Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 5, 37–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 10:04:17

УДК 517.518.8

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям

Решается задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности на всем пространстве в данный момент времени по неточным измерениям этого решения в другие моменты времени. Приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности. Дается решение аналогичной задачи, но с априорной информацией о распределении температуры в некоторые моменты времени. Во всех случаях оптимальный метод использует информацию не более чем о двух измерениях.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, выпуклая задача, преобразование Фурье.

Введение

Первоначальным стимулом для написания настоящей работы послужил следующий вопрос: если имеется возможность измерить с известными погрешностями температуру некоторого тела в моменты времени $t_1, \dots, t_n$, то как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить его температуру в какой-нибудь другой момент времени?

Мы отвечаем на этот вопрос в задаче о распространении тепла в пространстве $\mathbb{R}^d$. Точнее говоря, ставится задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности на $\mathbb{R}^d$ в некоторый момент времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени и приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности.

На практике помимо измерений обычно еще имеется априорная информация о распределении температур, заключающаяся в том, что в какие-то моменты времени известны границы, за которые температура не может выйти. В настоящей работе дается точное решение и этой задачи.

Статья организована следующим образом. Постановке и решению задачи оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям посвящены §§ 1–3. В § 4 аналогичная задача решается при наличии априорной информации. Комментарии исторического и библиографического характера собраны в § 5.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00450 и № 08-01-90001) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3233.2008.1).

§ 1. Постановка задачи

Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается, как хорошо известно, уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (1)$$

(где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $u(\cdot, \cdot)$ – функция на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$) с заданным начальным распределением температуры

$$u(0, \cdot) = u_0(\cdot). \quad (2)$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (1)–(2) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-\frac{|x - \xi|^2}{4t}\right\} u_0(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $|x - \xi|^2 = \sum_{i=1}^d (x_i - \xi_i)^2$, и при этом $u(t, \cdot) \rightarrow u_0(\cdot)$ при $t \rightarrow 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1, \cdot), \dots, u(t_n, \cdot)$. Точнее говоря, известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ .

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n = L_2(\mathbb{R}^d) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации). Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\tau, \bar{\delta}, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n \\ \|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, i=1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Нас интересует величина

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, \bar{\delta}, m),$$

которую назовем *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\hat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т.е. для которого

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации).

§ 2. Формулировка теоремы

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. На двумерной плоскости (t, x) построим множество

$$M = \text{co} \left\{ \left(t_j, \ln \left(\frac{1}{\delta_j} \right) \right), 1 \leq j \leq n \right\} + \{(t, 0) \mid t \geq 0\},$$

где $\text{co } A$ обозначает выпуклую оболочку множества A .

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ равенством $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$, причем $\theta(t) = -\infty$, если $(t, x) \notin M$ для всех x . Ясно, что на $[t_1, \infty)$ функция $\theta(\cdot)$ – вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т.е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1, \dots, t_n\}$ (см. рис. 1, на котором изображенные точки имеют координаты $(t_i, \ln(1/\delta_i))$, сплошная кривая – график функции $\theta(\cdot)$).

Рис. 1

Формула (3) для каждого $t > 0$ определяет линейный непрерывный оператор¹ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, который обозначим через P_t , и если через P_0 обозначить тождественный оператор, то $u(t, \cdot; u_0(\cdot)) = P_t u_0(\cdot)$ для всех $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\tau \geq 0$ справедливо равенство

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

- 1) Если $t_1 > 0$ и $0 \leq \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным.
- 2) Если $\tau = t_{s_j}$, $1 \leq j \leq k$, то метод $\hat{m}$, определенный равенством

$$\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot),$$

является оптимальным.

¹Это следует, например, из неравенства Юнга, так как интеграл Пуассона есть свертка ограниченной функции и функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

- 3) Если $k \geq 2$ и $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq k-1$, то метод $\hat{m}$, определенный равенством

$$\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_j} * y_{s_j})(\cdot) + (K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})(\cdot),$$

где $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$ – функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразования Фурье которых имеют вид

$$FK_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 \exp\{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})\}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 \exp\{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})\}},$$

$$FK_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 \exp\{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})\}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\delta_{s_{j+1}}^2 + (\tau - t_{s_j})\delta_{s_j}^2 \exp\{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})\}},$$

является оптимальным.

- 4) Если $\tau > t_{s_k}$, то метод $\hat{m}$, определенный равенством

$$\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_k}} y_{s_k}(\cdot),$$

является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Если $t_1 > 0$ и $0 \leq \tau < t_1$, то $\theta(\tau) = -\infty$ и, значит, $E(\tau, \bar{\delta}) = +\infty$, т.е. прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему. В этом случае любой метод можно считать оптимальным.

2. Отметим, что оптимальный метод линеен, “сглаживает” наблюдения (свертка – бесконечно дифференцируемая функция) и использует информацию не более чем о двух измерениях до и после времени τ либо только до времени τ (если $\tau > t_{s_k}$).

3. Если $\tau = t_i$ и t_i не является точкой излома функции $\theta(\cdot)$, то оптимальный метод позволяет данное измерение уточнить.

4. Случай $\tau > t_{s_k}$ означает, что самое точное измерение температуры было произведено раньше времени τ . В этой ситуации оптимальный метод – решение уравнения теплопроводности в момент времени $\tau - t_{s_k}$ с начальным распределением температуры $y_{s_k}(\cdot)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Доказательство состоит из двух частей: оценка снизу погрешности оптимального восстановления $E(\tau, \bar{\delta})$ и оценка сверху этой величины с предъявлением оптимального метода.

1. Оценка снизу величины $E(\tau, \bar{\delta})$. Напомним, что P_t – линейный непрерывный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, который определен формулой (3) при $t > 0$, и P_0 – тождественный оператор.

Пусть $\tau \geq 0$. Рассмотрим задачу

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Обозначим ее значение (т.е. величину верхней грани $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ при данных ограничениях) через S и покажем, что $E(\tau, \bar{\delta}) \geq S$.

Действительно, пусть $\bar{u}_0(\cdot)$ – допустимая функция в (4) (т.е. $\bar{u}_0(\cdot)$ удовлетворяет всем ограничениям в задаче). Тогда $-\bar{u}_0(\cdot)$ также допустима в (4), и мы имеем для любого $m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} 2\|P_\tau \bar{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|P_\tau \bar{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\bar{u}_0(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \bar{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Переходя справа к нижней грани по всем методам m , а слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (4), получаем, что $E(\tau, \bar{\delta}) \geq S$.

Следующий шаг – доказательство того, что $S = e^{-\theta(\tau)}$. Пусть $F: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ – преобразование Фурье. Хорошо известно (см., например, [1]), что для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$F(P_t u_0(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2 t} F u_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

и поэтому по теореме Планшереля квадрат значения задачи (4) равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} |F u_0(\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} |F u_0(\xi)|^2 d\xi &\leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (5)$$

Можно показать, что в этой задаче нет решения, поэтому мы рассмотрим ее “расширение”, а именно (заменяя формально $(2\pi)^{-d} |F u_0(\xi)|^2 d\xi$ на положительную меру) следующую задачу:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\mu(\xi) &\rightarrow \max, \\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) &\leq \delta_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad d\mu(\cdot) \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – набор множителей Лагранжа.

Если мы найдем допустимую в (6) меру $d\hat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 < 0$, $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, такие, что

$$\min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda}), \quad (7)$$

где $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)$ и

$$\hat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\hat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

то $d\hat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (6). Действительно, пусть $d\mu(\cdot)$ – допустимая мера в (6). Тогда, используя это обстоятельство (и учитывая, что $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$), а затем (7) и (8), будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\mu(\xi) &\geq \hat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2t_j} d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right) \\ &\geq \hat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\hat{\mu}(\xi) + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2t_j} d\hat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) \\ &= \hat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\hat{\mu}(\xi). \end{aligned}$$

Деля на $\hat{\lambda}_0 < 0$, получаем требуемое.

Из условий (7) и (8) видно, какими должны быть мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа. В самом деле, запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} f(|\xi|^2) d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^2, \quad (9)$$

где

$$f(v) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{-2v(t_j - \tau)}.$$

Отсюда видно, что если $f(|\xi|^2) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ и мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в нулях этой функции, то для всех $d\mu(\cdot) \geq 0$ будем иметь

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) \geq - \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^2 = \mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot), \lambda),$$

т.е. выполняется условие (7). Но при любых неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функция $f(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}$, и поэтому если точка $v_0 \in \mathbb{R}$ такова, что $f(v_0) = f'(v_0) = 0$, то $f(v) \geq 0$ при всех $v \in \mathbb{R}$. Будем руководствоваться этими наблюдениями.

Рассмотрим отдельно три случая: (а) $\tau \geq t_1$ и справа от τ есть точка излома $\theta(\cdot)$; (б) $\tau \geq t_1$ и справа от τ нет точек излома $\theta(\cdot)$; (с) $\tau < t_1$.

(а) Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}}]$. Положим $d\hat{\mu}(\xi) = A\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot - \xi_0)$ – дельта-функция в точке ξ_0 , а A и ξ_0 выберем из условий

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2t_k} d\hat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2t_k} = \delta_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}. \quad (10)$$

Отсюда нетрудно вывести, что

$$A = \delta_{s_j}^{2t_{s_j+1}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{-2t_{s_j}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}$$

и

$$|\xi_0|^2 = \frac{\ln(\delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}.$$

Такая точка $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ существует, так как из построения ломаной $\theta(\cdot)$ следует, что угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(t_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$, положителен.

Положим $\hat{\lambda}_0 = -1$, $\hat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$, а числа $\hat{\lambda}_{s_j}$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$, т.е. как решение линейной системы

$$\begin{aligned} \lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} &= 1, \\ \lambda_{s_j}(t_{s_j} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}} - \tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{s_j} &= \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}, \\ \hat{\lambda}_{s_{j+1}} &= \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(|\xi|^2) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$, и положительная мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в точке ξ_0 , где $f(|\xi_0|^2) = 0$. Следовательно, условие (7) выполняется.

Если $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, то, очевидно, $\hat{\lambda}_{s_j} > 0$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}} > 0$, а если $\tau = t_{s_j}$, то $\hat{\lambda}_{s_j} = 1$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}} = 0$, так что в силу (10) условие (8) также выполняется. Осталось лишь проверить допустимость меры $d\hat{\mu}(\cdot)$ в задаче (6).

По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(t_i, \ln(1/\delta_i))$, $i = 1, \dots, n$, лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} (t - t_{s_j}) + \ln \frac{1}{\delta_{s_j}} \\ &= \ln \delta_{s_j}^{-(t_{s_{j+1}}-t)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{-(t-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}, \end{aligned}$$

соединяющей точки $(t_{s_j}, \ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$. Тогда (учитывая выражения для A и $|\xi_0|^2$) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_i} d\hat{\mu}(\xi) &= A e^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-t_i)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(t_i-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \\ &= e^{-2p(t_i)} \leq e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

т.е. $\hat{\mu}(\cdot)$ – допустимая мера в задаче (6) и, тем самым, является ее решением.

Подставляя $\hat{\mu}(\cdot)$ в максимизируемый функционал, получаем значение задачи (6)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) &= A e^{-2|\xi_0|^2 \tau} = \delta_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \delta_{s_{j+1}}^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \\ &= e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}. \end{aligned}$$

Аппроксимируя стандартным образом δ -функцию последовательностью δ -образных функций, получаем, что таково же значение задачи (5). Но тогда $e^{-\theta(\tau)}$ – значение задачи (4), т.е. $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geq t_{s_k}$ (в частности, $t_{s_k} = t_1$, если $\theta(\cdot)$ – прямая). Положим $\hat{\lambda}_0 = -1$, $\hat{\lambda}_{s_k} = 1$, $\hat{\lambda}_{s_j} = 0$, $j \neq k$, и $d\hat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_k}^2 \delta(\cdot)$ ($\delta(\cdot)$ – δ -функция в нуле). Тогда, очевидно, выполняется (8). Поскольку для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_k} - \tau)} \geq 0$$

и $f(0) = 0$, то выполняется (7). На участке $[t_{s_k}, \infty)$ функция $\theta(\cdot)$ тождественно равна $\ln(1/\delta_{s_k})$, и ясно, что $\ln(1/\delta_i) \leq \ln(1/\delta_{s_k})$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_i} d\hat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_k})} \leq e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. мера $d\hat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (6) и, значит, является ее решением.

Значение задачи (6) таково:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 \tau} d\hat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 = e^{-2\ln(1/\delta_{s_k})} = e^{-2\theta(\tau)},$$

и, значит, по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, значение задачи (4) равно $e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (6) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Существует, очевидно, прямая $x = at + b$, $a > 0$, которая разделяет точку $(\tau, -x_0)$ и множество M , в частности,

$$-a\tau - x_0 \geq b \geq -at_i + \ln \frac{1}{\delta_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Обозначая $A = e^{-2b}$ и подбирая $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ так, чтобы $|\xi_0|^2 = a$, получаем из этих неравенств, что $A \exp(-2|\xi_0|^2 t_i) \leq \delta_i^2$, $1 \leq i \leq n$, т.е. мера $d\mu(\cdot) = \delta(\cdot - \xi_0)$ допустима в задаче (6) и $A \exp(-2|\xi_0|^2 \tau) \geq \exp(2x_0)$. В силу произвольности x_0 значение задачи (6) равно $+\infty$. Отсюда, как и в предыдущих случаях, следует, что значение задачи (4) равно $+\infty$.

Итак, доказано, что для всех $\tau \geq 0$ погрешность оптимального восстановления $E(\tau, \bar{\delta}) \geq e^{-\theta(\tau)}$.

2. Оценка сверху величины $E(\tau, \bar{\delta})$ и оптимальный метод. Пусть $\tau \geq t_1$ и $\hat{\lambda}_j$, $1 \leq j \leq n$, – множители Лагранжа, которые были найдены для задачи (6) при данном τ . Оценка сверху $E(\tau, \bar{\delta})$ и нахождение оптимального метода будут опираться на следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ такова, что существует решение $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot))$ задачи

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (11)$$

Тогда для любых $\gamma_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, значение задачи

$$\begin{aligned} & \|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ & \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \quad (12)$$

не больше значения задачи

$$\begin{aligned} & \|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \gamma_j^2, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Минимизируемый функционал в (11) является гладким выпуклым функционалом на $L_2(\mathbb{R}^d)$, и, следовательно, необходимые и достаточные условия того, что функция $\hat{u}_0(\cdot)$ – его минимум, заключаются в равенстве нулю производной этого функционала в точке $\hat{u}_0(\cdot)$, т.е. для любого $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ должно выполняться равенство

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \int_{L_2(\mathbb{R}^d)} (P_{t_j} \hat{u}_0(x) - y_j(x)) \overline{P_{t_j} u_0(x)} dx = 0. \quad (14)$$

Учитывая это, легко проверить, что для всех $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} \hat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Пусть $u_0(\cdot)$ – допустимая функция в (12). Тогда из последнего соотношения следует, что

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} (u_0(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \gamma_j^2,$$

и, тем самым, $u_0(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot)$ – допустимая функция в (13). При этом значения максимизируемых функционалов в (12) и (13) соответственно на элементах $u_0(\cdot)$ и $u_0(\cdot) - \hat{u}_0(\cdot)$ совпадают. Отсюда следует требуемое.

Схема использования данной леммы состоит в следующем. Мы сначала докажем, что при $\gamma_j = \delta_j$, $1 \leq j \leq n$, значения задач (4) и (13) совпадают (т.е. значение задачи (13) равно $e^{-\theta(\tau)}$). Если предположить, что для каждого $\bar{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ существует решение задачи (11), то утверждение леммы означает, что погрешность $e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m})$ метода $\hat{m}: \bar{y}(\cdot) \mapsto P_\tau \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot))$ не превосходит $e^{-\theta(\tau)}$ и тем более $E(\tau, \bar{\delta}) \leq e^{-\theta(\tau)}$. Вместе с доказанной оценкой снизу отсюда будет следовать, что $e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}) = E(\tau, \bar{\delta})$ и, значит, $\hat{m}$ – оптимальный метод.

Однако решение задачи (11) существует не для всех $\bar{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, и это потребует некоторой коррекции приведенных рассуждений.

Итак, докажем совпадение значений задач (4) и (13) при $\gamma_j = \delta_j$, $1 \leq j \leq n$. Точно так же, как мы перешли от задачи (4) к задаче (6) (используя теорему Планшереля, а затем заменяя $(2\pi)^{-d} |Fu_0(\xi)|^2 d\xi$ на положительную меру),

переходим от задачи (13) к задаче

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\mu(\xi) &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) &\leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad d\mu(\cdot) \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \nu) &= \nu_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} d\mu(\xi) \\ &+ \nu_1 \left(\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2 \right), \end{aligned}$$

где $\nu = (\nu_0, \nu_1)$ – набор множителей Лагранжа.

Покажем, что решение $d\hat{\mu}(\cdot)$ задачи (6) является решением и этой задачи. Для этого (аналогично тому, как было сделано для задачи (6)) достаточно проверить, что мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ допустима в (15) и что для некоторых $\hat{\nu}_0 < 0$ и $\hat{\nu}_1 \geq 0$ выполняются аналоги условий (7) и (8) для данной задачи, а именно

$$\min_{d\mu(\cdot) \geq 0} \mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \hat{\nu}) = \mathcal{L}_1(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\nu}),$$

где $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_0, \hat{\nu}_1)$ и

$$\hat{\nu}_1 \left(\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} d\hat{\mu}(\xi) - \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2 \right) = 0.$$

Из допустимости меры $d\hat{\mu}(\cdot)$ в задаче (6) сразу следует ее допустимость в задаче (15). Положим $\hat{\nu}_0 = -1$ и $\hat{\nu}_1 = 1$. Тогда $\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \hat{\nu}) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda})$ и, следовательно, первое из выписанных соотношений равносильно (7) и, тем самым, выполняется. Второе соотношение сразу следует из (8). Итак, $d\hat{\mu}(\cdot)$ – решение задачи (15), и, значит, ее значение совпадает со значением задачи (6).

Далее, как и раньше, аппроксимируя δ -функцию δ -образной последовательностью, получаем, что квадрат значения задачи (13) равен значению задачи (15), и, значит, значения задач (4) и (13) совпадают.

Теперь воспользуемся леммой. Для этого найдем сначала значение задачи (11) для функции $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, для которой функции $Fy_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq n$, финитны.

Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. В этом случае, как было доказано, лишь множители Лагранжа $\hat{\lambda}_{s_j}$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}}$ могут быть отличны от нуля (и одновременно не равны нулю), и поэтому задача (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\rightarrow \min, \\ u_0(\cdot) &\in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Если $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot))$ – решение этой задачи, то выполняется условие (14), которое в образах Фурье согласно теореме Планшереля запишется в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{k=j}^{j+1} \hat{\lambda}_{s_k} \int_{L_2(\mathbb{R}^d)} (e^{-|\xi|^2 t_{s_k}} F\hat{u}_0(\xi) - Fy_{s_k}(\xi)) e^{-|\xi|^2 t_{s_k}} \overline{Fu_0(\xi)} d\xi = 0.$$

Легко убедиться, что это соотношение будет выполняться для всех $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, если функция $\hat{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$F\hat{u}_0(\xi) = \frac{\hat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} Fy_{s_j}(\xi) + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} Fy_{s_{j+1}}(\xi)}{\hat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \quad (16)$$

Но выражение справа принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, поскольку функции $Fy_{s_j}(\cdot)$ и $Fy_{s_{j+1}}(\cdot)$ финитны, и поэтому $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot)) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. В силу достаточности условия (14) функция $\hat{u}_0(\cdot)$, определенная соотношением (16), является решением задачи (11).

Отметим, что если $\tau = t_{s_j}$, то $\hat{\lambda}_{s_j} = 1$, $\hat{\lambda}_{s_{j+1}} = 0$, и решение уравнения (11) в этом случае очевидно (и, конечно, следует из (16)) и имеет вид

$$F\hat{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_j}} Fy_{s_j}(\xi). \quad (17)$$

Как хорошо известно, финитные функции плотны в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда из теоремы Планшереля следует, что и функции, у которых преобразование Фурье финитно, также плотны в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть теперь $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таковы, что $\|P_{t_j} \tilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j$, $1 \leq j \leq n$. Пусть, далее, $\bar{y}_k(\cdot) = (y_{1k}(\cdot), \dots, y_{nk}(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, $k \in \mathbb{N}$, – последовательность, обладающая тем свойством, что функции $Fy_{jk}(\cdot)$ финитны и $\|y_j(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1/k$, $1 \leq j \leq n$, $k \in \mathbb{N}$.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. По доказанному для $\bar{y}_k(\cdot)$ существует решение $\hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))$ задачи (11). Поскольку $\|P_{t_j} \tilde{u}_0(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|P_{t_j} \tilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|y_j(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j + 1/k$, $1 \leq j \leq n$, то функция $\tilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (12) с $\gamma_j = \gamma_j(k) = \delta_j + 1/k$, $1 \leq j \leq n$. Согласно утверждению леммы значение этой задачи не превосходит значения задачи (13), которая после замены $u_0(\cdot) = a(k)v_0(\cdot)$, где $a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \gamma_j^2(k) / \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2}$, примет вид

$$a(k) \|P_{\tau} v_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} v_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad v_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Значение же этой задачи, как уже доказано, совпадает со значением задачи (4), умноженным на $a(k)$, т.е. равно $a(k)e^{-\theta(\tau)}$. В частности (в силу допустимости $\tilde{u}_0(\cdot)$ в (12)), получаем, что

$$\|P_{\tau} \tilde{u}_0(\cdot) - P_{\tau} \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq a(k)e^{-\theta(\tau)}. \quad (18)$$

Пусть $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Преобразования Фурье функций $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$ из формулировки теоремы принадлежат пространству бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^d$. Преобразование Фурье в этом пространстве является изоморфизмом, и поэтому ему принадлежат и сами функции $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$. В частности, они ограничены, и тогда согласно

неравенству Юнга метод $\hat{m}$ из формулировки теоремы – линейный непрерывный оператор из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Из вида метода $\hat{m}$, выражений для функций $FK_{s_j}(\cdot)$ и $FK_{s_{j+1}}(\cdot)$ и формулы (16) следует, что

$$\begin{aligned} F\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\xi) &= FK_{s_j}(\xi)Fy_{s_j k}(\xi) + FK_{s_{j+1}}(\xi)Fy_{s_{j+1}k}(\xi) \\ &= e^{-|\xi|^2\tau}F\hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))(\xi), \end{aligned}$$

т.е.

$$\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\cdot) = P_\tau \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot)). \quad (19)$$

Если $\tau = t_{s_j}$, то из вида метода $\hat{m}$ следует, что

$$F\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\xi) = Fy_{s_j k}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau}F\hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))(\xi),$$

т.е. снова справедливо соотношение (19).

Возвращаясь к $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таким, что $\|P_{t_j}\tilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j$, $1 \leq j \leq n$, будем иметь согласно (19) и (18)

$$\begin{aligned} &\|P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - \hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\cdot) - \hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq a(k)e^{-\theta(\tau)} + \|\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot) - \bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Это верно для любого $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ (учитывая, что $a(k) \rightarrow 1$ и что метод $\hat{m}$ непрерывен), получаем неравенство

$$\|P_\tau \tilde{u}_0(\cdot) - \hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\theta(\tau)}.$$

Переходя здесь к верхней грани по всем $\tilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таким, что $\|P_{t_j}\tilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j$, $1 \leq j \leq n$, получаем, что $e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}) \leq e^{-\theta(\tau)}$. Отсюда вместе с доказанной оценкой снизу следует, что

$$e^{-\theta(\tau)} \leq E(\tau, \bar{\delta}) \leq e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}) \leq e^{-\theta(\tau)},$$

т.е. $E(\tau, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ и $\hat{m}$ – оптимальный метод.

Итак, для случая, когда $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, теорема доказана.

Пусть $\tau \geq t_{s_k}$. Если $\tau = t_{s_k}$, то, рассуждая точно так же, как и для случая $\tau = t_{s_j}$, получаем нужную оценку и оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_k}$. Здесь рассуждения также аналогичны предыдущим, но несколько проще и поэтому будут кратки. В данном случае $\hat{\lambda}_{s_k} = 1$, а остальные множители Лагранжа равны нулю, поэтому задача (11) принимает вид

$$\|P_{t_{s_k}} u_0(\cdot) - y_{s_k}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Если $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ таково, что функции $Fy_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq n$, финитны, то решение $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}(\cdot))$ данной задачи существует и $F\hat{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_k}} Fy_{s_k}(\xi)$.

Далее, дословно повторяя предыдущие рассуждения, приходим к неравенству (18).

Метод $\hat{m}$ из формулировки теоремы по самому определению есть линейный непрерывный оператор из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\bar{y}(\cdot) = \bar{y}_k(\cdot)$, то ясно, что $F\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_k})}Fy_{s_k}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau}F\hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))(\xi)$, т.е. $\hat{m}(\bar{y}_k(\cdot))(\cdot) = P_\tau \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_k(\cdot))(\cdot)$. Дальнейшие рассуждения точно такие же, как и в предыдущем случае. Теорема 1 доказана.

§ 4. Оптимальное восстановление при наличии априорной информации

Мы снова рассматриваем задачу (1)–(2) и моменты времени $0 \leq t_1 < \dots < t_n$. Пусть A и B – подмножества $\{1, \dots, n\}$ (одно из которых может быть пустым) такие, что $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = \{1, \dots, n\}$. Поставим такую задачу.

Известна следующая априорная информация: в моменты времени t_i , $i \in A$, температура не может выходить за определенные пределы, т.е. известно, что $\|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i$, где $\delta_i > 0$, $i \in A$.

Пусть $B \neq \emptyset$ и в моменты времени t_i , $i \in B$, приближенно известны распределения температур $u(t_i, \cdot)$, т.е. известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что $\|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i$, где $\delta_i > 0$. Как и раньше, мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ .

Если $B \neq \emptyset$ и $\text{card } B = l$, то снова любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}^d))^l$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления. Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\tau, A, B, \bar{\delta}, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot), \bar{y}_B(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^l \\ \|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, i \in A \\ \|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, i \in B}} \|u(\tau, \cdot) - m(\bar{y}_B(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\bar{y}_B(\cdot) = \{y_i(\cdot)\}_{i \in B}$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Нас интересует величина

$$E(\tau, A, B, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}^d))^l \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, \bar{\delta}, m),$$

которую также назовем *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\hat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т.е. для которого

$$E(\tau, A, B, \bar{\delta}) = e(\tau, A, B, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации).

Отметим, что если $A = \emptyset$, то мы приходим к прежней постановке. Если $B = \emptyset$, то никаких измерений не производится и, тем самым, нет смысла говорить о каком-либо методе восстановления. Но можно говорить об оценке температуры в момент времени τ , т.е. об определении тех границ, за которые температура заведомо не может выйти при данной априорной информации.

В качестве такой оценки естественно взять чебышёвский радиус множества $\{u(\tau, \cdot)(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid \|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, 1 \leq i \leq n\}$, т.е. минимальный из радиусов шаров, содержащих данное множество. Поскольку множество центрально симметрично, то легко убедиться, что эта величина такова:

$$E(\tau, A, \emptyset, \bar{\delta}) = \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, i=1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Приведенная постановка, как уже отмечено, обобщает исходную задачу, и можно было бы с самого начала рассматривать именно задачу с априорной информацией. Но мы хотели сохранить простоту исходной постановки, тем более, что доказательство более общего результата по-существу такое же, и поэтому только укажем на изменения, которые надлежит сделать в предыдущих рассуждениях.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых A и B и любого $\tau \geq 0$ справедливо равенство*

$$E(\tau, A, B, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Пусть $B \neq \emptyset$. Тогда:

- 1) *если $t_1 > 0, 0 \leq \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным;*
- 2) *если $\tau = t_{s_j}, 1 \leq j \leq k$, и $s_j \in B$, то метод $\hat{m}$, определенный равенством $\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным, а если $s_j \notin B$, то нулевое отображение – оптимальный метод;*
- 3) *если $k \geq 2, \tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}}), 1 \leq j \leq k-1$, и $s_j, s_{j+1} \in B$, то метод $\hat{m}$, определенный в п.3) теоремы 1, является оптимальным; если $s_j \in B$, а $s_{j+1} \notin B$, то $\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_j} * y_{s_j})(\cdot)$ – оптимальный метод ($K_{s_j}(\cdot)$ из теоремы 1); если $s_j \notin B$, а $s_{j+1} \in B$, то оптимальным является метод $\hat{m}(\bar{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})(\cdot)$ ($K_{s_{j+1}}(\cdot)$ из теоремы 1); если, наконец, $s_j, s_{j+1} \notin B$, то нулевое отображение – оптимальный метод;*
- 4) *если $\tau > t_{s_k}$ и $s_k \in B$, то метод $\hat{m}$, определенный в п.4) теоремы 1, является оптимальным; если $s_k \notin B$, то нулевое отображение – оптимальный метод.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = \emptyset$. Тогда $E(\tau, A, \emptyset, \bar{\delta})$ совпадает со значением задачи (4) (которое, как доказано, равно $e^{-\theta(\tau)}$ для всех $\tau \geq 0$) и, значит, $E(\tau, A, \emptyset, \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$.

Пусть $B \neq \emptyset$. Тогда, дословно повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 1, получаем, что $E(\tau, A, B, \bar{\delta})$ не меньше значения задачи (4) и, тем самым, справедлива оценка снизу $E(\tau, A, B, \bar{\delta}) \geq e^{-\theta(\tau)}$ для любых множеств A и B и всех $\tau \geq 0$.

Перейдем к доказательству оценки сверху и предъявлению соответствующих оптимальных методов. Здесь мы будем опираться на следующее утверждение, которое формально обобщает лемму 1, но доказывается точно так же.

ЛЕММА 2. *Пусть функция $\bar{y}_B(\cdot) = \{y_j(\cdot)\}_{j \in B}$ такова, что существует решение $\hat{u}_0(\cdot) = \hat{u}_0(\cdot, \bar{y}_B(\cdot))$ задачи*

$$\sum_{j \in A} \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{j \in B} \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \\ u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Тогда для любых $\gamma_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, значение задачи

$$\begin{aligned} & \|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \hat{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ & \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma_j, \quad j \in A, \quad \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma_j, \quad j \in B, \\ & u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

не больше значения задачи

$$\begin{aligned} & \|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \gamma_j^2, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Если $s_j, s_{j+1} \in B$, то точно те же рассуждения, что и в теореме 1, доказывают оптимальность соответствующих методов.

Пусть $s_j \in B$ и $s_{j+1} \notin B$. В этом случае аналог задачи (11) согласно лемме 2 имеет вид

$$\begin{aligned} & \hat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \\ & u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Снова те же рассуждения, что и в теореме 1 (с $y_{s_{j+1}}(\cdot) = 0$), приводят к доказательству оптимальности соответствующих методов.

Если $s_j \notin B$ и $s_{j+1} \notin B$, то аналог задачи (11) имеет вид

$$\begin{aligned} & \hat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \\ & u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

и решением здесь является, очевидно, нулевая функция. Оптимальность нулевого метода следует непосредственно из леммы 2.

Остальные случаи разбираются аналогично.

Теорема 2 доказана.

§ 5. Комментарии

Решенные в этой работе задачи оптимального восстановления укладываются в следующую общую схему. Пусть X – векторное пространство, W – подмножество (класс) в X , $Y_1, \dots, Y_r$ и Z – нормированные пространства, $I_i: X \rightarrow Y_i$, $1 \leq i \leq r$, – линейные операторы. Ставится задача об оптимальном восстановлении линейного оператора $\Lambda: X \rightarrow Z$ на классе W по следующей информации об элементах из этого класса: для каждого элемента $x \in W$ известен вектор $\bar{y} = (y_1, \dots, y_r) \in Y_1 \times \dots \times Y_r$ такой, что $\|I_i x - y_i\|_{Y_i} \leq \delta_i$, $\delta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq r$.

Под оптимальным восстановлением Λ на W по данной информации понимается следующее. Любое отображение m из $Y_1 \times \dots \times Y_r$ в Z объявляется методом восстановления (Λ на W по данной информации). Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\Lambda, W, \bar{I}, \bar{\delta}, m) = \sup_{\substack{x \in W, \bar{y} \in Y_1 \times \dots \times Y_r \\ \|I_i x - y_i\|_{Y_i} \leq \delta_i, i=1, \dots, r}} \|\Lambda x - m(\bar{y})\|_Z,$$

где $\bar{I} = (I_1, \dots, I_r)$ и $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_r)$.

Величину

$$E(\Lambda, W, \bar{I}, \bar{\delta}) = \inf_{m: Y_1 \times \dots \times Y_r \rightarrow Z} e(\Lambda, W, \bar{I}, \bar{\delta}, m)$$

назовем *погрешностью оптимального восстановления*, а метод $\hat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т.е. для которого

$$E(\Lambda, W, \bar{I}, \bar{\delta}) = e(\Lambda, W, \bar{I}, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

назовем *оптимальным методом восстановления* (Λ на W по данной информации).

В соответствии с этими обозначениями, например, в задаче с априорной информацией и когда $B \neq \emptyset$ ($\text{card } B = l$), имеем $r = l$, $X = Y_1 = \dots = Y_l = Z = L_2(\mathbb{R}^d)$,

$$W = \{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid \|P_{t_i} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, i \in A\}$$

(если $A = \emptyset$, то полагаем $W = X = L_2(\mathbb{R}^d)$), $I_i = P_{t_i}$, $i \in B$, $\Lambda = P_\tau$.

Указанный подход к определению оптимального метода (в абстрактной задаче) идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 1930-х годов, посвященных нахождению наилучшего средства приближения сразу для всех функций из данного класса. Приведенная здесь постановка для случая, когда $r = 1$, X и Y – конечномерные пространства, $Z = \mathbb{R}$ (задача о восстановлении линейного функционала) и $\delta_1 = 0$ (информация задана точно), впервые была рассмотрена С. А. Смоляком (см. [2]). Он доказал, что если W – выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Распространению этого факта на более общие ситуации посвящено достаточно много работ (см. [3]–[7]), но окончательный в определенном смысле результат в этом направлении, а именно необходимые и достаточные условия существования оптимального линейного метода, был получен в работе авторов [8]. Задачам оптимального восстановления линейных функционалов посвящена довольно обширная литература. Единый подход к решению подобных задач, основанный на стандартных методах теории экстремума, изложен в [9]. В монографиях [10]–[13] можно найти множество конкретных результатов и дополнительные ссылки.

Общий результат, касающийся существования линейного метода для операторов (Z – гильбертово пространство), был доказан в работе [14], там же получены первые конкретные результаты о восстановлении линейных операторов. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [15]–[17], где используются иные подходы, основанные на общих принципах теории экстремума.

Применение теории оптимального восстановления линейных операторов к задачам математической физики можно найти в работах [18]–[22].

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 3-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [2] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 1965.

- [3] А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368; англ. пер.: A. G. Marchuk, K. Yu. Osipenko, “Best approximation of functions specified with an error at a finite number of points”, *Math. Notes*, **17**:3 (1975), 207–212.
- [4] К. Ю. Осипенко, “Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **19**:1 (1976), 29–40; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Best approximation of analytic functions from information about their values at a finite number of points”, *Math. Notes*, **19**:1 (1976), 17–23.
- [5] Ch. A. Micchelli, Th. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal estimation in approximation theory* (Proc. Internat. Sympos., Freudenstadt, Germany, 1976), Plenum, New York–London, 1977, 1–54.
- [6] Г. Г. Магарил-Ильяев, Чан Тхи Ле, “К задаче оптимального восстановления функционалов”, *УМН*, **42**:2 (1987), 237–238; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, T. L. Chan, “On the problem of optimal recovery of functionals their values at a finite number of points”, *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 289–290.
- [7] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, “Optimal recovery of operators, and related problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 1–20.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functionals based on inaccurate data”, *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.
- [9] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, “Kolmogorov-type inequalities for derivatives”, *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1799–1832.
- [10] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, New York–London, 1980.
- [11] L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [12] К. Ю. Осипенко, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Huntington–New York, 2000.
- [13] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [14] A. A. Melkman, Ch. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.
- [15] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.
- [16] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.

- [17] К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “The Hardy–Littlewood–Polya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 315–334.
- [18] К. Ю. Осипенко, “О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Владикавказский мат. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.
- [19] G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, V. M. Tikhomirov, “On optimal recovery of heat equation solutions”, *Approximation theory: a volume dedicated to B. Bojanov*, Drinov Academic Publ. House, Sofia, 2004, 163–175.
- [20] Н. Д. Выск, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815; англ. пер.: N. D. Vysk, K. Yu. Osipenko, “Optimal reconstruction of the solution of the wave equation from inaccurate initial data”, *Math. Notes*, **81**:5–6 (2007), 723–733.
- [21] Е. А. Балова, “Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 323–334; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Optimal reconstruction of the solution of the Dirichlet problem from inaccurate input data”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 285–294.
- [22] К. Ю. Осипенко, Е. В. Веденская, “Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data”, *J. Complexity*, **23**:4–6 (2007), 653–661.

Г. Г. Магарил-Ильяев (G. G. Magaril-Ilyayev)

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)
E-mail: magaril@mirea.ru

Поступила в редакцию
21.09.2008

К. Ю. Осипенко (K. Yu. Osipenko)

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ), г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com