Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, Алгебраические алгебры и первичные
многообразия ассоциативных алгебр, *Матем. сб.*, 2009,
том 200, номер 5, 99–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:28:25

УДК 512.552.4

Л. М. Самойлов

Алгебраические алгебры и первичные многообразия ассоциативных алгебр

Решена следующая проблема Кемера для первичных многообразий ассоциативных алгебр с единицей: показано, что над бесконечным полем положительной характеристики каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр с единицей порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности над этим полем.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: полиномиальные тождества, многообразия алгебр, алгебраические алгебры.

§ 1. Введение

Все рассматриваемые в работе алгебры будем предполагать ассоциативными алгебрами над некоторым бесконечным полем F характеристики $p > 0$. В работе [1] А. Р. Кемер сформулировал следующую проблему.

ПРОБЛЕМА 1. Верно ли, что каждое многообразие ассоциативных алгебр над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторым расширением этого поля?

В настоящей работе получено положительное решение проблемы 1 для произвольных первичных многообразий с единицей. А именно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр с единицей над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над тем же полем.*

Предполагается, что проблема 1 имеет положительное решение и в общем случае. Разумеется, из рассмотрения надо исключить многообразие всех ассоциативных алгебр над полем F . Очевидно, что такое многообразие не может порождаться алгебраической алгеброй ограниченного индекса не только над полем, но и над произвольным коммутативным кольцом, которое является расширением поля F .

Ситуация с аналогом проблемы 1 для полей нулевой характеристики следующая. Используя структурную теорию многообразий ассоциативных алгебр над полями нулевой характеристики, построенную А. Р. Кемером (см. [2]),

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00080).

И. Ю. Свиридова доказала в работе [3], что над полем характеристики нуль многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса тогда и только тогда, когда оно порождается конечномерной алгеброй. Вместе с тем, в этой же работе было показано, что любое (нетривиальное) многообразие может быть порождено алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторым коммутативным кольцом. Таким образом, свойства многообразия порождаться алгебраическими алгебрами ограниченного индекса над полем и над коммутативным кольцом оказываются различными.

Проблема 1 была решена И. Ю. Свиридовой в двух важных частных случаях. В работе [3] она была решена для энгелевых многообразий с единицей, а в работе [4] – для первичных нематричных многообразий с единицей.

Сделаем важное замечание. В теореме 1 многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над тем же самым полем, а не над его расширением. Для энгелевых многообразий ситуация аналогичная. Вообще говоря, в работе [3] было доказано, что энгелевы многообразия порождаются алгебраическими алгебрами ограниченного индекса над расширениями основного поля. В теореме 2 доказывается более сильный факт.

ТЕОРЕМА 2. *Каждое энгелево многообразие ассоциативных алгебр с единицей над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над тем же полем.*

Таким образом, во всех известных случаях, когда проблема 1 решена положительно, многообразие могло быть порождено алгебраической алгеброй ограниченного индекса над F , а не над расширением поля F . В этой связи возникает гипотеза, что в проблеме 1 (по крайней мере для многообразий с единицей) можно требовать алгебраичности не над расширением основного поля, а над самим основным полем.

В работе [1] А. Р. Кемер сформулировал не только проблему 1, но и следующую проблему ограниченности нильиндекса радикала относительно свободной алгебры.

ПРОБЛЕМА 2. Является ли радикал Джекобсона произвольной относительно свободной алгебры счетного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ нильидеалом ограниченного индекса?

Несложно показать, что из положительного решения проблемы 1 вытекает положительное решение проблемы 2. Таким образом, проблему 1 можно рассматривать как усиление проблемы 2. Полное решение проблемы 2 было получено автором в [5] для многообразий сложности $< p$ и в [6] в общем случае. В настоящей работе мы серьезно опираемся на теорему 3, которая была доказана автором в [7]. Ее доказательство основано на положительном решении проблемы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A – ассоциативная алгебра над полем характеристики $p > 0$, удовлетворяющая тождеству $f = 0$. Тогда если A порождается множеством $\{a_i, i \in I\}$ и любое слово от элементов a_i нильпотентно степени не выше t , то A является нильалгеброй ограниченного индекса N . При этом*

N зависит от характеристики p , тождества f и числа m (и не зависит от мощности множества I).

Если в теореме 3 предполагать алгебру A конечно порожденной, то эта теорема будет представлять собой одну из классических формулировок проблемы Куроша–Левицкого. Однако в формулировке теоремы 2 условия конечной порожденности алгебры A нет. Это выглядит довольно неожиданным: легко видеть, что над полями нулевой характеристики аналог теоремы 3 очевидным образом неверен даже в коммутативном случае.

Общая схема доказательства теоремы 1 сходна со схемой доказательства основной теоремы в работе [4], где проблема 1 решается для первичных нематричных многообразий. Однако при переходе от нематричного случая к произвольному появляется много дополнительных трудностей. Прежде всего они связаны с тем, что в полупростых частях конечномерных алгебр появляются клетки произвольного размера, а не только размера 1. Однако основные трудности связаны не с тем, что клетки имеют размер > 1 , а с тем, что эти клетки могут иметь разные размеры в одной алгебре.

Материал работы расположен следующим образом. В § 2 сформулированы некоторые нужные в дальнейшем результаты А. Р. Кемера о локальной представимости. В § 3 строится алгебра $\mathcal{B}$ и доказывается, что она является алгебраической алгеброй ограниченного индекса. В § 4 содержится ряд вспомогательных утверждений, на основе которых в § 5 доказывается, что алгебра $\mathcal{B}$ порождает заданное первичное многообразие с единицей. В § 6 доказывается теорема 2.

§ 2. Результаты А. Р. Кемера о локальной представимости

Рассмотрим счетное множество X и обозначим через $F\langle X \rangle$ свободную ассоциативную алгебру (без единицы), порожденную множеством X . Идеал тождеств некоторой алгебры A будем обозначать $T[A]$. Идеал Γ алгебры $F\langle X \rangle$ называется T -идеалом, если $\Gamma = T[A]$ для некоторой алгебры A .

T -идеал Γ называется T -первичным (а соответствующее ему многообразие называется *первичным*), если для произвольных T -идеалов Γ_1, Γ_2 из включения $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ следует, что или $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Над бесконечным полем T -идеал Γ является T -первичным тогда и только тогда, когда для произвольных полиномов $f = f(x_1, \dots, x_n), g = g(y_1, \dots, y_m)$, зависящих от непересекающихся наборов переменных, из включения $fg \in \Gamma$ следует, что или $f \in \Gamma$, или $g \in \Gamma$.

Конечномерная алгебра C над полем F называется *конечномерной классической алгеброй*, если C представима в виде прямой суммы подпространств $C = P \oplus J$, где $J = \text{Rad } C$ – радикал Джекобсона алгебры C , P является подалгеброй в C и $P \cong C/J$ – разложение Веддербарна–Мальцева; кроме того, алгебра P должна быть изоморфна прямой сумме матричных алгебр над полем F . Алгебра P называется *полупростой частью* алгебры C . Если $P = \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}$,

где M_{n_i} – алгебра матриц порядка n_i над полем F , то алгебра M_{n_i} называется *клеткой* алгебры C , а число n_i называется *размером* соответствующей клетки M_{n_i} . Положим $a(P) = n_1 + \dots + n_r$.

Фундаментальный результат А. Р. Кемера о локальной представимости состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой конечно порожденной PI-алгебры U над бесконечным полем F найдется такая конечномерная классическая алгебра C , что идеалы тождеств алгебр U и C совпадают.*

Эта теорема была доказана для полей нулевой характеристики в работе [8] (см. также [2]), а для бесконечных полей положительной характеристики – в работе [9].

Теорема 4 будет использоваться в работе следующим образом. Пусть Γ – произвольный нетривиальный T -идеал (т.е. $\Gamma \neq (0)$ и $\Gamma \neq F\langle X \rangle$). Обозначим $F_\Gamma^k = F\langle x_1, \dots, x_k \rangle / (\Gamma \cap F\langle x_1, \dots, x_k \rangle)$. Алгебра F_Γ^k является относительно свободной k -порожденной алгеброй в многообразии, соответствующем T -идеалу Γ . По теореме 4 существует такая конечномерная классическая алгебра C_k , что $T[F_\Gamma^k] = T[C_k]$.

Из этого следует, что алгебра C_k удовлетворяет следующему свойству: если полином $f = f(x_1, \dots, x_m)$ зависит от $m \leq k$ переменных и $f \in T[C_k]$, то $f \in \Gamma$. Таким образом, идеалы $T[C_k]$ аппроксимируют идеал Γ .

В работе [1] была доказана теорема об ограниченности размерностей полупростых частей алгебр C_k .

ТЕОРЕМА 5. *Для любого нетривиального T -идеала Γ найдется такая константа $m = m(\Gamma)$, что для некоторых конечномерных классических алгебр C_k с условием $T[F_\Gamma^k] = T[C_k]$ размерности полупростых частей алгебр C_k не превосходят m .*

В дальнейшем будем работать только с унитарно замкнутыми T -идеалами. Свободную ассоциативную алгебру с единицей счетного ранга будем обозначать $F^\# \langle X \rangle$. До конца работы зафиксируем T -первичный T -идеал Γ алгебры $F^\# \langle X \rangle$ и построим для него систему конечномерных классических алгебр $C_1, C_2, \dots$, удовлетворяющую теореме 5. Так как идеал Γ является унитарно замкнутым, то можно считать, что все алгебры C_k имеют единицу. Отметим, что в § 3 мы изменим выбор некоторых алгебр C_k .

§ 3. Построение алгебры $\mathcal{B}$

При каждом m существует только конечное число неизоморфных полупростых алгебр размерности $\leq m$, представимых в виде прямой суммы матричных алгебр. Воспользуемся теоремой 5: так как размерности полупростых частей алгебр C_k ограничены сверху некоторой константой m , то среди алгебр C_k , $k \in \mathbb{N}$, найдется бесконечно много алгебр $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots$, полупростые части которых изоморфны некоторой одной алгебре $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}$. Эту алгебру $\mathcal{P}$ зафиксируем. Каждая клетка M_{n_i} алгебры $\mathcal{P}$ имеет базис $\{e_{\alpha, \beta}^{(i)} \mid 1 \leq \alpha, \beta \leq n_i\}$,

состоящий из матричных единичек. Положим

$$\mathcal{F} = \{e_{\alpha,\beta}^{(i)} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq \alpha, \beta \leq n_i\}.$$

Если $k_i < k < k_{i+1}$, то изменим алгебру C_k , положив $C_k = C_{k_{i+1}}$. Для новой системы алгебр C_k , $k \in \mathbb{N}$, уже не обязательно выполняется условие $T[F_\Gamma^k] = T[C_k]$. Однако она по-прежнему удовлетворяет следующим двум свойствам:

- 1) $\Gamma \subseteq T[C_k]$;
- 2) если полином $f = f(x_1, \dots, x_m)$ зависит от $m \leq k$ переменных, то $f \in T[C_k]$ тогда и только тогда, когда $f \in \Gamma$.

Кроме того, полупростые части всех алгебр C_k теперь стали изоморфны алгебре $\mathcal{P}$. Несложные теоретико-множественные рассуждения позволяют считать, что каждая алгебра C_k имеет вид $C_k = \mathcal{P} \oplus \text{Rad } C_k$.

Обозначим $\mathcal{P}\langle X \rangle = \mathcal{P} * F^\sharp\langle X \rangle$ (свободное произведение алгебр с объединенной единицей). Будем считать, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}\langle X \rangle$ и $F^\sharp\langle X \rangle \subset \mathcal{P}\langle X \rangle$. Элементы алгебры $\mathcal{P}\langle X \rangle$ будем называть *обобщенными полиномами*. Как и для обычных полиномов из $F^\sharp\langle X \rangle$, для обобщенных полиномов из $\mathcal{P}\langle X \rangle$ определяются понятия степени по переменным из множества X , полиоднородности, однородных компонент и т.п.

Каждый элемент алгебры $\mathcal{P}\langle X \rangle$ однозначно представим в виде линейной комбинацией элементов

$$g_0 x_{i_1} g_1 x_{i_2} g_2 \cdots x_{i_n} g_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где $x_{i_j} \in X$, $g_0, \dots, g_{n+1} \in \mathcal{F}$. Будем называть элементы (1) *словами*. Степенью слова (1) будем называть число n . Слово (1) называется *несмешанным*, если все матричные единички $g_0, \dots, g_{n+1}$ принадлежат одной клетке алгебры $\mathcal{P}$; иначе слово (1) называется *смешанным*. Если алгебра $\mathcal{P}$ состоит из одной клетки, то все слова являются несмешанными. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество элементов вида (1) с условием $n > 0$.

Зафиксируем достаточно большое число Q (точное значение этого числа мы укажем позднее) и положим

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}\langle X \rangle / (\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle) + \mathcal{V}^{(Q)}),$$

где

$$\mathcal{V}^{(Q)} = \{v^Q \mid v \in \mathcal{V}\},$$

$$\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle) = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}\langle X \rangle\},$$

$(\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle) + \mathcal{V}^{(Q)})$ – идеал алгебры $\mathcal{P}\langle X \rangle$, порожденный множествами $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ и $\mathcal{V}^{(Q)}$.

По построению алгебра $\mathcal{B}$ удовлетворяет всем тождествам из T -идеала Γ , т.е. $\Gamma \subseteq T[\mathcal{B}]$. Так как $\Gamma \subseteq T[\mathcal{P}]$, то легко понять, что алгебра $\mathcal{B}$ представляется в виде $\mathcal{B} \cong \mathcal{P} \oplus \mathcal{B}'$, где $\mathcal{B}'$ – идеал алгебры $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$ – подалгебра в $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\mathcal{B}$ – алгебраическая алгебра ограниченного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал $\mathcal{I}$ алгебры $\mathcal{B}$, порожденный множеством $\pi(\mathcal{V})$, где $\pi: \mathcal{P}\langle X \rangle \rightarrow \mathcal{B}$ – естественный эпиморфизм. Факторалгебра $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ изоморфна конечномерной алгебре $\mathcal{P}$, поэтому является алгебраической алгеброй ограниченного индекса. Покажем, что идеал $\mathcal{I}$ является нильалгеброй ограниченного индекса, откуда немедленно будет следовать доказательство предложения.

Алгебра $\mathcal{I}$ порождается как линейное пространство множеством слов из $\pi(\mathcal{V})$. По определению идеала $(\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle) + \mathcal{V}^{(Q)})$ каждое слово $\pi(v) \in \pi(\mathcal{V})$ удовлетворяет в алгебре $\mathcal{I}$ равенству $\pi(v)^Q = 0$. Кроме того, $\mathcal{I}$ является PI -алгеброй, так как $\mathcal{I}$ – подалгебра PI -алгебры $\mathcal{B}$. Тем самым, выполнены все условия теоремы 3, из которой следует, что $\mathcal{I}$ – нильалгебра ограниченного индекса.

Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для достаточно больших Q идеал тождеств алгебры $\mathcal{B}$ совпадает с Γ .*

Утверждение теоремы 1 немедленно следует из предложений 1 и 2.

Оставшаяся часть работы практически полностью посвящена доказательству предложения 2. Само предложение будет доказано в § 5, а перед этим мы докажем ряд вспомогательных утверждений.

§ 4. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество диагональных матричных единиц алгебры $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{E} = \{e_{\alpha, \alpha}^{(i)} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq \alpha \leq n_i\}.$$

Множество $\mathcal{E}$ состоит из попарно ортогональных (нецентральных) идемпотентов.

Пусть Γ' – любой унитарно замкнутый T -идеал в $F^\sharp\langle X \rangle$. Если A – алгебра с единицей, то обозначим

$$\Gamma'(A) = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma', a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

Ясно, что $\Gamma'(A)$ является идеалом в A .

Отметим некоторые простые свойства идеала $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, аналогичные свойствам T -идеала Γ' . Во-первых, идеал $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ инвариантен относительно подстановок вместо переменных произвольных элементов из $\mathcal{P}\langle X \rangle$. Во-вторых, если $\hat{f} \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, то каждая полиоднородная компонента обобщенного полинома $\hat{f}$ тоже лежит в $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Это доказывается при помощи стандартных рассуждений, связанных с определителем Вандермонда и бесконечностью поля F .

Зафиксируем $x \in X$, $e \in \mathcal{E}$, $\tilde{e} \in \mathcal{F}$ и рассмотрим в алгебре $F^\sharp\langle X \rangle$ полином вида

$$u_0 w_0 u_1 w_1 u_2 \cdots u_k w_k u_{k+1}, \quad k \geq 1,$$

где u_i – слова от переменных из множества X (возможно, пустые), не зависящие от x , w_i – длинные коммутаторы от переменных из множества X . Подставим в этот полином $x = ex\tilde{e}e$, вместо переменных, входящих в коммутаторы $w_1, \dots, w_k$, подставим элементы из подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$, не зависящие от x , а вместо всех других переменных подставим произвольные элементы алгебры $\mathcal{P}\langle X \rangle$, не зависящие от x . Если некоторый обобщенный полином $\hat{f} = \hat{f}(ex\tilde{e}e)$ представляется в виде линейной комбинации таких слагаемых, то будем говорить, что в полином $\hat{f}$ слово $ex\tilde{e}e$ входит в виде коммутаторов с элементами подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$.

Пусть полиоднородный обобщенный полином $\hat{f}(x) = \hat{f}(x, y, \dots)$ удовлетворяет свойству $\hat{f}(x_1 + x_2) \equiv \hat{f}(x_1) + \hat{f}(x_2) \pmod{\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)}$. В этом случае будем называть $\hat{f}$ квазилинейным по переменной x по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Несложно показать, что тогда $\deg_x(\hat{f}) = p^\gamma$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{N}_0$. Если обобщенный полином квазилинеен по всем переменным, то будем называть его квазилинейным.

ЛЕММА 1. Пусть Γ' – любой T -идеал в $F^\sharp\langle X \rangle$, обобщенный полином $\hat{h}(x)$ степени $d > 1$ по x квазилинеен по x по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ и зависит, возможно, от других переменных. Допустим, что $\hat{h}(x)$ представляется по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ в виде

$$\hat{h}(x) \equiv \sum_{k=0}^d \hat{w}ze(ex\tilde{e}e)^k \hat{\theta}_k(ex\tilde{e}e),$$

где $e \in \mathcal{E}$, $\tilde{e} \in \mathcal{F}$, $\hat{w} \in \mathcal{P}\langle X \rangle$, $z \in X$, $\hat{h}(x)$ линеен по z , а в обобщенные полиномы $\hat{\theta}_k(ex\tilde{e}e)$ степеней $d - k$ по x слово $ex\tilde{e}e$ входит только в виде коммутаторов с элементами из подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$. Тогда:

- а) при $1 \leq k \leq d - 1$ выполнено включение $\hat{w}ze\hat{\theta}_k(ex\tilde{e}e) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$;
- б) по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ имеет место равенство

$$\hat{h}(x) \equiv \hat{w}ze\hat{\theta}_0(ex\tilde{e}e) + \hat{w}ze(ex\tilde{e}e)^d \hat{\theta}_d(ex\tilde{e}e).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{e}e = 0$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому будем рассматривать случай $\tilde{e}e \neq 0$. Понятно, что тогда e и $\tilde{e}$ лежат в одной клетке алгебры $\mathcal{P}$ и $e = e_{\alpha, \alpha}^{(i)}$, $\tilde{e} = e_{\beta, \alpha}^{(i)}$. Положим $\tilde{e}_1 = e_{\alpha, \beta}^{(i)}$, тогда $(ex\tilde{e}e)|_{x=\tilde{e}_1} = e$. Обозначим для краткости $\hat{x} = ex\tilde{e}e$. Так как обобщенный полином $\hat{h}(x)$ квазилинеен по x по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, то $d = p^\gamma$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{N}$. Поскольку в обобщенный полином $\hat{\theta}_k(ex\tilde{e}e)$ слово $ex\tilde{e}e$ входит только в виде коммутаторов с элементами из подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$, то

$$\hat{\theta}_k(\hat{x})|_{x=x+\tilde{e}_1} = \hat{\theta}_k(ex\tilde{e}e + e) = \hat{\theta}_k(\hat{x}), \quad 0 \leq k \leq d.$$

С учетом этого имеем по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$

$$\begin{aligned} \hat{h}(x)|_{x=x+\tilde{e}_1} &\equiv \sum_{k=0}^{p^\gamma} \hat{w}ze(\hat{x} + e)^k \hat{\theta}_k(\hat{x}) \\ &= \hat{w}ze(\hat{x})^0 \hat{\theta}_0(\hat{x}) + \hat{w}ze(\hat{x})^{p^\gamma} \hat{\theta}_{p^\gamma}(\hat{x}) + \hat{w}ze\hat{\theta}_{p^\gamma}(\hat{x}) + \sum_{k=1}^{p^\gamma-1} \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \hat{w}ze(\hat{x})^l \hat{\theta}_k(\hat{x}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{p^\gamma} \widehat{wze}(\widehat{x})^k \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) + \widehat{wze} \widehat{\theta}_{p^\gamma}(\widehat{x}) + \sum_{k=1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \right) \\
&= \widehat{h}(x) + \widehat{h}(x)|_{x=\tilde{e}_1} + \sum_{k=1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \right).
\end{aligned}$$

Так как $\widehat{h}(x)$ квазилинеен по x по модулю $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, то

$$\sum_{k=1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \right) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle). \quad (2)$$

Докажем, что для всех $1 \leq k \leq d-1$ имеет место включение $\widehat{wze} \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Если это не так, то обозначим через k' максимальное число $1 \leq k' \leq d-1$, для которого $\widehat{wze} \widehat{\theta}_{k'}(\widehat{x}) \notin \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Так как при $k > k'$ выполнено $\widehat{wze} \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, то при подстановке $z = z(\widehat{x})^l$ получаем, что для $k > k'$ при всех $l \geq 0$ выполнено $\widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Поэтому

$$\sum_{k=k'+1}^{d-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \right) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle). \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что

$$\widehat{h}_0(x) = \sum_{k=1}^{k'} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \right) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle).$$

Так как $\deg_x(\widehat{\theta}_k(\widehat{x})) = d - k$, то $\deg_x(\widehat{wze}(\widehat{x})^l \widehat{\theta}_k(\widehat{x})) = d - k + l$. Если $l > 0$ или $k < k'$, то $d - k + l > d - k'$. Поэтому однородная компонента степени $d - k'$ по x полинома $\widehat{h}_0(x)$ совпадает с $\widehat{wze} \widehat{\theta}_{k'}(\widehat{x})$. Из однородности идеала $\Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ получаем, что $\widehat{wze} \widehat{\theta}_{k'}(\widehat{x}) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, что противоречит выбору k' . Пункт а) леммы доказан.

Пункт б) немедленно вытекает из а). В самом деле, подставляя $z = z \cdot \widehat{x}^k$, получаем из п. а), что при $1 \leq k \leq d-1$ выполнено $\widehat{wze}(\widehat{x})^k \widehat{\theta}_k(\widehat{x}) \in \Gamma'(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, откуда сразу же следует п. б).

Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к определению некоторых параметров T -идеала Γ .

Пусть некоторая конечномерная классическая алгебра C имеет разложение Веддербарна–Мальцева $C = P \oplus J$. Обозначим через t индекс нильпотентности идеала J (т.е. $J^t = (0)$); если $P = \bigoplus_i M_{n_i}$, то положим $l = a(P) = \sum_i n_i$. Так как P является алгебраической алгеброй степени l , то несложно показать (см. [2; лемма 2.1]), что алгебра C удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_{l,t}(x_1, \dots, x_t; y_1, \dots, y_l) = & \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} x_1^{\sigma_1(1)} \dots x_t^{\sigma_t(1)} y_1 \\
& \times x_1^{\sigma_1(2)} \dots x_t^{\sigma_t(2)} y_2 \dots y_l x_1^{\sigma_1(l+1)} \dots x_t^{\sigma_t(l+1)}.
\end{aligned}$$

Подставив в это тождество $x_1 = x_2 = \dots = x_t = x$, получаем, что в C выполнено тождество

$$\begin{aligned} g_{l,t}(x; y_1, \dots, y_l) \\ = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} x^{\sigma_1(1)+\dots+\sigma_t(1)} y_1 x^{\sigma_1(2)+\dots+\sigma_t(2)} y_2 \\ \times x^{\sigma_1(3)+\dots+\sigma_t(3)} y_3 \dots y_l x^{\sigma_1(l+1)+\dots+\sigma_t(l+1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вернемся к T -идеалу Γ . Рассмотрев в качестве алгебры C алгебру $C_{a(\mathcal{P})+1}$, получаем, что $C_{a(\mathcal{P})+1}$ удовлетворяет тождеству $g_{a(\mathcal{P}),t} = 0$ для некоторого t . Так как тождество $g_{a(\mathcal{P}),t} = 0$ зависит от $(a(\mathcal{P}) + 1)$ переменных, то полином $g_{a(\mathcal{P}),t}$ принадлежит T -идеалу Γ .

До конца работы зафиксируем минимальное натуральное число l , для которого T -идеал Γ содержит полином $g_{l,t}$ для некоторого $t = t(l)$. Несложно видеть, что из тождества $g_{l,t} = 0$ следуют все тождества $g_{l',t'} = 0$ для $l' \geq l, t' \geq t$. Поэтому T -идеал Γ содержит все полиномы $g_{l,t'}$ при $t' \geq t$.

Обозначим через s наименьшее натуральное число, для которого $p^s \geq t \cdot l$. Положим $\mathcal{B}_0 = \mathcal{P}\langle X \rangle / \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, $\Gamma_1 = T[\mathcal{B}]$. Ясно, что $\Gamma \subseteq T[\mathcal{B}_0] \subseteq \Gamma_1$. Далее мы исключим из рассмотрения случай $l = 1$ (вернемся к нему в конце § 5). Это связано с тем, что при $l = 1$ не определены полиномы $g_{l-1,c}$, которые мы будем многократно использовать. Впрочем, при $l = 1$ все доказываемые ниже леммы (за исключением лемм 4 и 9) становятся тривиальными.

В четырех следующих леммах проясняется роль числа l .

ЛЕММА 2. Пусть $\{e_1, \dots, e_{l+1}\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор (упорядоченное множество) попарно различных идемпотентов. Тогда в алгебре $\mathcal{B}_0$ выполнено равенство

$$e_1 b_1 e_2 b_2 \dots b_l e_{l+1} = 0 \quad \forall b_1, \dots, b_l \in \mathcal{B}_0.$$

Аналогично, в любой алгебре C_k имеет место равенство

$$e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0 \quad \forall c_1, \dots, c_l \in C_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в тождество (4) $y_i = e_i b_i e_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$, $x = \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_i e_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in F$. В результате такой подстановки получим

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) e_1 b_1 e_2 b_2 \dots b_l e_{l+1} = 0, \quad (5)$$

где

$$f(t_1, \dots, t_{l+1}) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} t_1^{\sigma_1(1)+\dots+\sigma_t(1)} \dots t_{l+1}^{\sigma_1(l+1)+\dots+\sigma_t(l+1)}$$

– многочлен от коммутирующих переменных $t_1, \dots, t_{l+1}$. Очевидно, что этот многочлен отличен от нуля. Следовательно, с учетом бесконечности поля F для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in F$ будет выполнено $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) \neq 0$. Поэтому из равенства (5) следует, что $e_1 b_1 e_2 b_2 \dots b_l e_{l+1} = 0$.

Аналогично доказывается равенство $e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0$ в алгебре C_k .

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $e, e_1, \dots, e_l \in \mathcal{E}$, где идемпотенты $e_1, \dots, e_l$ попарно различны. Тогда для любых $b_0, b_1, \dots, b_l, b, c \in \mathcal{B}_0$ в алгебре $\mathcal{B}_0$ выполняется равенство

$$b_0 e_1 b_1 e_2 b_2 \dots b_{l-1} e_l b_l \cdot [ebe, (ece)^{p^s}] = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $e \notin \{e_1, \dots, e_l\}$, то равенство (6) выполняется по лемме 2. Поэтому будем считать, что для некоторого $1 \leq i \leq l$ идемпотент e совпадает с e_i . Прежде всего докажем, что алгебра $\mathcal{B}_0$ удовлетворяет обобщенному тождеству

$$e_1 b_1 \dots b_{i-1} \cdot e_i \cdot b_i e_{i+1} \dots e_l b_l \cdot (e_i c e_i)^{p^s} = e_1 b_1 \dots b_{i-1} \cdot (e_i c e_i)^{p^s} \cdot b_i e_{i+1} \dots e_l b_l \cdot e_i. \quad (7)$$

Для этого сделаем следующую подстановку в тождество (4): $y_i = e_i b_i e_{i+1}$, $i = 1, \dots, l-1$; $y_l = e_l b_l e_i$; $x = \lambda_1 e_1 + \dots + e_i c e_i + \dots + \lambda_l e_l$, $\lambda_j \in F$, $j = 1, \dots, l-1$, $i+1, \dots, l$. Отметим, что $x^m = \lambda_1^m e_1 + \dots + (e_i c e_i)^m + \dots + \lambda_l^m e_l$. Следовательно, при такой подстановке в (4) получается обобщенное тождество алгебры $\mathcal{B}_0$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} \lambda_1^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(1)} \dots \lambda_{i-1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i-1)} \lambda_{i+1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i+1)} \dots \lambda_l^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(l)} \\ \times e_1 b_1 \dots e_{i-1} b_{i-1} \cdot (e_i c e_i)^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i)} \cdot b_i e_{i+1} \dots e_l b_l e_i \cdot (e_i c e_i)^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(l+1)} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим для краткости $u = e_1 b_1 \dots e_{i-1} b_{i-1} e_i$, $v = b_i e_{i+1} \dots e_l b_l e_i$, тогда $u = u e_i$, $v = v e_i$. Заметим, что в обобщенное тождество (8) слагаемое

$$u(e_i c e_i)^{\sum_{\alpha} 1} v(e_i c e_i)^{\sum_{\alpha} (l+1)} = u(e_i c e_i)^t v(e_i c e_i)^{(l+1)t}$$

входит с коэффициентом

$$\sum (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} \lambda_1^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(1)} \dots \lambda_{i-1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i-1)} \lambda_{i+1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i+1)} \dots \lambda_l^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(l)},$$

где суммирование ведется по всем наборам перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}$, для которых

$$\sigma_1(i) = \dots = \sigma_t(i) = 1, \quad \sigma_i(l+1) = \dots = \sigma_t(l+1) = l+1.$$

Соответствующий многочлен

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_l) \\ = \sum (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} t_1^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(1)} \dots t_{i-1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i-1)} t_{i+1}^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(i+1)} \dots t_l^{\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}(l)} \end{aligned}$$

от коммутирующих переменных $t_1, \dots, t_l$ является ненулевым, так как моном

$$t_1^{2t} t_2^{3t} \dots t_{i-1}^{it} t_{i+1}^{(i+1)t} \dots t_l^{(l+1)t}$$

входит в него с ненулевым коэффициентом $((-1)^{\sigma})^t$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & l & l+1 \\ 2 & \dots & i & 1 & i+1 & \dots & l & l+1 \end{pmatrix}.$$

Так как поле F бесконечно, то полиоднородная компонента степени $t + (l+1)t$ по переменной c обобщенного тождества (8) сама является обобщенным тождеством алгебры $\mathcal{B}_0$. Из бесконечности поля F также следует, что при некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l \in F$ будет выполнено $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l) \neq 0$. Поэтому при этом наборе $\lambda_j \in F$ полиоднородная компонента степени $t + (l+1)t$ по c обобщенного тождества (8) примет вид

$$\sum_{k=0}^{lt} \alpha_k u(e_i c e_i)^{k+t} v(e_i c e_i)^{(l+1)t-k} = 0,$$

где $\alpha_0 \neq 0$.

Используя базис Шпехта, это обобщенное тождество можно записать в форме

$$\sum_{k=0}^{lt} \beta_k u(e_i c e_i)^{k+t} [v, \underbrace{e_i c e_i, \dots, e_i c e_i}_{lt-k}] (e_i c e_i)^t = 0, \quad (9)$$

где $\beta_0 \neq 0$. Рассмотрим теперь максимальное число $m \geq 0$, для которого $\beta_m \neq 0$. Тогда $\beta_{m+k} = 0$ при $k \in \{1, 2, \dots, lt - m\}$. Подставим в (9) $c = c + 1$ и выделим полиоднородную компоненту степени $lt - m$ по c . Эта компонента будет иметь вид

$$\beta_m u[v, \underbrace{e_i c e_i, \dots, e_i c e_i}_{lt-m}] = 0, \quad (10)$$

причем $\beta_m \neq 0$. Так как $v = e_i b_i \dots b_l e_i$, то подстановками вида $b_i = (e_i c e_i)^\alpha b_i$, $b_l = b_l (e_i c e_i)^\beta$ и взятием линейных комбинаций из слова v можно получить обобщенный полином

$$[v, \underbrace{e_i c e_i, \dots, e_i c e_i}_{p^s - (lt-m)}].$$

Поэтому следствием обобщенного тождества (10) является обобщенное тождество

$$u[v, \underbrace{e_i c e_i, \dots, e_i c e_i}_{p^s}] = u[v, (e_i c e_i)^{p^s}] = 0.$$

Последнее обобщенное тождество, рассматриваемое как равенство в алгебре $\mathcal{B}_0$, с учетом $u = u e_i$ и $v = v e_i$ в точности представляет собой равенство (7), записанное в иных обозначениях.

Итак, обобщенное тождество (7) доказано. Равенство (6) сразу же вытекает из (7). В самом деле, применив два раза (7), получаем

$$\begin{aligned} & b_0 u e_i v \cdot e_i b e_i (e_i c e_i)^{p^s} - b_0 u e_i v \cdot (e_i c e_i)^{p^s} e_i b e_i \\ & = b_0 u (e_i c e_i)^{p^s} v \cdot e_i b e_i \cdot e_i - b_0 u (e_i c e_i)^{p^s} v \cdot e_i \cdot e_i b e_i = 0. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Неформальный смысл леммы 3 состоит в следующем. Для каждого $e \in \mathcal{E}$ рассмотрим подалгебру $e \mathcal{B}_0 e$. Тогда эту алгебру в некотором смысле можно

считать p^s -энгелевой. Точнее говоря, препятствие к p^s -энгелевости аннулируется (в алгебре $\mathcal{B}_0$) умножением на произвольное слово вида $b_0 e_1 b_1 e_2 b_2 \cdots b_{l-1} e_l b_l$, где $e_1, \dots, e_l$ – попарно различные идемпотенты из $\mathcal{E}$.

ЛЕММА 4. *Найдется такое число Q_1 , что для любого несмешанного слова $v \in \mathcal{V}$, для произвольных $b', b'', b_0, \dots, b_l \in \mathcal{P}\langle X \rangle$ и попарно различных $e_1, \dots, e_l \in \mathcal{E}$ элемент*

$$b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot b' v^{Q_1} b''$$

можно представить по модулю $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ в виде линейной комбинации элементов

$$b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot c' w^{p^s} c'', \quad (11)$$

где $c', c'' \in \mathcal{P}\langle X \rangle$, а каждое слово $w \in \mathcal{V}$ имеет вид $w = ex\tilde{e}e$, $x \in X$, $e \in \mathcal{E}$, $\tilde{e} \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v^2 = 0$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому исключим этот тривиальный случай из дальнейшего рассмотрения.

Так как слово v несмешанное и $v^2 \neq 0$, то v можно представить в виде

$$v = e_{\alpha, \beta} x e_{\gamma, \delta} v' e_{\theta, \alpha},$$

где $e_{\alpha, \beta}, e_{\gamma, \delta}, e_{\theta, \alpha}$ – матричные единицы из одной клетки алгебры $\mathcal{P}$. Перепишем это равенство в виде

$$v = e_{\alpha, \beta} x e_{\gamma, \delta} v e_{\theta, \alpha} = e_{\alpha, \beta} \cdot e_{\beta, \beta} x e_{\gamma, \beta} e_{\beta, \beta} \cdot e_{\beta, \beta} e_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha}$$

и обозначим $e = e_{\beta, \beta}$, $\tilde{e} = e_{\gamma, \beta}$. Имеем

$$v^{Q_1} = (e_{\alpha, \beta})(e x \tilde{e} e \cdot e e_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha} e_{\alpha, \beta} e) \cdots (e x \tilde{e} e \cdot e e_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha} e_{\alpha, \beta} e) \cdot (e x \tilde{e} e \cdot e e_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha}).$$

Положим $w = ex\tilde{e}e$, $u = ee_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha} e_{\alpha, \beta} e$, $v'_0 = e_{\alpha, \beta}$, $v''_0 = ex\tilde{e}e \cdot ee_{\beta, \delta} v' e_{\theta, \alpha}$. Тогда $w, u \in \mathcal{P}\langle X \rangle e$ и $v^{Q_1} = v'_0 (wu)^{Q_1-1} v''_0$.

Воспользовавшись базисом Шпехта, представим элемент

$$b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot b' v^{Q_1} b'' = b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot b' v'_0 (wu)^{Q_1-1} v''_0 b''$$

в виде линейной комбинации слагаемых вида

$$b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot b' v'_0 \left(w^\alpha u^\beta \prod_i \omega_{2,i} \prod_i \omega_{3,i} \cdots \prod_i \omega_{\mu,i} \right) v''_0 b'', \quad (12)$$

где $\omega_{k,i}$ – коммутатор длины k от элементов w и u . При этом каждый коммутатор $\omega_{k,i}$ совпадает с одним из коммутаторов $\omega_k^{(\nu)}$, где

$$\omega_k^{(\nu)} = [w, u, \underbrace{w, \dots, w}_\nu, \underbrace{u, \dots, u}_{k-\nu-2}], \quad \nu = 0, 1, \dots, k-2,$$

и в произведении $\prod_i \omega_{k,i}$ коммутаторы упорядочены, т.е.

$$\prod_i \omega_{k,i} = (\omega_k^{(0)})^{\alpha_0} \cdots (\omega_k^{(k-2)})^{\alpha_{k-2}}, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_{k-2} \geq 0.$$

Если выбрать Q_1 так, чтобы

$$Q_1 - 1 = (p^s - 1) + (2p^s) + \left((R_0 - 1) \sum_{j=2}^{2p^s} (j - 1) \right) + 1,$$

где число R_0 будет определено позднее, то всегда будет иметь место один из трех следующих случаев.

Случай 1. $\alpha \geq p^s$. Тогда произведение (12) имеет нужный вид (11).

Случай 2. Один из коммутаторов $\omega_{k,i}$ в произведении (12) имеет длину больше чем $2p^s = 2 + (p^s - 1) + (p^s - 1)$. Тогда в $\omega_{k,i}$ идет подряд или не менее p^s элементов w , или не менее p^s элементов u . В любом случае этот коммутатор можно представить в виде линейной комбинации слагаемых

$$d'[b, c^{p^s}]d'',$$

где $b, c, d', d'' \in e\mathcal{P}\langle X \rangle e$. Из леммы 3 следует, что произведение (12) будет равно нулю по модулю $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$.

Случай 3. В произведение (12) один из коммутаторов $\omega_{k,i}$ входит в степени $\geq R_0$. Тогда (12) будет иметь вид

$$b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l \cdot b'_0 (\omega_{k,i})^{R_0} b''_0. \quad (13)$$

Покажем, что при достаточно большом R_0 за счет умножения слева на $b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l$ произведение (13) также будет равно нулю по модулю $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$.

Для этого рассмотрим двусторонний идеал $\mathcal{W}$ алгебры $\mathcal{B}_0$, порожденный словом $b_0 e_1 b_1 \cdots e_l b_l$, и двусторонний идеал $\mathcal{I}$ алгебры $e\mathcal{B}_0 e$, порожденный множеством $\{[ebe, (ece)^{p^s}] \mid b, c \in \mathcal{B}_0\}$. По лемме 3 в алгебре $\mathcal{B}_0$ выполнено равенство $\mathcal{W} \cdot \mathcal{I} = 0$. Алгебра $e\mathcal{B}_0 e / \mathcal{I}$ является p^s -энгелевой. Из положительного решения проблемы 2 следует, что относительно свободная алгебра счетного ранга нематричного многообразия, задаваемого тождеством p^s -энгелевости, имеет ограниченный нильиндекс радикала; обозначим этот нильиндекс через R_0 . Тогда коммутаторный идеал алгебры $e\mathcal{B}_0 e / \mathcal{I}$ также имеет ограниченный нильиндекс R_0 . В частности, в алгебре $e\mathcal{B}_0 e / \mathcal{I}$ выполнено равенство $(\omega_{k,i})^{R_0} \equiv 0$. Это означает, что $(\omega_{k,i})^{R_0} \in \mathcal{I}$, откуда $\mathcal{W} \cdot (\omega_{k,i})^{R_0} = 0$ в алгебре $\mathcal{B}_0$. Тем самым, элемент (13) равен нулю по модулю $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$.

Лемма 4 доказана.

Далее нам потребуется ввести несколько новых определений. Рассмотрим множество идемпотентов $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ и обозначим через $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ двусторонний идеал алгебры $\mathcal{P}$, порожденный множеством $\{e_1, \dots, e_l\}$. Ясно, что $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ – это наименьшая по включению подалгебра алгебры $\mathcal{P}$, являющаяся суммой некоторых клеток алгебры $\mathcal{P}$ и содержащая все идемпотенты $e_1, \dots, e_l$. Будем обозначать размерность алгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ через $\dim\{e_1, \dots, e_l\}$. Очевидно, что

$$\dim\{e_1, \dots, e_l\} \leq \dim \mathcal{P}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор попарно различных идемпотентов. Если в алгебре C_k для некоторых $c_1, \dots, c_{l-1} \in C_k$ выполнено

$$e_1 c_1 e_2 c_2 \cdots c_{l-1} e_l \neq 0,$$

то набор $\{e_1, \dots, e_l\}$ будем называть k -полным.

ЛЕММА 5. а) Если $\{e_1, \dots, e_l\}$ – k -полный набор, то множество $\{e_1, \dots, e_l\}$ является множеством всех диагональных единичек алгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$.

б) Пусть $k \geq l$, c – индекс нильпотентности $\text{Rad } C_k$. Тогда любое значение полинома $g_{l-1,c}$ на алгебре C_k является линейной комбинацией элементов вида $c_0 e_1 c_1 e_2 c_2 \cdots c_{l-1} e_l c_l$, где $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор попарно различных идемпотентов, $c_0, \dots, c_l \in C_k$.

в) При $k \geq l$ в алгебре C_k существует хотя бы один k -полный набор идемпотентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Для каждой диагональной матричной единицы $e_{k,k} \in M_n$ найдется такое произведение $\Pi_n(e_{k,k})$ элементов алгебры M_n , что оно равно $e_{k,k}$ и в него входят все диагональные матричные единицы $e_{j,j}$, $j = 1, \dots, n$. Предположим, что $e_1 c_1 e_2 c_2 \cdots c_{l-1} e_l \neq 0$ в алгебре C_k и в набор $\{e_1, \dots, e_l\}$ не входит некоторая диагональная единица алгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$. Тогда заменим в произведении $e_1 c_1 e_2 c_2 \cdots c_{l-1} e_l \neq 0$ каждую диагональную матричную единицу $e_i = e_{k_i, k_i}^{(\nu_i)}$, $i = 1, \dots, l$, на $\Pi_{n_{\nu_i}}(e_{k_i, k_i})$. Получим тот же самый ненулевой элемент, однако теперь он в качестве сомножителей содержит все диагональные единицы подалгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$, т.е. он содержит $> l$ попарно различных сомножителей из $\mathcal{E}$. Это противоречит лемме 2.

б) Так как

$$\{g_{l-1,c}(c_0; c_1, \dots, c_{l-1}) \mid c_i \in C_k\} \subseteq \{\tilde{g}_{l-1,c}(b_1, \dots, b_c; c_1, \dots, c_{l-1}) \mid c_i, b_i \in C_k\},$$

то достаточно показать, что любое значение полинома $\tilde{g}_{l-1,c}$ на алгебре C_k представимо в требуемом виде.

Пусть множество $I = \{e^{(1)}, \dots, e^{(r)}\}$ состоит из единиц клеток алгебры $\mathcal{P}$. Для каждого $\emptyset \neq J \subseteq I$ рассмотрим алгебру $C_J = \sum_{e^{(i)}, e^{(j)} \in J} e^{(i)} C_k e^{(j)} \subseteq C_k$; C_J – конечномерная классическая алгебра, полупростая часть $\mathcal{P}_J$ которой совпадает с $\sum_{e^{(j)} \in J} e^{(j)} \mathcal{P} e^{(j)}$, $\text{Rad } C_J \subseteq \text{Rad } C_k$.

Докажем, что если $a(\mathcal{P}_J) < l$, то $\tilde{g}_{l-1,c}$ является тождеством алгебры C_J . Для этого заметим, что $\mathcal{P}_J$ является алгебраической алгеброй степени $a(\mathcal{P}_J) \leq l - 1$. Это означает, что для каждого $d \in \mathcal{P}_J$ элементы $d, d^2, \dots, d^l$ линейно зависимы. Представим произвольные элементы $b_1, \dots, b_l \in C_J$ в виде $b_i = d_i + r_i$, $d_i \in \mathcal{P}_J$, $r_i \in \text{Rad } C_J$. Тогда $b_i^j = d_i^j + r_i^{(j)}$, где $r_i^{(j)} \in \text{Rad } C_J$. Рассмотрим полином

$$f = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_l} (-1)^{\sigma_1} \cdots (-1)^{\sigma_t} x_1^{(\sigma_1(1))} \cdots x_c^{(\sigma_c(1))} y_1 \times x_1^{(\sigma_1(2))} \cdots x_c^{(\sigma_c(2))} y_2 \cdots x_1^{(\sigma_1(l))} \cdots x_c^{(\sigma_c(l))}.$$

Понятно, что $\tilde{g}_{l-1,c}$ получается из полинома f при подстановке $x_i^{(j)} = (x_i)^j$. Элемент $\tilde{g}_{l-1,c}(b_1, \dots, b_c; c_1, \dots, c_{l-1})$ является линейной комбинацией элементов вида

$$f(a_i^{(j)}; c_1, \dots, c_{l-1}), \quad a_i^{(j)} \in \{d_i^j, r_i^{(j)}\}, \quad i = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, l. \quad (14)$$

Если для некоторого $i \in \{1, \dots, c\}$ множество $\{a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(l)}\}$ совпадает с множеством $\{d_i^1, \dots, d_i^l\}$, то элемент (14) равен нулю, так как полином f кососимметричен по переменным $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(l)}$, а элементы $d_i^1, \dots, d_i^l$ линейно зависимы.

В противном случае для каждого $j \in \{1, \dots, c\}$ множество $\{a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(l)}\}$ содержит хотя бы один элемент из $\text{Rad } C_J$. Тогда элемент (14) принадлежит множеству $(\text{Rad } C_J)^c \subseteq (\text{Rad } C_k)^c = (0)$, поэтому он равен нулю. Тем самым, доказано, что $\tilde{g}_{l-1,c} \in T[C_J]$ при $a(\mathcal{P}_J) < l$.

Элемент $\tilde{g}_{l-1,c}(b_1, \dots, b_c; c_1, \dots, c_{l-1})$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $g_{(\rho)}(a_1, \dots, a_{k_{(\rho)}})$, где $g_{(\rho)}(x_1, \dots, x_{k_{(\rho)}})$ – частичная линейаризация полинома $\tilde{g}_{l-1,c}$, а каждый элемент a_k имеет вид $a_k = e_{\alpha_k, \alpha_k}^{(i_k)} a'_k e_{\beta_k, \beta_k}^{(j_k)}$. Если все элементы a_k лежат в некоторой подалгебре C_J с условием $a(P_J) < l$, то $g_{(\rho)}(a_1, \dots, a_{k_{(\rho)}}) = 0$, так как $g_{(\rho)}(x_1, \dots, x_{k_{(\rho)}}) = 0$ является тождеством алгебры C_J . Иначе заменим каждый элемент $e_{k_i, k_i}^{(\nu_i)} \in \{e_{\alpha_k, \alpha_k}^{(i_k)}, e_{\beta_k, \beta_k}^{(j_k)}\}$ на произведение $\Pi_{n_{\nu_i}}(e_{k_i, k_i})$. Тогда элемент (14) очевидным образом будет представим в виде линейной комбинации слагаемых требуемого вида.

в) По построению $g_{l-1,c} \notin \Gamma$ и полином $g_{l-1,c}$ зависит от l переменных. Так как $k \geq l$, то $g_{l-1,c} \notin T[C_k]$. Поэтому полином $g_{l-1,c}$ принимает на алгебре C_k ненулевое значение. По п.б) это значение является линейной комбинацией слагаемых вида $c_0 e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_{l-1} e_l c_l$, где $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор попарно различных идемпотентов, $c_0, \dots, c_l \in C_k$. Следовательно, одно из таких слагаемых должно быть ненулевым. Тогда соответствующий набор $\{e_1, \dots, e_l\}$ является k -полным.

Лемма 5 доказана.

Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \in F\langle X \rangle$ – произвольный полином, полилинейный по переменным $x_1, \dots, x_n$. Для упорядоченного набора переменных $\Lambda = \{x_1, \dots, x_n\}$ положим

$$S_\Lambda f = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Если $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ – попарно непересекающиеся наборы переменных и полином $f(x_1, \dots, x_m)$ линеен по переменным из множества $\bigcup_{i=1}^k \Lambda_i$, то по индукции определяются полиномы $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \dots S_{\Lambda_k} f = S_{\Lambda_1} (S_{\Lambda_2} \dots S_{\Lambda_k} f)$.

Рассмотрим матричную алгебру M_n над полем F и зафиксируем попарно различные переменные $x_{i,j}, \tilde{x}_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$. Следуя [10], определим слово $\omega_n \in F\langle X \rangle$ по формуле

$$\begin{aligned} \omega_n &= \omega_n(\dots, x_{i,j}, \dots; \dots, \tilde{x}_{i,j}, \dots) \\ &= \tilde{x}_{1,1} x_{1,1} \tilde{x}_{1,1} x_{1,2} \tilde{x}_{2,1} x_{1,3} \tilde{x}_{3,1} \dots x_{1,n} \tilde{x}_{n,2} x_{2,1} \tilde{x}_{1,2} x_{2,2} \tilde{x}_{2,2} \dots \\ &\quad \times x_{n,1} \tilde{x}_{1,n} x_{n,2} \tilde{x}_{2,n} x_{n,3} \tilde{x}_{3,n} \dots x_{n,n} \tilde{x}_{n,1}. \end{aligned}$$

Основное свойство слова ω_n состоит в следующем. Подставим в слово ω_n вместо переменных $\tilde{x}_{i,j}$ матричные единицы $e_{i,j} \in M_n$, а вместо переменных $x_{i,j}$ подставим произвольные матричные единицы $a_{i,j} \in \{e_{\alpha,\beta} \mid 1 \leq \alpha, \beta \leq n\}$. Тогда значение слова ω_n при такой подстановке равно $e_{1,1}$, если $a_{i,j} = e_{i,j}$ при всех $1 \leq i, j \leq n$, и равно нулю во всех остальных случаях. Отметим, что слово ω_n полилинейно по переменным $x_{i,j}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положим $k_0 = 2 \dim \mathcal{P} + 1$. При $k \geq k_0$ для всех k -полных наборов $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ рассмотрим числа $\dim\{e_1, \dots, e_l\}$. Выберем среди них самое большое число и обозначим его $L(k)$. Положим $L = \max_{k \geq k_0} L(k)$. Набор попарно различных идемпотентов $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ будем называть *насыщенным*, если $\dim\{e_1, \dots, e_l\} = L$.

В следующей лемме доказываются некоторые свойства насыщенных наборов идемпотентов.

ЛЕММА 6. Пусть $k \geq k_0$, c – индекс nilпотентности $\text{Rad } C_k$.

а) Допустим, что полином $f = f(z_1, \dots, z_n)$ полилинеен по переменным из $\bigcup_{i=1}^c \Lambda_i$, $|\Lambda_i| = L + 1$. Тогда $t' g_{l-1,c} t'' \cdot S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f = 0$ – тождество алгебры C_k .

б) Допустим, что полином $f = f(z_1, \dots, z_n)$ полилинеен по переменным из $\bigcup_{i=1}^c \Lambda_i$, $|\Lambda_i| = L$. Тогда любое значение полинома $t' g_{l-1,c} \cdot t'' S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f$ на алгебре C_k является линейной комбинацией элементов вида

$$b_0 e_{\sigma(1)} b_1 \cdots e_{\sigma(l)} b_l \cdot c_0 e_{\tau(1)} c_1 \cdots e_{\tau(l)} c_l, \quad b_0, \dots, b_l, c_0, \dots, c_l \in C_k, \quad (15)$$

где $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – насыщенный набор, $\sigma, \tau \in S_l$.

в) Существует такая константа n , что для каждого $k \geq k_0$ найдется полином $h_k = h_k(x_1, \dots, x_n)$ такой, что $h_k \notin \Gamma$, а любое значение полинома h_k на алгебре C_k является линейной комбинацией слагаемых вида (15).

г) Константа n из п.в) удовлетворяет свойству: при $k \geq n$ в алгебре C_k существует k -полный насыщенный набор идемпотентов из $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Ясно, что достаточно доказать лемму для случая, когда полином f является полилинейным. Для этого надо проверить, что для всех $c', c'', c'_0, \dots, c'_{l-1} \in C_k$ выполнено

$$c' g_{l-1,c}(c'_0; c'_1, \dots, c'_{l-1}) c'' \cdot S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad (16)$$

где $a_i \in \mathcal{F} \cup \text{Rad } C_k$. По лемме 5, б) $c' g_{l-1,c}(c'_0; c'_1, \dots, c'_{l-1}) c''$ является линейной комбинацией элементов вида

$$\tilde{c}_0 e_1 \tilde{c}_1 e_2 \tilde{c}_2 \cdots \tilde{c}_{l-1} e_l \tilde{c}_l, \quad \tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_l \in C_k,$$

где $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор попарно различных идемпотентов. Поэтому для доказательства (16) достаточно установить, что

$$\tilde{c}_0 e_1 \tilde{c}_1 e_2 \tilde{c}_2 \cdots \tilde{c}_{l-1} e_l \tilde{c}_l \cdot S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n) = 0. \quad (17)$$

Если для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $a_i \in \mathcal{F}$, но $a_i \notin \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$, то представим элемент a_i в виде $a_i = ea'$, где $e \in \mathcal{E}$, $e \notin \{e_1, \dots, e_l\}$, $a' \in \mathcal{F}$. Тогда (17) будет выполняться по лемме 2.

Рассмотрим теперь случай, когда для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место включение $a_i \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)) \cup \text{Rad } C_k$.

Если для некоторого $j \in \{1, \dots, c\}$ вместо всех переменных из множества Λ_j в полином f подставляются элементы из множества $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$, то (17) будет выполнено. В самом деле, если $\dim\{e_1, \dots, e_l\} > L$, то $\tilde{c}_0 e_1 \cdots e_l \tilde{c}_l = 0$ по определению числа L , так как $k \geq l$. Если же $\dim\{e_1, \dots, e_l\} \leq L$, то (17) выполняется в силу того, что полином $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f$ кососимметричен по $L+1$ переменным из множества Λ_j , и вместо этих переменных подставляются элементы множества $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ мощности $\leq L$.

Если же для каждого $j \in \{1, \dots, c\}$ хотя бы вместо одной переменной из множества Λ_j в полином $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f$ подставляется элемент из $\text{Rad } C_k$, то $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n) \in (\text{Rad } C_k)^c = (0)$, откуда следует (17).

б) Как и в п. а), достаточно доказать лемму для полилинейных полиномов f . Для этого надо проверить, что для всех $c', c'', c'_0, \dots, c'_{l-1} \in C_k$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F} \cup \text{Rad } C_k$ элемент

$$A = c' g_{l-1,c}(c'_0; c'_1, \dots, c'_{l-1}) c'' \cdot S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n)$$

является линейной комбинацией элементов вида (15).

По лемме 5, б) $c' g_{l-1,c}(c'_0; c'_1, \dots, c'_{l-1}) c''$ является линейной комбинацией элементов вида $b_0 e_1 b_1 e_2 b_2 \cdots b_{l-1} e_l b_l$, где $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – набор попарно различных идемпотентов. Поэтому элемент A является линейной комбинацией элементов вида

$$b_0 e_1 b_1 e_2 b_2 \cdots b_{l-1} e_l b_l \cdot S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n). \quad (18)$$

Если для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $a_i \in \mathcal{F}$, но $a_i \notin \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$, то, представив элемент a_i в виде $a_i = ea'$, где $e \in \mathcal{E}$, $e \notin \{e_1, \dots, e_l\}$, $a' \in \mathcal{F}$, получаем, что элемент (18) равен нулю.

Поэтому будем рассматривать случай, когда для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $a_i \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)) \cup \text{Rad } C_k$.

Пусть для некоторого $j \in \{1, \dots, c\}$ вместо всех переменных из множества Λ_j в полином f подставляются элементы из множества $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$. Если $\dim\{e_1, \dots, e_l\} > L$, то $b_0 e_1 b_1 e_2 b_2 \cdots b_{l-1} e_l b_l = 0$ по определению числа L , так как $k \geq k_0$. Следовательно, элемент (18) равен нулю. Если $\dim\{e_1, \dots, e_l\} < L$, то элемент (18) тоже равен нулю, так как полином $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f$ кососимметричен по L переменным из множества Λ_j , и вместо этих переменных подставляются элементы множества $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ мощности $< L$. Если же $\dim\{e_1, \dots, e_l\} = L$, то элемент $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n)$ может быть отличен от нуля только тогда, когда вместо переменных из множества Λ_j подставляются попарно различные элементы из множества $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$. Так как $|\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)| = L$, то вместо некоторых переменных из множества Λ_j подставляются идемпотенты $e_1, \dots, e_l$, поэтому элемент $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n)$

представляется в виде линейной комбинации слагаемых $c_0 e'_1 c_1 \cdots c_{l-1} e'_l c_l$, где $\{e'_1, \dots, e'_l\} = \{e_1, \dots, e_l\}$. Тогда элемент (18) является линейной комбинацией слагаемых вида (15).

Осталось рассмотреть случай, когда для всех $j \in \{1, \dots, c\}$ хотя бы вместо одной переменной из множества Λ_j в полином $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f$ подставляется элемент из $\text{Rad } C_k$. Тогда $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f(a_1, \dots, a_n) \in (\text{Rad } C_k)^c = (0)$, поэтому элемент (18) тоже будет нулевым.

в) По определению числа L найдется такое число $m \geq k_0$, что в алгебре C_m выполнено $\tilde{c}_0 e_1 \tilde{c}_1 \cdots e_l \tilde{c}_l \neq 0$, $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_l \in C_m$ и $\dim\{e_1, \dots, e_l\} = L$. Пусть d – произвольное число.

Допустим, что алгебра $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ имеет q клеток. Выберем в множестве $\{e_1, \dots, e_l\}$ идемпотенты $e_{\gamma_i, \gamma_i}^{(\nu_i)}$, $i = 1, \dots, q$, так, чтобы в каждой клетке алгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ было выбрано ровно по одному идемпотенту. Эти идемпотенты можно пронумеровать таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\tilde{c}_0 e_1 c_1 \cdots e_l \tilde{c}_l = c'_0 e_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} c'_1 e_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} c'_2 \cdots c'_{q-1} e_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} c'_q, \quad c'_0, \dots, c'_q \in C_m.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_k^{(\nu)} &= \omega_{n_\nu}(\dots, x_{i,j}^{(\nu,k)}, \dots; \dots, \tilde{x}_{i,j}^{(\nu,k)}, \dots), \quad 1 \leq i, j \leq n_\nu, \\ W_{\gamma_u, \gamma_u}^{(\nu_u)} &= \tilde{x}_{\gamma_u, 1}^{(\nu_u, 1)} \omega_1^{(\nu_u)} \cdots \omega_d^{(\nu_u)} \tilde{x}_{1, \gamma_u}^{(\nu_u, 1)}, \quad u = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Определим полином f_d следующим образом:

$$f_d = t_0 W_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} t_1 W_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} t_2 \cdots t_{q-1} W_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} t_q.$$

Рассмотрим множества $\Lambda_k = \{x_{i,j}^{(\nu_u, k)} \mid 1 \leq i, j \leq n_{\nu_u}, u = 1, \dots, q\}$, $k = 1, \dots, d$. Ясно, что полином f_d линеен по всем переменным из множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$. Кроме того, так как набор $\{e_1, \dots, e_l\}$ является насыщенным, то по выбору идемпотентов $e_{\gamma_u, \gamma_u}^{(\nu_u)}$, $u = 1, \dots, q$, каждое множество Λ_k состоит из L элементов. Положим

$$\tilde{f}_d = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_d f_d) \Big|_{x_{i,j}^{(\nu, 1)} = \dots = x_{i,j}^{(\nu, d)} = x_{i,j}^{(\nu)}, \tilde{x}_{i,j}^{(\nu, 1)} = \dots = \tilde{x}_{i,j}^{(\nu, d)} = x_{i,j}^{(\nu)}}.$$

Полином $\tilde{f}_d$ зависит от $q + L + 1 \leq k_0$ переменных.

Учитывая основное свойство слова ω_n , несложно показать, что при подстановке в полином $\tilde{f}_d$ $x_{i,j}^{(\nu)} = e_{i,j}^{(\nu)}$, $t_i = c'_i$ получится

$$c'_0 e_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} c'_1 e_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} c'_2 \cdots c'_{q-1} e_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} c'_q \neq 0.$$

Тем самым, $\tilde{f}_d \notin T[C_m]$, следовательно, $\tilde{f}_d \notin \Gamma$ при всех d .

Положим

$$h_k = t' g_{l-1, c}(x; y_1, \dots, y_l - 1) t'' \tilde{f}_c z_1 \cdots z_s,$$

где число s выберем так, чтобы полином h_k зависел ровно от $n = 2 + 1 + (l-1) + k_0$ переменных.

Полином h_k будет искомым. В самом деле, по лемме 6, б) полином

$$\widehat{h}_k = t' g_{l-1,c}(x; y_1, \dots, y_l - 1) t'' (\Lambda_1 \cdots \Lambda_c f_c) z_1 \cdots z_s$$

принимает на алгебре C_k только значения вида (15). А множество значений полинома h_k очевидным образом является подмножеством множества значений полинома $\widehat{h}_k$. Так как $g_{l-1,c}(x; y_1, \dots, y_l - 1) \notin \Gamma$, $\widetilde{f}_c \notin \Gamma$, то из T -первичности идеала Γ получаем, что $h_k \notin \Gamma$.

г) Так как $h_k \notin \Gamma$ и $k \geq n$, то $h_k \notin T[C_k]$. Рассмотрим множество значений полинома h_k на алгебре C_k . Среди них содержится ненулевое значение, которое по п. в) является линейной комбинацией слагаемых вида (15). Значит, хотя бы одно из этих слагаемых должно быть ненулевым. Соответствующий набор $\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(l)}\}$ является k -полным насыщенным набором.

Лемма 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нельзя утверждать, что если полином $f = f(z_1, \dots, z_n)$ полилинеен по переменным из $\bigcup_{i=1}^c \Lambda_i$, $|\Lambda_i| = L + 1$, то $S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} \cdots S_{\Lambda_c} f \in T[C_k]$. В самом деле, рассмотрим алгебру $A = U_3 \oplus M_2$, где U_3 – алгебра верхнетреугольных матриц порядка 3. Легко видеть, что для многообразия, порожденного алгеброй A , $l = 3$ и $L = 3$. Однако полином $\text{Cap}_4(x_i^{(1)}) \cdots \text{Cap}_4(x_i^{(c)})$ не является тождеством алгебры A ни при каком c ; Cap_4 – полином Капелли порядка 4.

ЛЕММА 7. *Найдется такое число Q_2 , что для любого смешанного слова $v \in \mathcal{V}$, для произвольных $b', b'', b_0, \dots, b_l, c_0, \dots, c_l \in \mathcal{P}\langle X \rangle$, для произвольного насыщенного набора $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ и любых перестановок $\sigma, \tau \in S_l$ выполняется включение*

$$b_0 e_{\sigma(1)} b_1 \cdots e_{\sigma(l)} b_l \cdot c_0 e_{\tau(1)} c_1 \cdots e_{\tau(l)} c_l \cdot b' v^{Q_2} b'' \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой леммы мы будем использовать соображения, применявшиеся в [10] для доказательства предложения 2 и в [9] для доказательства леммы 1.

Так как слово v является смешанным, то его можно представить в виде $v = v_0 e_{\alpha, \beta}^{(\mu)} z e_{\alpha', \beta'}^{(\mu')} v'_0$, где $\mu \neq \mu'$, $z \in X$, v_0, v'_0 – слова из $P\langle X \rangle$ (возможно, равные единице). Выберем в множестве $\{e_1, \dots, e_l\}$ идемпотенты $e_{\gamma_i, \gamma_i}^{(\nu_i)}$, $i = 1, \dots, q$, так, чтобы в каждой из q клеток алгебры $\mathcal{P}(e_1, \dots, e_l)$ было выбрано ровно по одному идемпотенту. При этом пронумеруем эти идемпотенты таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$c_0 e_{\tau(1)} c_1 \cdots e_{\tau(l)} c_l = c'_0 e_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} c'_1 e_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} c'_2 \cdots c'_{q-1} e_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} c'_q, \quad c'_0, \dots, c'_q \in \mathcal{P}\langle X \rangle.$$

Положим $m = 2 + 1 + (l - 1) + 2L + (q + 1) + 7$ и рассмотрим алгебру C_m . Пусть индекс нильпотентности $\text{Rad } C_m$ равен s . Обозначим

$$\begin{aligned} \omega_k^{(\nu)} &= \omega_{n_\nu}(\dots, x_{i,j}^{(\nu,k)}, \dots; \dots, \widetilde{x}_{i,j}^{(\nu,k)}, \dots), \quad 1 \leq i, j \leq n_\nu, \\ W_{\gamma_u, \gamma_u}^{(\nu_u)} &= \widetilde{x}_{\gamma_u, 1}^{(\nu_u, 1)} \omega_1^{(\nu_u)} \cdots \omega_c^{(\nu_u)} \widetilde{x}_{1, \gamma_u}^{(\nu_u, 1)}, \quad u = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Определим полином f следующим образом:

$$f = t_0 W_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} t_1 W_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} t_2 \cdots t_{q-1} W_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} t_q \cdot t_{q+1} \prod_{k=1}^c (v_1^{(k)} v_2^{(k)} z^{(k)} v_3^{(k)} v_4^{(k)}) t_{q+2}.$$

Рассмотрим множества $\Lambda_k = \{z^{(k)}, x_{i,j}^{(\nu_u, k)} \mid 1 \leq i, j \leq n_{\nu_u}, u = 1, \dots, q\}$, $k = 1, \dots, c$. По построению полином f полилинеен по всем переменным из множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_c$. Кроме того, так как набор $\{e_1, \dots, e_l\}$ является насыщенным, то по выбору идемпотентов $e_{\gamma_u, \gamma_u}^{(\nu_u)}$, $u = 1, \dots, q$, каждое множество Λ_k содержит ровно $L + 1$ элементов. Поэтому по лемме 6, а) алгебра C_m будет удовлетворять тождеству

$$t' g_{l-1, c}(x; y_1, \dots, y_{l-1}) t'' \cdot S_{\Lambda_1} \cdots S_{\Lambda_c} f = 0.$$

Сделаем в этом тождестве следующую подстановку переменных, отождествляющую переменные по индексу k : $z^{(1)} = \dots = z^{(c)} = z$, $v_i^{(1)} = \dots = v_i^{(c)} = v_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x_{i,j}^{(\nu, 1)} = \dots = x_{i,j}^{(\nu, c)} = x_{i,j}^{(\nu)}$, $\tilde{x}_{i,j}^{(\nu, 1)} = \dots = \tilde{x}_{i,j}^{(\nu, c)} = x_{i,j}^{(\nu)}$, $\nu \in \{\nu_1, \dots, \nu_u\}$. В результате такого отождествления получится некоторое тождество $h = 0$ алгебры C_m , зависящее от $[2 + 1 + (l - 1)] + [2L + (q + 1)] + 7 = m$ переменных. Так как $h \in T[C_m]$, то $h \in \Gamma$. Далее сделаем следующую подстановку элементов алгебры $\mathcal{P}\langle X \rangle$ в полиноме h :

$$\begin{aligned} t' &= b_0, \quad t'' = b_l, \quad x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in F, \\ y_i &= e_{\sigma(i)} b_i e_{\sigma(i+1)}, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad t_i = c'_i, \quad i = 0, \dots, q, \\ \tilde{x}_{i,j}^{(\nu)} &= e_{i,j}^{(\nu)}, \quad x_{i,j}^{(\nu)} = e_{i,j}^{(\nu)}, \quad \nu \in \{\nu_1, \dots, \nu_q\}, \quad 1 \leq i, j \leq n_\nu, \\ t_{q+1} &= b', \quad t_{q+2} = b'', \\ v_1 &= v_0, \quad v_2 = e_{\alpha, \beta}^{(\mu)}, \quad z = z, \quad v_3 = e_{\alpha', \beta'}^{(\mu')}, \quad v_4 = v'_0. \end{aligned}$$

Учитывая основное свойство слова ω_n и условие $\mu \neq \mu'$, несложно понять, что при такой подстановке получится

$$\begin{aligned} &\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_l) b_0 e_{\sigma(1)} b_1 \cdots e_{\sigma(l)} b_l \cdot c'_0 e_{\gamma_1, \gamma_1}^{(\nu_1)} c'_1 e_{\gamma_2, \gamma_2}^{(\nu_2)} c'_2 \cdots c'_{q-1} e_{\gamma_q, \gamma_q}^{(\nu_q)} c'_q \\ &\quad \times b' (v_0 e_{\alpha, \beta}^{(\mu)} z e_{\alpha', \beta'}^{(\mu')} v'_0)^c b'' \\ &= \theta(\lambda_1, \dots, \lambda_l) b_0 e_{\sigma(1)} b_1 \cdots e_{\sigma(l)} b_l \cdot c_0 e_{\tau(1)} c_1 \cdots e_{\tau(l)} c_l \cdot b' v^c b'' \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle), \end{aligned}$$

где

$$\theta(x_1, \dots, x_l) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_c \in S_l} (-1)^{\sigma_1} \cdots (-1)^{\sigma_c} x_1^{\sigma_1(1) + \dots + \sigma_c(1)} \cdots x_l^{\sigma_1(l) + \dots + \sigma_c(l)}$$

– ненулевой полином от коммутирующих переменных $x_1, \dots, x_l$. В силу бесконечности поля F для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in F$ будет выполнено $\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \neq 0$. Тем самым,

$$b_0 e_{\sigma(1)} b_1 \cdots e_{\sigma(l)} b_l \cdot c_0 e_{\tau(1)} c_1 \cdots e_{\tau(l)} c_l \cdot b' v^c b'' \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle).$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что $q \leq L$, поэтому в качестве числа Q_2 можно взять максимальное из чисел $c(\text{Rad } C_m)$, $m \leq 2 + 1 + (l - 1) + 2L + (L + 1) + 7$, где $c(\text{Rad } C_m)$ – индекс нильпотентности $\text{Rad } C_m$.

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Произвольный обобщенный полином $\hat{f} \in \Gamma_1(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ можно представить в виде*

$$\hat{f} = \sum_{\alpha} \hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha} + \hat{g}, \quad \hat{v}_{\alpha} \in \mathcal{V}, \quad \hat{u}_{\alpha}, \hat{w}_{\alpha} \in \mathcal{P}\langle X \rangle, \quad \hat{g} \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle).$$

При этом если $\hat{f}$ полиоднороден, то существует такое представление, в котором слагаемые $\hat{g}$ и $\hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha}$ полиоднородны и степени $\hat{f}$, $\hat{g}$ и $\hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha}$ по всем переменным равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование требуемого представления непосредственно вытекает из определения T -идеала Γ_1 . Допустим теперь, что обобщенный полином $\hat{f}$ полиоднороден. Без ограничения общности можно считать, что в представлении $\hat{f} = \sum_{\alpha} \hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha} + \hat{g}$ каждое слагаемое $\hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha}$ является полиоднородным. Запишем $\hat{g} = \sum_i \hat{g}_i$, $\hat{h} = \sum_i \hat{h}_i$, где $\hat{g}_i$ и $\hat{h}_i$ – полиоднородные компоненты обобщенных полиномов $\hat{g}$ и $\hat{h}$, причем степени $\hat{g}_i$ и $\hat{h}_i$ по любой переменной равны. Тогда для некоторого i будет иметь место равенство $\hat{f} = \hat{h}_i + \hat{g}_i$. Заметим, что в силу однородности идеала $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ выполнено $\hat{g}_i \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, а обобщенный полиоднородный полином $\hat{h}_i$ по построению является линейной комбинацией полиоднородных слагаемых вида $\hat{u}_{\alpha}(\hat{v}_{\alpha})^Q \hat{w}_{\alpha}$.

Лемма 8 доказана.

Для $x \in X$ положим $D_x = \{\tilde{e}, \tilde{e}_1 x \tilde{e}_2 \mid \tilde{e}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \mathcal{F}\}$. Для обобщенного однородного полинома $\hat{f}(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{P}\langle X \rangle$ положим $X_{\hat{f}} = \{x_i \mid \deg_{x_i} \hat{f} \geq p^s\}$. Будем называть $\hat{f}(x_1, \dots, x_k)$ D -полиномом, если для некоторых $d_i \in D_{x_i}$, $x_i \in X_{\hat{f}}$ выполнено

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k) \equiv \hat{f}(x_1, \dots, x_k)|_{x_i=d_i, x_i \in X_{\hat{f}}} \pmod{\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)}.$$

Примерами D -полиномов являются элементы из $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$, а также обобщенные полиномы $f(d_1, \dots, d_k)$, $d_i \in D_{x_i}$, $f(x_1, \dots, x_k) \in F^{\sharp}\langle X \rangle$. Из однородности идеала $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ вытекает, что если в определении D -полинома хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, k\}$ выполнено $d_i \in D_{x_i} \cap \mathcal{F}$, то $\hat{f}(x_1, \dots, x_k) \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$.

Определим число Q , фигурирующее в определении алгебры $\mathcal{B}$, положив $Q \geq \max\{Q_1, Q_2\}$. Следующая лемма является основным техническим утверждением работы.

ЛЕММА 9. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_k) \in \Gamma_1$ – произвольный полиоднородный полином, квазилинейный по модулю Γ . Тогда найдется число $\theta = \theta(f)$, удовлетворяющее следующему свойству: для произвольных $d_i \in D_{x_i}$, $i = 1, \dots, k$,

для любого набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_\theta)$ длины θ перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_\theta \in S_l$ и для любого насыщенного набора $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ в алгебре $\mathcal{P}\langle X \rangle$ выполнено включение

$$x_0^{(1)} e_{\sigma_1(1)} x_1^{(1)} e_{\sigma_1(2)} \cdots e_{\sigma_1(l)} x_l^{(1)} \cdots x_0^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(1)} x_1^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(2)} \cdots e_{\sigma_\theta(l)} x_l^{(\theta)} \\ \times f(d_1, \dots, d_k) \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle),$$

где $x_i^{(j)}$ – попарно различные переменные, отличные от $x_1, \dots, x_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_{\mathcal{P}} = \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle), \quad \widehat{W}(x_0, x_1, \dots, x_l; \sigma) = x_0 e_{\sigma(1)} x_1 e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(l)} x_l, \quad \sigma \in S_l.$$

Определим рекурсивно функцию $\Theta(m)$: $\Theta(0) = 0$, $\Theta(m) = 2 + m(2 + \Theta(m-1))$ при $m > 0$. Положим $\widehat{W}'_i = \widehat{W}(x_0^{(i)}, \dots, x_l^{(i)}; \sigma_i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Пусть $\widehat{f} = \widehat{f}(x_1, \dots, x_k) \in \Gamma_1(\mathcal{P}\langle X \rangle)$ – произвольный полиоднородный D -полином, квазилинейный по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Допустим, что $\widehat{f}$ имеет степень $\geq p^s$ ровно по n переменным. Индукцией по n будем доказывать, что

$$\widehat{W}'_1 \cdots \widehat{W}'_{\Theta(n)} \cdot \widehat{f} \in \Gamma_{\mathcal{P}}. \quad (19)$$

Базой индукции будет являться случай $n = 0$. Из леммы 8 следует, что при $n = 0$ $\widehat{f} \in \Gamma_{\mathcal{P}}$, и доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для всех D -полиномов $\widehat{f}_0$, которые имеют степень $\geq p^s$ ровно по $n-1$ переменным.

По лемме 8 обобщенный полином $\widehat{f}$ можно представить по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ в виде

$$\widehat{f} \equiv \sum_{\alpha} \widehat{u}_{\alpha} (\widehat{v}_{\alpha})^Q \widehat{w}_{\alpha}, \quad \widehat{v}_{\alpha} \in \mathcal{V}, \quad \widehat{u}_{\alpha}, \widehat{w}_{\alpha} \in \mathcal{P}\langle X \rangle.$$

Положим $\widehat{W}_{i,0} = \widehat{W}(x_0^{(i,0)}, \dots, x_l^{(i,0)}; \tau_{i,0})$, $i = 1, 2$. Умножим каждое слагаемое $\widehat{u}_{\alpha} (\widehat{v}_{\alpha})^Q \widehat{w}_{\alpha}$ справа на $\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0}$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Если слово $\widehat{v}_{\alpha}$ является смешанным, то по лемме 7 произведение $\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{u}_{\alpha} (\widehat{v}_{\alpha})^Q \widehat{w}_{\alpha}$ будет равно нулю по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Здесь мы воспользовались тем, что $Q \geq Q_2$.

Случай 2. Если слово $\widehat{v}_{\alpha}$ является несмешанным, то по лемме 4 произведение $\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{u}_{\alpha} (\widehat{v}_{\alpha})^Q \widehat{w}_{\alpha}$ будет представляться по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ в виде линейной комбинации элементов $\widehat{u}_{\beta} (\widehat{v}_{\beta})^{p^s} \widehat{w}_{\beta}$, где слово $\widehat{v}_{\beta}$ имеет вид $\widehat{v}_{\beta} = ex\tilde{e}e$, $x \in X$, $e \in \mathcal{E}$, $\tilde{e} \in \mathcal{F}$. Здесь мы воспользовались тем, что $Q \geq Q_1$.

В итоге обобщенный полином $\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{f}$ можно представить по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ в виде

$$\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{f} \equiv \sum_{\gamma} \widehat{u}_{\gamma} (\widehat{v}_{\gamma})^{p^s} \widehat{w}_{\gamma}, \quad \widehat{u}_{\gamma}, \widehat{w}_{\gamma} \in \mathcal{P}\langle X \rangle, \quad (20)$$

где каждое слово $\widehat{v}_{\gamma}$ имеет вид $\widehat{v}_{\gamma} = ex\tilde{e}e$, $x \in X$, $e \in \mathcal{E}$, $\tilde{e} \in \mathcal{F}$.

Так как $\widehat{f}$ является D -полиномом, то $\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{f}$ тоже будет D -полиномом. Пусть $X_0 = \{x \in X \mid \deg_x(\widehat{W}_{1,0} \widehat{W}_{2,0} \widehat{f}) \geq p^s\} \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$. Без ограничения общности будем считать, что $X_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$. Обозначим $d_i = \deg_{x_i}(\widehat{f})$. Для

каждой переменной x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, рассмотрим такой элемент $d'_i \in D_{x_i}$, что по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$

$$\widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f} \equiv (\widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f})|_{x_i=d'_i, i=1, \dots, n}. \quad (21)$$

Если найдется такое i , что $d'_i \in \mathcal{F}$, то $\widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f} \in \Gamma_{\mathcal{P}}$, и в этом случае утверждение леммы становится очевидным. Поэтому будем считать, что для всех $i = 1, \dots, n$ выполнено $\deg_{x_i}(d'_i) = 1$.

Посмотрим, чему станет равна правая часть (20) при подстановке $x_i = d'_i$, $i = 1, \dots, k$. Для каждого $i = 1, \dots, k$ все элементы множества $\{ex_i\tilde{e}e \mid e \in \mathcal{E}, \tilde{e} \in \mathcal{F}\}$, кроме одного, после такой подстановки будут равны нулю, а этот один элемент перейдет сам в себя. Поэтому найдутся такие элементы $e_{\varphi(i)} \in \mathcal{E}$, $\tilde{e}_{\psi(i)} \in \mathcal{F}$, что или все элементы $(\widehat{u}_{\gamma})|_{x_i=d'_i, i=1, \dots, k}$, $(\widehat{v}_{\gamma})|_{x_i=d'_i, i=1, \dots, k}$ и $(\widehat{w}_{\gamma})|_{x_i=d'_i, i=1, \dots, k}$ будут являться обобщенными полиномами от $e_{\varphi(i)}x_i\tilde{e}_{\psi(i)}e_{\varphi(i)}$, $i = 1, \dots, k$, и переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$, или произведение $(\widehat{u}_{\gamma}(\widehat{v}_{\gamma})^p\widehat{w}_{\gamma})|_{x_i=d'_i, i=1, \dots, k}$ будет равно нулю.

С учетом (20) и (21) получаем, что элемент $\widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f}$ по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ можно представить в виде

$$\widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha} \widehat{u}_{\alpha,i} (e_{\varphi(i)}x_i\tilde{e}_{\psi(i)}e_{\varphi(i)})^{p^s} \widehat{v}_{\alpha,i} \right), \quad \widehat{u}_{\alpha,i}, \widehat{v}_{\alpha,i} \in \mathcal{P}\langle X \rangle_0. \quad (22)$$

Обозначим $\widehat{h}_1 = \widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0}\widehat{f}$. Далее, рекуррентно определим

$$\widehat{h}_{q+1} = \left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \widehat{W}_{1,q}\widehat{W}_{2,q}\widehat{h}_q, \quad q \leq n.$$

Индукцией по q докажем, что элемент $\widehat{h}_q$ можно представить по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ в виде

$$\widehat{h}_q \equiv \sum_{i=q}^n \left(\sum_{\alpha} \widehat{u}_{\alpha,i} (e_{\varphi(i)}x_i\tilde{e}_{\psi(i)}e_{\varphi(i)})^{p^s} \widehat{v}_{\alpha,i} \right), \quad \widehat{u}_{\alpha,i}, \widehat{v}_{\alpha,i} \in \mathcal{P}\langle X \rangle_0 \quad (23)$$

(при $q = n+1$ сумма в (23) является пустой).

Для $q = 1$ это утверждение следует из (22). Допустим, что доказываемое утверждение верно для $\widehat{h}_q$, и докажем его для $\widehat{h}_{q+1}$.

Обозначим для краткости $e = e_{\varphi(q)}$, $\tilde{e} = \tilde{e}_{\psi(q)}$, $x = x_q$, $d = \deg_x \widehat{f}$, $\widehat{x} = ex\tilde{e}e$, $\widehat{x}_i = e_{\varphi(i)}x_i\tilde{e}_{\psi(i)}e_{\varphi(i)}$ при $i > q$, $\widehat{W}_1 = \widehat{W}_{1,q}$. Слово $\widehat{W}_{2,q}$ имеет вид $\widehat{W}_{2,q} = y_0 e_{\sigma(1)} y_1 e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(l)} y_l$, где $y_j \in X$, $\sigma \in S_l$. Если $\sigma(j) = q$, то положим $z = y_{\sigma(q-1)}$, $\widehat{W}_2 = y_0 e_{\sigma(1)} y_1 e_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(q-1)} e_{\sigma(q)} = y_0 \cdots z e$. В таких обозначениях из (23) получаем, что элемент $\widehat{W}_{1,q}\widehat{W}_{2,q}\widehat{h}_q$ является по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ линейной комбинацией слов

$$\widehat{W}_1 \widehat{W}_2 \widehat{u}_0(\widehat{x})^{\alpha_1} \widehat{u}_1(\widehat{x})^{\alpha_2} \cdots \widehat{u}_{\nu-1}(\widehat{x})^{\alpha_{\nu}} \widehat{u}_{\nu}, \quad (24)$$

где все слова $\widehat{W}_1$, $\widehat{W}_2$, $\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_{\nu}$ не зависят от x , а слова $\widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_{\nu-1}$ принадлежат подалгебре $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$. При этом каждое слово (24) удовлетворяет одному из двух условий:

1) для некоторого $k \in \{1, \dots, \nu\}$ выполнено $\alpha_k \geq p^s$; в этом случае будем называть слово (24) *словом 1-го рода*;

2) для некоторого $k \in \{0, \dots, \nu\}$ слово $\hat{u}_k$ содержит в качестве подслова слово $(\hat{x}_i)^{p^s}$, $i > q$; в этом случае будем называть слово (24) *словом 2-го рода*.

Если (24) является одновременно словом 1-го и 2-го родов, то отнесем его только к одному роду.

Рассмотрим сначала слагаемые (24) 1-го рода. Так как в слове $\widehat{W}_1$ присутствуют l попарно различных идемпотентов из $\mathcal{E}$ и $\alpha_k \geq p^s$ для некоторого k , то по лемме 3 слово (24) можно представить по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ в виде

$$\widehat{W}_1 \widehat{W}_2(\hat{x})^{p^s} \hat{u}'_1(\hat{x})^{\alpha'_2} \dots \hat{u}'_{\nu-1}(\hat{x})^{\alpha'_\nu} \hat{u}'_\nu. \quad (25)$$

Воспользуемся базисом Шпехта и представим линейную комбинацию всех слов (24) в виде

$$\sum_{k=0}^d \widehat{W}_1 \widehat{W}_2(\hat{x})^k \hat{\theta}_k^{(1)}(\hat{x}), \quad (26)$$

где в обобщенные полиномы $\hat{\theta}_0^{(1)}(\hat{x}), \dots, \hat{\theta}_{d-1}^{(1)}(\hat{x})$ слово $\hat{x}$ входит только в виде коммутаторов с элементами из подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$. Сделаем важное для дальнейшего замечание: из (25) следует, что $\hat{\theta}_0^{(1)}(\hat{x}) = 0$. На самом деле $\hat{\theta}_k^{(1)}(\hat{x}) = 0$ при $k \leq p^s - 1$, но мы будем использовать это только при $k = 0$.

Рассмотрим теперь слагаемые (24) 2-го рода. Как и в предыдущем случае, представим линейную комбинацию всех слов (24) 2-го рода в виде

$$\sum_{k=0}^d \widehat{W}_1 \widehat{W}_2(\hat{x})^k \hat{\theta}_k^{(2)}(\hat{x}), \quad (27)$$

где в $\hat{\theta}_0^{(2)}(\hat{x}), \dots, \hat{\theta}_{d-1}^{(2)}(\hat{x})$ слово $\hat{x}$ входит только в виде коммутаторов с элементами из подалгебры $e\mathcal{P}\langle X \rangle e$. Выражение (27) отличается от (26) тем, что мы уже не можем считать, что $\hat{\theta}_0^{(2)}(\hat{x}) = 0$. Однако в этом случае каждый элемент $\hat{\theta}_k^{(2)}(\hat{x})$, $k = 0, \dots, d$, может быть представлен как линейная комбинация слов вида

$$\hat{a}(\hat{x}_i)^{p^s} \hat{b}, \quad \hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{P}\langle X \rangle_0, \quad i > q. \quad (28)$$

Это свойство мы снова будем использовать только при $k = 0$.

Объединяя (26) и (27), получаем, что по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$

$$\widehat{W}_{1,q} \widehat{W}_{2,q} \hat{h}_q \equiv \sum_{k=0}^d \widehat{W}_1 \widehat{W}_2(\hat{x})^k \left(\hat{\theta}_k^{(1)}(\hat{x}) + \hat{\theta}_k^{(2)}(\hat{x}) \right). \quad (29)$$

Из построения следует, что полином $\widehat{W}_{1,q} \widehat{W}_{2,q} \hat{h}_q$ с его представлением в виде (29) удовлетворяет всем условиям леммы 1. По п.б) этой леммы с учетом $\hat{\theta}_0^{(1)}(\hat{x}) = 0$ получаем, что по модулю $\Gamma_{\mathcal{P}}$ выполнено

$$\widehat{W}_{1,q} \widehat{W}_{2,q} \hat{h}_q \equiv \widehat{W}_1 \widehat{W}_2 \cdot \hat{\theta}^{(2)}(\hat{x}) + \widehat{W}_1 \widehat{W}_2(\hat{x})^d \cdot \hat{\theta}, \quad (30)$$

где обобщенный полином $\hat{\theta} = \hat{\theta}_d^{(1)}(\hat{x}) + \hat{\theta}_d^{(2)}(\hat{x})$ на самом деле не зависит от x .

Найдется такая матричная единица $\tilde{e}_1 \in \mathcal{F}$, что $\hat{x}|_{x=\tilde{e}_1} = (ex\tilde{e}e)|_{x=\tilde{e}_1} = e$. Отсюда получаем $\hat{\theta}_0^{(2)}(\hat{x})|_{x=\tilde{e}_1} = 0$. Рассмотрим обобщенный полином

$$\hat{f}_0 = (\widehat{W}_{1,q}\widehat{W}_{2,q}\hat{h}_q)|_{x=\tilde{e}_1} \equiv \widehat{W}_1\widehat{W}_2 \cdot \hat{\theta} \pmod{\Gamma_{\mathcal{F}}}.$$

Этот полином удовлетворяет предположению индукции по n . В самом деле, так как обобщенный полином $\hat{f}$ был квазилинеен по модулю $\Gamma_{\mathcal{F}}$ и так как $\hat{f}_0$ получается из $\hat{f}$ по модулю $\Gamma_{\mathcal{F}}$ умножением на некоторое полилинейное слово, которое имеет непересекающиеся переменные с $\hat{f}$, и последующей подстановкой элемента из $\mathcal{P}$ вместо x , то $\hat{f}_0$ тоже квазилинеен по модулю $\Gamma_{\mathcal{F}}$. Легко проверяется, что $\hat{f}_0$ будет D -полиномом. Кроме того, $\hat{f}_0$ имеет степень $\geq p^s$ ровно по $n-1$ переменным $x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_n$. Поэтому по предположению индукции

$$\left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \cdot \widehat{W}_1\widehat{W}_2 \cdot \hat{\theta} \in \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Подставляя $z = z \cdot \hat{x}^d$, получаем включение

$$\left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \cdot \widehat{W}_1\widehat{W}_2(\hat{x})^d \hat{\theta} \in \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

С учетом этого включения из (30) получаем, что по модулю $\Gamma_{\mathcal{F}}$

$$\left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \widehat{W}_{1,q}\widehat{W}_{2,q}\hat{h}_q \equiv \left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \widehat{W}_1\widehat{W}_2 \cdot \hat{\theta}_0^{(2)}(\hat{x}).$$

Так как для $\hat{\theta}_0^{(2)}(\hat{x})$ выполняется (28), то индукционный переход от q к $q+1$ доказан.

Воспользовавшись теперь доказанным равенством (23) при $q = n+1$, получаем, что $\hat{h}_{n+1} \in \Gamma_{\mathcal{F}}$. Если выразить явно $\hat{h}_{n+1}$ через $\hat{f}$, то получится, что

$$\hat{h}_{n+1} \equiv \prod_{q=1}^n \left[\left(\prod_{i=1+2}^{\Theta(n-1)+2} \widehat{W}_{i,q} \right) \widehat{W}_{1,q}\widehat{W}_{2,q} \right] \widehat{W}_{1,0}\widehat{W}_{2,0} \cdot \hat{f} \equiv 0 \pmod{\Gamma_{\mathcal{F}}}.$$

Это сравнение с точностью до переобозначения индексов совпадает с (19).

Рассмотрим теперь полином $f(x_1, \dots, x_k) \in \Gamma_1$ из условия леммы. Ясно, что если $d_i \in D_{x_i}$, $i = 1, \dots, k$, то обобщенный полином $\hat{f} = f(d_1, \dots, d_k) \in \Gamma_1(\mathcal{P}(X))$ является D -полиномом. Так как полином f квазилинеен по модулю Γ , то обобщенный полином $\hat{f}$ квазилинеен по модулю $\Gamma_{\mathcal{F}}$. Кроме того, $\hat{f}$ имеет степень $\geq p^s$ не более чем по k переменным. Поэтому из (19) и монотонности функции $\Theta(n)$ получаем, что

$$\widehat{W}'_1 \cdots \widehat{W}'_{\Theta(k)} \cdot f(d_1, \dots, d_k) \in \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Тем самым, можно положить $\theta(f(x_1, \dots, x_k)) = \Theta(k)$.

Лемма 9 доказана.

§ 5. Доказательство предложения 2

Из построения алгебры $\mathcal{B}$ следует, что $T[\mathcal{B}] = \Gamma_1 \supseteq \Gamma$. Поэтому будем доказывать, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Сначала рассмотрим основной случай, когда $l > 1$.

Возьмем произвольный полиоднородный квазилинейный по модулю Γ полином $f = f(x_1, \dots, x_k) \in \Gamma_1$ и обозначим $\theta = \theta(f)$, где число $\theta(f)$ определено в лемме 9. Положим $m = \theta \cdot n + k$ (число n определено в лемме 6, в)) и рассмотрим конечномерную классическую алгебру C_m . Пусть $x_i^{(j)}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \theta$, – попарно различные переменные, отличные от $x_1, \dots, x_k$.

Рассмотрим полином

$$\tilde{f} = h_m(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \cdots h_m(x_1^{(\theta)}, \dots, x_n^{(\theta)}) \cdot f(x_1, \dots, x_k).$$

Докажем, что $\tilde{f}$ является тождеством алгебры C_m .

По лемме 6, в) любое значение полинома $h_m(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ на алгебре C_m является линейной комбинацией слагаемых $c'_0 e_1 \cdots e_l c'_l$, где $c'_0, \dots, c'_l \in C_m$, $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – насыщенный набор идемпотентов. Поэтому с учетом леммы 2 получаем, что любое значение полинома $\prod_{j=1}^{\theta} h_m(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ является линейной комбинацией слагаемых

$$c_0^{(1)} e_{\sigma_1(1)} c_1^{(1)} e_{\sigma_1(2)} \cdots e_{\sigma_1(l)} c_l^{(1)} \cdots c_0^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(1)} c_1^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(2)} \cdots e_{\sigma_\theta(l)} c_l^{(\theta)},$$

где $\{e_{\sigma_i(1)}, \dots, e_{\sigma_i(l)}\} = \{e_1, \dots, e_l\}$, $\sigma_i \in S_l$, $c_i^{(j)} \in C_m$, $\{e_1, \dots, e_l\} \subseteq \mathcal{E}$ – насыщенное множество.

Теперь рассмотрим произвольную подстановку элементов алгебры C_m в полином f . Каждый элемент $a \in C_m$ можно представить в виде

$$a = \sum_{\tilde{e} \in \mathcal{F}} \alpha_{\tilde{e}} \tilde{e} + \sum_{\tilde{e}, \tilde{e}' \in \mathcal{F}} \alpha_{\tilde{e}, \tilde{e}'} \tilde{e} r_{\tilde{e}, \tilde{e}'} \tilde{e}',$$

где $r_{\tilde{e}, \tilde{e}'} \in \text{Rad } C_m$. Так как полином f квазилинеен по модулю Γ , то для доказательства включения $\tilde{f} \in T[C_m]$ достаточно ограничиться только такими подстановками, при которых вместо переменных $x_1, \dots, x_k$ подставляются элементы множества $A = \{\tilde{e}, \tilde{e} r \tilde{e}' \mid r \in \text{Rad } C_m, \tilde{e}, \tilde{e}' \in \mathcal{F}\}$. В этом случае любое значение полинома $\tilde{f}$ на алгебре C_m является линейной комбинацией выражений

$$c_0^{(1)} e_{\sigma_1(1)} c_1^{(1)} e_{\sigma_1(2)} \cdots e_{\sigma_1(l)} c_l^{(1)} \cdots c_0^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(1)} c_1^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(2)} \cdots e_{\sigma_\theta(l)} c_l^{(\theta)} f(c_1, \dots, c_k), \quad (31)$$

где $c_1, \dots, c_k \in A$. Зафиксируем в выражении (31) все встречающиеся в нем элементы алгебры C_m и докажем, что (31) равно нулю.

Для этого рассмотрим подстановку в полином $f = f(x_1, \dots, x_k)$ вместо переменных $x_1, \dots, x_k$ элементов $d_1, \dots, d_k$, где $d_i \in D_{x_i} \subseteq \mathcal{P}\langle X \rangle$. При этом элемент d_i выбирается следующим образом. Если $c_i = \tilde{e} \in \mathcal{F}$, то $d_i = \tilde{e}$; если $c_i = \tilde{e} r_i \tilde{e}'$, где $r_i \in \text{Rad } C_m$, $\tilde{e}, \tilde{e}' \in \mathcal{F}$, то $d_i = \tilde{e} x_i \tilde{e}'$. Так как $f \in \Gamma_1$, то $\hat{f} = \hat{f}(d_1, \dots, d_k) = f(d_1, \dots, d_k) \in \Gamma_1(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Отметим, что полином $\hat{f}(d_1, \dots, d_k)$ может зависеть от некоторых переменных $x_1, \dots, x_k$ фиктивным

образом. Это происходит в том случае, когда хотя бы один элемент d_i принадлежит множеству $\mathcal{F}$. Так как f квазилинеен по модулю Γ , то $\hat{f}$ квазилинеен по модулю $\Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle)$. Тогда обобщенный полином $\hat{f}$ удовлетворяет всем условиям леммы 9 (в ней в качестве f надо взять $\hat{f}$). По лемме 9 для любого набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_\theta)$ длины θ перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_\theta \in S_l$ в алгебре $\mathcal{P}\langle X \rangle$ выполнено включение

$$x_0^{(1)} e_{\sigma_1(1)} x_1^{(1)} e_{\sigma_1(2)} \cdots e_{\sigma_1(l)} x_l^{(1)} \cdots x_0^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(1)} x_1^{(\theta)} e_{\sigma_\theta(2)} \cdots e_{\sigma_\theta(l)} x_l^{(\theta)} \times \hat{f}(d_1, \dots, d_k) \in \Gamma(\mathcal{P}\langle X \rangle). \quad (32)$$

Отображение $\varphi: X \rightarrow C_m$, переводящее переменные $x_i^{(j)}$ в элементы $c_i^{(j)}$ алгебры C_m , нефиктивные переменные x_i в элементы r_i , а остальные переменные из X переводящее в нуль, продолжается до гомоморфизма алгебр $\mathcal{P}\langle X \rangle \rightarrow C_m$. При этом гомоморфизме обобщенный полином (32) переходит в элемент (31). Следовательно, так как $\Gamma \subseteq T[C_m]$ и выполняется включение (32), то элемент (31) равен нулю. Тем самым, доказано, что полином $\tilde{f}$ является тождеством алгебры C_m .

Так как $\tilde{f}$ зависит от m переменных, то из включения $\tilde{f} \in T[C_m]$ следует, что $\tilde{f} \in \Gamma$. Воспользуемся теперь T -первичностью идеала Γ . Так как $h_m(x_1^{(j)}, \dots, x_N^{(j)}) \notin \Gamma$, то $f \in \Gamma$.

Итак, для любого полиоднородного полинома $f \in \Gamma_1$, квазилинейного по модулю Γ , выполнено включение $f \in \Gamma$. Так как идеал Γ_1 порождается по модулю Γ полиоднородными полиномами, квазилинейными по модулю Γ , то импликация $(f \in \Gamma_1) \implies (f \in \Gamma)$ верна для произвольных полиномов $f \in \Gamma_1$. Тем самым, предложение 2 доказано в случае $l > 1$.

Случай $l = 1$ является гораздо более простым, но требует отдельного рассмотрения. Как уже отмечалось, отличие от случая $l > 1$ состоит в том, что при $l = 1$ не определены полиномы $h_{l-1,c}$, следовательно, нельзя пользоваться утверждениями тех лемм, при доказательстве которых использовались эти полиномы.

Заметим, что полином $h_{1,t}(x; y_1) \in \Gamma$ равен полиному $x^t[y_1, \underbrace{x, \dots, x}_t]x^t$. Подставляя $t = t + 1$ и выделяя однородную компоненту степени t по x , получаем, что в этом случае идеал Γ содержит полином t -энгелевости $[y_1, \underbrace{x, \dots, x}_t]$. Таким образом, предложение 2 в случае $l = 1$ следует из доказываемой ниже теоремы 2.

§ 6. Доказательство теоремы 2

Напомним, что в работе [3] было доказано, что каждое энгелево многообразие с единицей порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторым расширением основного поля.

Пусть унитарно замкнутый T -идеал Γ содержит тождество t -энгелевости. Тогда для некоторого s T -идеал Γ содержит тождество p^s -энгелевости. Определим алгебру $\mathcal{B}$ следующим образом:

$$\mathcal{B} = F^\sharp\langle X \rangle / (\Gamma(F^\sharp\langle X \rangle), u^Q),$$

где идеал $(\Gamma(F^\sharp\langle X \rangle), u^Q)$ порожден множеством $\Gamma(F^\sharp\langle X \rangle)$ и множеством $\{u^Q \mid u - \text{слово из } F^\sharp\langle X \rangle \text{ степени } \geq 1\}$. Положим $\Gamma_1 = T[\mathcal{B}]$. Алгебра $\mathcal{B}$ является алгебраической алгеброй алгебраического индекса (аналог предложения 1). Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 1, и мы его не приводим.

Аналогом леммы 1 является следующее утверждение. Пусть Γ' – любой T -идеал в $F^\sharp\langle X \rangle$, полином $h(x) \in F^\sharp\langle X \rangle$ степени $d > 1$ по x квазилинеен по x по модулю Γ' и зависит, возможно, от других переменных. Допустим, что $h(x)$ представляется по модулю Γ' в виде $h(x) \equiv \sum_{k=0}^d x^k \theta_k(x)$, где полиномы $\theta_k(x)$ степеней $d - k$ по x содержат переменную x только в виде коммутаторов с элементами из $F^\sharp\langle X \rangle$. Тогда по модулю Γ' имеет место равенство $h(x) \equiv \theta_0(x) + x^d \theta_d(x)$. Доказательство мы опускаем, ввиду его аналогии с доказательством леммы 1.

Аналог леммы 4 формулируется так. Найдется такое число Q_1 , что для любого слова u степени ≥ 1 слово u_1^Q является по модулю Γ линейной комбинацией элементов $a(x)^{p^s} b$, где $a, b \in F^\sharp\langle X \rangle$, $x \in X$. Это утверждение доказывается по схеме доказательства леммы 4 с некоторыми упрощениями, поэтому мы его не приводим. Положим $Q = Q_1$.

После этого можно доказать аналог леммы 9: пусть $f \in \Gamma_1$, тогда $f \in \Gamma$. Из этого утверждения и аналога предложения 1 сразу же будет вытекать теорема 2. Понятно, что импликацию $(f \in \Gamma_1) \implies (f \in \Gamma)$ достаточно доказать только для полиоднородных полиномов $f \in \Gamma_1$, квазилинейных по модулю Γ .

В этом случае полином f представим в виде

$$f = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(v_{\alpha})^Q w_{\alpha} + g, \quad g \in \Gamma,$$

где v_{α} – слова алгебры $F^\sharp\langle X \rangle$ степени ≥ 1 , причем в этом представлении степени f , g и $u_{\alpha}(v_{\alpha})^Q w_{\alpha}$ по всем переменным равны (аналог леммы 8). Пусть n – число таких переменных, по которым f имеет степень $\geq p^s$. Импликацию $(f \in \Gamma_1) \implies (f \in \Gamma)$ будем доказывать индукцией по n . База индукции $n = 0$ очевидна. Без ограничения общности считаем, что полином f имеет степень $\geq p^s$ по переменным $x_1, \dots, x_n$.

Тогда, используя аналог леммы 4, без промежуточных шагов получаем аналог равенства (22)

$$f \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha} u_{i,\alpha}(x_i)^{p^s} v_{i,\alpha} \pmod{\Gamma}.$$

Индукцией по q покажем, что полином f представим по модулю Γ в виде

$$f \equiv \sum_{i=q}^n \sum_{\alpha} u_{i,\alpha}(x_i)^{p^s} v_{i,\alpha}.$$

Тогда при $q = n + 1$ получим, что $f \in \Gamma$. Индукция по q проводится так же, как и в доказательстве леммы 9, но со значительными упрощениями. Обозначим $x = x_i$, $d = \deg_x f$ и представим полином f в виде линейной комбинации слов

$$u_0 x^{\alpha_1} u_1 x^{\alpha_2} \dots u_{\nu-1} x^{\alpha_\nu} u_\nu, \quad (33)$$

где все слова $u_0, \dots, u_\nu$ не зависят от x . Слово (33) будем называть *словом 1-го рода*, если $\alpha_k \geq p^s$ для некоторого $k \in \{1, \dots, \nu\}$. Иначе хотя бы одно из слов $u_0, \dots, u_\nu$ содержит в качестве подслова $(x_i)^{p^s}$, $i > q$. В этом случае будем называть (33) *словом 2-го рода*.

Представим линейные комбинации слов 1-го и 2-го родов в виде

$$\sum_{k=0}^d x^k \theta_k^{(i)}(x), \quad i = 1, 2,$$

где полиномы $\theta_k^{(i)}$ степеней $d - k$ по x содержат x только в виде коммутаторов с элементами из $F^\sharp \langle X \rangle$. При этом можно считать, что $\theta_0^{(1)}(x) = 0$, так как идеал Γ содержит тождество p^s -энгелевости. Полиномы $\theta_k^{(2)}(x)$ представляются в виде линейной комбинации полиномов $a(x_i)^{p^s} b$, где $i > q$, $a, b \in F^\sharp \langle X \rangle$. В итоге по модулю Γ

$$f \equiv \sum_{k=0}^d x^k (\theta_k^{(1)}(x) + \theta_k^{(2)}(x)).$$

Из аналога леммы 1 получаем аналог равенства (30)

$$f \equiv \theta_0^{(2)}(x) + x^d \theta \pmod{\Gamma},$$

где полином $\theta = \theta_d^{(1)}(x) + \theta_d^{(2)}(x)$ не зависит от x , а в полином $\theta_0^{(2)}(x)$ переменная x входит только в виде коммутаторов с элементами из $F^\sharp \langle X \rangle$, причем $\theta_0^{(2)}(x)$ может быть представлен как линейная комбинация полиномов $a(x_i)^{p^s} b$, где $i > q$, $a, b \in F^\sharp \langle X \rangle$.

Полином $f|_{x=1} \equiv \theta \pmod{\Gamma}$ удовлетворяет предположению индукции по n ($f|_{x=1} \in \Gamma_1$, $f|_{x=1}$ квазилинеен по модулю Γ , $f|_{x=1}$ имеет степень $\geq p^s$ ровно по $n - 1$ переменным), поэтому по предположению индукции $\theta \in \Gamma$. Тем самым, $f \equiv \theta_0^{(2)}(x) \pmod{\Gamma}$, что доказывает шаг индукции по q .

Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] A. Kemer, "PI-algebras and nil algebras of bounded index", *Trends in ring theory* (Miskolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59–69.
- [2] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Transl. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [3] I. Sviridova, "Varieties and algebraic algebras of bounded degree", *J. Pure Appl. Algebra*, **133**:1–2 (1998), 233–240.

- [4] И. Ю. Свиридова, “Т-первичные многообразия и алгебраические алгебры”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **8**:1 (2002), 221–243.
- [5] Л. М. Самойлов, “О нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 583–592; англ. пер.: L. M. Samoilov, “On the nilindex of the radical of a relatively free associative algebra”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 522–530.
- [6] Л. М. Самойлов, “О радикале относительно свободной ассоциативной алгебры над полями положительной характеристики”, *Матем. сб.*, **199**:5 (2008), 81–126; англ. пер.: L. M. Samoilov, “Radical of a relatively free associative algebra over fields of positive characteristic”, *Sb. Math.*, **199**:5 (2008), 707–753.
- [7] Л. М. Самойлов, “Аналог теоремы Левицкого для бесконечно порожденных ассоциативных алгебр”, *Мат. заметки* (в печати).
- [8] А. Р. Кемер, “Представимость приведенно-свободных алгебр”, *Алгебра и логика*, **27**:3 (1988), 274–294; англ. пер.: A. R. Kemer, “Representability of reduced free algebras”, *Algebra and Logic*, **27**:3 (1988), 167–184.
- [9] А. Р. Кемер, “Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 726–753; англ. пер.: A. R. Kemer, “Identities of finitely generated algebras over an infinite field”, *Math. USSR-Izv.*, **37**:1 (1991), 69–96.
- [10] А. Р. Кемер, “Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **26**:5 (1987), 597–641; англ. пер.: A. R. Kemer, “Finite basis property of identities of associative algebras”, *Algebra and Logic*, **26**:5 (1987), 362–397.

Л. М. Самойлов (L. M. Samoilov)

Ульяновский государственный университет

E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Поступила в редакцию

23.09.2008