\mu}.$$

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 4.1 [9]. Пусть X_1, X_2 – два сепарабельных метрических пространства, μ_i – вероятностная мера на X_i , $\{f_n: X_1 \rightarrow X_2, n \geq 0\}$ – последовательность измеримых отображений. Предположим, что

- а) меры $\mu_1 \circ (f_n)^{-1}$ абсолютно непрерывны относительно μ_2 для каждого $n \geq 1$,
- б) последовательность плотностей Радона–Никодима

$$\left\{ \frac{d\mu_1 \circ (f_n)^{-1}}{d\mu_2}, n \geq 1 \right\}$$

равномерно интегрируема,

- с) f_n сходится к f_0 при $n \rightarrow \infty$ по мере μ_1 .

Тогда $\mu_1 \circ (f_0)^{-1} \ll \mu_2$.

Более того, если последовательность $\left\{ \frac{d\mu_1 \circ (f_n)^{-1}}{d\mu_2}, n \geq 1 \right\}$ сходится по мере μ_2 к некоторой функции p , то

$$p = \frac{d\mu_1 \circ (f_0)^{-1}}{d\mu_2}.$$

Как следует из леммы 4.1, равномерная интегрируемость плотностей играет большую роль для обоснования абсолютной непрерывности предельной меры. В следующей теореме приводятся некоторые оценки для $\rho_{s,t}^{(m)}$, не зависящие от размерности пространства m .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть μ – гауссовская мера с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что измеримые функции

$$a: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \sigma^n: [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad n \geq 1,$$

удовлетворяют условиям:

- (i) $\forall t \in [0, T] \quad a_t \in C_b^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \sigma_t^n \in C_b^3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m);$
- (ii) $A_j := \sup_{t,x} \|\nabla^j a_t(x)\| < \infty, j \in \{0, 1, 2\},$
 $S_l := \sup_{t,x} \sum_n \|\nabla^l \sigma_t^n(x)\|^2 < \infty, l \in \{0, \dots, 3\}.$

Тогда существуют случайная функция $\varphi = \varphi_{s,t}(u)$, $s, t \in [0, T], u \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая (3.1'), (3.1'') для каждого u , и множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, такие, что для всех $\omega \in \Omega_0$:

- а) φ непрерывна по (s, t, u) ;
- б) для всех $s, t \quad \varphi_{s,t}(u)$ дифференцируема по u ,

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_{s,t}(u) &= \text{id}_{\mathbb{R}^m} + \int_s^t \nabla a_z(\varphi_{s,z}(u)) \nabla \varphi_{s,z}(u) dz \\ &+ \sum_n \int_s^t \nabla \sigma_z^n(\varphi_{s,z}(u)) \nabla \varphi_{s,z}(u) d\omega_n(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

для всех $s \leq t, u \in \mathbb{R}^m$;

- с) для всех $u \in \mathbb{R}^m, t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$

$$\varphi_{t_1, t_1}(u, \omega) = u, \quad \varphi_{t_2, t_3}(\varphi_{t_1, t_2}(u, \omega), \omega) = \varphi_{t_1, t_3}(u, \omega);$$

- d) меры $\mu_{s,t}(\omega) := \mu \circ (\varphi_{s,t}(\cdot, \omega))^{-1}$ и μ эквивалентны, причем для плотностей Радона-Никодима $\rho_{s,t} = \frac{d\mu_{s,t}}{d\mu}$ выполняются формулы (3.2), (3.3), где

$$(\delta f)(u) = - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_k(u)}{\partial u_k} - f_k(u) u_k \right) \quad (4.4)$$

- для $f = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$;
 е) существует константа $C = C(A_0, A_1, S_0, S_1, S_2)$, зависящая только от A_j, S_l и не зависящая от размерности пространства $\mathbb{R}^m$, такая, что

$$\sup_{0 \leq s, t \leq T} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} |\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}| d\mu d\mathbf{P} \leq C. \quad (4.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в теореме 3.1 взять $H = X = \mathbb{R}^m$, $\mu = \mathcal{N}(0, \text{id}_{\mathbb{R}^m})$ и коэффициенты a, σ^n удовлетворяют условиям теоремы 4.1, то все утверждения теоремы 3.1 выполняются. Действительно, в этом случае стохастическая производная является градиентом в $\mathbb{R}^m$, а сопряженный оператор задается формулой (4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Доказательство утверждений а)–d) см., например, в [1; §§ 4.3–4.6]. Проверим утверждение е). Рассмотрим сначала случай $s \leq t$. Без потери общности можно предполагать, что $s = 0$. Обозначим $\varphi_t := \varphi_{0,t}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $(A, \mathfrak{A}, \nu)$ – вероятностное пространство. Предположим, что измеримое отображение $f: A \rightarrow A$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) меры ν и $\nu \circ f^{-1}$ эквивалентны;
- 2) существует измеримое отображение $g: A \rightarrow A$ такое, что $g(f(\alpha)) = f(g(\alpha)) = \alpha$ для ν -п.в. $\alpha \in A$.

Тогда $\nu \circ g^{-1} \sim \nu$,

$$\frac{d\nu \circ f^{-1}}{d\nu} = \left(\frac{d\nu \circ g^{-1}}{d\nu}(g) \right)^{-1} \quad (4.6)$$

и

$$\int_A \left| \frac{d\nu \circ f^{-1}}{d\nu} \ln \frac{d\nu \circ f^{-1}}{d\nu} \right| d\nu = \int_A \left| \ln \frac{d\nu \circ g^{-1}}{d\nu} \right| d\nu. \quad (4.7)$$

Обозначим через $E_\mu, E_{\mathbf{P}}, E_{\mu \times \mathbf{P}}$ математические ожидания относительно мер $\mu, \mathbf{P}, \mu \times \mathbf{P}$ соответственно. Переходя в (3.2) от интеграла Стратоновича к интегралу

Ито и применяя (4.7), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} |\rho_{0,t} \ln \rho_{0,t}| &= \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} |\ln \rho_{t,0}| \\
&\leq \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^t |(\delta a_s)(\varphi_s)| ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^t \left| \sum_n \delta(\nabla_{\sigma_s^n} \sigma_s^n)(\varphi_s) \right| ds \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \sum_n \int_0^t (\delta \sigma_s^n)(\varphi_s) d\omega_n(s) \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \int_0^t \sum_n (\nabla_{\sigma_s^n} (\delta \sigma_s^n))(\varphi_s) ds \right| \\
&= I_1 + \frac{1}{2} I_2 + I_3 + \frac{1}{2} I_4.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Оценим каждое слагаемое в (4.8). Обоснование существования каждого из интегралов в (4.8) будет получено в процессе доказательства. Нам потребуется следующее утверждение о действии оператора дивергенции δ на композицию гладкой функции и φ_t .

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что $b \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Тогда*

$$\begin{aligned}
(\delta b)(\varphi_s) &= \delta(b(\varphi_s)) + \left\langle b(\varphi_s), \int_0^s a_z(\varphi_z) dz + \sum_n \int_0^s \sigma_z^n(\varphi_z) d\omega_n(z) \right\rangle \\
&\quad + \text{tr} \left((\nabla b)(\varphi_s) \left\{ \int_0^s (\nabla a_z)(\varphi_z) \nabla \varphi_z dz \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_n \int_0^s (\nabla \sigma_z^n)(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_n(z) \right\} \right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned}
(\delta b)(\varphi_s) &= \langle \varphi_s, b(\varphi_s) \rangle - \text{tr}(\nabla b)(\varphi_s) \\
&= \langle u, b(\varphi_s) \rangle + \left\langle \int_0^s a_z(\varphi_z) dz + \sum_n \int_0^s \sigma_z^n(\varphi_z) d\omega_n(z), b(\varphi_s) \right\rangle \\
&\quad - \text{tr} \nabla(b(\varphi_s)) + \text{tr}((\nabla b)(\varphi_s) \nabla \varphi_s - (\nabla b)(\varphi_s)).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Применяя (4.3) к (4.10), получаем выражение (4.9).

Лемма 4.3 доказана.

Применим (4.9) для оценки слагаемого I_1 в (4.8):

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^t |\delta(a_s(\varphi_s))| ds + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^t \left| \left\langle \int_0^s a_z(\varphi_z) dz, a_s(\varphi_s) \right\rangle \right| ds \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \int_0^t \left\langle a_s(\varphi_s), \sum_n \int_0^s \sigma_z^n(\varphi_z) d\omega_n(z) \right\rangle ds \right| \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \int_0^t \text{tr} \left\{ \nabla a_s(\varphi_s) \int_0^s \nabla a_z(\varphi_z) \nabla \varphi_z dz \right\} ds \right| \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \int_0^t \text{tr} \left\{ \nabla a_s(\varphi_s) \sum_n \int_0^s \nabla \sigma_z^n(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_n(z) \right\} ds \right| \\
&= I_{1,1} + \dots + I_{1,5}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_{1,2} &\leq \int_0^t \int_0^s \|a_z\|_\infty \|a_s\|_\infty dz ds \leq \frac{1}{2} A_0^2, \\ (I_{1,3})^2 &\leq t \int_0^t \|a_s\|_\infty^2 \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_P \left\| \sum_n \int_0^s \sigma_z^n(\varphi_z) d\omega_n(z) \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 dz ds \\ &\leq t \int_0^t \|a_s\|_\infty^2 \sum_n \int_0^s \|\sigma_z^n\|_\infty^2 dz ds \leq t^2 A_0^2 S_0. \end{aligned}$$

Для оценки $I_{1,1}$ применим лемму 2.1:

$$\begin{aligned} (I_{1,1})^2 &\leq t \int_0^t \mathbb{E}_P \{ \mathbb{E}_\mu (\delta(a_s(\varphi_s)))^2 \} ds \\ &\leq tc_{2,1} \int_0^t \mathbb{E}_P \{ \mathbb{E}_\mu [\|a_s(\varphi_s)\|^2 + \|\nabla a_s(\varphi_s) \nabla \varphi_s\|^2] \} ds \\ &\leq tc_{2,1} \int_0^t (\|a_s\|_\infty^2 + \|\nabla a_s\|_\infty^2 \mathbb{E}_P \mathbb{E}_\mu \|\nabla \varphi_s\|_{\text{op}}^2) ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\|\nabla a_s\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|\nabla a_s(x)\|_{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m}$, $\|\cdot\|_{\text{op}}$ — операторная норма.

Искомое неравенство для $I_{1,1}$ вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 4.4. *Для любого $p \geq 1$ существуют константы $K_1(p) = K_1(p, T, A_0, A_1, S_0, S_1)$ и $K_2(p) = K_2(p, T, A_j, S_j, j = \overline{0, 2})$ такие, что*

$$\mathbb{E}_{\mu \times P} \|\nabla^j \varphi_t\|_{\text{op}}^p \leq K_j(p), \quad j = 1, 2. \quad (4.12)$$

Более того, $\nabla \varphi_t$ обратимо п.н. и существует такое $K_3(p) = K_3(p, T, A_j, S_j, j = \overline{0, 2})$, что

$$\mathbb{E}_{\mu \times P} \|(\nabla \varphi_t)^{-1}\|_{\text{op}}^p \leq K_3(p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $\|\nabla \varphi_t\|_{\text{op}} \leq 1 + \|\nabla \varphi_t - \text{id}\|_{HS}$, где $\|\cdot\|_{HS}$ — норма Гильберта–Шмидта. Положим $\psi_t := \nabla \varphi_t - \text{id}$.

Тогда

$$\psi_t = \int_0^t (\nabla a_s(\varphi_s) \psi_s + \nabla a_s(\varphi_s)) ds + \sum_n \int_0^t (\nabla \sigma_s^n(\varphi_s) \psi_s + \nabla \sigma_s^n(\varphi_s)) d\omega_n(s).$$

Применяя формулу Ито к $\|\psi_t\|_{HS}^p$ и рассуждения, аналогичные [1; с. 156], получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{E} \|\psi_t\|_{HS}^p \leq C(p, A_1, S_1) \int_0^t (1 + \mathbb{E} \|\psi_s\|_{HS}^p) ds,$$

где C не зависит от размерности пространства. Неравенство (4.12) получается применением леммы Гронолла для $j = 1$. Случай $j = 2$ рассматривается аналогично. Обратимость $\nabla \varphi_t$ является известным фактом, $(\nabla \varphi_t)^{-1}$ удовлетворяет некоторому линейному стохастическому уравнению. Оценки для моментов $(\nabla \varphi_t)^{-1}$ получаются так же, как и для $\nabla \varphi_t$. Лемма 4.4 доказана.

Для исследования $I_{1,4}, I_{1,5}$ нам понадобится следующий факт. Если H – гильбертово пространство, $A, B \in \mathcal{HS}(H)$ – операторы Гильберта–Шмидта и $C \in \mathcal{L}(H)$ – ограниченный оператор, то

$$|\operatorname{tr} AB| \leq \|A\|_{HS} \|B\|_{HS}, \quad \|AC\|_{HS} \leq \|A\|_{HS} \|C\|_{\operatorname{op}}. \quad (4.13)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{1,4} &\leq \int_0^t \|\nabla a_s\|_\infty \int_0^s \|\nabla a_z\|_\infty \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_z\|_{\operatorname{op}} dz ds \leq \frac{1}{2} K_1 A_0^2 t^2, \\ I_{1,5} &\leq t \int_0^t \|\nabla a_s\|_\infty^2 \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_\mathbb{P} \left\| \sum_n \int_0^s \nabla \sigma_z^n(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_n(z) \right\|_{HS}^2 ds \\ &\leq t \int_0^t A_1^2 \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_\mathbb{P} \int_0^s \sum_n \|\nabla \sigma_z^n(\varphi_z) \nabla \varphi_z\|_{HS}^2 dz ds \\ &\leq A_1^2 t \int_0^t \int_0^s \sum_n \|\nabla \sigma_z^n\|_\infty^2 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_z\|_{\operatorname{op}}^2 dz ds \leq \frac{1}{2} A_1^2 t^3 S_0 K_2. \end{aligned}$$

Таким образом, данное неравенство завершает доказательство оценки

$$I_1 \leq K(T, A_0, A_1, S_0, S_1).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $I_2 \leq K(T, A_0, A_1, S_0, S_1, S_2)$. Для этого достаточно заметить, что для каждого $t \in [0, T]$ функция $\sum_n \nabla \sigma_t^n \sigma_t^n$ непрерывно дифференцируема и

$$\sup_t \left(\left\| \sum_n \nabla \sigma_t^n \sigma_t^n \right\|_{\mathbb{R}^m} + \left\| \nabla \sum_n (\nabla \sigma_t^n \sigma_t^n) \right\|_{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m} \right) < \infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n \nabla \sigma_t^n \sigma_t^n \right\| &\leq \sum_n \|\nabla \sigma_t^n\| \|\sigma_t^n\| \leq \sum_n (\|\nabla \sigma_t^n\|^2 + \|\sigma_t^n\|^2) \leq S_0 + S_1, \\ \left\| \nabla \left(\sum_n \nabla \sigma_t^n \sigma_t^n \right) \right\| &\leq \sum_n (\|\nabla^2 \sigma_t^n\| \|\sigma_t^n\| + \|\nabla \sigma_t^n\|^2) \leq S_0 + S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим I_3 :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \sum_n \int_0^t \delta(\sigma_s^n(\varphi_s)) d\omega_n(s) \right| \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \sum_n \int_0^t \left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \int_0^s a_z(\varphi_z) dz \right\rangle d\omega_n(s) \right| \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \sum_n \int_0^t \left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\rangle d\omega_n(s) \right| \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \operatorname{tr} \left\{ \sum_n \int_0^t \nabla \sigma_s^n(\varphi_s) \int_0^s \nabla a_z(\varphi_z) \nabla \varphi_z dz d\omega_n(s) \right\} \right| \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left| \operatorname{tr} \left\{ \sum_n \int_0^t \nabla \sigma_s^n(\varphi_s) \int_0^s \sum_m \nabla \sigma_z^m(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_m(z) d\omega_n(s) \right\} \right| \\ &= I_{3,1} + \dots + I_{3,5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I_{3,1})^2 &\leq \mathbb{E}_\mu \left\{ \mathbb{E}_\mathbb{P} \left(\sum_n \int_0^t \delta(\sigma_s^n(\varphi_s)) d\omega_n(s) \right)^2 \right\} \\
&= \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \sum_n \int_0^t (\delta(\sigma_s^n(\varphi_s)))^2 ds.
\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения для $I_{3,1}$ проводятся так же, как и для $I_{1,1}$:

$$\begin{aligned}
(I_{3,2})^2 &\leq \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \sum_n \int_0^t \left(\left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \int_0^s a_z(\varphi_z) dz \right\rangle \right)^2 ds \\
&\leq \sum_n \int_0^t \|\sigma_s^n\|_\infty^2 ds \left(\int_0^t \|a_z\|_\infty dz \right)^2 \leq S_0 A_0^2 t^3; \\
(I_{3,3})^2 &\leq \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_\mathbb{P} \sum_n \int_0^t \left(\left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\rangle \right)^2 ds \\
&\leq \int_0^t \sum_n \|\sigma_s^n\|_\infty^2 \mathbb{E}_\mu \left(\mathbb{E}_\mathbb{P} \left\| \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\|^2 \right) ds \leq \frac{1}{2} S_0^2 t^2.
\end{aligned}$$

Применяя (4.13) и лемму 4.4 к $I_{3,4}$, получаем

$$\begin{aligned}
(I_{3,4})^2 &\leq \mathbb{E}_\mu \mathbb{E}_\mathbb{P} \sum_n \int_0^t \left(\text{tr} \left\{ \nabla \sigma_s^n(\varphi_s) \int_0^s \nabla a_z(\varphi_z) \nabla \varphi_z dz \right\} \right)^2 ds \\
&\leq \sum_n \int_0^t \|\nabla \sigma_s^n\|_\infty^2 s \int_0^s \|\nabla a_z\|_\infty^2 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_z\|_{\text{op}}^2 dz ds \leq \frac{1}{3} K_1(2) S_1 A_1^2 t^3,
\end{aligned}$$

где константа $K_1(2)$ определена в лемме 4.4.

Аналогично,

$$(I_{3,5})^2 \leq \sum_n \int_0^t \|\nabla \sigma_s^n\|_\infty^2 \int_0^s \sum_m \|\nabla \sigma_z^m\|_\infty^2 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_z\|_{\text{op}}^2 dz ds \leq \frac{1}{2} S_1^2 t^2 \cdot K_1(2).$$

Оценим последнее слагаемое в (4.8):

$$\begin{aligned}
I_4 &= \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^t \left| \sum_n \langle \nabla((\delta \sigma_s^n)(\varphi_s)), (\nabla \varphi_s)^{-1} \sigma_s^n(\varphi_s) \rangle \right| ds \\
&\leq \int_0^t \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla((\delta \sigma_s^n)(\varphi_s))\|^2 ds + \int_0^t \sum_n \|\sigma_s^n\|_\infty^2 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|(\nabla \varphi_s)^{-1}\|_{\text{op}}^2 ds.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое ограничено по лемме 4.4. Рассмотрим подынтегральное выра-

жение в первом члене. По лемме 4.3 имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla((\delta\sigma_n^s)(\varphi_s))\|^2 \\
& \leq 5 \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left(\|(\nabla\delta)(\sigma_s^n(\varphi_s))\|^2 + \left\| \nabla \left(\left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \int_0^s a_z(\varphi_z) dz \right\rangle \right) \right\|^2 \right. \\
& \quad + \left\| \nabla \left(\left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \int_0^s \sum_m \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\rangle \right) \right\|^2 \\
& \quad + \left\| \nabla \left(\text{tr} \left\{ \left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \int_0^s a_z(\varphi_z) dz \right\rangle \right\} \right) \right\|^2 \\
& \quad \left. + \left\| \nabla \left(\text{tr} \left\{ \left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\rangle \right\} \right) \right\|^2 \right) \\
& = 5(I_{4,1} + \dots + I_{4,5}).
\end{aligned}$$

Применяя леммы 4.4 и 2.1 к $I_{4,1}$, получаем неравенство $I_{4,1} \leq C(T, A_j, S_j, j = 0, 1, 2)$. Ограниченность $I_{4,2}$ получается с помощью таких же рассуждений, как и для $I_{1,3}$. Можно показать [1; § 4.6], что

$$\nabla \left(\sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right) = \sum_m \int_0^s \nabla \sigma_z^m(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_m(z).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
I_{4,3} & \leq \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left\| \left\langle \nabla \sigma_s^n(\varphi_s) \nabla \varphi_s, \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\rangle \right\|^2 \\
& \quad + \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left\| \left\langle \sigma_s^n(\varphi_s), \sum_m \int_0^s \nabla \sigma_z^m(\varphi_z) \nabla \varphi_z d\omega_m(z) \right\rangle \right\|^2 \\
& \leq S_1 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_s\|_{\text{op}}^2 \left\| \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\|^2 \\
& \quad + S_0 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \int_0^s \sum_m \|\nabla \sigma_z^m(\varphi_z)\|_{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m}^2 \|\nabla \varphi_z\|_{\text{op}}^2 dz \\
& \leq S_1 (\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \varphi_s\|_{\text{op}}^4)^{1/2} \left(\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left\| \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\|^4 \right)^{1/2} \\
& \quad + S_0 S_1 s K_1(2).
\end{aligned}$$

Нам понадобится следующее известное мартингалное неравенство:

$$\mathbb{E} \|M_t\|^4 \leq K \mathbb{E} (\langle M_t, M_t \rangle)^2,$$

где M_t — непрерывный квадратически интегрируемый мартингал, принимающий значения в гильбертовом пространстве и имеющий нулевое среднее. Здесь K — некоторая универсальная константа.

Следовательно,

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left\| \sum_m \int_0^s \sigma_z^m(\varphi_z) d\omega_m(z) \right\|^4 \leq K \left(\sum_m \int_0^s \|\sigma_z^m\|_{\infty}^2 dz \right)^2 \leq K s^2 S_0^2.$$

Учитывая все предыдущие неравенства, мы получаем ограниченность $I_{4,3}$. Выражения $I_{4,4}$ и $I_{4,5}$ рассматриваются аналогично $I_{4,3}$ с применением неравенства (4.13).

Теорема 4.1 полностью доказана.

§ 5. Существование измеримого решения

Предположим, что для любого $t \in [0, T]$, $n \geq 1$,

а) функции $a_t, \sigma_t^n : X \rightarrow H$ являются H -липшицевыми и

$$\text{б) } \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in X} \sup_{h \in H, h \neq 0} \left(\|a_t(x)\| + \sum_n \|\sigma_t^n(x)\|^2 + \frac{\|a_t(x+h) - a_t(x)\|}{\|h\|} + \sum_n \frac{\|\sigma_t^n(x+h) - \sigma_t^n(x)\|^2}{\|h\|^2} \right) < \infty.$$

В этом параграфе мы докажем существование случайного элемента

$$\varphi = \varphi_{s,t}(u, \omega), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad u \in X, \quad \omega \in \Omega,$$

такого, что

- 1) φ измеримо по четверке аргументов (s, t, u, ω) ,
- 2) для каждого $u \in X, 0 \leq s \leq t \leq T$, выполняется соотношение (3.1),
- 3) для каждого $u \in X, \omega \in \Omega$, функция $\varphi_{s,t}(u)$ непрерывна по s, t .

Отметим, что если функции a_t, σ_t^n удовлетворяют условиям теоремы 3.1. II, то они удовлетворяют условиям а), б).

Заметим, что для любого фиксированного $u \in X$ решение (3.1) существует. Действительно, в этом случае $\varphi_{s,t}(u) = u + \psi_{s,t}(u)$, где $\psi_{s,t}$ — решение следующего стохастического дифференциального уравнения в H с H -липшицевыми коэффициентами:

$$\psi_{s,t}(u) = \int_s^t a_z(\psi_{s,z}(u) + u) dz + \sum_n \int_s^t \sigma_z^n(\psi_{s,z}(u) + u) d\omega_n(z).$$

Применяя теорему Колмогорова, легко проверить существование непрерывной по s, t модификации. Однако полученный процесс не обязан быть измеримым по (s, t, u, ω) . Для построения процесса, измеримого по четверке аргументов, нам потребуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1 [10]. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, Y — сепарабельное метрическое пространство, $(A, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Рассмотрим последовательность $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{A}$ -измеримых процессов $X_n = X_n(a)$, $a \in A$, $n \geq 1$, принимающих значения в Y . Предположим, что для каждого $a \in A$ существует предел по вероятности $\{X_n(a), n \geq 1\}$.

Тогда существует $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{A}$ -измеримый случайный элемент $X(a)$, $a \in A$, принимающий значения в Y , такой, что

$$\forall a \in A \quad X_n(a) \xrightarrow{P} X(a), \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть $s \in [0, T]$ фиксировано. Построим сначала случайный процесс $\varphi_{(s),t}(u, \omega)$, $t \in [s, T]$, измеримый по (t, u, ω) , удовлетворяющий (3.1) и непрерывный по t для всех u, ω .

Без потери общности считаем, что $s = 0$. Пусть φ_t — решение (3.1) с $s = 0$. Измеримая версия φ_t будет построена при помощи предельного перехода с использованием теоремы 5.1.

Положим

$$\varphi_t^{(0)}(u, \omega) := u, \quad \varphi_t^{(k+1)}(u, \omega) := u + \int_0^t a_z(\varphi_z^{(k)}(u)) dz + \sum_n \int_0^t \sigma_z^n(\varphi_z^{(k)}(u)) d\omega_n(z).$$

Возьмем в качестве A пространство $C([0, T], H)$. Проверим существование $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X)$ -измеримой версии интеграла $\int_0^t \sigma_z^n(\varphi_z^{(k)}(u)) d\omega_n(z)$, рассматриваемого как случайный элемент со значениями в $C([0, T], H)$.

Определим следующую последовательность $C([0, T], H)$ -значных $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X)$ -измеримых случайных элементов:

$$\begin{aligned} \xi_t^{k,m,n}(u) &= \sum_{j=0}^{l-1} \sigma_{jT/m}^{(n)}(\varphi_{jT/m}^{(k)}(u)) \left(\omega_n \left(\frac{(j+1)T}{m} \right) - \omega_n \left(\frac{jT}{m} \right) \right) \\ &\quad + \sigma_{lT/m}^{(n)}(\varphi_{lT/m}^{(k)}(u)) \left(\omega_n(t) - \omega_n \left(\frac{lT}{m} \right) \right), \end{aligned}$$

где l такое, что $t \in [lT/m, (l+1)T/m]$.

Легко проверить, что $\xi_t^{k,m,n}(u)$ сходится в $C([0, T], H)$ для каждого $u \in X$ по мере $\mathbf{P}$. Поэтому по теореме 5.1 существует измеримая по (u, ω) версия интеграла $\int_0^t \sigma_z^n(\varphi_z^{(k)}(u)) d\omega_n(z)$, рассматриваемая как случайный элемент в $C([0, T], H)$.

Аналогичным образом можно показать существование измеримой версии суммы

$$\sum_n \int_0^t \sigma_z^n(\varphi_z^{(k)}(u)) d\omega_n(z).$$

Для каждого $u \in X$ последовательность итераций $(\varphi_t^{(k)}(u) - u)$ сходится к $(\varphi_t(u) - u)$ в пространстве $C([0, T], H)$ по мере $\mathbf{P}$.

Применяя теорему 5.1 еще раз, получаем существование измеримой модификации $\varphi_{(s),t}(u)$ для каждого $s \in [0, T]$.

Рассмотрим $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{F}$ -измеримый $C(\{(s, t), 0 \leq s \leq t \leq T\}, H)$ -значный случайный элемент

$$\varphi_{s,t}^{(n)} = \begin{cases} \varphi_{(0),t}, & \text{если } s \in [0, T/n], \\ \varphi_{((k-1)T/n),t}, & \text{если } s = kT/n, \\ \varphi_{((k-1)T/n),t}\theta_n + \varphi_{(kT/n),t}(1 - \theta_n), & \text{если } s \in (kT/n, (k+1)T/n), \end{cases}$$

где $\theta_n = (s - kT/n)n$.

Для каждого $u \in X$ существует непрерывная по (s, t) , $0 \leq s \leq t \leq T$, версия $\varphi_{s,t}(u)$. Следовательно, для любого $u \in X$ имеем

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \|\varphi_{s,t}^{(n)}(u, \omega) - \varphi_{s,t}(u, \omega)\|_H \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{для п.в. } \omega.$$

По теореме 5.1 существует модификация $\varphi_{s,t}$, непрерывная по s, t и измеримая по u, ω . Процесс, имеющий непрерывные траектории, измерим, значит, отображение $(s, t, u, \omega) \mapsto \varphi_{s,t}(u, \omega)$, $s \leq t, u \in X, \omega \in \Omega$, измеримо.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобно приведенным выше рассуждениям можно показать существование процесса $\varphi_{s,t}$, $0 \leq s, t \leq T$, измеримого по (s, t, u, ω) и удовлетворяющего (3.1'), (3.1'') для всех $s \leq t, u \in X$.

§6. Доказательство теоремы 3.1

Пусть $\hat{a}$, $\hat{\sigma}^n$ — H -липшицевы модификации a , σ^n соответственно (лемма 2.2). Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\varphi_{s,t}(u) = u + \int_s^t \hat{a}_z(\varphi_{s,z}(u)) dz + \sum_n \int_s^t \hat{\sigma}_z^n(\varphi_{s,z}(u)) d\omega_n(z). \quad (6.1)$$

Пусть $\varphi_{s,t}$ удовлетворяет условиям измеримости, полученным в §5. Заметим, что если $\mu \circ \varphi_{s,t}^{-1} \sim \mu$, то $\varphi_{s,t}$ является также решением (3.1), кроме того, $\varphi_{s,t}(u)$ будет удовлетворять (3.1) для μ -п.в. $u \in X$. Поэтому далее везде предполагается, что $a = \hat{a}$, $\sigma^n = \hat{\sigma}^n$. Мы покажем, что $\varphi_{s,t}(u)$ — искомый процесс.

Так же как и в §4, предполагаем, что $X = \mathbb{R}^\infty$, μ — произведение стандартных гауссовских мер, $H = l_2$. Пусть π_m — проектор на пространство, порожденное первыми m координатами, π^m — проектор на оставшиеся координаты (π_m, π^m будут рассматриваться как операторы в $\mathbb{R}^\infty$ или в l_2). Отождествим $\pi_m(\mathbb{R}^\infty)$ с $\mathbb{R}^m$ и каждый элемент $u \in \mathbb{R}^\infty$ с парой $(u_m, u^m) = (\pi_m(u), \pi^m(u)) \in \mathbb{R}^m \times \pi^m(\mathbb{R}^\infty)$. Обозначим σ -алгебру, порожденную первыми m координатными функциями, через $\mathcal{F}_m$.

Рассмотрим функции

$$a^m = \mathbf{E}_\mu(\pi_m a / \mathcal{F}_m), \quad \sigma^{m,n} = \mathbf{E}_\mu(\pi_m \sigma^n / \mathcal{F}_m),$$

где $\mathbf{E}_\mu(\cdot / \mathcal{F}_m)$ — условное математическое ожидание в $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ относительно $\mathcal{F}_m$.

Из леммы 2.3 следует, что $a^m, \sigma^{m,n}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы 3.1 с теми же константами. Более того, для каждого $t \in [0, T]$ имеет место сходимость

$$\begin{aligned} D^i a_t^m &\rightarrow D^i a_t, & m \rightarrow \infty, & i = 0, 1, \\ D^j \sigma_t^{m,n} &\rightarrow D^j \sigma_t^n, & m \rightarrow \infty, & j = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

для μ -п.в. $u \in X$.

Заметим, что функции $a_t^m, \sigma_t^{m,n}$ принимают значения в $\mathbb{R}^m$ и зависят только от координаты $\mathbb{R}^m$, т.е. $\forall v_1, v_2 \in \pi^m(\mathbb{R}^\infty), u_m \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T]$

$$a_t^m(u_m, v_1) = a_t^m(u_m, v_2), \quad \sigma_t^{m,n}(u_m, v_1) = \sigma_t^{m,n}(u_m, v_2).$$

Поэтому иногда, для удобства, $a^m, \sigma^{m,n}$ будут рассматриваться как функции, действующие из $[0, T] \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$.

Мы еще не можем применять теорему 4.1 к уравнению

$$d\varphi_{s,t}^m = a_t^m(\varphi_{s,t}^m) dt + \sum_n \sigma_t^{m,n}(\varphi_{s,t}^m) d\omega_n(t), \quad (6.2)$$

$$\varphi_{s,s}^m(u_m) = u_m, \quad u_m \in \mathbb{R}^m, \quad (6.3)$$

так как для каждого $t \in [0, T]$ функции $a_t^m, \sigma_t^{m,n}$, рассматриваемые как функции на $\mathbb{R}^m$, не принадлежат пространству C_b^2 , а только W_∞^2 .

Известно, что элемент $f \in W_\infty^k(\mathbb{R}^m, \mu_m, \mathbb{R}^m)$, $\mu_m \sim \mathcal{N}(0, \text{id}_{\mathbb{R}^m})$, имеет модификацию, которая $k-1$ раз непрерывно дифференцируема и $\nabla^{k-1}f$ глобально липшицева с константой, не превышающей $\|f\|_{\infty, k}$.

Аппроксимируем $a_t^m, \sigma_t^{m,n}$ дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Нам понадобится следующее известное утверждение о приближении функции свертками.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx = 1$. Положим $\varphi_n(x) = n^m \varphi(x/n)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $n \geq 1$.

Тогда для любой ограниченной измеримой функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет место сходимость

$$f * \varphi_n \rightarrow f, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{по мере } \mu_m.$$

Если f равномерно непрерывна, то $f * \varphi_n$ сходится к f равномерно.

Если $f \in W_\infty^k(\mathbb{R}^m, \mu_m, \mathbb{R}^m)$, то

$$\nabla^j(f * \varphi_n) \rightarrow \nabla^j f, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{для } j = 0, \dots, k-1$$

равномерно на $\mathbb{R}^m$,

$$\nabla^k(f * \varphi_n) \xrightarrow{\mu_m} \nabla^k f, \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f \in W_\infty^k$, то для каждого $j \in \{0, \dots, k\}$ и $n \geq 1$

$$\|\nabla^j(f * \varphi_n)\|_\infty \leq \|\nabla^j f\|_\infty.$$

Применяя диагональный метод Кантора, теорему Лебега об ограниченной сходимости и лемму 6.1, выберем подпоследовательность $\{k_m\}$ так, чтобы функции $a^{m, k_m} = a^m * \varphi_{k_m}$, $\sigma^{n, m, k_m} = \sigma^{n, m} * \varphi_{k_m}$ удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} \int_0^T \|a_t^{m, k_m} - a_t\|_H dt &\rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.н.}, \\ \int_0^T \|\sigma_t^{n, m, k_m} - \sigma_t^n\|_H^2 dt &\rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \mu\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (6.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сейчас $a^{m, k_m}, \sigma^{n, m, k_m}$ рассматриваются как функции на X .

Далее будут рассматриваться только функции $a^{m, k_m}, \sigma^{n, m, k_m}$, а не $a^m, \sigma^{n, m}$. Поэтому для удобства индекс k_m будет опускаться.

Проверим, что для всех s, t , $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_{s, t}^m - \varphi_{s, t}\|_H^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

где $\varphi_{s, t}^m$ — решение (6.2) с

$$\varphi_{s, s}^m(u) = u, \quad a_t^m(u) = (a_t^m(u_m), 0), \quad \sigma^{m, n}(u) = (\sigma^{m, n}(u_m), 0).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_{s,t}^m - \varphi_{s,z}\|_H^2 &\leq 2 \int_s^t \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|a^m(\varphi_{s,z}^m) - a(\varphi_{s,z})\|_H^2 dz \\ &\quad + 2 \int_s^t \sum_n \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\sigma^{m,n}(\varphi_{s,z}^m) - \sigma^n(\varphi_{s,z})\|_H^2 dz. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Первый член в (6.6) не превосходит

$$\begin{aligned} &2 \int_s^t \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|a_z^m(\varphi_{s,z}^m) - a_z(\varphi_{s,z}^m)\|_H^2 dz + 2 \int_s^t \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|a_z(\varphi_{s,z}^m) - a_z(\varphi_{s,z})\|_H^2 dz \\ &\leq 2 \int_s^t \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} (\|a_z^m - a_z\|_H^2 \rho_{s,z}^m) dz + 2 \int_s^t \|Da_z\|_\infty^2 \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_{s,z}^m - \varphi_{s,z}\|_H^2 dz. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Первое слагаемое в правой части (6.7) сходится к нулю равномерно по s, t благодаря (6.4), равномерной ограниченности $\{a_t^m, a_t; t \in [0, T], m \geq 1\}$ и равномерной интегрируемости $\{\rho_{s,z}^m; m \geq 1, s, z \in [0, T]\}$. Второй член в правой части (6.6) рассматривается аналогично.

Таким образом, имеет место неравенство

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_{s,t}^m - \varphi_{s,z}\|_H^2 \leq \varepsilon_m + 2(A_1^2 + S_1) \int_s^t \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_{s,z}^m - \varphi_{s,z}\|_H^2 dz,$$

где $\varepsilon_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Сходимость (6.5) следует из леммы Гроуолла.

По лемме 4.1 и (6.5) мера $(\mu \times \mathbb{P}) \circ (\varphi_{s,t})^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu \times \mathbb{P}$. Поэтому для всех $s \leq t$ и для п.в. $\omega \in \Omega$

$$\mu \circ (\varphi_{s,t}(\omega, \cdot))^{-1} \ll \mu.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соответствующее множество $\mathbb{P}$ -нулевой меры зависит, вообще говоря, от s и t .

Для того чтобы доказать формулы (3.2), (3.3) и утверждение b) теоремы 3.1, нам потребуется следующая несложная лемма о пределе суперпозиции функций (см., например, [6]).

ЛЕММА 6.2. Пусть X, Y — полные сепарабельные метрические пространства, μ — вероятностная мера на X , $\varphi_n: X \rightarrow X$, $f_n: X \rightarrow Y$, $n \geq 0$, — измеримые функции.

Предположим, что

- (i) $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi_0, n \rightarrow \infty; f_n \xrightarrow{\mu} f_0, n \rightarrow \infty;$
- (ii) для любого $n \geq 1$ образ меры $\mu \circ \varphi_n^{-1}$ абсолютно непрерывен относительно μ ;
- (iii) последовательность плотностей $\left\{ \frac{d\mu \circ \varphi_n^{-1}}{d\mu}, n \geq 1 \right\}$ равномерно интегрируема.

Тогда $f_n \circ \varphi_n \xrightarrow{\mu} f_0 \circ \varphi_0$, $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим обратное стохастическое уравнение с обращенным винеровским процессом $\tilde{\omega}_n(t) = \omega_n(T) - \omega_n(t)$. Тогда аналогично предыдущим рассуждениям можно доказать существование измеримого “обратного потока” $\varphi_{t,s}$, $s \leq t$, и абсолютную непрерывность $\mu \circ (\varphi_{t,s})^{-1} \ll \mu$ для п.в. ω .

Применяя лемму 6.2 и свойство потока для стохастических дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве, получаем

$$\begin{aligned} \forall t_1, t_2, t_3 \in [0, T] \quad \exists \Omega_{t_1, t_2, t_3}, \quad \mathbf{P}(\Omega_{t_1, t_2, t_3}) = 1, \quad \forall \omega \in \Omega_{t_1, t_2, t_3} \\ \varphi_{t_2, t_3} \circ \varphi_{t_1, t_2} = \varphi_{t_1, t_3} \quad \mu\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для доказательства (3.2), (3.3) нам потребуется бесконечномерная версия лемм 4.3 и 4.4.

ЛЕММА 6.3. Для всех $s, t \in [0, T]$, $s \leq t$, и п.в. ω

- а) для любого $p \geq 1$ отображение $u \mapsto (\varphi_{s,t}(u, \omega) - u)$ принадлежит пространству $W_p^2(H)$,
- б) для производных

$$D\varphi_{s,t}(u) := \text{id}_H + D(\varphi_{s,t}(u) - u)$$

выполняются все оценки леммы 4.4 с теми же константами,

- с) производная $D\varphi_{s,t}$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} D\varphi_{s,t} = \text{id}_H + \int_s^t Da_z(\varphi_{s,z}) D\varphi_{s,z} dz \\ + \sum_n \int_s^t D\sigma_z^n(\varphi_{s,z}) D\varphi_{s,z} d\omega_n(z) \end{aligned} \quad (6.9)$$

для п.в. $(\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по лемме 4.4

$$(\varphi_{s,t}^m(u) - u) \in W_p^2(H) \quad \text{для п.в. } \omega,$$

причем $\pi_m D(\varphi_{s,t}^m(u) - u) = D(\varphi_{s,t}^m(u) - u)$, потому что функция $u \mapsto \varphi_{s,t}^m(u, \omega) - u$ (как функция от $u \in X$ при фиксированном ω) зависит только от u_m . Для простоты предположим, что $s = 0$. Обозначим $\varphi_t := \varphi_{0,t}$. Докажем фундаментальность последовательности $\{D(\varphi_t^m(u) - u), m \geq 1\}$. Применим формулу Ито к $\|D\varphi_t^m - D\varphi_t^k\|_{HS}^p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}} \|D\varphi_t^m - D\varphi_t^k\|_{HS}^p \\ \leq K \cdot \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}} \left\{ \int_0^t \|D\varphi_s^m - D\varphi_s^k\|^{p-1} \|(Da_s^m)(\varphi_s^m) D\varphi_s^m - (Da_s^k)(\varphi_s^k) D\varphi_s^k\| \right. \\ \left. + \sum_n \|D\varphi_s^m - D\varphi_s^k\|^{p-2} \|D\sigma_s^{m,n}(\varphi_s^m) D\varphi_s^m - D\sigma_s^{k,n}(\varphi_s^k) D\varphi_s^k\|^2 \right\} ds \\ \leq K \cdot \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}} \int_0^t \|D\varphi_s^m - D\varphi_s^k\|^p ds \\ + K \cdot \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}} \int_0^t \left(\|Da_s^m(\varphi_s^m) - Da_s^k(\varphi_s^k)\| \right. \\ \left. + \sum_n \|D\sigma_s^{m,n}(\varphi_s^m) - D\sigma_s^{k,n}(\varphi_s^k)\| \right) \xi_{k,m}(s) ds \\ = I_1(m, k) + I_2(m, k), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $K = K(p, T)$ – некоторая константа, $\xi_{k,m}(s)$, $s \in [0, T]$, – некоторый положительный процесс (см. лемму 4.4) такой, что $\sup_{s,k,m} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}}(\xi_{k,m}(s))^p < \infty$ для любого $p > 0$.

По лемме 6.2 и теореме Лебега о мажорируемой сходимости $I_2(m, k) \rightarrow 0$ при $m, k \rightarrow \infty$.

Применяя лемму Гронуолла к (6.10), получаем

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|D\varphi_t^m - D\varphi_t^n\|_{HS}^p \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (6.11)$$

Обозначим предел $D\varphi_t^m$ через ψ_t . Также уже было доказано, что

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\varphi_t^m - \varphi_t\|^p \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Выберем такую подпоследовательность $\{m_k\}$, что

$$\mathbb{E}_{\mu} \|\varphi_t^{m_k} - \varphi_t\|^p \rightarrow 0, \quad m_k \rightarrow \infty,$$

и

$$\mathbb{E}_{\mu} \|D\varphi_t^{m_k} - \psi_t\|^p \rightarrow 0, \quad m_k \rightarrow \infty,$$

для всех $\omega \in \Omega_t$, где Ω_t – некоторое множество полной меры $\mathbb{P}$. Тогда $\psi_t = D\varphi_t$, отображение $u \mapsto (\varphi_t(u) - u)$ принадлежит $W_p^1(H)$, и утверждение б) доказано. Для доказательства с) заметим, что $D\varphi_{s,t}^m$ удовлетворяет уравнению (6.9) с функциями $a^m, \sigma^{m,n}$ вместо a, σ^n соответственно. Переход к пределу при $m \rightarrow \infty$ и применение лемм 6.2 и 6.3 а), б) завершает доказательство утверждения с). Производные второго порядка рассматриваются аналогично.

ЛЕММА 6.4. *Предположим, что $b: X \rightarrow H$ принадлежит пространству $W_{\infty}^1(H)$. Тогда формула (4.9) справедлива для $\mu \times \mathbb{P}$ -почти всех (u, ω) , если заменить оператор ∇ на D .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь мы считаем, что $D\varphi_s(u) := \text{id}_H + D(\varphi_s(u) - u)$. Отметим, что $D\varphi_s$ не является оператором Гильберта–Шмидта, но $(D\sigma_z^n)(\varphi_z)D\varphi_z$ является таковым, и поэтому стохастические интегралы и след корректно определены, так как

$$\sum_n \int_0^T \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|\nabla \sigma_z^n(\varphi_z) \nabla \varphi_z\|_{HS}^2 dz < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{b_m: X \rightarrow H, m \geq 1\}$ – последовательность таких функций, что $\forall u \ b_m(u) = \pi_m b_m(\pi_m u)$,

$$\sup_{m,u} \|b_m(u)\| \leq \text{ess sup}_u \|b(u)\|, \quad \sup_{m,u} \|Db_m(u)\| \leq \text{ess sup}_u \|Db(u)\|$$

и для μ -п.в. $u \in X$ $b_m(u) \rightarrow b(u)$ и $Db_m(u) \rightarrow Db(u)$ при $m \rightarrow \infty$. Данная последовательность может быть выбрана аналогично выбору $\{a^{m,n,k_m}\}$ в начале доказательства теоремы 4.1.

Из лемм 6.2 и 6.3 следует сходимость

$$\begin{aligned} b_m(\varphi_s^m) &\rightarrow b(\varphi_s), \quad m \rightarrow \infty, \\ D(b_m(\varphi_s^m)) &= (Db_m)(\varphi_s^m)D\varphi_s^m \rightarrow (Db)(\varphi_s)D\varphi_s, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в любом пространстве L_p , $p \geq 1$. В частности, имеет место сходимость

$$b_m \rightarrow b, \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } W_2^1(H)$$

и

$$b_m(\varphi_s^m) \rightarrow b(\varphi_s), \quad m \rightarrow \infty, \quad \text{в } L_2(\Omega, \mathbf{P}, W_2^1(X, \mu)).$$

Поэтому $(\delta b^m)(\varphi_s^m) \rightarrow (\delta b)(\varphi_s)$ по мере $\mu \times \mathbf{P}$ и

$$\delta(b^m(\varphi_s^m)) \rightarrow \delta(b(\varphi_s)) \quad \text{в } L_2(X \times \Omega, \mu \times \mathbf{P}).$$

Применяя леммы 6.2 и 6.3 к остальным членам (4.9), мы завершаем доказательство леммы 6.4.

Докажем (3.2) для всех $\omega \in \Omega_{s,t}$, где $\Omega_{s,t}$ — некоторое множество полной $\mathbf{P}$ -меры. Для этого достаточно проверить (лемма 4.1), что

$$\mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}}(\ln \rho_{s,t}^m - \ln \rho_{s,t})^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (6.12)$$

где $\rho_{s,t}$ задано формулой (3.2).

Для простоты предположим, что $t = 0$. Обозначим $\varphi_s := \varphi_{0,s}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}}(\ln \rho_{s,0}^m - \ln \rho_{s,0})^2 \\ & \leq 4 \mathbf{E}_{\mu \times \mathbf{P}} \int_0^t \left\{ ((\delta a_s)(\varphi_s) - (\delta a_s^m)(\varphi_s^m))^2 \right. \\ & \quad + \sum_n (\delta(D_{\sigma_s^n} \sigma_s^n)(\varphi_s) - \delta(D_{\sigma_s^{m,n}} \sigma_s^{m,n})(\varphi_s^m))^2 \\ & \quad + \sum_n ((\delta \sigma_s^n)(\varphi_s) - (\delta \sigma_s^{m,n})(\varphi_s^m))^2 \\ & \quad \left. + \sum_n ((D_{\sigma_s^n}(\delta \sigma_s^n)(\varphi_s) - (D_{\sigma_s^{m,n}}(\delta \sigma_s^{m,n})(\varphi_s^m))^2 \right\} ds. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Сходимость правой части (6.13) к нулю при $m \rightarrow \infty$ может быть проверена при помощи (6.5), (6.11) и лемм 2.1, 6.2–6.4.

Формула (3.3) для $s < t$ следует из (4.6), (3.2) и (6.8).

Проверим, что утверждения b)–d) теоремы 3.1 выполняются на некотором общем множестве Ω_0 , $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, не зависящем от t_1, t_2, t_3, s, t .

Для этого достаточно доказать, что существуют модификация функции $\rho_{s,t}$ и множество Ω_1 , $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$, такие, что для каждого $\omega \in \Omega$ совокупность функций $\{\rho_{s,t}(\cdot, \omega), s, t \in [0, T]\}$, заданных в (3.2), (3.3), равномерно интегрируема относительно меры μ и $\rho_{s,t}(\cdot, \omega)$ непрерывно по s, t в топологии сходимости по мере μ . Действительно, допустим, это выполняется. Напомним, что $\varphi_{s,t}(u, \omega)$ непрерывно по s, t для всех $\omega \in \Omega, u \in X$. Пусть Ω_2 — такое множество, что $\rho_{s,t}(\cdot, \omega)$, заданное

в (3.2), совпадает с плотностью Радона–Никодима $\frac{d\mu \circ \varphi_{s,t}^{-1}}{d\mu}$ для всех рациональных s, t . Отметим, что $\mathbf{P}(\Omega_2) = 1$. Тогда по лемме 4.1 $\rho_{s,t}$ — искомая плотность Радона–Никодима для всех $s, t \in [0, T], \omega \in \Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Утверждения b), c) теоремы 3.1 выполнены для п.в. ω для рациональных t_1, t_2, t_3, s, t . Значит, они справедливы для всех t_1, t_2, t_3, s, t по лемме 6.2.

Для того чтобы доказать существование модификации $\{\rho_{s,t}(\cdot, \omega), 0 \leq s \leq t\}$, которая равномерно интегрируема относительно μ для п.в. ω , достаточно проверить существование непрерывной по $s, t, s \leq t$, версии

$$\mathbf{E}_{\mu} |\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}| = \mathbf{E}_{\mu} |\ln \rho_{t,s}| = \mathbf{E}_{\mu} \left| \int_s^t (\delta \tilde{a}_z)(\varphi_{s,z}) dz + \sum_n \int_s^t \delta \sigma_z^n(\varphi_{s,z}) \circ d\omega_n(z) \right|.$$

Применим теорему Колмогорова. Допустим, для удобства, что $0 \leq s \leq s_1 \leq t_1 \leq t \leq T$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\mu(|\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}| - |\rho_{s_1,t_1} \ln \rho_{s_1,t_1}|)^6 \\ & \leq 10 \sup_{z \geq s} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left\{ ((\delta \tilde{a}_z)(\varphi_{s,z}))^6 + \left(\sum_n D_{\sigma_z^n}(\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s,z}) \right)^6 \right\} (|s - s_1|^6 + |t - t_1|^6) \\ & \quad + \sup_{s_1 \leq z \leq t_1} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} ((\delta a_z)(\varphi_{s,z}) - (\delta a_z)(\varphi_{s_1,z}))^6 \\ & \quad + \sup_{s_1 \leq z \leq t_1} \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left(\sum_n ((\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s,z}) - (\delta \sigma_z^n)(\varphi_{s_1,z}))^2 \right)^3 \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Ограниченность супремума математического ожидания в I_1 проводится аналогично доказательству теоремы 4.1. Рассуждения для I_2 и I_3 почти одинаковые. Ограничимся рассмотрением I_2 . Применим лемму 6.4:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} ((\delta a_z)(\varphi_{s,z}) - (\delta a_z)(\varphi_{s_1,z}))^6 \\ & \leq 3 \left\{ \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} [\delta(a_z(\varphi_{s,z}) - a_z(\varphi_{s_1,z}))]^6 \right. \\ & \quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left[\left\langle a_z(\varphi_{s,z}), \int_s^z a_\tau(\varphi_{s,\tau}) d\tau + \sum_n \int_s^z \sigma_\tau^n(\varphi_{s,\tau}) d\omega_n(\tau) \right\rangle \right. \\ & \quad \left. - \left\langle a_z(\varphi_{s_1,z}), \int_{s_1}^z a_\tau(\varphi_{s_1,\tau}) d\tau + \sum_n \int_{s_1}^z \sigma_\tau^n(\varphi_{s_1,\tau}) d\omega_n(\tau) \right\rangle \right]^6 \\ & \quad + \mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \left[\text{tr} \left((Da_z)(\varphi_{s,z}) \left\{ \int_s^z (Da_\tau)(\varphi_{s,\tau}) D\varphi_{s,\tau} d\tau \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_n \int_s^z (D\sigma_\tau^n)(\varphi_{s,\tau}) D\varphi_{s,\tau} d\omega_n(\tau) \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (Da_z)(\varphi_{s_1,z}) \left\{ \int_{s_1}^z (Da_\tau)(\varphi_{s_1,\tau}) D\varphi_{s_1,\tau} d\tau \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_n \int_{s_1}^z (D\sigma_\tau^n)(\varphi_{s_1,\tau}) D\varphi_{s_1,\tau} d\omega_n(\tau) \right\} \right) \right]^6 \Big\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

ЛЕММА 6.5. Для каждого $p \geq 2$ существует константа K_p такая, что $\forall j \in \{0, 1, 2\}, \forall s, s_1, z, s < s_1 < z$,

$$\mathbb{E}_{\mu \times \mathbb{P}} \|D^j \varphi_{s,z} - D^j \varphi_{s_1,z}\|^p \leq K_p |s - s_1|^{p/2}.$$

Доказательство проводится таким же образом, как и в конечномерном случае (см., например, [1]).

Используя лемму 6.5 для правой части (6.14) и лемму 2.1 для оценки моментов дивергенции, получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{E}_\mu(|\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}| - |\rho_{s_1,t_1} \ln \rho_{s_1,t_1}|)^6 \leq C(|s - s_1|^3 + |t - t_1|^3), \quad s \leq t, \quad s_1 \leq t_1.$$

Значит, по теореме Колмогорова $\mathbb{E}_\mu|\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}|$ непрерывно по (s, t) и, следовательно, $\sup_{s \leq t} \mathbb{E}_\mu|\rho_{s,t} \ln \rho_{s,t}| < \infty$ для п.в. ω . Поэтому для п.в. ω и всех $s \leq t$ имеем абсолютную непрерывность $\mu \circ \varphi_{s,t}^{-1} \ll \mu$.

Аналогично, рассматривая обращенное стохастическое уравнение, получаем $\mu \circ \varphi_{t,s}^{-1} \ll \mu$ для $s \leq t$, а также равномерную интегрируемость $\left\{ \frac{d\mu \circ \varphi_{t,s}(\cdot, \omega)^{-1}}{d\mu}, s \leq t \right\}$ для п.в. ω . Таким образом, утверждение b) теоремы 3.1 истинно. Для доказательства (3.2) и (3.3) для п.в. ω и всех s, t достаточно заметить, что для п.в. ω функция $\{\rho_{t,s}(\cdot, \omega), s \leq t\}$ непрерывна по s, t в топологии сходимости по мере μ .

Теорема 3.1 доказана.

Список литературы

1. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (Cambridge Stud. Adv. Math. V. 24.)
2. *Скорород А. В.* Случайные линейные операторы. Киев: Наукова думка, 1978.
3. *Cruzeiro A.-B.* Equations différentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron-Martin non-linéaires // J. Funct. Anal. 1983. V. 54. P. 206–227.
4. *Bogachev V. I., Mayer-Wolf E.* Absolutely continuous flows generated by Sobolev class vector fields in finite and infinite dimensions // J. Funct. Anal. 1999. V. 167. P. 1–68.
5. *Ustunel A. S., Zakai M.* Transformations of Wiener measure under anticipative flows // Probab. Theory Related Fields. 1992. V. 93. P. 91–136.
6. *Кулик А. М., Пилипенко А. Ю.* Нелинейные преобразования гладких мер в бесконечномерном пространстве // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52. №9. С. 1403–1431.
7. *Watanabe S.* Lectures on stochastic differential equations and the Malliavin calculus. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
8. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
9. *Гизман И. И., Скорород А. В.* О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах // УМН. 1966. Т. 21. №6. С. 83–152.
10. *Stricker C., Yor M.* Calcul stochastique dependant d'un paramètre // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 1978. V. 45. №2. P. 109–133.

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: apilip@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
23.05.2002