Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Гипотеза квантового хаоса и обобщенные цепные дроби, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 107–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:57:56

УДК 511.36+517

Л. Д. Пустыльников

Гипотеза квантового хаоса и обобщенные цепные дроби

Дано доказательство гипотезы квантового хаоса для класса систем, включающего как частный случай модель вращающейся частицы, находящейся под действием периодических импульсных возмущений (распределение расстояний между соседними уровнями энергии близко к закону распределения Пуассона и отличается от него членами третьего порядка малости). Доказательство сводится к одному результату теории чисел о распределении расстояний между соседними дробными частями значений многочлена, а оценка остаточного члена основана на новой теории обобщенных цепных дробей для векторов.

Библиография: 15 названий.

Введение

Работа посвящена проблеме строгого обоснования гипотезы квантового хаоса, которая поставлена М. Берри и М. Табором в [1] (см. также [2], [3]). Гипотеза состоит в том, что для многих квантовых систем распределение расстояний между соседними уровнями энергии близко к закону распределения с плотностью $\exp(-\sigma)$ и асимптотически совпадает с ним, если $\sigma \rightarrow 0$. До настоящего времени эта гипотеза не была доказана ни для одной системы. В работе приводится ее доказательство для одного класса квантовых систем, включающего как частный случай модель вращающейся частицы, находящейся под действием коротких толчков, периодически зависящих от времени и фазы ("kicked rotator", см. [4]–[8]). Эта система периодически зависит от времени, и для таких систем существует понятие энергии [9], которая представляет собой мнимую часть логарифма собственного значения оператора монодромии для уравнения Шрёдингера. В частном случае, когда величина толчка $F(\phi)$ одна и та же при всех значениях фазы ϕ (см. §1, формулу (2)), спектр оператора монодромии дискретный и можно говорить о расстояниях между соседними собственными значениями, которые соответствуют состояниям с соседними частотами колебаний (§1, определение 3, замечание 2). В общем случае, когда зависимость величины толчка от фазы существует, также можно ввести соседние уровни энергии как функции от фазы, которые в указанном частном случае становятся константами (§1, определение 3). Эти функции хорошо известны и исследовались в физической и математической литературе (см., например, [5], [7]). В работе доказывается (§1, теорема 1), что при фиксированном значении фазы предельная функция распределения $P(\sigma)$ расстояний между соседними энергетическими уровнями не зависит от фазы, имеет вид $P(\sigma) = \sigma - \sigma^2/2$ и отличается от функции распределения $1 - \exp(-\sigma)$ закона с плотностью $\exp(-\sigma)$ членами третьего порядка малости по σ при $\sigma \rightarrow 0$. Доказательство этого результата, данное в §1, сводится к доказательству аналогичного результата для расстояний между соседними дробными частями значений многочлена в целых точках,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01067).

который был опубликован и доказан в [10]. Оставшаяся часть работы посвящена нахождению оценки остаточного члена в законе распределения расстояний между соседними уровнями энергии. С этой целью в § 4 получена оценка остаточного члена в законе распределения расстояний между соседними дробными частями значений многочлена (теорема 5), которая существенно использует теорию многомерных цепных дробей, развитую в работах [11], [12], и имеет самостоятельный интерес. Следствием этой оценки является аналогичная оценка для энергетических уровней (§ 5, теорема 6). В §§ 2, 3 приведены основные факты из теории обобщенных цепных дробей и теории совместного распределения дробных частей значений многочленов [11], [12], которые используются при получении этих оценок. Основные результаты работы опубликованы в [13], [14].

§ 1. Описание модели и доказательство гипотезы квантового хаоса

Для описания квантовой модели первоначально введем классическую модель изучаемой системы.

Рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор, задаваемый функцией Гамильтона $H = H(\phi, I, t) = H_0(I) + H_1(\phi, t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI}, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \quad (1)$$

где I , ϕ – переменные “действие-угол”, t – независимая переменная, а функция $H_1(\phi, t)$ имеет период 2π по ϕ , период $T > 0$ по t и представляется в виде

$$H_1(\phi, t) = F(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (2)$$

где $F(\phi)$ – гладкая 2π -периодическая функция, $\delta = \delta(t)$ – дельта-функция, а суммирование ведется по всем целым числам k . Первые строгие результаты о поведении решений системы (1) для функции $H_0(I)$ общего вида получены в [8]. Здесь же мы предполагаем, что $H_0(I) = \sum_{s=0}^n b_s I^n$ – многочлен степени $n \geq 2$ с коэффициентами $b_s = a_s / \hbar^s$, $s = 0, \dots, n$, где $\hbar$ – постоянная Планка, a_s – вещественные числа. В частном случае, когда $n = 2$, $a_0 = a_1 = 0$, система (1) есть “kicked rotator” [4]–[7].

Переходя к квантовой модели, введем гильбертово пространство L^2 комплексных 2π -периодических функций по ϕ как пространство состояний квантовой системы и оператор импульса $\hat{I} = (\hbar/i)\partial/\partial\phi$. Изменение волновой функции $\Psi = \Psi(\phi, t) \in L^2$ описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\phi, t) = \hat{H}(t) \Psi(\phi, t), \quad (3)$$

где i – мнимая единица, оператор $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$, $\hat{H}_0 = \sum_{s=0}^n b_s \hat{I}^s$, а оператор $\hat{H}_1(t)$ есть предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) операторов умножения на функцию $H_1^{(\varepsilon)}$, которая получается из функции H_1 в (2), если δ -функцию заменить на гладкую функцию δ_ε , сосредоточенную на отрезке $[0, \varepsilon]$, интеграл которой равен 1. Уравнение (3) необходимо для определения оператора монодромии U . Через $\Psi_+(\phi, nT)$ обозначим решение уравнения (3) сразу после момента $t = nT$ и введем оператор монодромии $U: \Psi_+(\phi, nT) \rightarrow \Psi_+(\phi, (n+1)T)$. Оператор U есть предел при $\varepsilon \rightarrow 0$

операторов монодромии $U^{(\varepsilon)}$, соответствующих уравнению (3), в котором в правой части вместо оператора $\hat{H}(t)$ взят оператор $\hat{H}_0 + \hat{H}_1^{(\varepsilon)}$, где $\hat{H}_1^{(\varepsilon)}$ — оператор умножения на функцию $H_1^{(\varepsilon)}$. Существование этого предела доказано в [7].

ЛЕММА 1 [4], [7]. *Оператор U имеет вид*

$$U = \exp\left(-i\frac{F}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{T\hat{H}_0}{\hbar}\right),$$

где $\exp(-iF/\hbar)$ — оператор умножения на функцию $\exp(-iF/\hbar)$.

ЛЕММА 2. *При $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $e_k(\phi) = \exp(ik\phi) \in L^2$. Тогда $Ue_k(\phi) = \lambda_k(\phi)e_k(\phi)$, где $\lambda_k(\phi) = \exp(-i(F(\phi) + T \sum_{s=0}^n a_s k^s)/\hbar)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений коэффициентов b_s , $s = 0, \dots, n$, многочлена $H_0(I)$ и операторов $\hat{I}$, $\hat{H}_0$ следует, что $\hat{H}_0 = \sum_{s=0}^n (-i)^s a_s D^s$, где оператор $D = \partial/\partial\phi$. Поэтому, разлагая оператор $\exp(-iT\hat{H}_0/\hbar)$ в ряд Тейлора и применяя каждый член этого разложения к функции $e_k(\phi)$, получаем утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции $e_k(\phi)$ называются *обобщенными собственными функциями оператора U* , а функции $\lambda_k(\phi)$ — их *обобщенными собственными значениями*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $F(\phi) = \text{const}$, то $e_k(\phi)$ — обычные собственные функции оператора U , а $\lambda_k(\phi)$ — их собственные значения.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Символ $\{x\}$ есть дробная часть числа x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Следуя [9], величину $\beta_k(\phi) = \{-(\ln \lambda_k(\phi))/(2\pi i)\}$ будем называть *k -уровнем энергии системы (3)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ k -уровень и $(k+1)$ -уровень энергии называются *соседними*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Смысл определения 3 состоит в том, что функции $e_k(\phi)$ и $e_{k+1}(\phi)$ соответствуют квантовым состояниям, между частотами колебаний $\gamma_k = k/(2\pi)$, $\gamma_{k+1} = (k+1)/(2\pi)$ которых нет других частот состояний $e_s(\phi)$ при $s \neq k, k+1$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что среди чисел $(Ta_2)/(2\pi\hbar), \dots, (Ta_n)/(2\pi\hbar)$ хотя бы одно число иррациональное, $0 < \sigma \leq 1$, N — натуральное число, а $D_N(\phi, \sigma)$ — количество чисел k среди чисел $1, \dots, N$ таких, что $0 \leq \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$. Тогда при любом ϕ существует предельная функция распределения $P(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\phi, \sigma)/N$, которая имеет вид $P(\sigma) = \sigma - \sigma^2/2$ и отличается от функции распределения $P_{\text{П}}(\sigma) = 1 - \exp(-\sigma)$ закона Пуассона с плотностью $\exp(-\sigma)$ членами третьего порядка малости относительно σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 и определению 2

$$\beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) = \{f_\phi(k+1)\} - \{f_\phi(k)\}, \quad (4)$$

где $f_\phi(k)$ — значение в точке $x = k$ многочлена

$$f_\phi(x) = \sum_{s=0}^n \tilde{a}_s x^s \quad (5)$$

с коэффициентами

$$\tilde{a}_0 = \frac{F(\phi) + Ta_0}{2\pi\hbar}, \quad \tilde{a}_s = \frac{Ta_s}{2\pi\hbar}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Поэтому величина $D_N(\phi, \sigma)$, введенная в теореме 1, есть количество $\tilde{D}_N(\phi, \sigma)$ чисел k среди чисел $1, \dots, N$ таких, что $0 \leq \{f_\phi(k+1)\} - \{f_\phi(k)\} < \sigma$, а если выполнено условие теоремы 1, то среди коэффициентов $\tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$ многочлена $f_\phi(x)$ хотя бы одно число иррациональное. Теперь утверждение теоремы 1 следует из равенства $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{D}_N(\phi, \sigma)/N = \sigma - \sigma^2/2$, которое доказано в [10; теорема 3]. Теорема 1 доказана.

§ 2. Многомерные обобщенные цепные дроби и обобщенные подходящие дроби

Используются следующие обозначения:

- 1) $\mathbb{R}_n$ — n -мерное вещественное линейное пространство;
- 2) T_n — n -мерный тор

$$T_n = \{y_1, \dots, y_n : 0 \leq y_1 < 1, \dots, 0 \leq y_n < 1\},$$

который является прямым произведением n окружностей длины 1;

- 3) mes — лебегова мера на T_n ;
- 4) для вещественного числа x символ $\{x\}$ обозначает дробную часть x , а символ $[x]$ — целую часть x ;
- 5) для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ символ $\{x\}$ обозначает вектор $\{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$, у которого при $1 \leq s \leq n$ s -я координата равна $\{x_s\}$;
- 6) если n, m — натуральные числа и $0 < m \leq n$, то символ $\binom{n}{m}$ — число сочетаний из n элементов по m , а $\binom{n}{0} = 1$.

Выражение, согласно которому некоторое утверждение справедливо для почти всех точек $x \in \mathbb{R}_n$, означает, что оно справедливо для всех x из $\mathbb{R}_n$, кроме множества лебеговой меры нуль.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, A — взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}_n$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in T_n$. Представим x в виде обобщенной цепной дроби, отвечающей отображению A и вектору ω , которую мы будем называть (A, ω) -цепной дробью. Будем обозначать (A, ω) -цепную дробь вектора x в виде $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(m)}]_{A, \omega}$, если она конечная, и в виде $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$, если она бесконечная. Пусть $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ — вектор такой, что $q_s^{(0)} = [x_s]$ при $s = 1, \dots, n$. Полагаем $x = x^{(0)} = q^{(0)} + \delta^{(0)}$. Если $\delta^{(0)} = \omega$, то процесс построения цепной дроби на этом заканчивается и $x = [q^{(0)}]_{A, \omega}$. Если же $\delta^{(0)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(1)} = A\delta^{(0)}$. Предположим теперь, что при некотором целом $k \geq 0$ построены n -мерные векторы $q^{(0)}, q^{(1)}, \dots, q^{(k)}$ с целочисленными координатами и n -мерные векторы $x^{(0)}, \dots, x^{(k+1)}$ такие, что $x^{(s)} = q^{(s)} + \delta^{(s)}$ и $\delta^{(s)} \neq \omega$ при $s = 0, \dots, k$. Пусть $q^{(k+1)} = (q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)})$ — такой вектор, что $q_\nu^{(k+1)} = [x_\nu^{(k+1)}]$ при $\nu = 1, \dots, n$, и полагаем $x^{(k+1)} = q^{(k+1)} + \delta^{(k+1)}$. Если $\delta^{(k+1)} = \omega$, то процесс построения (A, ω) -цепной дроби заканчивается и $x = [q^{(0)}, \dots, q^{(k+1)}]_{A, \omega}$. Если же $\delta \neq \omega$, то полагаем $x^{(k+2)} = A\delta^{(k+1)}$.

Если $\delta^{(k)} \neq \omega$ для всех $k \geq 0$, то $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ и (A, ω) -цепная дробь вектора x бесконечная. Представление вектора x в виде (A, ω) -цепной дроби полностью описано. Из конструкции (A, ω) -цепной дроби следует, что достаточно иметь

отображение $A: T_n \setminus \omega \rightarrow \mathbb{R}_n$. В частном случае, когда x – число ($n = 1$), $\omega = 0$, а $A = \Gamma$ – отображение множества $T_1 \setminus 0$, имеющее вид $\Gamma: y \rightarrow 1/y$, (A, ω) -цепная дробь совпадает с обычной [15]. Далее, мы рассмотрим некоторые новые примеры отображений A , для которых описанная выше конструкция представляет интерес с точки зрения приложений к анализу и теории чисел.

ПРИМЕР 1. Пусть $n \geq 1$, отображение $A = A_n$ имеет вид $A_n: y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, где $y'_\nu = y_\nu + \gamma_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, а числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ таковы, что если $m, m_1, \dots, m_n$ – целые числа, то равенство $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n = m$ возможно только в случае $m_1 = \dots = m_n = 0$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n > 1$, а отображение $A = B_n$ имеет вид $B_n: y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow y' = (y'_1, \dots, y'_n)$, где

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + \kappa_1, \\ y'_\nu &= y_\nu + \kappa_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{\nu j} y_j, \quad \nu = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

κ_1 – иррациональное число, $a_{\nu j}$ – целые числа, $a_{\nu j} \neq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что отображение A совпадает с одним из отображений A_n или B_n , указанных в примерах 1, 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Через $\bar{A}$ обозначим отображение тора T_n , которое совпадает с A , если равенства для y'_ν , $\nu = 1, \dots, n$, в примерах 1 и 2 рассматривать как сравнения по модулю 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Через $\hat{A}$ обозначим отображение тора T_n , обратное к отображению $\bar{A}$.

ТЕОРЕМА 2. (A, ω) -цепная дробь вектора x конечна тогда и только тогда, когда вектор $\{x\}$ принадлежит траектории $\hat{A}^k \omega$, $k = 0, 1, \dots$, где $\hat{A}^k$ – k -я степень $\hat{A}$ ($\hat{A}^0$ – тождественное отображение T_n).

Доказательство теоремы 2 дано в [12; теорема 1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \dots]_{A, \omega}$ – (A, ω) -цепная дробь вектора x . При $\nu = 0, 1, \dots$ введем (A, ω) -подходящие дроби $S^{(\nu)} = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}$ вектора x следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= q^{(0)} + \omega, \\ S^{(\nu)} &= q^{(0)} + (\dots (q^{(\nu-2)} + A^{-1}(q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega))) \dots), \quad \nu > 0, \end{aligned}$$

где A^{-1} – отображение, обратное к A , правая часть последнего равенства обозначает конечную итерационную процедуру, состоящую из ν шагов, в которой на первом шаге находится величина $S^{(\nu)}(1) = q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega)$, а при целом k , удовлетворяющем условию $1 < k \leq \nu$, на k -м шаге находится $S^{(\nu)}(k) = q^{(\nu-k)} + A^{-1}S^{(\nu)}(k-1)$ и затем полагается $S^{(\nu)} = S^{(\nu)}(\nu)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (A, ω) -цепная дробь вектора x бесконечна и $S^{(\nu)} = (A, \omega)$ -подходящие дроби вектора x , $\nu = 0, 1, \dots$. Тогда если $A = A_n$, то x – предельная точка последовательности $S^{(\nu)}$, а если $A = B_n$, то $\{x\}$ – предельная точка последовательности $\{S^{(\nu)}\}$.

Доказательство теоремы 3 дано в [12; теорема 5].

§ 3. Оценка остаточного члена в законе совместного распределения дробных частей значений многочлена

Для формулировки теоремы 4 нам требуется ввести ряд объектов:

n, P, k – натуральные числа, удовлетворяющие условиям $n > 3, P \geq 2, k \geq 1$;

a_n – вещественное число;

ρ – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 < \rho < 1/2$;

z – комплексное число;

$H_P^{(k)}$ – линейное отображение, $H_P^{(k)}: T_k \rightarrow T_P$, имеющее следующий вид: если $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_k^{(k)}) \in T_k$, $H_P^{(k)} y^{(k)} = y^{(P)} = (y_1^{(P)}, \dots, y_P^{(P)}) \in T_P$, то при $1 \leq j \leq P$

$$y_j^{(P)} = \sum_{s=1}^k j^s y_s^{(k)} \pmod{1};$$

$K_{P,k}^{(\rho)} = \{z : |z| > (k!)^{1/(2k)} P^{1-\rho}\}$ – дополнение к замкнутому кругу на комплексной плоскости;

i – мнимая единица;

r – натуральное число, удовлетворяющее условию $r < n$;

ν – величина, принимающая значения $\nu = 1, \dots, r$;

$\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_r$ – целые числа, удовлетворяющие условию $|\hat{m}_\ell| \leq P^2, \ell = 1, \dots, r$;

$\hat{m} = (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_r)$ – r -мерный вектор;

$\kappa_1 = \sum_{\ell=1}^r \hat{m}_\ell, \kappa_\delta = \sum_{\ell=2}^r \delta \ell^{\delta-1} \hat{m}_\ell, \delta = 2, \dots, n$;

$a_{n+1}^* = a_n / (n+1), \tau_{n-\nu+1}^{(\nu)} = \kappa_\nu \binom{n+1}{n+1-\nu} a_{n+1}^*$;

$I^{(\nu)}$ – отображение, переводящее произвольный вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}_n$ в вектор $\gamma^{(\nu)} = (\gamma_1^{(\nu)}, \dots, \gamma_{n-\nu}^{(\nu)}) \in \mathbb{R}_{n-\nu}$ с координатами $\gamma_s^{(\nu)} = |\gamma_{s+\nu}|, s = 1, \dots, n-\nu$;

$B^{(\nu)} = (b_{s,t}^{(\nu)})$ – квадратная матрица порядка $n-\nu$ ($s, t = 1, \dots, n-\nu$), у которой матричные элементы $b_{s,t}^{(\nu)}$ имеют вид

$$b_{s,t}^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq s-1, \\ \kappa_{\nu+t-s}^* \binom{\nu+t}{s}, & \text{если } t \geq s, \end{cases}$$

где $\kappa_1^* = r, \kappa_\mu^* = \sum_{\ell=2}^r \mu \ell^{\mu-1}, \mu = 2, \dots, n$;

$\varphi_{\nu,P}^{(\hat{m})}$ – функция на T_P такая, что если $y^{(P)} = (y_1^{(P)}, \dots, y_P^{(P)}) \in T_P$, то $\varphi_{\nu,P}^{(\hat{m})}(y^{(P)}) = \sum_{k=1}^P \exp(2\pi i (\tau_{n-\nu+1}^{(\nu)} k^{n-\nu+1} + y_k^{(P)}))$;

$\psi_{\nu,P}^{(\hat{m})}$ – функция на $T_{n-\nu}$ такая, что если $y^{(n-\nu)} = (y_1^{(n-\nu)}, \dots, y_{n-\nu}^{(n-\nu)}) \in T_{n-\nu}$, то $\psi_{\nu,P}^{(\hat{m})}(y^{(n-\nu)}) = \varphi_{\nu,P}^{(\hat{m})}(H_P^{(n-\nu)} y^{(n-\nu)})$, где для $k = n-\nu$ отображение $H_P^{(n-\nu)}$ введено выше;

множество $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\hat{m})} = (\psi_{\nu,P}^{(\hat{m})})^{-1} K_{P,n-\nu}^{(\rho)}$ – полный прообраз относительно отображения $\psi_{\nu,P}^{(\hat{m})}$ множества $K_{P,n-\nu}^{(\rho)}$, введенного выше при $k = n-\nu$;

множество $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\hat{m},\hat{m})}$ состоит из таких точек $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in T_n$, что вектор $(\tau_1^{(\nu)}, \dots, \tau_{n-\nu}^{(\nu)})$ с координатами

$$\tau_{n-\nu+1-s}^{(\nu)} = \left\{ \sum_{\mu=0}^{s-1} \kappa_{\nu+\mu} \binom{n+1-s+\mu}{n+1-s-\nu} \beta_{n+1-s+\mu} + \kappa_{\nu+s} \binom{n+1}{n+1-s-\nu} a_{n+1}^* \right\},$$

$s = 1, \dots, n-\nu$, принадлежит области $\Pi_{\nu,P,\rho}^{(\hat{m})}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Введем множество $\Gamma_\rho = T_n \setminus \Pi_\rho$ на торе T_n , где

$$\Pi_\rho = \bigcup_{P=2}^{\infty} \bigcup_{\substack{|\hat{m}_\ell| \leq P^2 \\ \ell=1, \dots, r}} \bigcup_{\substack{\nu=1 \\ \kappa_\nu \neq 0}}^r \Pi_{\nu, P, \rho}^{(\hat{m}, \hat{m})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из определения множеств $\Pi_{\nu, P, \rho}^{(\hat{m}, \hat{m})}$, Π_ρ и Γ_ρ следует, что множество Γ_ρ можно представить в виде $\Gamma_\rho = T_1 \times \Gamma_\rho^*$, где $\Gamma_\rho^* \subset T_{n-1}$, и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma_\rho$ тогда и только тогда, когда $(\beta_2, \dots, \beta_n) \in \Gamma_\rho^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Введем отображение $A^* = A^*(a_{n+1}^*)$ пространства $\mathbb{R}_n$, зависящее от параметра a_{n+1}^* , такое, что если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, то $A^*x = x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, где $x_s^* = \sum_{j=0}^{n-s} \binom{s+j}{j} x_{s+j} + \binom{n+1}{n-s+1} a_{n+1}^*$, $1 \leq s \leq n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, a_n — иррациональное число; P и r — натуральные числа, $r \geq 2$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ и ρ — любые числа, удовлетворяющие условиям $0 < \sigma_k \leq 1$, $k = 1, \dots, r$, $0 < \rho < 1/2$, $\rho_1 = (1 + 6\rho)/(10 - 4\rho)$, $n_0 = r + 2(1 + 2r)/(1 - 2\rho_1)$, $\mathcal{D}_P(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ — количество векторов $\mu_j = (\{f(j)\}, \dots, \{f(j+r-1)\})$ в последовательности $\mu_1, \dots, \mu_P$, принадлежащих множеству $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r : 0 \leq \alpha_1 < \sigma_1, \dots, 0 \leq \alpha_r < \sigma_r\}$. Тогда при $n > n_0$ выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ с координатами $a_s^* = a_{s-1}/s$, $s = 1, \dots, n$, разлагается в конечную (A^*, ω) -цепную дробь

$$a^* = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A^*, \omega},$$

то при всех $P \geq 2$

$$|\mathcal{D}_P(\sigma_1, \dots, \sigma_r) - P\sigma_1 \cdots \sigma_r| \leq (c^* + \nu)P^{1-\rho},$$

где $c^* = c^*(n)$ — константа, не зависящая от $a_1, \dots, a_n, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ и P , а для любого a_0 множество точек $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$, для которых справедливы оба соотношения, выписанные выше в 1), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;

- 2) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ разлагается в бесконечную (A^*, ω) -цепную дробь, а для некоторого целого $\nu \geq 0$ $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A^*, \omega}$ — такая (A^*, ω) -подходящая дробь вектора a^* , что при $\delta = 1, \dots, r$ координаты векторов

$$b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \dots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^{(\delta)} I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$$

удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leq q^{-s-\rho_1-2}/(2\pi(n-\delta))$, $s = 1, \dots, n-\delta$, то неравенство в 1) справедливо при $2 \leq P \leq q$.

Доказательство теоремы 4 дано в [12; теорема 9].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу теоремы 3 утверждение 2) теоремы 4 справедливо при любых сколь угодно больших q .

§4. Оценка остаточного члена в законе распределения расстояний между соседними дробными частями значений многочлена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. В качестве Γ_ρ полагаем такое множество на торе T_n , которое совпадает с множеством Γ_ρ , введенным в §3 (определение 7), если в его определении положить $r = 2$ и $a_n = \tilde{a}_n$, где $\tilde{a}_n$ — число, введенное в равенствах (6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. В качестве $A = A(\tilde{a}_n/(n+1))$ полагаем такое преобразование пространства $\mathbb{R}_n$, которое совпадает с отображением $A^* = A^*(a_{n+1}^*)$, введенным в §3 (определение 8), если в его определении положить $a_{n+1}^* = \tilde{a}_n/(n+1)$.

Далее в формулировке теоремы 5 мы используем теорию (A, ω) -цепных дробей для векторов $x \in \mathbb{R}_n$, введенных в §2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\tilde{f}(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \dots + \tilde{a}_n x^n$ — многочлен с вещественными коэффициентами $\tilde{a}_s$, $s = 0, \dots, n$, $\tilde{a}_n$ — иррациональное число, P — натуральное число, σ и ρ — такие числа, что $0 < \sigma \leq 1$, $0 < \rho < 1/2$, $\rho_1 = (1 + 6\rho)/(10 - 4\rho)$, $n_0 = 2 + 10/(1 - 2\rho_1)$, $D_P^*(\sigma)$ — количество чисел k в ряду $1, \dots, P$, для которых $0 \leq \{\tilde{f}(k+1)\} - \{\tilde{f}(k)\} < \sigma$.

Тогда если $n > n_0$, то выполняются следующие утверждения:

- 1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ с координатами $a_s^* = \tilde{a}_{s-1}/s$, $s = 1, \dots, n$, разлагается в конечную (A, ω) -цепную дробь

$$a^* = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}, \quad (7)$$

то для любого $\epsilon > 0$ такого, что $0 < \epsilon < \sigma$, и при всех $P \geq 2$

$$\left| \frac{D_P^*(\sigma)}{P} - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right| \leq 4\epsilon + \frac{c_1(c_2 + \nu)}{P\rho\epsilon}, \quad (8)$$

где $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$ — константы, не зависящие от чисел P , ϵ , σ , $a_0, \dots, a_n$;

- 2) для любого a_0 множество точек $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, для которых справедливы (7) и (8), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;
- 3) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ разлагается в бесконечную (A, ω) -цепную дробь, а для некоторого целого $\nu \geq 0$ $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}$ — такая (A, ω) -подходящая дробь вектора a^* , что при $\delta = 1, 2$ координаты векторов

$$b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \dots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^{(\delta)} I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$$

(отображение $I^{(\delta)}$ и матрица $B^{(\delta)}$ для $\delta = \nu$ введены в §3) удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leq q^{-s-\rho_1-2}/(2\pi(n-\delta))$, $s = 1, \dots, n-\delta$, то оценка (8) справедлива при $2 \leq P \leq q$;

- 4) утверждение 3) справедливо при сколь угодно большом q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению величины $D_P^*(\sigma)$ имеем равенство

$$D_P^*(\sigma) = \sum_{k=1}^P \chi(\{\tilde{f}(k)\}, \{\tilde{f}(k+1)\}), \quad (9)$$

где $\chi(x, y)$ – функция на торе $T_2 = \{x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ такая, что

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y - x < \sigma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть ϵ – произвольное число такое, что $0 < \epsilon < \sigma$, $m_\epsilon = [1/\epsilon]$. Мы введем область $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y - x < \sigma\} \subset T_2$ и для $k = 0, \dots, m_\epsilon$ введем числа $z_k = \min(\sigma + k\epsilon, 1)$, области $\Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)} \subset \Omega$, $\delta = 0, 1, 2$, где

$$\Omega_{k,1}^{(\epsilon)} = \{(x, y) \in \Omega : k\epsilon \leq x < (k+1)\epsilon, (k+1)\epsilon \leq y < z_k\},$$

$$\Omega_{k,0}^{(\epsilon)} = \{(x, y) \in \Omega : k\epsilon \leq x < (k+1)\epsilon, y < (k+1)\epsilon\},$$

$$\Omega_{k,2}^{(\epsilon)} = \{(x, y) \in \Omega : k\epsilon \leq x < (k+1)\epsilon, y \geq z_k\},$$

и области

$$\widehat{\Omega}_{k,0}^{(\epsilon)} = \{(x, y) : k\epsilon \leq x < (k+1)\epsilon, k\epsilon \leq y < (k+1)\epsilon\},$$

$$\widehat{\Omega}_{k,2}^{(\epsilon)} = \{(x, y) : k\epsilon \leq x < (k+1)\epsilon, z_k \leq y < z_k + \epsilon\},$$

$\widetilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)} = S(\widehat{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)})$, где $\delta = 0, 2$ и S – такое отображение, что $S(x, y) = (\{x\}, \{y\}) \in T_2$. Из определений этих областей следует, что

$$\bigcup_{k=0}^{m_\epsilon} \bigcup_{0 \leq \delta \leq 2} \Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)} = \Omega, \quad (10)$$

$$\Omega_{k,0}^{(\epsilon)} \subset \widetilde{\Omega}_{k,0}^{(\epsilon)}, \quad \Omega_{k,2}^{(\epsilon)} \subset \widetilde{\Omega}_{k,2}^{(\epsilon)}. \quad (11)$$

Для любого множества $\Omega^* \subset T_2$ обозначим его площадь через $\text{Area}(\Omega^*)$, а через $D_P(\sigma, \Omega^*)$ обозначим количество тех $k \in \{1, \dots, P\}$, для которых точка $(\{\tilde{f}(k)\}, \{\tilde{f}(k+1)\}) \in \Omega^*$. Так как области $\Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}$ взаимно не пересекаются, то в силу (10)

$$D_P(\sigma, \Omega) = \sum_{k=0}^{m_\epsilon} \sum_{0 \leq \delta \leq 2} D_P(\sigma, \Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}) \quad (12)$$

и согласно (11)

$$D_P(\sigma, \Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}) \leq D_P(\sigma, \widetilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}), \quad \delta = 0, 2. \quad (13)$$

Представим величины $D_P(\sigma, \Omega_{k,1}^{(\epsilon)})$, $D_P(\sigma, \widetilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)})$, $\delta = 0, 2$, в виде

$$D_P(\sigma, \Omega_{k,1}^{(\epsilon)}) = P \text{Area}(\Omega_{k,1}^{(\epsilon)}) + R_{k,1}^{(\epsilon)}, \quad (14)$$

$$D_P(\sigma, \widetilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}) = P \text{Area}(\widetilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}) + \widetilde{R}_{k,\delta}^{(\epsilon)} \quad (15)$$

и оценим остаточные члены $R_{k,1}^{(\epsilon)}, \tilde{R}_{k,\delta}^{(\epsilon)}$ с помощью теоремы 4. Из определений 9, 10 и из формулировки теоремы 5 следует, что для многочлена $\tilde{f}(x)$ справедливы все условия теоремы 4 в частном случае $r = 2$. Поэтому, применяя эту теорему, получаем

$$|R_{k,1}^{(\epsilon)}| \leq \bar{c}(c_2 + \nu)P^{1-\rho}, \quad |\tilde{R}_{k,\delta}^{(\epsilon)}| \leq \bar{c}(c_2 + \nu)P^{1-\rho}, \quad (16)$$

где $\delta = 0, 2$, $\bar{c} = \bar{c}(n)$ и $c_2 = c_2(n)$ — константы, зависящие только от n , ρ и ν — константы, определенные в теореме 4. При этом неравенства (16) выполнены при всех $P \geq 2$, если справедливо условие утверждения 1) теоремы 5, и выполнены при $2 \leq P \leq q$, если справедливо условие утверждения 3) теоремы 5. Из соотношений (11), (13), (15), (16) и из определений множеств $\hat{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}, \tilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}$, $\delta = 0, 2$, следует, что для $\delta = 0, 2$

$$D_P(\sigma, \Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}) = P \text{Area}(\Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}) + R_{k,\delta}^{(\epsilon)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} |R_{k,\delta}^{(\epsilon)}| &= |D_P(\sigma, \Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)}) - P \text{Area}(\Omega_{k,\delta}^{(\epsilon)})| \leq D_P(\sigma, \tilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}) + P \text{Area}(\tilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}) \\ &\leq 2P \text{Area}(\tilde{\Omega}_{k,\delta}^{(\epsilon)}) + |\tilde{R}_{k,\delta}^{(\epsilon)}| \leq 2P\epsilon^2 + \bar{c}(c_2 + \nu)P^{1-\rho}. \end{aligned} \quad (18)$$

Поэтому, применяя (10), (12), (14), (16)–(18) и неравенство $m_\epsilon \leq 1/\epsilon$, получаем

$$D_P(\sigma, \Omega) = P \text{Area}(\Omega) + R^{(\epsilon)}, \quad (19)$$

где

$$|R^{(\epsilon)}| \leq 4P\epsilon + 3\bar{c}(c_2 + \nu) \frac{P^{1-\rho}}{\epsilon}. \quad (20)$$

Теперь утверждения 1) и 3) теоремы 5 следуют из соотношений (19), (20) и из равенства $\text{Area}(\Omega) = \sigma - \sigma^2/2$, а утверждения 2) и 4) теоремы 5 следуют из второй части утверждения 1) теоремы 4 и замечания 4. Теорема 5 доказана.

§ 5. Оценка остаточного члена в законе распределения расстояний между соседними уровнями энергии

В формулируемой далее теореме 6 используются понятия множества Γ_ρ и отображения A , введенные в § 4.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что число $Ta_n/(2\pi(n+1)\hbar)$ иррациональное, $0 < \sigma \leq 1$, N — натуральное число, $0 < \rho < 1/2$, $\rho_1 = (1+6\rho)/(10-4\rho)$, $n_0 = 2 + 10/(1-2\rho_1)$, $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ — вектор с координатами $a_s^* = Ta_{s-1}/2\pi\hbar s$, $s = 1, \dots, n$, $D_N(\phi, \sigma)$ — количество таких $k \in \{1, \dots, N\}$, что $0 \leq \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$. Тогда если $n > n_0$, то выполняются следующие утверждения:*

- 1) *если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что (A, ω) -цепная дробь вектора a^* конечна и имеет вид*

$$a^* = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}, \quad (21)$$

то для любого $\epsilon > 0$ такого, что $0 < \epsilon < \sigma$, и любого $N \geq 2$

$$\left| \frac{D_N(\phi, \sigma)}{N} - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right| \leq 4\epsilon + \frac{c_1(c_2 + \nu)}{N^\rho \epsilon}, \quad (22)$$

- где $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$ – константы, не зависящие от N , σ , ϵ , $a_0, \dots, a_n$ и от функции $F(\phi)$;
- 2) для любого a_0 множество векторов $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, для которых справедливы (21) и (22), имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;
- 3) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ разлагается в бесконечную (A, ω) -цепную дробь и для некоторого целого $\nu \geq 0$ $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \dots, q^{(\nu)}]_{A, \omega}$ – такая (A, ω) -подходящая дробь вектора a^* , что при $\delta = 1, 2$ координаты векторов

$$b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \dots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^\delta I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$$

(отображение $I^{(\delta)}$ и матрица $B^{(\delta)}$ для $\delta = \nu$ введены в §3) удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leq q^{-s-\rho_1-2}/(2\pi(n-\delta))$, $s = 1, \dots, n-\delta$, то оценка (22) справедлива при $2 \leq P \leq q$;

- 4) утверждение 3) справедливо при сколь угодно большом числе q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{D}_N(\phi, \sigma)$ – количество чисел k среди чисел $1, \dots, N$ таких, что $0 \leq \{f_\phi(k+1)\} - \{f_\phi(k)\} < \sigma$, где $f_\phi(x)$ – многочлен, введенный в (5), с коэффициентами (6). Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{N} D_N(\phi, \sigma) - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) = \frac{1}{N} \tilde{D}_N(\phi, \sigma) - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right). \quad (23)$$

Среди коэффициентов $\tilde{a}_s$, $s = 0, \dots, n$, в (6) только свободный член $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\phi)$ многочлена $f_\phi(x)$ зависит от ϕ . Поэтому если зафиксировать число ϕ , то в силу условий теоремы 6 к многочлену $\tilde{f}(x) = \tilde{a}_0(\phi) + \tilde{a}_1 x + \dots + \tilde{a}_n x^n$ можно применить теорему 5, и согласно этой теореме при фиксированном ϕ будут выполняться все утверждения теоремы 6. Таким образом, остается только доказать, что константы c_1, c_2 , входящие в (22), не зависят от функции $F(\phi)$ и что номер ν подходящей дроби $S^{(\nu)}$ в утверждении 3) также не зависит от функции $F(\phi)$.

В силу теоремы 2 (A, ω) -цепная дробь вектора a^* конечна тогда и только тогда, когда существует целое число $\nu \geq 0$ такое, что

$$\overline{A}^\nu \{a^*\} \in \Gamma_{\rho_1}, \quad (24)$$

где $\overline{A}$ – отображение тора T_n , введенное в определении 4. Согласно замечанию 3 множество Γ_{ρ_1} , введенное в определении 7, содержит только такие точки $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in T_n$, что $(n-1)$ -мерный вектор $\beta^* = (\beta_2, \dots, \beta_n)$ принадлежит множеству $\Gamma_{\rho_1}^* \subset T_{n-1}$. Поэтому из определения 10 отображения A и из определения отображения $\overline{A}$ следует, что справедливость условия (24) не зависит от координаты a_1^* вектора a^* , а используя определение вектора a^* в формулировке теоремы 6 и (23), мы получаем, что условие (24) и утверждение 1) теоремы 3 не зависят от функции $F(\phi)$.

Докажем теперь, что в утверждении 3) теоремы 6 номер ν подходящей дроби $S^{(\nu)}$ вектора a^* , для которой координаты векторов

$$b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \dots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^\delta I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\}), \quad \delta = 1, 2, \quad (25)$$

удовлетворяют неравенствам

$$b_s^{(\delta)} \leq \frac{q^{-s-\rho_1-2}}{2\pi(n-\delta)}, \quad s = 1, \dots, n-\delta, \quad (26)$$

не зависит от функции $F(\phi)$. Если $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ и $a' = (a_1', \dots, a_n')$ — два вектора, у которых совпадают все координаты, кроме первой, то в силу (24) у векторов $\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\}$ и $\{a'\} - \{S^{(\nu)}\}$ также совпадают все координаты, кроме первой (из доказательства теоремы 3 следует, что вектор $\{S^{(\nu)}\}$ — один и тот же для всех векторов a'). Но из определения отображения $I^{(\nu)}$ в § 3 следует, что вектор $I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$ не зависит от первой координаты вектора $\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\}$. Поэтому если оценка (26) справедлива для вектора a^* , то в силу (25) она будет справедлива для любого вектора, который отличается от a^* только первой координатой. Но так как функция $F(\phi)$ влияет только на первую координату вектора a^* , то номер ν подходящей дроби $S^{(\nu)}$ вектора a^* , для которой справедливо неравенство (26), один и тот же при любой функции $F(\phi)$. Теорема 6 доказана.

Список литературы

1. *Berry M. V., Tabor M.* Level clustering in the regular spectrum // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1977. V. 356. P. 375–394.
2. *Косыгин Д. В., Минасов А. А., Синай Я. Г.* Статистические свойства спектра операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля // *УМН.* 1993. Т. 48. № 4. С. 3–130.
3. *Knauf A., Sinai Ya. G.* Classical nonintegrability, quantum chaos. Basel: Birkhäuser, 1997. (DMV Sem. V. 27.)
4. *Grepel D. R., Prange R. E., Fishman S.* Quantum dynamics of a nonintegrable system // *Phys. Rev. A.* 1984. V. 29. № 4. P. 1639–1647.
5. *Casati G., Guarneri I.* Non-recurrent behaviour in quantum dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1984. V. 95. P. 121–127.
6. *Chirikov B. V., Izrailev F. M., Shepelyansky D. L.* Quantum chaos: localization vs. ergodicity // *Phys. D.* 1988. V. 33. P. 77–88.
7. *Bellissard J.* Non commutative methods in semiclassical analysis // *Transition to chaos in classical and quantum mechanics* / ed. S. Graffi. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 1–47.
8. *Пустыльников Л. Д.* Неограниченный рост переменной действия в некоторых физических моделях // *Труды ММО.* 1983. Т. 46. С. 187–200.
9. *Зельдович Я. Б.* Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию // *ЖЭТФ.* 1966. Т. 51. С. 1492–1495.
10. *Пустыльников Л. Д.* Вероятностные законы в распределении дробных частей значений многочленов и обоснование гипотезы квантового хаоса // *УМН.* 1999. Т. 54. № 6. С. 173–174.
11. *Пустыльников Л. Д.* Обобщенные цепные дроби и дифференциальные уравнения // *Препринт № 96.* М.: Институт прикл. матем., 1997.
12. *Pustyl'nikov L. D.* Generalized continued fractions and ergodic theory // *J. Math. Sci. (New York).* 1999. V. 95. № 5. P. 2552–2563.
13. *Pustyl'nikov L. D.* The proof of quantum chaos conjecture, the distribution of distances between adjacent fractional parts of polynomial values, and generalized continued fractions // *BiBoS - Preprint № 01-06-040.* Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2001.
14. *Пустыльников Л. Д.* Доказательство гипотезы квантового хаоса и обобщенные цепные дроби // *УМН.* 2002. Т. 57. № 1. С. 161–162.
15. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: ГИФМЛ, 1961.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Поступила в редакцию
13.12.2001 и 21.08.2002