Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О глобальной разрешимости уравнения
Курамото–Сивашинского при ограниченных начальных
данных, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 7, 131–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:25:04

УДК 517.954

С. И. Похожаев

О глобальной разрешимости уравнения Курамото–Сивашинского при ограниченных начальных данных

Рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения Курамото–Сивашинского как с граничными условиями Дирихле, так и с граничными условиями типа Навье при $t > 0$ и $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ с $N \leq 3$. При ограниченных начальных данных доказывается однозначная глобальная по $t > 0$ разрешимость рассмотренных задач в соответствующих классах функций.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, априорные оценки, глобальная разрешимость, уравнение Курамото–Сивашинского.

§ 1. Введение

Уравнению Курамото–Сивашинского посвящена обширная литература (см. [1]–[19] и приведенную там литературу). Интерес объясняется как физическим, так и математическим факторами.

Это уравнение было выведено Я. Курамото (см. [10], [11]) для описания диссипативных структур в реакциях с диффузией и независимо Г. Сивашинским (см. [14], [15]) для описания гидродинамической неустойчивости в теории горения. В дальнейшем оказалось, что оно является весьма плодотворной математической моделью для описания неустойчивости и катастроф в многообразных нелинейных физических явлениях. Этим объясняется интерес к этому уравнению со стороны физиков.

С точки зрения математики это уравнение представляет интерес в связи с характером нелинейности. А именно, нелинейный член $-|Du|^2$ не является ни монотонным, ни коэрцитивным ни в каком смысле. Данное обстоятельство не дает возможности применить широко развитую теорию монотонных операторов (см. [20]). С другой стороны, наличие бигармонического оператора $-\Delta^2 u$ не дает возможности использовать преобразования типа Хопфа, чтобы упростить это уравнение. Тем не менее в одномерном случае ($N = 1$) уравнение допускает достаточно полное исследование. Именно данному случаю и посвящена в основном существующая литература. Это объясняется тем фактом, что в одномерном случае нелинейность можно “убить”, умножая уравнение на

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00441), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3810.2008.1) и Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

производную второго порядка $-D^2u$, что в силу граничного условия $Du = 0$ приводит к равенству

$$\int_{\Omega} |Du|^2 D^2u \, dx = 0$$

при $\Omega \subset \mathbb{R}$.

В результате мы получаем энергетическое “продифференцированное” соотношение. Это дает возможность применить затем известную технику для получения последующей информации о решении. Аналогичная ситуация имеет место и для продифференцированного уравнения Курамото–Сивашинского в одномерном случае.

В многомерном случае ($N > 1$) этот прием не срабатывает. Неизвестно, существует ли вообще интегрирующий множитель вида $M(u, Du, D^2u, \dots, D^k u)$, который бы “убивал” нелинейность $-|Du|^2$ при естественных граничных условиях и был бы согласован с главным линейным оператором аналогично одномерному случаю.

В настоящей статье рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения Курамото–Сивашинского при $t > 0$ и $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ с $N \leq 3$.

При ограниченных начальных данных доказывается однозначная глобальная по $t > 0$ разрешимость начально-краевых задач как при граничных условиях типа Навье, так и при граничных условиях Дирихле в соответствующих классах функций.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что один и тот же символ постоянной может обозначать разные постоянные в зависимости от контекста.

§ 2. Постановка задачи. Основные результаты

Рассматривается уравнение Курамото–Сивашинского

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2 \quad \text{в } Q_T \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$u = u_0(x) \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } t = 0 \quad (2.2)$$

и с граничными условиями двух типов: либо с условием Навье

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (2.3)$$

либо с условием Дирихле

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_T. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.1) рассматривается в цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$ с боковой границей $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

Здесь Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с $N \leq 3$ и с гладкой границей $\partial\Omega$ и нормалью n к $\partial\Omega$,

$$|Du|^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2.$$

Относительно области Ω предполагается дополнительно, что наименьшая константа Соболева $c_2 = c_2(\Omega)$, определяемая из неравенства вложения $\dot{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \rightarrow W_2^1(\Omega)$

$$\|Dv\|_2 \leq c_2 \|\Delta v\|_2, \quad (2.5)$$

удовлетворяет неравенству

$$c_2 < 1. \quad (2.6)$$

Далее определим еще одну постоянную $c_4 = c_4(\Omega)$ как наименьшую константу Соболева из неравенства вложения $\dot{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \rightarrow W_4^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$,

$$\|Dv\|_4 \leq c_4 \|\Delta v\|_2. \quad (2.7)$$

Здесь и ниже используется стандартное обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$.

Обозначим теперь

$$J(t) = \int_{\Omega} u^2(t, x) dx,$$

так что $J(0) = \int_{\Omega} u_0^2(x) dx$.

Относительно начальной функции $u_0 \in L_2(\Omega)$ предполагается выполненным следующее условие:

$$J^{1/2}(0) \leq \frac{1 - c_2^2}{c_4^2}. \quad (2.8)$$

При выполнении этого условия справедливы следующие теоремы о существовании глобальных по $t > 0$ решений начально-краевых задач.

Отметим, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с $N \leq 3$ всегда предполагается выполненным условие (2.6).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть начальная функция $u_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет неравенству (2.8).

Тогда задача (2.1)–(2.3) имеет решение

$$u \in L^2(0, T; W_2^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$$

при любом $T > 0$.

Для начально-краевой задачи с граничным условием Дирихле справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть начальная функция $u_0 \in B_p^{4-4/p}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ с $p \geq 2 + 8/N$ при $N \leq 3$ удовлетворяет неравенству (2.8).

Тогда задача (2.1)–(2.2), (2.4) имеет решение

$$u \in W_{p,t,x}^{1,4}(Q_T).$$

Доказательства обеих теорем основаны на соответствующих энергетических соотношениях и функциональных неравенствах.

§ 3. Первая априорная оценка

Умножим уравнение (2.1) на возможное решение из соответствующего класса и проинтегрируем по области Ω с учетом граничных условий (2.3) либо (2.4). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx - \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx \\ = \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 u(t, x) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера и неравенство Соболева (2.7), находим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 u(t, x) dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |Du(t, x)|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_4^2 \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \cdot \left(\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда для $J(t) = \int_{\Omega} u^2(t, x) dx$ из (3.1) в силу неравенства (2.5) следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{dJ(t)}{dt} \leq (c_4^2 J^{1/2}(t) + c_2^2 - 1) \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx. \quad (3.2)$$

В силу условий теоремы 2.1, а именно $c_2 < 1$ и $c_4^2 J^{1/2}(0) + c_2^2 - 1 \leq 0$, из неравенства (3.2) вытекает, что $J(t) \leq J(0)$, т.е.

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \int_{\Omega} u_0^2(x) dx \quad (3.3)$$

при любом $t > 0$.

§ 4. Вторая априорная оценка

Для получения следующей априорной оценки воспользуемся известными интерполяционными неравенствами

$$\|Dv\|_2 \leq \|\Delta v\|_2^{1/2} \|v\|_2^{1/2} \quad (4.1)$$

и

$$\|Dv\|_4 \leq c_a \|\Delta v\|_2^a \cdot \|v\|_2^{1-a} \quad (4.2)$$

для функций $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$.

Здесь $a = (N + 4)/8 < 1$ при $N \leq 3$ и $c_a = c_a(\Omega)$ есть наименьшая константа в неравенстве (4.2).

Эти мультипликативные неравенства перепишем в виде соответствующих аддитивных неравенств

$$\|Dv\|_2^2 \leq \frac{\delta}{2} \|\Delta v\|_2^2 + \frac{1}{2\delta} \|v\|_2^2 \quad (4.1^*)$$

и

$$\|Dv\|_4^2 \leq \frac{\varepsilon^q}{q} \|\Delta v\|_2^2 + \frac{c_a^{2q'}}{\varepsilon^{q'}} \cdot \frac{1}{q'} \|v\|_2^2 \quad (4.2^*)$$

с $q = 1/a$, $q' = 1/(1-a)$ при $N \leq 3$ и произвольными $\delta, \varepsilon > 0$.

Обратимся теперь к соотношению (3.1), из которого в силу неравенства Гёльдера следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{dJ(t)}{dt} + \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \leq \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \left(\int_{\Omega} |Du(t, x)|^4 dx \right)^{1/2} J^{1/2}(t). \quad (4.3)$$

В случае $N \leq 3$ имеем $a < 1$, и неравенства (4.1*) и (4.2*) влекут

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{dJ(t)}{dt} + \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \\ & \leq \left[\frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon^q}{q} J^{1/2}(t) \right] \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx + \frac{1}{2\delta} J(t) + \frac{c_a^{2q'}}{\varepsilon^{q'}} \cdot \frac{1}{q'} J^{3/2}(t) \end{aligned}$$

при любом $t > 0$.

В силу оценки (3.3) имеем $J(t) \leq J(0)$ при любом $t > 0$.

Тогда, выбирая $\delta_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы

$$\frac{\delta_0}{2} + \frac{\varepsilon_0^q}{q} J^{1/2}(0) \leq \frac{1}{2},$$

получаем

$$\frac{1}{2} \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \leq \kappa_1 J(t) + \kappa_2 J^{3/2}(t) \leq \kappa_1 J(0) + \kappa_2 J^{3/2}(0) \quad (4.4)$$

при любом $t > 0$ с

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\delta_0}, \quad \kappa_2 = \frac{c_a^{2q'}}{\varepsilon_0^{q'}} \cdot \frac{1}{q'}.$$

Отсюда следует, что

$$J(t) + \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx dt \leq 2[\kappa_1 J(0) + \kappa_2 J^{3/2}(0)]t + J(0) \quad (4.5)$$

при любом $t > 0$.

§ 5. Априорная оценка высшего порядка

Наличия только априорных оценок (3.3) и (4.5) недостаточно для глобальной разрешимости рассматриваемых начально-краевых задач при $N > 1$ из-за некоэрцитивного нелинейного слагаемого в уравнении (2.1).

Для получения следующей априорной оценки для решений задачи (2.1)–(2.3) с граничным условием Навье (2.3) умножим уравнение (2.1) на $-\Delta u$ и проинтегрируем по области Ω . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx - \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \\ & = - \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 \Delta u(t, x) dx. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Отсюда в силу неравенств Гёльдера и (4.2*) находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx + \left(\int_{\Omega} |Du(t, x)|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx + \left[\frac{\varepsilon^q}{q} \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx + \frac{c_a^{2q'}}{\varepsilon^{q'}} \cdot \frac{1}{q'} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \right] \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь известным интерполяционным неравенством

$$\|\Delta v\|_2 \leq c_3 (\|D\Delta v\|_2^{2/3} \|v\|_2^{1/3} + \|v\|_2)$$

для функций $v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ с $\Delta v = 0$ на границе $\partial\Omega$. Здесь $c_3 = c_3(\Omega)$.

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx \\ & \leq c_3^2 \left[\frac{4}{3} \delta \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\delta^2} + 1 \right) J(t) \right] \\ & \quad + c_5 \varepsilon^q \left[\int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx \cdot J^{1/2}(t) + J^{3/2}(t) \right] \\ & \quad + c_6 \varepsilon^{-q'} \left[\frac{\eta}{3} \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx + \frac{2}{3} \frac{1}{\eta^{1/2}} J^{1/4}(t) + J^{1/2}(t) \right] J(t) \\ & \leq C(\varepsilon, \delta, \eta, J(0)) \cdot \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx + (c_5 \varepsilon^q + c_6 \varepsilon^{-q'}) J^{3/2}(0) \\ & \quad + \frac{2}{3} c_6 \varepsilon^{-q'} \cdot \eta^{-1/2} \cdot J^{5/4}(0) + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\delta^2} \right) c_3^2 \cdot J(0) \end{aligned} \quad (5.2)$$

с соответствующими константами $c_5, c_6 > 0$ и

$$C(\varepsilon, \delta, \eta, J(0)) = \frac{4}{3} \delta \cdot c_3^2 + \varepsilon^q c_5 \cdot J^{1/2}(0) + \frac{\eta}{3} \varepsilon^{-q'} c_6 \cdot J(0)$$

при любых $\varepsilon, \delta, \eta > 0$.

При этом было учтено неравенство (3.3), т.е. $J(t) \leq J(0)$ при любых $t > 0$.

Теперь, выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, $\delta = \delta_1 > 0$ и $\eta = \eta_1 > 0$ так, чтобы

$$C(\varepsilon_1, \delta_1, \eta_1, J(0)) \leq \frac{1}{2},$$

из неравенства (5.2) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx \leq \varkappa_3 J^{3/2}(0) + \varkappa_4 J^{5/4}(0) + \varkappa_5 J(0),$$

где

$$\varkappa_3 = 2c_5 \varepsilon_1^q + 2c_6 \varepsilon_1^{-q'}, \quad \varkappa_4 = \frac{4}{3} c_6 \varepsilon_1^{-q'} \cdot \eta_1^{-1/2}, \quad \varkappa_5 = 2 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\delta_1^2} \right) c_3^2.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |Du(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta u(t, x)|^2 dx \\ & \leq [\varkappa_3 J^{3/2}(0) + \varkappa_4 J^{5/4}(0) + \varkappa_5 J(0)] t + \int_{\Omega} |Du_0(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

при любом $t > 0$.

§ 6. Доказательство теоремы 2.1

Для доказательства этой теоремы воспользуемся методом Галёркина, а именно, будем искать галёркинские приближения в виде

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x), \quad (6.1)$$

где w_i есть собственные нормированные функции краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta w_i + \lambda_i w_i = 0 & \text{в } \Omega, \\ w_i = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

В силу выбора этого специального базиса априорные оценки (3.3), (4.5) и (5.3) остаются справедливыми для галёркинских приближений $u_m(t, x)$ при любом $m = 1, 2, \dots$.

Из этих априорных оценок вытекает разрешимость соответствующих уравнений для $u_m(t, x)$ при любом $t > 0$.

Далее выбор соответствующей сходящейся подпоследовательности из галёркинских приближений и переход к пределу совершаются по стандартной схеме (см., например, [20]). При этом для перехода к пределу в нелинейном слагаемом $|Du_m|^2$ существенно используется априорная оценка (5.3).

Теорема 2.1 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 2.2

Для доказательства этой теоремы с граничными условиями Дирихле (2.4) воспользуемся “параболическими” априорными оценками.

Отметим, что для этой задачи остаются справедливыми априорные оценки (3.3) и (4.5). Этих оценок недостаточно для доказательства глобальной разрешимости, но они являются базовыми для получения следующих оценок при условиях теоремы 2.2.

ЛЕММА 7.1. *Имеет место оценка*

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^q dx dt \leq M(t) \quad (7.1)$$

с $q = 2(N + 4)/N$ при любом $t > 0$.

Здесь

$$M(t) = 2C \cdot J^{(q-2)/2}(0) \cdot [\varkappa_1 J(0) + \varkappa_2 J^{3/2}(0)]t + C \cdot J^{q/2}(0)$$

и C – константа из неравенства (7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известных интерполяционных теорем для пространств Соболева существует константа $C = C(\Omega)$ такая, что

$$\|u(t)\|_{L_q(\Omega)}^q \leq C \cdot \|\Delta u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{q-2} \quad (7.2)$$

с $q = 2(N+4)/N$ для $u(t) = u(t, \cdot)$ из пространства $\dot{W}_2^2(\Omega)$ (по переменной $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$).

Тогда, интегрируя это неравенство по $t > 0$ на основании оценки (3.3), получаем

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^q dx dt \leq C \cdot J^{(q-2)/2}(0) \cdot \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u(t, x))^2 dx dt.$$

Отсюда в силу неравенства (4.5) получаем оценку (7.1).

Далее, обозначим

$$\begin{aligned} \dot{W}_p(Q_t) := & \left\{ v(t, x) \mid \iint_{Q_t} [|v_t(t, x)|^p + |\Delta^2 v(t, x)|^p + |v(t, x)|^p] dx dt \right. \\ & \left. \text{с } v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_t = (0, t) \times \partial\Omega \right\} \end{aligned}$$

с нормой

$$\|v\|_{\dot{W}_p(Q_t)} = \left\{ \iint_{Q_t} [|v_t(t, x)|^p + |\Delta^2 v(t, x)|^p + |v(t, x)|^p] dx dt \right\}^{1/p}.$$

Здесь $Q_t = (0, t) \times \Omega$.

Ясно, что в силу граничных условий Дирихле

$$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_t$$

эта норма эквивалентна стандартной норме соответствующего анизотропного пространства $W_{p,t,x}^{1,4}$.

ЛЕММА 7.2. Пусть $v \in \dot{W}_p(Q_T) \cap L_q(Q_T)$. Тогда

$$\|Dv\|_{L_{2p}(Q_T)} \leq C \cdot \|v\|_{\dot{W}_p(Q_t)}^a \cdot \|v\|_{L_q(Q_T)}^{1-a}, \quad (7.3)$$

где

$$a = \frac{(N+2)p - (N+4)}{(N+8)p - 2(N+4)}.$$

Здесь $q = 2(N+4)/N$ и $p > (N+4)/(N+2)$ при $N \leq 3$.

Доказательство этого неравенства следует из соответствующего интерполяционного неравенства Труази (см. [21]).

ЛЕММА 7.3. Пусть $v \in \dot{W}_p(Q_T) \cap L_q(Q_T)$. Тогда

$$\|\Delta v\|_{L_p(Q_T)} \leq C \cdot \|v\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{\tilde{a}} \cdot \|v\|_{L_q(Q_T)}^{1-\tilde{a}}. \quad (7.4)$$

Здесь

$$\tilde{a} = \frac{(p-2)(N+4)}{(N+8)p-2(N+4)}, \quad q = 2\frac{N+4}{N}, \quad p > 2.$$

Доказательство этого неравенства также следует из соответствующего интерполяционного неравенства Трузи (см. [21]).

Для дальнейшего воспользуемся известной априорной оценкой решения следующей линейной начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t + \Delta^2 v = f(t, x) & \text{в } Q_T, \\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{на } \Gamma_T, \\ v = v_0(x) & \text{при } t = 0, x \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь $f \in L_p(Q_T)$ и $v_0 \in B_p^{4-4/p}(\Omega)$.

Эта оценка имеет вид

$$\|v\|_{\dot{W}_p(Q_T)} \leq C(\|f\|_{L_p(Q_T)} + \|v_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}). \quad (7.5)$$

Основная априорная оценка содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 7.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть $u \in \dot{W}_p(Q_T)$ есть решение задачи (2.1)–(2.2), (2.4).

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} \leq M_2(T) + 2M_1(T)\|u_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}, \quad (7.6)$$

где $M_1(T)$ и $M_2(T)$ определены ниже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущей леммы для решения u имеем

$$\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} \leq C(\|Du\|_{L_{2p}(Q_T)}^2 + \|\Delta u\|_{L_p(Q_T)} + \|v_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}).$$

Тогда, последовательно применяя неравенства (7.3), (7.4) и (7.1), находим, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} &\leq C[\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{2a} \cdot \|u\|_{L_q(Q_T)}^{2(1-a)} + \|\Delta u\|_{L_p(Q_T)} + \|v_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}] \\ &\leq C[\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{2a} \cdot \|u\|_{L_q(Q_T)}^{2(1-a)} + \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{\tilde{a}} \cdot \|u\|_{L_q(Q_T)}^{1-\tilde{a}} + \|u_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}] \\ &\leq M_1(T)(\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{2a} + \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^{\tilde{a}} + \|u_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь $M_1(T)$ не зависит от решения u и определяется постоянными из указанных неравенств и величиной $M(T)$ из неравенства (7.1).

Далее, для $p > 2(N+4)/N$ при $N \leq 3$ имеем

$$a = \frac{(N+2)p - (N+4)}{(N+8)p - 2(N+4)} < \frac{1}{2}, \quad \tilde{a} = \frac{(p-2)(N+4)}{(N+8)p - 2(N+4)} < 1.$$

Следовательно, неравенство (7.7) в силу параметрических неравенств Юнга влечет, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} &\leq 2a \cdot \varepsilon \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} + (1 - 2a)\varepsilon^{-2a/(1-2a)}(M_1(T))^{1/(1-2a)} \\ &\quad + \tilde{a}\delta \|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)} + (1 - \tilde{a})\delta^{-\tilde{a}/(1-\tilde{a})}(M_1(T))^{1/(1-\tilde{a})} + M_1(T)\|u_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)} \end{aligned}$$

при любых $\varepsilon, \delta > 0$.

Выбирая теперь $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ и $\delta = \delta_1 > 0$ так, чтобы

$$2a\varepsilon_1 + \tilde{a}\delta_1 \leq \frac{1}{2},$$

находим, что норма $\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}$ удовлетворяет неравенству (7.6), где

$$M_2(T) = 2(1 - 2a)\varepsilon_1^{-2a/(1-2a)}(M_1(T))^{1/(1-2a)} + 2(1 - \tilde{a})\delta_1^{-\tilde{a}/(1-\tilde{a})}(M_1(T))^{1/(1-\tilde{a})}.$$

Отметим, что $M_1(T) = M_1(T; \|u_0\|_{L_2(\Omega)}) < \infty$ при условии (2.8).

Рассмотрим теперь семейство начально-краевых задач

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = \tau |Du|^2 \quad \text{в } Q_T \quad (2.1\tau)$$

с начальным условием (2.2) и краевым условием Дирихле (2.4) и с параметром $\tau \in [0, 1]$.

Это семейство задач рассматривается при условиях теоремы 2.2.

ЛЕММА 7.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть $u_\tau \in \dot{W}_p(Q_T)$ есть решение задачи (2.1 τ)–(2.2), (2.4).

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|u_\tau\|_{\dot{W}_p(Q_T)} \leq M_2(T) + 2M_1(T)\|u_0\|_{B_p^{4-4/p}(\Omega)} \quad (7.6\tau)$$

при любом $\tau \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Анализ доказательства основной оценки (7.6) и предыдущих неравенств показывает, что оценка (7.6) является максимальной для $\|u_\tau\|_{\dot{W}_p(Q_T)}$ при $\tau \in [0, 1]$.

Рассмотрим теперь оператор

$$A_1(u) = |Du|^2,$$

определенный на пространстве $\dot{W}_p(Q_T)$ с $p \geq 2 + 8/N$.

ЛЕММА 7.6. Оператор $A_1(u)$ является вполне непрерывным оператором из пространства $\dot{W}_p(Q_T)$ в пространство $L_p(Q_T)$ с $p \geq 2 + 8/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует, в частности, из неравенства

$$\|Du\|_{L_{2p}(Q_T)} \leq C(\|u\|_{\dot{W}_p(Q_T)}^\theta \cdot \|u\|_{L_2(Q_T)}^{1-\theta} + \|u\|_{L_2(Q_T)}),$$

где

$$\theta = \frac{p(N+6) - (N+4)}{p(N+12) - 2(N+4)} > 0, \quad \theta < 1,$$

при рассматриваемых значениях p и $N \leq 3$.

Теперь для доказательства теоремы 2.2 воспользуемся принципом Лере–Шаудера. Для этого представим задачу (2.1)–(2.2), (2.4) в следующей операторной форме.

Введем линейные операторы Ag и A_0v_0 , определяемые начально-краевой задачей

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^2 v + \Delta v = g(t, x) & \text{в } Q_T, \\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{на } \Gamma_T, \\ v = v_0(x) & \text{при } t = 0, x \in \Omega \end{cases}$$

с $g \in L_p(Q_T)$, $v_0 \in B_p^{4-4/p}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, следующим образом:

$$v = Ag + A_0v_0.$$

Здесь и ниже $p > 2 + 8/N$ и $N \leq 3$. В силу известной теории параболических уравнений имеем $A_0v_0 \in \dot{W}_p(Q_T)$, и для оператора $A: L_p(Q_T) \rightarrow \dot{W}_p(Q_T)$ выполнена двусторонняя оценка

$$c^{-1}\|g\|_{L_p(Q_T)} \leq \|Ag\|_{\dot{W}_p(Q_T)} \leq c\|g\|_{L_p(Q_T)}$$

с соответствующей константой $c = c(Q_T, p)$.

Тогда задача (2.1)–(2.2), (2.4) эквивалентна следующей:

$$u = AA_1(u) + A_0u_0,$$

где $A_1(u) = |Du|^2: \dot{W}_p(Q_T) \rightarrow L_p(Q_T)$.

Введем теперь параметр $\tau \in [0, 1]$ и рассмотрим уравнение с параметром τ

$$u_\tau = \tau AA_1(u) + A_0u_0 \quad (7.8)$$

в пространстве $\dot{W}_p(Q_T)$ при условиях теоремы 2.2.

В силу леммы 7.6 и ограниченности оператора $A: L_p(Q_T) \rightarrow \dot{W}_p(Q_T)$ оператор $AA_1: \dot{W}_p(Q_T) \rightarrow \dot{W}_p(Q_T)$ является вполне непрерывным оператором в пространстве $\dot{W}_p(Q_T)$.

На основании леммы 7.5 для всех возможных решений $u_\tau \in \dot{W}_p(Q_T)$ уравнения (7.7) при $\tau \in [0, 1]$ выполнена априорная оценка (7.67), не зависящая от $\tau \in [0, 1]$. Индекс неподвижной точки – решения уравнения (7.8) при $\tau = 0$ – равен единице.

Следовательно, степень соответствующего отображения равна единице. Тогда на основании теории Лере–Шаудера уравнение (7.8) при $\tau = 1$ и эквивалентная ему начально-краевая задача (2.1)–(2.2), (2.4) имеют решение u в пространстве $W_{p,t,x}^{1,4}(Q_T)$.

Теорема 2.2 доказана.

§ 8. О единственности решения

ТЕОРЕМА 8.1. *Начально-краевая задача (2.1)–(2.3) при любом $T > 0$ имеет не более одного решения в пространстве функций и таких, что*

$$u \in L^2(0, T; W_2^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $w = u_2 - u_1$ двух возможных решений этой задачи имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta^2 w + \Delta w = D(u_1 + u_2) \cdot Dw \quad (8.1)$$

с однородным начальным условием (2.2) и краевым условием (2.3).

После умножения на $-\Delta w$ и интегрирования по области Ω получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |Dw(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |D\Delta w(t, x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (\Delta w(t, x))^2 dx + \int_{\Omega} D(u_1 + u_2) \cdot Dw \cdot \Delta w(t, x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда на основании известных неравенств вложения и интерполяционных неравенств для соответствующих функциональных пространств, определенных на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \leq 3$, находим, что для функции $Y(t) := \int_{\Omega} |Dw(t, x)|^2 dx$ выполнено дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{dY}{dt} \leq F(t)Y(t) \quad \text{с } Y(0) = 0. \quad (8.2)$$

Здесь

$$F(t) = c[1 + \|(u_1 + u_2)(t)\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}^2]$$

с некоторой постоянной $c > 0$.

В силу указанного класса функций имеем

$$|F(t)| \leq M(T) < \infty$$

при $t \in (0, T]$.

Тогда из неравенства (8.2) следует, что

$$Y(t) \equiv 0, \quad \text{т.е. } |Dw(t, x)|^2 = 0 \quad \text{п.в. в } Q_T.$$

Тогда вследствие граничного условия (2.3) получаем

$$w(t, x) = 0 \quad \text{п.в. в } Q_T.$$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. При условиях теоремы 2.1 задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение в указанном пространстве функций.

ТЕОРЕМА 8.2. Начально-краевая задача (2.1)–(2.2), (2.4) при любом $T > 0$ имеет не более одного решения в пространстве $W_{p,t,x}^{1,4}(Q_T)$ при $p > (N + 4)/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разность $w = u_2 - u_1$ двух возможных решений задачи из указанного класса. Тогда с учетом граничного условия Дирихле (2.4) получим следующее энергетическое соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx + \int_{\Omega} (\Delta w(t, x))^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |Dw(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} D(u_1 + u_2) \cdot Dw \cdot w(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega} |Dw(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta(u_1 + u_2) \cdot w^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx + \int_{\Omega} (\Delta w(t, x))^2 dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta w(t, x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(t, x) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \|\Delta(u_1 + u_2)(t)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \cdot \int_{\Omega} w^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$Z(t) := \int_{\Omega} w^2(t, x) dx, \quad G(t) := \|\Delta(u_1 + u_2)(t)\|_{L_{\infty}(\Omega)}.$$

Тогда последнее неравенство влечет, что

$$\frac{dZ}{dt} \leq (1 + G(t))Z(t). \quad (8.3)$$

Далее, из неравенства $p > (N + 4)/3$ при $N \leq 3$ следует, что $2p > N$. Тогда в силу вложения $W_p^4(\Omega) \rightarrow W_{\infty}^2(\Omega)$ с учетом граничных условий (2.4) имеем

$$G(t) \leq c_{\infty} \|\Delta^2(u_1 + u_2)(t)\|_{L_p(\Omega)},$$

где $c_{\infty} = c_{\infty}(\Omega, p, N)$ есть соответствующая константа Соболева.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T G(t) dt & \leq c_{\infty} \left(\int_0^T \|\Delta^2(u_1 + u_2)(t)\|_{L_p(\Omega)} dt \right)^{1/p} \cdot T^{1/p'} \\ & = c_{\infty} \cdot T^{1/p'} \left(\iint_{Q_T} |\Delta^2(u_1 + u_2)|^p dx dt \right)^{1/p} \leq M(T), \end{aligned}$$

где $M(T) < \infty$ в силу принадлежности функций u_1 и u_2 к пространству $W_{p,t,x}^{1,4}(Q_T)$.

Тогда из дифференциального неравенства (8.3) в силу начального условия $Z(0) = 0$ следует, что $Z(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$.

Теорема 8.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. При условиях теоремы 2.2 задача (2.1)–(2.2), (2.4) имеет единственное решение в указанном пространстве функций.

Список литературы

- [1] H. Bellout, S. Benachour, E.S. Titi, “Finite-time singularity versus global regularity for hyper-viscous Hamilton–Jacobi-like equations”, *Nonlinearity*, **16**:6 (2003), 1967–1989.
- [2] J. C. Bronski, Th. N. Gambill, “Uncertainty estimates and L_2 bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Nonlinearity*, **19**:9 (2006), 2023–2039.
- [3] Ya. Cao, E. S. Titi, “Trivial stationary solutions to the Kuramoto–Sivashinsky and certain nonlinear elliptic equations”, *J. Differential Equations*, **231**:2 (2006), 755–767.

- [4] Sh. Cui, C. Guo, “Global existence and exponential decay of solutions of generalized Kuramoto–Sivashinsky equations”, *J. Partial Differential Equations*, **18**:2 (2005), 167–184.
- [5] J.N. Elgin, X. Wu, “Stability of cellular states of the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:6 (1996), 1621–1638.
- [6] C. Foias, B. Nicolaenko, G.R. Sell, R. Temam, “Inertial manifolds for the Kuramoto–Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **67**:3 (1988), 197–226.
- [7] L. Giacomelli, F. Otto, “New bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **58**:3 (2005), 297–318.
- [8] B. Guo, “The existence and nonexistence of a global smooth solution for the initial value problem of generalized Kuramoto–Sivashinsky type equations”, *J. Math. Res. Exposition*, **11**:1 (1991), 57–70.
- [9] Ph. Kent, J. Elgin, “Travelling-waves of the Kuramoto–Sivashinsky equation: period-multiplying bifurcations”, *Nonlinearity*, **5**:4 (1992), 899–919.
- [10] Yo. Kuramoto, T. Tsuzuki, “On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems”, *Progr. Theoret. Phys.*, **54**:3 (1975), 687–699.
- [11] Yo. Kuramoto, T. Tsuzuki, “Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium”, *Progr. Theoret. Phys.*, **55**:2 (1976), 356–369.
- [12] N.A. Larkin, “Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains”, *J. Math. Anal. Appl.*, **297**:1 (2004), 169–185.
- [13] J. Nickel, “Travelling wave solutions to the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Chaos Solitons Fractals*, **33**:4 (2007), 1376–1382.
- [14] G.I. Sivashinsky, “Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. I. Derivation of basic equations”, *Acta Astronaut.*, **4**:11–12 (1977), 1177–1206.
- [15] G.I. Sivashinsky, “On flame propagation under conditions of stoichiometry”, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**:1 (1980), 67–82.
- [16] E. Tadmor, “The well-posedness of the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**:4 (1986), 884–893.
- [17] D. Tseluiko, D.T. Papageorgiou, “A global attracting set for nonlocal Kuramoto–Sivashinsky equations arising in interfacial electrohydrodynamics”, *European J. Appl. Math.*, **17**:6 (2006), 677–703.
- [18] H. Uecker, A. Wierschem, “A spatially periodic Kuramoto–Sivashinsky equation as a model problem for inclined film flow over wavy bottom”, *Electron. J. Differential Equations*, 2007, paper № 118.
- [19] D. Yang, “Dynamics for the stochastic nonlocal Kuramoto–Sivashinsky equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **330**:1 (2007), 550–570.
- [20] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [21] M. Troisi, “Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi”, *Ricerche Mat.*, **20**:1 (1971), 90–117.

С. И. Похожаев (S. I. Pokhozhaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

16.09.2008