Общероссийский математический портал

Д. А. Тимашёв, Эквивариантные компактификации редуктивных групп, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 119–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:18:57

УДК 512.743.7+512.745+512.813.4

Д. А. Тимашёв

Эквивариантные компактификации редуктивных групп

В работе изучаются эквивариантные проективные компактификации редуктивных групп, получаемые замыканием образа группы в пространстве операторов проективного представления. Описаны структура и взаимное расположение орбит действия удвоенной группы левыми/правыми умножениями, локальная структура компактификации в окрестности замкнутой орбиты, получены некоторые условия нормальности и гладкости компактификации. Методы исследования используют теорию эквивариантных вложений сферических однородных пространств и редуктивных алгебраических полугрупп.

Библиография: 30 названий.

§ 0. Введение

Пусть G – связная редуктивная комплексная алгебраическая группа. Ее можно рассматривать как симметрическое однородное пространство $(G \times G)/\text{diag } G$ группы $G \times G$, действующей левыми/правыми умножениями. Эквивариантные вложения и, в частности, компактификации (пополнения) G строились и изучались в целом ряде работ. Пополнение $G = \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ при помощи “полных коллинеаций” было построено Семплом [1]. Позднее Неретин обобщил эту конструкцию на другие классические группы (см. обзор [2]). Компактификация Неретина может рассматриваться как частный случай “превосходного” пополнения симметрического пространства, в частности редуктивной группы [3] (см. § 8). Более общий класс регулярных пополнений рассматривался в [4] с приложениями к теории пересечений на однородных пространствах. Геометрия и когомологии эквивариантных компактификаций изучались в [5]–[11]. Теория эквивариантных вложений редуктивных групп и симметрических пространств является частным случаем теории сферических многообразий [12]–[14] (см. § 4). С другой стороны, аффинные эквивариантные вложения редуктивных групп суть не что иное, как редуктивные алгебраические полугруппы, интенсивно изучавшиеся в ряде работ Путчи и Реннера [15]–[19], а также Винбергом [20] и Риттаторе [21].

Компактификации Семпла–Неретина и “превосходное” пополнение де Кончини–Прочези [3] были основаны на явной конструкции, сводящейся к вложению в проективное пространство. Однако общая теория эквивариантных вложений [12] пошла другим путем: описание вложений и изучение их геометрических свойств производится в терминах некоторых объектов выпуклой геометрии (цветной конус, цветной веер) и их комбинаторики, см. § 4.

Работа выполнена при поддержке Гражданского фонда научных исследований и развития США (CRDF № RM1-2088) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 01-01-00756, 02-01-06402).

В настоящей работе мы возвращаемся на конструктивную точку зрения и рассматриваем следующий естественный класс компактификаций группы G . Пусть $G : \mathbb{P}(V)$ – точное проективное представление. Тогда G вкладывается в пространство проективно линейных операторов $\mathbb{P}(L(V))$, где $L(V)$ – алгебра линейных операторов на V . Проективное замыкание $X = \overline{G} \subseteq \mathbb{P}(L(V))$ является $(G \times G)$ -эквивариантной проективной компактификацией G . По существу, X полностью задается набором старших весов представления $G : V$.

Наша задача – извлечь из этих данных геометрическую информацию об X : $(G \times G)$ -орбитную структуру (теорема 8), локальную структуру в окрестности замкнутой орбиты (предложения 6, 7), условия нормальности (§10) и гладкости (§11). Вопрос о нормальности важен, в частности, потому, что к нормальному X можно применять глубоко разработанную теорию сферических многообразий. Скажем, замыкания всех орбит (в том числе само X) в этом случае имеют рациональные особенности [22], [23], допускает явное описание группа Пикара [24] и, в некоторых случаях, кольцо когомологий [7]–[10], справедливы теоремы об обращении в 0 высших когомологий nef -расслоений [23] и т. д.

Опишем теперь структуру статьи. В §1 фиксируются основные обозначения. В §2 доказана техническая лемма о разложении тензорных степеней G -модулей на неприводимые компоненты, а в §3 рассмотрен частный случай фундаментальной леммы Луны, необходимый нам при изучении гладкости X . В §4 дано краткое изложение теории сферических многообразий, результаты которой используются при изучении проективных компактификаций G . Так как априори наша компактификация X не является нормальным многообразием, то важно изучать нормализацию $\tilde{X} \rightarrow X$, некоторые свойства которой обсуждаются в предложении 1 и, в частном случае торических многообразий, в §5.

Другим важным инструментом изучения X является описание локальной структуры проективного действия [25], позволяющее строить трансверсальные слайсы к замкнутым орбитам и сводить изучение геометрии действия к действию подгрупп Леви на аффинных подмногообразиях. Эти результаты формулируются в §6.

Группа G как сферическое (и даже симметрическое) однородное пространство группы $G \times G$ рассматривается в §7, где вычисляются все необходимые для теории сферических вложений комбинаторные данные. Приступая к изучению X , мы в §8 описываем замкнутые орбиты и локальную структуру X в их окрестностях в терминах многогранника весов представления $G : V$. При этом трансверсальные слайсы к замкнутым орбитам имеют структуру алгебраических полугрупп, группы обратимых элементов которых являются подгруппами Леви в G . Эти результаты позволяют вычислить комбинаторные данные, описывающие $\tilde{X}$, что, в свою очередь, применяется к описанию орбитной структуры X в §9.

Вопросы нормальности и гладкости X обсуждаются в §§ 10, 11. Ввиду локального характера они сводятся к ситуации, когда вместо X рассматривается трансверсальный слайс к замкнутой орбите – редуктивная алгебраическая полугруппа. Хотя эффективный критерий нормальности в общем случае требует информации о разложении тензорных произведений представлений редуктивных групп и ограничений на подгруппы Леви, можно сформулировать некоторые необходимые или достаточные условия, а в некоторых ситуациях (например, случай регулярных старших весов) и критерии нормальности. Критерий гладкости содержится в теореме 9.

В §12 мы иллюстрируем полученные результаты изучением эквивариантных компактификаций простых алгебраических групп в пространствах проективно-линейных операторов фундаментальных и присоединенных представлений. Часть полученных результатов (орбитальное разложение) перекликается с аналогичными результатами Путчи–Реннера [17], [19] для редуктивных алгебраических полугрупп.

Настоящая работа преследует двоякую цель. Наряду с получением новых результатов мы хотим собрать воедино и обобщить некоторые известные результаты об эквивариантных вложениях редуктивных групп, рассеянные в литературе. Поэтому мы старались сделать изложение максимально замкнутым, включив доказательства некоторых известных утверждений (см., например, §7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для простоты мы работаем над основным полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Однако наш подход является чисто алгебраическим, и все результаты переносятся на случай любого алгебраически замкнутого основного поля характеристики 0.

Автор благодарен А. Стояновскому, чей интерес к данной тематике стимулировал написание статьи, а также рецензенту и Г. Рёрле за ряд полезных замечаний, позволивших улучшить первоначальный текст.

§1. Обозначения

Будем использовать следующие обозначения:

G – связная редуктивная комплексная алгебраическая группа;

$B \supseteq T, U$ – борелевская подгруппа, максимальный тор и максимальная унитарная подгруппа в G ;

$\Delta = \Delta_G$ – система корней G относительно T ;

$\Delta^+ \supseteq \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – системы положительных и простых корней, отвечающих выбору B ;

$\alpha^\vee$ – дуальный к α корень (т.е. однопараметрическая подгруппа в T);

e_α – корневой вектор в $\mathfrak{g}$, отвечающий корню α ;

$u_\alpha(t) = \exp(te_\alpha)$ – корневая унитарная однопараметрическая подгруппа;

$W = W_G = N_G(T)/T$ – группа Вейля;

$s_\alpha \in W$ – отражение, отвечающее корню $\alpha \in \Delta$ (или его представитель в $N_G(T)$);

$Q = \mathbb{Z}\Delta$ – решетка корней;

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(T)$ – решетка характеров T ;

$C = C_G \subseteq \mathfrak{X} \otimes \mathbb{Q}$ – положительная камера Вейля; то же обозначение используем для положительной камеры Вейля в сопряженном пространстве $\text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$, отождествляя его с $\mathfrak{X} \otimes \mathbb{Q}$ при помощи W -инвариантного скалярного умножения;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание между элементами двойственных пространств;

$\mathfrak{X}^+ = \mathfrak{X}_G^+ = C \cap \mathfrak{X}$ – полугруппа доминантных весов;

$\omega_1, \dots, \omega_l$ – фундаментальные веса;

$V(\lambda) = V_G(\lambda)$ – неприводимое представление старшего (или младшего) веса λ ;

$v_\mu \in V(\lambda)$ – (какой-нибудь) вектор T -веса μ , в частности v_λ – старший (младший) вектор;

$M_{(\lambda)}$ – изотипная компонента старшего веса λ в G -модуле M ;

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ – многогранник весов линейного представления $G : V$;

$\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ – точка проективного пространства, отвечающая вектору $v \in V$;

$L(V)$ – алгебра линейных операторов на V ;
 $\mathbb{C}(X)$ – поле рациональных функций на многообразии X ;
 $\mathbb{C}[X]$ – алгебра многочленов на аффинном многообразии X ;
 $\tilde{X}$ – нормализация многообразия X .

Алгебры Ли алгебраических групп будем обозначать соответствующими строчными готическими буквами. Знаки “ $\times, \wedge$ ” обозначают *почти* (полу)прямое произведение алгебраических групп (допускается пересечение по конечной подгруппе).

Для параболической подгруппы $P \subseteq G$, $P \supseteq T$, обозначим через P^- противоположную параболическую подгруппу (и будем писать $P = P^+$), а через P_u – унипотентный радикал.

§ 2. Результат из теории представлений

Пусть $G : V$ – произвольное рациональное линейное представление.

ЛЕММА 1. Для любого $\mu \in C \cap \mathcal{P}$ при некотором n в разложении $V^{\otimes n}$ имеется простой подмодуль $V(n\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{M} = \{\mu \in C \mid \exists n \in \mathbb{N} : V^{\otimes n} \hookrightarrow V(n\mu)\}$. Очевидно, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Надо доказать, что $\mathcal{M} = C \cap \mathcal{P}$.

Заметим, что $\mathcal{M}$ выпукло. Действительно, для любых $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию $r\mu + s\nu$, $r = p/m$, $s = q/m$, $p, q \geq 0$, $p + q = m$. При некотором n имеем $V^{\otimes n} \hookrightarrow V(n\mu), V(n\nu)$, откуда $V^{\otimes nm} \hookrightarrow V(n\mu)^{\otimes p} \otimes V(n\nu)^{\otimes q} \hookrightarrow V(nm(r\mu + s\nu))$, а значит, $r\mu + s\nu \in \mathcal{M}$.

Следовательно, равенство $\mathcal{M} = C \cap \mathcal{P}$ достаточно доказать для неприводимого $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{X}^+$. При этом можно считать G полупростой.

Во-первых, $\lambda \in \mathcal{M}$. Во-вторых, $0 \in \mathcal{M}$. Действительно, $V^{\otimes n} \supset \bigwedge^n V = V(0)$, где $n = \dim V$.

Остальные вершины μ многогранника $C \cap \mathcal{P}$ – точки пересечения граней $\mathcal{P}$ при λ , направляющие подпространства которых натянуты на подсистемы простых корней, с перпендикулярными им гранями C . Если $L \subset G$ – соответствующая подгруппа Леви, то грань имеет вид $\mathcal{P}_L = \mathcal{P} \cap (\lambda + \langle \Delta_L \rangle)$ и μ – центр $\mathcal{P}_L$. При этом $V(\lambda)$ содержит $V_L(\lambda)$ с многогранником весов $\mathcal{P}_L$, и при ограничении на коммутант L вес μ переходит в 0. Отсюда $V(\lambda)^{\otimes n} \hookrightarrow V_L(n\mu)$, но L -старший вектор веса $n\mu$ в $V(\lambda)^{\otimes n}$ будет автоматически старшим и для G (прибавление $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_L^+$ выводит за пределы многогранника весов $n\mathcal{P}$), а значит, $\mu \in \mathcal{M}$.

§ 3. Фундаментальная лемма Луны

Следующий результат является простым частным случаем фундаментальной леммы [26; II.2] в теории этальных слайсов [loc. cit.]. Для удобства читателя приведем доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть $X \subseteq V$ – гладкое замкнутое G -инвариантное подмногообразие с плотной орбитой и $0 \in X$. Тогда проекция $\pi : X \rightarrow T_0 X \subseteq V$ вдоль G -инвариантного дополнительного подпространства – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение π этально в 0. Множество точек неэталности замкнуто и G -инвариантно. Ввиду разделяемости замкнутых орбит полиномиальными инвариантами единственная замкнутая орбита в X есть $\{0\}$, откуда π этально. По основной теореме Зариского π разлагается в композицию открытого вложения $X \hookrightarrow \overline{X}$ и конечного морфизма $\overline{X} \rightarrow T_0X$, причем $\mathbb{C}[\overline{X}]$ – целое замыкание $\mathbb{C}[T_0X]$ в $\mathbb{C}[X]$. Но $\overline{X}$ также имеет плотную, а значит, единственную замкнутую орбиту, откуда $\overline{X} \setminus X = \emptyset$, т.е. π – конечное этальное накрытие. Но $\pi^{-1}(0) = \{0\}$ (в X всего одна неподвижная точка), следовательно, $\deg \pi = 1$, т.е. π – изоморфизм.

§ 4. Сферические многообразия

Нормальное G -многообразие X называется *сферическим*, если B имеет на X открытую орбиту. Тем более X содержит открытую G -орбиту, которую выделением базисной точки можно отождествить с однородным пространством G/H , и X можно рассматривать как эквивариантное вложение однородного пространства G/H . Все эквивариантные вложения сферического однородного пространства G/H допускают описание в терминах комбинаторики некоторых объектов выпуклой геометрии (конусы, многогранники), связанных с G/H . Теория принадлежит Луне и Вюсту [12], доступное изложение см. в [13], [14].

Алгебра регулярных функций на сферическом однородном пространстве G/H имеет простой спектр, т.е. ненулевые изотипные компоненты $\mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)} \cong V(\lambda)$ – простые G -модули.

Пусть $\mathfrak{X}(G/H)$ – решетка весов рациональных B -полуинвариантных функций на G/H (которые определяются своими весами однозначно с точностью до пропорциональности). Рассмотрим сопряженное линейное пространство $E = \text{Hom}(\mathfrak{X}(G/H), \mathbb{Q})$. Любое (дискретное $\mathbb{Q}$ -значное) нормирование поля $\mathbb{C}(G/H)$ при ограничении на мультипликативную подгруппу B -полуинвариантных рациональных функций определяет гомоморфизм $\mathfrak{X}(G/H) \rightarrow \mathbb{Q}$, т.е. точку E .

ТЕОРЕМА 1 [13; 2.8, 6.3], [14; 3.1, 4.2]. *Множество G -инвариантных нормирований $\mathbb{C}(G/H)$ отображается в E инъективно, и образ – телесный многогранный конус $\mathcal{V}$, содержащий образ отрицательной камеры Вейля при естественной проекции в E .*

B -инвариантные дивизоры на G/H (т.е. неприводимые компоненты дополнения к открытой B -орбите, их конечное число) определяют конечное множество $\mathcal{D}$ нормирований $\mathbb{C}(G/H)$ (множество *красок*), но отображение $\rho: \mathcal{D} \rightarrow E$ уже не обязательно инъективно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Цветной конус* – это пара $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, $\rho(\mathcal{F}) \not\equiv 0$, а $\mathcal{C}$ – острый многогранный конус, порожденный $\rho(\mathcal{F})$ и конечным числом векторов из $\mathcal{V}$, причем $\text{int } \mathcal{C}$ (относительная внутренность) пересекает $\mathcal{V}$.

Цветная грань цветного конуса – цветной конус $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$, где $\mathcal{C}'$ – грань $\mathcal{C}$, а $\mathcal{F}' = \rho^{-1}(\rho(\mathcal{F}) \cap \mathcal{C}')$.

Цветной веер – конечный набор цветных конусов $(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_i)$, замкнутый относительно перехода к цветным граням, причем $\text{int } \mathcal{C}_i \cap \text{int } \mathcal{C}_j \cap \mathcal{V} = \emptyset$ при $i \neq j$ (т.е. в пределах $\mathcal{V}$ конусы пересекаются строго по граням).

ТЕОРЕМА 2 [13; 4.3], [14; 3.4]. *Имеется биекция между всевозможными эквивариантными нормальными вложениями $X \hookrightarrow G/H$ и цветными веерами. При этом G -орбиты $Y \subseteq X$ взаимно однозначно соответствуют цветным конусам $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ данного цветного веера. Множество красок $\mathcal{F}_Y$ соответствует замыканиям B -инвариантных дивизоров на G/H , содержащим Y , а G -инвариантные дивизоры, содержащие Y , задают образующие тех ребер $\mathcal{C}_Y$, которые не содержат векторов из $\rho(\mathcal{F}_Y)$.*

Геометрия сферического многообразия определяется его веером.

ТЕОРЕМА 3 [13; 4.2, 5.2], [14; 3.4]. *Пусть $X \hookrightarrow G/H$ – сферическое многообразие, $Y, Y' \subseteq X$ – G -орбиты. Тогда $\overline{Y} \subseteq \overline{Y'} \iff (\mathcal{C}_{Y'}, \mathcal{F}_{Y'})$ – грань $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$. В частности, G/H соответствует $(0, \emptyset)$, Y проективна $\iff \mathcal{C}_Y$ – телесный конус. X полно $\iff$ его веер покрывает $\mathcal{V}$.*

Из теоремы 3 видно, что всякое сферическое многообразие покрывается простыми открытыми подмногообразиями, которые имеют единственную замкнутую орбиту. В частности, аффинные сферические многообразия просты. Цветной веер простого многообразия определяется цветным конусом замкнутой орбиты (состоит из всех его цветных граней).

Аффинные сферические многообразия имеют более явное описание.

ТЕОРЕМА 4 [13; 7.7]. *G/H допускает аффинное вложение тогда и только тогда, когда $\rho(\mathcal{D})$ лежит в открытом полупространстве E . Имеется биекция между всевозможными эквивариантными нормальными аффинными вложениями $X \hookrightarrow G/H$ и острыми многогранными конусами $\mathcal{C} \subset E$, порожденными $\rho(\mathcal{D})$ и конечным набором векторов из $\mathcal{V}$. При этом*

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}(G/H) \cap \mathcal{C}^\vee} \mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)}$$

и $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[\mathfrak{X}(G/H) \cap \mathcal{C}^\vee]$ – полугрупповая алгебра полугруппы целых точек дуального конуса $\mathcal{C}^\vee$. Цветной веер X – множество всех цветных граней $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пара $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ не вполне удовлетворяет определению цветного конуса: $\text{int } \mathcal{C}$ может не пересекать $\mathcal{V}$. Однако мы можем рассматривать его цветные грани в соответствии с определением. Существует наибольшая грань $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, внутренность которой пересекает $\mathcal{V}$. Соответствующая цветная грань $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ задает цветной веер X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $X \hookrightarrow G/H$ – аффинное или проективное вложение сферического однородного пространства. Тогда отображение нормализации $\tilde{X} \rightarrow X$ биективно на множестве G -орбит.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X аффинно, то $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[G/H]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}^+$ – конечнопорожденная полугруппа и $\mathbb{Z}S = \mathfrak{X}(G/H)$. Следующие объекты находятся в биективном соответствии: G -орбиты на X , G -инвариантные замкнутые неприводимые подмногообразия X , G -инвариантные простые идеалы в $\mathbb{C}[X]$, (некоторые, но, вообще говоря, не все) отвечающие им T -инвариантные простые идеалы в $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[S]$ – полугрупповой алгебре S , (некоторые) множества весов вида $S \cap (\Sigma \setminus \Sigma')$, где $\Sigma = \mathbb{Q}_+ S$, а Σ' – его грань.

При нормализации S заменяется на $\mathfrak{X}(G/H) \cap \Sigma$, но конус Σ , его грани и пр. сохраняются.

Проективный случай сводится к аффинному при помощи локальной структуры (§6).

ПРИМЕР. Торические многообразия – частный случай сферических. Здесь $G = B = T$ – тор, и при желании можно считать $H = \{e\}$, заменив T на T/H . Решетка $\mathfrak{X}(T/H)$ совпадает с решеткой характеров тора T/H . Любое T -инвариантное нормирование $\mathbb{C}(T/H)$ пропорционально нормированию, задаваемому порядком при $t \rightarrow \infty$ ограничения функции на однопараметрическую подгруппу $\gamma(t) \in T/H$. Его значение на полуинвариантной функции веса λ равно $\langle \gamma, \lambda \rangle$, откуда $\mathcal{V} = E$. Красок нет, и цветные конусы превращаются в обычные, а веер – просто конечный набор острых многогранных конусов, пересекающихся по граням.

Простое торическое многообразие X , задаваемое конусом $\mathcal{C}$, аффинно, и его алгебра многочленов $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[\mathfrak{X}(T/H) \cap \mathcal{C}^\vee]$ – полугрупповая алгебра полугруппы целых точек дуального конуса.

Проективное торическое многообразие также можно задавать многогранником в $E^* = \mathfrak{X}(T/H) \otimes \mathbb{Q}$, двойственным к вееру, т.е. веер состоит из конусов, двойственных к конусам при вершинах многогранника, и всех их граней.

§5. Многогранник замыкания орбиты тора

Рассмотрим линейное представление $T : V$ и вектор $v \in V$. *Носитель* $\text{supp } v$ – выпуклая оболочка весов в разложении v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Многогранником проективного торического многообразия $\widetilde{T\langle v \rangle}$ является $-\text{supp } v$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим весовое разложение $v = v_{\lambda_0} + \dots + v_{\lambda_n}$, дополним $v_{\lambda_0}, \dots, v_{\lambda_n}$ до весового базиса V и рассмотрим двойственную систему координат x_λ (вес $-\lambda$) как однородные координаты в $\mathbb{P}(V)$. Многообразие $X = \widetilde{T\langle v \rangle}$ покрывается аффинными картами $X_i = \{x_{\lambda_i} \neq 0\}$. Возьмем для определенности X_0 . Тогда $\mathbb{C}[X_0] = \mathbb{C}[x_{\lambda_1}/x_{\lambda_0}, \dots, x_{\lambda_n}/x_{\lambda_0}]$ – полугрупповая алгебра полугруппы $S_0 = \mathbb{Z}_+(\lambda_0 - \lambda_1) + \dots + \mathbb{Z}_+(\lambda_0 - \lambda_n)$. Эта полугруппа порождает конус Σ_0 при вершине $-\lambda_0$ многогранника $-\text{supp } v$. При этом $\mathbb{C}[\widetilde{X_0}] = \mathbb{C}[\mathbb{Q}S_0 \cap \Sigma_0]$. Таким образом, веер $\widetilde{X}$ двойствен многограннику $-\text{supp } v$.

Из доказательства вытекает

СЛЕДСТВИЕ. $\widetilde{T\langle v \rangle}$ нормально $\iff \mathbb{Q}S_i \cap \Sigma_i = S_i, i = 0, \dots, n$.

§6. Локальная структура проективного действия

Рассмотрим линейное представление $G : V$ и фиксируем младший вектор $v_\lambda \in V$. Пусть $P^- = P(\lambda) = G_{\langle v_\lambda \rangle}$ и $P \supseteq B$ – противоположная параболическая подгруппа. Рассмотрим разложения Леви $P = P_u \rtimes L$, $P^- = P_u^- \rtimes L$. Имеем разложение в прямую сумму L -модулей $V = \mathfrak{p}_u v_\lambda \oplus \mathbb{C}v_\lambda \oplus M$. Рассмотрим двойственный старший вектор $v_{-\lambda} \in V^*$ и открытое подмножество $\mathring{V} = \mathfrak{p}_u v_\lambda \oplus \mathbb{C}^\times v_\lambda \oplus M$ – дополнение до гиперплоскости $\{v_{-\lambda}, \cdot\} = 0\}$.

ТЕОРЕМА 5 [25]. Действие P на $\mathbb{C}v_\lambda \oplus M$ задает изоморфизм

$$\mathbb{P}(\mathring{V}) \cong P \times_L M(-\lambda) = P_u \times M(-\lambda),$$

где $M(-\lambda) = M$ с действием L , подкрученным на характер $-\lambda$, вложено в $\mathbb{P}(V)$ как $\{\langle v_\lambda \rangle\} \times M = \mathbb{P}(v_\lambda + M)$.

Отсюда следует, что любое проективное G -многообразие $X \subseteq \mathbb{P}(V)$, содержащее замкнутую орбиту $Y = G \langle v_\lambda \rangle$, содержит пересекающее Y аффинное открытое P -инвариантное подмножество $\mathring{X} = X \cap \mathbb{P}(\mathring{V}) \cong P \times_L Z = P_u \times Z$, где $Z \subseteq M(-\lambda)$ — замкнутое аффинное L -подмногообразие.

Если X — сферическое G -многообразие, то Z — аффинное сферическое L -многообразие. Из структуры $\mathring{X}$ видно, что $\mathfrak{X}(X) = \mathfrak{X}(\mathring{X}) = \mathfrak{X}(Z)$ и $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_{Y \cap Z}$, только конус инвариантных нормирований может увеличиться, а множество красок — уменьшиться, так как некоторые краски могут превратиться в L -инвариантные дивизоры. В сочетании с теоремой 4 это дает эффективное описание локальной структуры сферического многообразия по его вееру.

§ 7. Редуктивная группа как сферическое однородное пространство

Группа G является однородным пространством группы $G \times G$, действующей умножениями слева и справа, со стабилизатором $\text{diag } G$ точки e . Фиксируем борелевскую подгруппу $B^- \times B \subseteq G \times G$. Из разложения Брюа следует, что $G = (G \times G) / \text{diag } G$ — сферическое однородное пространство. Следующий результат хорошо известен [27; II.3.1, теорема 3]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}^+} \mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$, где $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cong V(-\lambda) \otimes V(\lambda)$ — линейная оболочка матричных элементов представления $G : V(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathfrak{X}(G) \cong \mathfrak{X}$.

Функция $f_\lambda(g) = \langle v_{-\lambda}, gv_\lambda \rangle$ имеет старший вес $(-\lambda, \lambda)$, т.е. λ при нашем отождествлении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cdot \mathbb{C}[G]_{(\mu)} = \mathbb{C}[G]_{(\lambda+\mu)} \oplus \bigoplus_i \mathbb{C}[G]_{(\lambda+\mu-\beta_i)}$, где $\lambda + \mu - \beta_i$ — старшие веса всех “младших” неприводимых компонент в разложении $V(\lambda) \otimes V(\mu) = V(\lambda + \mu) \oplus \dots$, причем $\beta_i \in \mathbb{Z}_+ \Pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)} \cdot \mathbb{C}[G]_{(\mu)}$ порождается всевозможными произведениями матричных элементов $G : V(\lambda)$ и $G : V(\mu)$, т.е. матричными элементами $G : V(\lambda) \otimes V(\mu)$.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{V} = -C$ — отрицательная камера Вейля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что G -инвариантное нормирование поля $\mathbb{C}(G)$ постоянно на любой изотипной компоненте $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$ и его ограничение есть линейная функция от λ , т.е. $\nu \in E = \text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q})$. При $f \in \mathbb{C}[G]$ значение нормирования равно $\min_{f_{(\lambda)} \neq 0} \langle \nu, \lambda \rangle$ ($f_{(\lambda)}$ — проекция f на $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$). Перемножая функции из $\mathbb{C}[G]_{(\lambda)}$ и $\mathbb{C}[G]_{(\mu)}$, из предложения 4 получаем $\langle \nu, \beta_i \rangle \leq 0$ — необходимое и достаточное условие для того, чтобы ν определял нормирование. Так как β_i — положительные комбинации простых корней и при всевозможных $\lambda, \mu \in \mathfrak{X}^+$ среди

них встретятся кратные всех простых корней (см., например, §2), то неравенства задают $-C$.

Из разложения Брюа следует, что $(B^- \times B)$ -инвариантные дивизоры на G имеют вид $D_i = \overline{B^-} s_{\alpha_i} \overline{B}$. Если G имеет односвязный тип (является прямым произведением тора и односвязной полупростой группы), то $\omega_i \in \mathfrak{X}$ и D_i задается уравнением $f_{\omega_i} = 0$. Более точно, рассмотрим кривую $g_j(t) = u_{-\alpha_j}(t) \alpha_j^\vee(t^{-1}) u_{\alpha_j}(-t)$, лежащую в большой клетке Брюа. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} g_j(t) = s_{\alpha_j} \in D_j$ (все происходит в SL_2 -подгруппе, где вычисляется явно) и

$$f_{\omega_i}(g_j(t)) = \langle v_{-\omega_i}, \alpha_j^\vee(t^{-1}) v_{\omega_i} \rangle = t^{-\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle} \langle v_{-\omega_i}, v_{\omega_i} \rangle.$$

Значит, f_{ω_i} имеет порядок 1 вдоль D_j при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Поэтому краски имеют вид $\rho(D_j) = \alpha_j^\vee$. Это заключение сохраняет силу для произвольной G , поскольку G накрывается группой односвязного типа, краски которой — прообразы красок G .

Эти результаты, принадлежащие Вюсту [28], позволяют применить для описания $(G \times G)$ -эквивариантных вложений группы G теорию §§ 4, 6. Аффинные вложения обладают еще одним замечательным свойством.

ТЕОРЕМА 6 [20]. *Аффинное $(G \times G)$ -эквивариантное вложение $X \hookrightarrow G$ — алгебраическая полугруппа с единицей, в которой G — группа обратимых элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действия левого и правого сомножителя $G \times G$ на X определяют кодействия $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[G]$, которые суть ограничения на $\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[G]$ коумножения $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$. Значит, образ $\mathbb{C}[X]$ лежит в $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[X] \cap \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X]$, и мы имеем коумножение в $\mathbb{C}[X]$. Группа G — открытое подмножество X , состоящее из обратимых элементов, и $xG \cap G \neq \emptyset$ для любого обратимого $x \in X$, откуда $x \in G$.

§8. Проективная компактификация редуктивной группы

Пусть $V = \bigoplus_{i=0}^m V(\lambda_i)$ ($\lambda_i \in \mathfrak{X}^+$) — точное представление G . Тогда $G \hookrightarrow \mathbb{V} = \bigoplus \mathrm{L}(V(\lambda_i)) \subseteq \mathrm{L}(V) \cong V \otimes V^*$. При проективизации $G \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{V})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \sum \mathbb{Z}(\lambda_i - \lambda_j) + Q$. Этого всегда можно добиться, добавив к V тривиальное представление, и мы будем это предполагать или, несколько более общим образом, будем рассматривать точные проективные представления $G : \mathbb{P}(V)$ (которые поднимаются до линейных представлений быть может не самой G , а ее конечнолистной накрывающей). Кроме того, можно считать все λ_i различными.

Наша цель — изучить $X = \overline{G} \subseteq \mathbb{P}$.

Образ единичного элемента в $\mathbb{V}$ таков: $e = \sum v_\mu \otimes v_{-\mu}$, где $v_{\pm\mu}$ пробегает двойственные весовые базисы в V, V^* . При этом $\mathrm{supp} e = -\mathcal{P}$ при отождествлении $\mathfrak{X}((T \times T)/\mathrm{diag} T) \cong \mathfrak{X}(T)$.

Все замкнутые $(G \times G)$ -орбиты в $\mathbb{P}$ имеют вид $Y_i = (G \times G)y_i$, $y_i = \langle v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i} \rangle$.

Локальная структура $\mathbb{P}$ в окрестности Y_i имеет следующий вид (§6). Пусть $P = P(\lambda_i)$ — проективный стабилизатор v_{λ_i} и $P = P_u \rtimes L$, $P^- = P_u^- \rtimes L$ — разложения Леви. Тогда $P \times P^- = (G \times G)_{y_i}$. Аффинная $(P^- \times P)$ -инвариантная карта $\mathring{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathring{\mathbb{V}})$, где

$$\mathring{\mathbb{V}} = \mathbb{C}^\times (v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus (\mathfrak{p}_u^- v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus (v_{\lambda_i} \otimes \mathfrak{p}_u v_{-\lambda_i}) \oplus \mathbb{M},$$

пересекает Y_i , причем $\mathring{\mathbb{P}} \cong (P^- \times P) \times_{(L \times L)} \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i) = P_u^- \times P_u \times \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i)$, где $\mathbb{M} \subset \mathbb{V} - (L \times L)$ -инвариантное подпространство и $\mathbb{C}(v_{\lambda_i} \otimes v_{-\lambda_i}) \oplus \mathbb{M} \ni e$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $X \supset Y_i \iff \lambda_i$ – вершина $\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если λ_i – вершина $\mathcal{P}$, то найдется однопараметрическая подгруппа $\gamma(t) \in T$ такая, что $\langle \gamma, \lambda_i \rangle > \langle \gamma, \mu \rangle \forall \mu \in \mathcal{P}, \mu \neq \lambda_i$. Тогда

$$\gamma(t) = \left\langle \sum \gamma(t) v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle \gamma, \mu \rangle} v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle \rightarrow y_i \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Обратно, пусть $Y_i \subset X$. Рассмотрим локальную структуру X в окрестности Y_i ; X содержит $(P^- \times P)$ -инвариантное аффинное открытое подмножество $\mathring{X} = P_u^- \times P_u \times Z$, где $Z = X \cap \mathbb{M}(-\lambda_i, \lambda_i) = (\overline{L} \times L)e = \overline{L}$ – аффинное $(L \times L)$ -эквивариантное вложение L с единственной неподвижной точкой y_i . Тогда по теореме 4 имеем $\mathbb{C}[\tilde{Z}] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X} \cap \mathcal{C}^\vee} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $\mathcal{C}$ – острый телесный конус, порожденный Δ_L^+ и конечным числом векторов из $\mathcal{V}_L = -C_L$, причем $\text{int } \mathcal{C} \cap \mathcal{V}_L \neq \emptyset$. Отсюда $\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}_L^+ \cap \mathcal{C}^\vee$ – конечнопорожденная полугруппа такая, что $\mathbb{Z}S \cap \mathcal{C}^\vee = \mathfrak{X} \cap \mathcal{C}^\vee$.

Существует однопараметрическая подгруппа $\gamma \in \text{int } \mathcal{C} \cap -C_L$, $\gamma \perp \Delta_L$. Она задает неотрицательную градуировку $\mathbb{C}[Z]$: $\deg \mathbb{C}[Z]_{(\lambda)} = \langle \gamma, \lambda \rangle$, причем функции нулевой степени – константы. Следовательно, действие $\gamma(t)$ стягивает все Z (и, в частности, e) в y_i при $t \rightarrow \infty$, откуда $-\lambda_i$ – вершина $\text{supp } e = -\mathcal{P}$.

Изучим подробнее локальную структуру X в окрестности замкнутой орбиты, скажем, Y_0 . Сохраним предшествующие обозначения. Пусть $\mathring{X} = X \cap \mathring{\mathbb{P}} = \{f_{\lambda_0} \neq 0\}$ ($f_{\lambda_0} = v_{-\lambda_0} \otimes v_{\lambda_0}$ рассматривается как линейная функция на $\mathbb{V}$). Тогда $\mathring{X} \cong (P^- \times P) \times_{(L \times L)} Z = P_u^- \times P_u \times Z$, где $Z = X \cap (\{y_0\} \times \mathbb{M}) = \overline{L}$ – эквивариантное аффинное вложение.

Более точно, если $V = \mathbb{C}v_{\lambda_0} \oplus V_0$ – L -инвариантное разложение, то $Z \subseteq L(V_0(-\lambda_0)) \subseteq \mathbb{M}(-\lambda_0, \lambda_0)$, откуда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}_L^+$ – все старшие веса $L: V$, кроме λ_0 . Представления $L: V_L(\mu_j - \lambda_0)$ продолжаются на Z и индуцируют замкнутое вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus L(V_L(\mu_j - \lambda_0))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. $\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}_L^+$ – полугруппа, порождающая конус Σ_0 многогранника $C \cap \mathcal{P}$ в вершине λ_0 , и $\mathbb{Z}S = \mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однородная координатная алгебра проективного пространства $\mathbb{P}$ есть $\mathbb{C}[\mathbb{V}] = S^\bullet \mathbb{V}^*$. Система весов однородных многочленов степени n лежит в $-n\mathcal{P} \oplus n\mathcal{P}$. Поскольку $\mathbb{C}[\mathring{\mathbb{P}}] = \bigoplus S^n \mathbb{V}^* / f_{\lambda_0}^n$, то веса однородных многочленов степени n на $\mathring{\mathbb{P}}$ лежат в $n(-\mathcal{P} + \lambda_0) \oplus n(\mathcal{P} - \lambda_0)$. Следовательно, старшие веса $(L \times L)$ -модуля $\mathbb{C}[Z] \subseteq \mathbb{C}[L]$ лежат в $C_L \cap \bigcup n(\mathcal{P} - \lambda_0) = \Sigma_0$ (при антидиагональном вложении $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}(T \times T)$).

С другой стороны, для любого $\mu \in C_L \cap \mathcal{P}$ по лемме 1 $V^{\otimes n} \hookrightarrow V_L(n\mu)$ при некотором n . Используя предложение 4 для L , нетрудно получить $f_{n\mu} / f_{\lambda_0}^n \in \mathbb{C}[Z]$. Следовательно, S порождает Σ_0 .

СЛЕДСТВИЕ. $\mathbb{C}[\tilde{Z}] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X} \cap \Sigma_0} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если λ_0 – регулярный вес (т.е. $\lambda_0 \in \text{int } C$), то $L = T$, Σ_0 – конус $\mathcal{P}$ в λ_0 и $\mathbb{C}[Z] = \mathbb{C}[S]$ – полугрупповая алгебра полугруппы S , порожденной $\mu - \lambda_0$, где μ пробегает систему весов V (ср. §5). В общем случае описание полугруппы S требует разложений на простые L -модули G -модуля V и тензорных произведений простых L -модулей (см. §10). Нормальность Z означает $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.

Рассмотрим сферическое многообразие $\tilde{X}$. Согласно предложению 1 нормализация $\tilde{X} \rightarrow X$ биективна на множестве орбит. В частности, $\tilde{X} \hookrightarrow G/H, Y_i$.

ТЕОРЕМА 7. Цветной веер $\tilde{X}$ порождается цветными конусами замкнутых орбит $Y_i \subset \tilde{X}$ по всем вершинам $\lambda_i \in \mathcal{P}$: $\mathcal{C}_{Y_i} = \Sigma_i^\vee$, где Σ_i – конус $C \cap \mathcal{P}$ при вершине λ_i , а $\mathcal{F}_{Y_i} = \Pi_{L_i}^\vee$ – подсистема дуальных простых корней соответствующей подгруппы Леви $L_i = Z_G(\lambda_i)$. (Напоминаем, что краски отождествляются с дуальными простыми корнями.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение про $\mathcal{C}_{Y_i}$ следует из предложения 7 и рассуждений в §6. Разберемся с красками.

Заметим, что $D_j \in \mathcal{F}_{Y_i} \iff y_i \in \overline{D_j}$. Так как $f_{\lambda_i}(y_i) \neq 0$ и f_{λ_i} имеет порядок $\langle \lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle$ вдоль D_j , то $D_j \notin \mathcal{F}_{Y_i}$ при $\lambda_i \not\leq \alpha_j \iff \alpha_j \notin \Pi_{L_i}$. Обратно, пусть $\alpha_j \in \Pi_{L_i}$ и $\gamma(t) \in T$ – однопараметрическая подгруппа такая, что $\langle \gamma, \lambda_i \rangle > \langle \gamma, \mu \rangle \forall \mu \in \mathcal{P}, \mu \neq \lambda_i$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\gamma(t)s_{\alpha_j} = \left\langle \sum \gamma(t)v_{s_{\alpha_j}\mu} \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle \gamma, s_{\alpha_j}\mu \rangle} v_{s_{\alpha_j}\mu} \otimes v_{-\mu} \right\rangle \rightarrow y_i,$$

т.е. $\overline{D_j} \ni y_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда все вершины $\mathcal{P}$ – регулярные веса, веер X не имеет красок и является разбиением конуса $-C$. Трансверсальные слайсы Z_i к замкнутым орбитам Y_i в точках y_i – аффинные торические многообразия, и их конусы двойственны конусам $\mathcal{P}$ в λ_i . Эти слайсы содержатся в проективном торическом многообразии $\overline{T} \subseteq X$ (или $\tilde{X}$). Оно, очевидно, W -инвариантно (W , а точнее, $N_G(T)$, действует сопряжениями) и, как следует из локальной структуры, пересекает все Y_i трансверсально в точках $w(y_i)$, $w \in W$, исчерпывающих неподвижные точки T на $\overline{T}$. Веер $\overline{T}$ есть W -разнесение веера X , а многогранник равен $\mathcal{P}$ по предложению 5.

Смежные классы $\overline{vT}$, $v \in W$, пересекают все Y_i трансверсально в точках $(vw, w)y_i$, $w \in W$, исчерпывающих неподвижные точки $T \times T$ на X . Замыкание нормализатора тора $\overline{N_G(T)} = \bigsqcup_{v \in W} \overline{vT}$ – дизъюнктное объединение (иначе бы разные $\overline{vT}$ имели общие неподвижные точки).

В случае, когда $V = V(\lambda_0)$ неприводимо, X нормально (даже гладко, ср. §§ 10, 11) и не зависит от выбора (регулярного) λ_0 . Эта компактификация называется *превосходной* [3]. Общий случай регулярных весов рассматривался в [4] и в ряде других работ.

§9. Орбиты

Согласно общей теории сферических многообразий и теореме 7 $(G \times G)$ -орбиты в X , содержащие в замыкании данную замкнутую орбиту Y_i , находятся в биективном соответствии с цветными гранями цветного конуса $(\Sigma_i^\vee, \Pi_{L_i}^\vee)$ или, что то же

самое, с гранями $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_i^\vee$, для которых $(\text{int } \mathcal{C}) \cap (-C) \neq \emptyset$. Переформулируем это описание на “двойственном” языке многогранника $\mathcal{P}$.

Для любой грани $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ обозначим через $|\Gamma|$ ее направляющее подпространство, $\langle \Gamma \rangle$ – ее линейная оболочка и $\|\Gamma\| = |\Gamma| \oplus (\langle \Gamma \rangle^\perp \cap \langle Q \rangle)$. (Если G полупроста и Γ – собственная грань, то $\|\Gamma\|$ – ее опорная гиперплоскость, сдвинутая в 0.) Назовем линейную функцию $\gamma \in \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ *опорной* для грани Γ в $\mathcal{P}$, если $\langle \gamma, \Gamma \rangle = \text{const} < \langle \gamma, \mathcal{P} \setminus \Gamma \rangle$, т.е. γ – левая часть уравнения опорной гиперплоскости для Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеется биекция между всевозможными $(G \times G)$ -орбитами $Y \subset X$ и гранями $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, $(\text{int } \Gamma) \cap C \neq \emptyset$. При этом $\mathcal{C}_Y$ двойствен конусу многогранника $C \cap \mathcal{P}$ при грани $C \cap \Gamma$, а $\mathcal{F}_Y = \{D_j \mid \alpha_j \perp \langle \Gamma \rangle\}$. “Цветным” орбитам (для которых $\mathcal{F}_Y \neq \emptyset$) соответствуют грани, лежащие на границе камеры C . Присоединению орбит (т.е. вложению орбитных замыканий) отвечает включение соответствующих граней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{Y} \supseteq Y_i$, т.е. $\mathcal{C}_Y$ – грань $\Sigma_i^\vee$. При этом $\gamma \in \text{int } \mathcal{C}_Y \iff \gamma$ – опорная функция для двойственной грани $\Sigma_Y = \Sigma_i \cap \mathcal{C}_Y^\perp$ конуса Σ_i , т.е. $\langle \gamma, \Sigma_i \rangle \geq 0$, а Σ_Y выделяется уравнением $\langle \gamma, \cdot \rangle = 0$. Таким образом, цветным граням $\Sigma_i^\vee$ соответствуют грани Σ_i или $C \cap \mathcal{P}$ при вершине λ_i , высекаемые опорными функциями $\gamma \in -C$. Но такие грани $C \cap \mathcal{P}$ получаются пересечением с C граней $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ той же размерности, высекаемых γ в $\mathcal{P}$.

Описание красок вытекает из того, что $\Pi_{L_i}^\vee = \Pi^\vee \cap \lambda_i^\perp$, а $\mathcal{F}_Y = \Pi_{L_i}^\vee \cap |\Gamma|^\perp$. Утверждение о примыканиях следует из теоремы 3 ввиду того, что двойственность обращает включения граней.

Сделаем приведенное описание орбит более явным. Введем следующие обозначения.

Для любого подпространства $N \subseteq \mathcal{X} \otimes \mathbb{Q}$, ортогонального некоторому доминантному весу, обозначим через P_N параболическую подгруппу G , порожденную B и корнями $\alpha \in N$. Пусть $P_N^\pm = (P_N^\pm)_u \rtimes L_N$ – разложения Леви, $L_N \supseteq T$, L'_N – коммутант L_N . Для любой подрешетки $\Lambda \subseteq \mathcal{X}$ обозначим через $T^\Lambda \subseteq T$ квазитор, являющийся пересечением ядер всех характеров $\lambda \in \Lambda$.

Для любой грани $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ обозначим через V_Γ сумму весовых подпространств V с весами в Γ , а V'_Γ – T -инвариантное дополнение. Пусть $e_\Gamma = \sum_{\mu \in \Gamma} v_\mu \otimes v_{-\mu}$ – проектор на V_Γ в разложении $V = V_\Gamma \oplus V'_\Gamma$.

Заметим, что подпространства V_Γ , V'_Γ , $L_{|\Gamma|}$ и даже $L_{\|\Gamma\|}$ -инвариантны, причем $L'_{\|\Gamma\|} = L'_{|\Gamma|} \times L'_{\langle \Gamma \rangle^\perp}$ и $L'_{\langle \Gamma \rangle^\perp} : V_\Gamma$ тривиально. Действительно, прибавление корней $\alpha \in \|\Gamma\| \setminus |\Gamma|$ выводит Γ за пределы $\mathcal{P}$, т.е. соответствующие корневые векторы действуют на V_Γ тривиально. Это означает, что $\Delta \cap \|\Gamma\| = (\Delta \cap |\Gamma|) \sqcup (\Delta \cap \langle \Gamma \rangle^\perp)$ – дизъюнктное ортогональное объединение.

Рассмотрим в пространствах $|\Gamma|$, $\langle \Gamma \rangle$ порождающие их решетки

$$|\Gamma|_{\mathbb{Z}} = \sum_{\lambda_i, \lambda_j \in \Gamma} \mathbb{Z}(\lambda_i - \lambda_j) + Q \cap |\Gamma|,$$

$$\langle \Gamma \rangle_{\mathbb{Z}} = \sum_{\lambda_i \in \Gamma} \mathbb{Z}\lambda_i + Q \cap |\Gamma|.$$

(Строго говоря, эти решетки зависят не только от $\mathcal{P}$ и Γ , но и от исходной системы старших весов $\lambda_0, \dots, \lambda_m$.) Заметим, что $\langle \Gamma \rangle_{\mathbb{Z}}$ – решетка весов $T : V_\Gamma$.

ТЕОРЕМА 8. *Представителями орбит $Y \subset X$, отвечающих граням $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, являются $y = \langle e_\Gamma \rangle$. Стабилизаторы имеют вид*

$$(G \times G)_y = ((P_{\|\Gamma\|})_{\mathfrak{u}} \times (P_{\|\Gamma\|}^-)_{\mathfrak{u}}) \rtimes ((L'_{\langle \Gamma \rangle^\perp} T^{|\Gamma|_{\mathbb{Z}}} \times L'_{\langle \Gamma \rangle^\perp} T^{|\Gamma|_{\mathbb{Z}}}) \cdot \text{diag } L_{|\Gamma|}),$$

$$\dim Y = \dim G - \dim L_{\langle \Gamma \rangle^\perp} + \dim \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in (\text{int } \mathcal{C}_Y) \cap \mathcal{V}$. Тогда

$$\gamma(t) = \left\langle \sum \gamma(t) v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle = \left\langle \sum t^{\langle \gamma, \mu \rangle} v_\mu \otimes v_{-\mu} \right\rangle \rightarrow y \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

следовательно, $y \in \overline{T}$. Кроме того, $f_\lambda(\gamma(t)) = t^{\langle \lambda, \gamma \rangle} c_\lambda$, $c_\lambda = f_\lambda(e) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{X}$.

Выберем замкнутую орбиту $Y_0 \subseteq \overline{Y}$, отвечающую некоторой вершине $\lambda_0 \in C$ грани Γ . В обозначениях §8 $y \in \dot{X}$, а значит, $y \in Z$. Надо показать, что $y \in Y \cap Z$.

Из локальной структуры $\dot{X}$ (§6) следует, что $Y \cap Z = (L \times L)$ -орбита в Z и $\mathcal{C}_{Y \cap Z} = \mathcal{C}_Y - \text{грань } \Sigma_0^\vee$. Идеал $\overline{Y \cap Z}$ (замыкания в Z) как $(L \times L)$ -подмодуль в $\mathbb{C}[Z]$ задается своими старшими векторами f_λ , $\lambda \in \Sigma_0 \setminus \mathcal{C}_Y^\perp = \Sigma_0 \setminus |\Gamma|$, откуда $f_\lambda(y) = 0 \iff f_\lambda|_{Y \cap Z} = 0$.

Более того, для любых $(b, b^-) \in B \times B^-$ имеем

$$(b, b^-) f_\lambda(y) = f_\lambda((b^{-1} e_\Gamma b^-)) = f_\lambda(b_\Gamma^{-1} e_\Gamma b_\Gamma^-)$$

$(b^\pm = u_\Gamma^\pm b_\Gamma^\pm - \text{разложения в } B^\pm = (P_{|\Gamma|}^\pm)_{\mathfrak{u}} \rtimes B_{|\Gamma|}^\pm, B_{|\Gamma|}^\pm = B^\pm \cap L_{|\Gamma|})$. Это выражение можно рассматривать как значение функции веса $(-\lambda, \lambda)$ на элементе $b_\Gamma^{-1} b_\Gamma^- \in L_{|\Gamma|}$, так как в представлении $L_{|\Gamma|} : V_\Gamma$ единице соответствует e_Γ . Так как две “большие клетки” $B_{|\Gamma|} B_{|\Gamma|}^-, B_{|\Gamma|}^- B_{|\Gamma|} \subseteq L_{|\Gamma|}$ пересекаются по плотному подмножеству, для почти всех (b, b^-) существуют $(c_\Gamma^-, c_\Gamma) \in B_{|\Gamma|}^- \times B_{|\Gamma|}$ такие, что $f_\lambda(b_\Gamma^{-1} e_\Gamma b_\Gamma^-) = f_\lambda(c_\Gamma^- e_\Gamma c_\Gamma) = d_\lambda f_\lambda(y)$, $d_\lambda \neq 0$ (ибо f_λ – весовая функция для $B_{|\Gamma|}^- \times B_{|\Gamma|}$).

Поэтому $f_\lambda(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}[Z]_{(\lambda)}$ обращается в нуль в y , откуда $y \in \overline{Y \cap Z}$, но не содержится в меньших орбитах, т.е. $y \in Y \cap Z$.

Перейдем к стабилизаторам. Для $(g, h) \in G \times G$ имеем: $(g, h)y = y \iff g e_\Gamma h^{-1}$ пропорционально $e_\Gamma \iff$

- (1) $g V_\Gamma = V_\Gamma$,
- (2) $h V'_\Gamma = V'_\Gamma$,
- (3) действия g, h на $V_\Gamma \cong V/V'_\Gamma$ отличаются скалярным множителем.

Условие (1) означает $g \in P_{\|\Gamma\|}$, (2) равносильно $h \in P_{\|\Gamma\|}^-$, причем ядрами действий $P_{\|\Gamma\|}^\pm : V_\Gamma \cong V/V'_\Gamma$ являются $(P_{\|\Gamma\|}^\pm)_{\mathfrak{u}} \rtimes (L'_{\langle \Gamma \rangle^\perp} T^{|\Gamma|_{\mathbb{Z}}})$, т.е. дальше можно считать $g, h \in L_{|\Gamma|}$. Тогда условие (3) означает, что с точностью до умножения на один и тот же элемент $L_{|\Gamma|}$ $g, h \in T^{|\Gamma|_{\mathbb{Z}}}$.

Формула для $\dim Y$ легко следует из вида $(G \times G)_y$ и структуры $L'_{\|\Gamma\|}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема обобщает результаты де Кончини–Прочези для превосходных и регулярных пополнений (см. [3], [4], [10]), а также Путчи–Реннера [17]–[19] и Винберга [20; теорема 7] для алгебраических полугрупп. Прямая связь с алгебраическими полугруппами видна из рассмотрения конуса над X в $\mathbb{V}$, который является алгебраической полугруппой, чья группа обратимых элементов – расширение G при помощи гомотетий (ср. [19]). Идея вычисления стабилизатора взята из [20; § 7].

СЛЕДСТВИЕ. $\overline{T}$ пересекает все $(G \times G)$ -орбиты в X ; T -орбиты в пересечении $\overline{T}$ с $(G \times G)$ -орбитой транзитивно переставляются группой W .

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение, аналогичное первому, справедливо для любого сферического многообразия [14; 2.4]. Простейшее “трансцендентное” доказательство следствия состоит в том, чтобы замкнуть в X разложение Картана $G = KTK$, где $K \subset G$ – максимальная компактная подгруппа.

§ 10. Нормальность

Вопросы нормальности и гладкости носят локальный характер, поэтому достаточно исследовать их в точках какой-либо замкнутой орбиты $Y_0 \subset X$. Общий критерий нормальности, по существу, содержится в предложениях 6, 7 и замечаниях к ним.

Будем говорить, что веса $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}^+ G$ порождают полугруппу S , если S состоит из всех старших весов $k_1\mu_1 + \dots + k_s\mu_s - \beta$ ($\beta \in \mathbb{Z}_+\Pi$) G -модулей $V(\mu_1)^{\otimes k_1} \otimes \dots \otimes V(\mu_s)^{\otimes k_s}$, $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. В обозначениях § 8 пусть $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathfrak{X}_L^+$ – все старшие веса $L : V$, кроме λ_0 . Тогда X нормально в точках Y_0 тогда и только тогда, когда $\mu_1 - \lambda_0, \dots, \mu_s - \lambda_0$ L -порождают $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что X нормально в точках Y_0 в том и только том случае, когда Z нормально. По предложению 6 $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus L(V_L(\mu_j - \lambda_0))$, поэтому $\mathbb{C}[Z] \subseteq \mathbb{C}[L]$ порождена компонентами $\mathbb{C}[L]_{(\mu_j - \lambda_0)}$. По предложению 4 $\mathbb{C}[Z] = \bigoplus_{\lambda \in S} \mathbb{C}[L]_{(\lambda)}$, где $S \subseteq \mathfrak{X}_L^+$ – полугруппа, L -порожденная $\mu_j - \lambda_0$, $j = 1, \dots, s$. Остается применить следствие предложения 7.

Применение этого критерия требует информации о разложении V на простые L -модули и о разложениях тензорных произведений L -модулей. Первую проблему устраняет следующая лемма.

ЛЕММА 3. Веса $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0, -\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ являются старшими для $L : V(-\lambda_0)$ и L -порождают все старшие веса $L : V(-\lambda_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что $v_{\lambda_i}, e_{-\alpha_j} v_{\lambda_0}$ – старшие векторы $L : V$. Далее, для каждого $i = 0, \dots, m$ существует единственный L -подмодуль $V_L(\lambda_i) \hookrightarrow V$ (порожденный старшим вектором v_{λ_i}) и

$$V = \sum_{k,i} \underbrace{\mathfrak{g} \cdots \mathfrak{g}}_k v_{\lambda_i} = \sum_{k,i} \underbrace{p^- \cdots p^-}_k \cdot V_L(\lambda_i).$$

Алгебра p^- порождается $\mathfrak{l}$ и $e_{-\alpha_j}$, $\alpha_j \notin \Pi_L$, и содержит простые L -подмодули $\mathfrak{g}_L(-\alpha_j) \cong V_L(-\alpha_j)$ со старшими векторами $e_{-\alpha_j}$. Поэтому

$$V = \sum_{n, i, j_1, \dots, j_n} \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_1}) \cdots \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_n}) \cdot V_L(\lambda_i).$$

Но $\mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_1}) \cdots \mathfrak{g}_L(-\alpha_{j_n}) \cdot V_L(\lambda_i)$ есть фактормодуль $V_L(-\alpha_{j_1}) \otimes \cdots \otimes V_L(-\alpha_{j_n}) \otimes V_L(\lambda_i)$, откуда вытекает второе утверждение леммы.

Следовательно, в предложении 9 можно заменить $\mu_1 - \lambda_0, \dots, \mu_s - \lambda_0$ на $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0, -\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ (хотя иногда удобнее оперировать со всеми L -старшими весами, если они известны). Однако остается проблема разложения на простые L -модули тензорных произведений модулей с L -порождающими старшими весами. (Для нормальности нужно получить среди старших весов возникающих простых L -подмодулей все порождающие $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.) Поэтому в общем случае критерий малоэффективен, однако из него вытекают простые достаточные условия.

СЛЕДСТВИЕ. X нормально (в точке Y_0), если $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0, -\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ порождают $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$.

Необходимое условие нормальности, полученное Реннером для редуктивных алгебраических полугрупп (см. [16; 6.4]), переносится на случай проективных компактификаций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если X нормально, то $\overline{T}$ нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя G на L , X на Z , $\overline{T}$ на замыкание T в L , мы сводим вопрос к случаю аффинного вложения. Имеем $Z \subseteq \mathbb{V}_0 = \bigoplus L(V_L(\nu_j))$, где $\nu_j \in \mathfrak{X}_L^+$ L -порождают $\Sigma_0 \cap \mathfrak{X}$. Увеличив $\mathbb{V}_0$ добавлением новых L -старших весов, так чтобы ν_j порождали $\Sigma_0 \cap \mathfrak{X}$, мы не изменим $Z = \overline{L} \subseteq \mathbb{V}_0$ (старшие веса $\mathbb{C}[Z]$ те же), но добьемся того, что веса $T : V_L(\nu_j)$ порождают полугруппу $W_L \Sigma_0 \cap \mathfrak{X}$ всех целых точек конуса $W_L \Sigma_0$ многогранника $\mathcal{P}$ в λ_0 . Ее полугрупповая алгебра есть координатная алгебра $\overline{T} \subseteq Z$, и, стало быть, $\overline{T}$ нормально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это условие эффективно проверяемо (§5), а в случае, когда все вершины $\mathcal{P}$ – регулярные веса, совпадает с общим критерием нормальности. Однако в общем случае оно не является достаточным.

ПРИМЕР. Пусть $G = \mathrm{Sp}_4$ и старшие веса V суть $\{\lambda_0, \lambda_1\} = \{3\omega_1, 2\omega_2\}$. Многогранник весов $\mathcal{P}$ изображен на рис. (а), старшие веса отмечены жирными точками.

Здесь $L = \mathrm{SL}_2 \times \mathbb{C}^*$, $\Delta_L = \{\pm\alpha_2\}$. Полугруппа весов $\mathbb{C}[\overline{T}]$ (замыкание в Z) изображена на рис. (b) точками, а жирные точки выделяют подполугруппу старших весов $\mathbb{C}[Z]$ (которую легко вычислить, используя формулу Клебша–Гордана). Теперь видно, что $\overline{T}$ нормально, а Z – нет.

§11. Гладкость

В теории сферических многообразий гладкость обычно является гораздо более тонким свойством, чем нормальность. Общий критерий гладкости [29; 4.2] весьма замысловат. Как ни странно, для проективных компактификаций редуктивных групп гладкость проверить легче, чем нормальность. Сохраним обозначения §§ 8, 10.

ТЕОРЕМА 9. *X гладко в точках Y_0 тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) *все простые компоненты L имеют тип A , и их число не больше $\dim Z(L)$;*
- (2) *Σ_0 строго симплицален, т.е. порожден базисом $\mathfrak{X}$;*
- (3) *можно так занумеровать простые корни в порядке их следования на диаграммах Дынкина связанных компонент $\Pi_L^{(k)} = \{\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{n_k-1}^{(k)}\}$ системы Π_L , $k = 1, \dots, q$, и разбить базис свободной полугруппы $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ на группы $\{\pi_1^{(k)}, \dots, \pi_{n_k}^{(k)}\}$, $k = 1, \dots, p$, $p \geq q$, что $\langle \pi_j^{(k)}, \alpha_j^{(k)\vee} \rangle = 1$, $\pi_j^{(k)} \perp \Pi_L \setminus \{\alpha_j^{(k)}\}$, $n_k \pi_j^{(k)} - j \pi_{n_k}^{(k)} \perp \pi_{n_1}^{(1)}, \dots, \pi_{n_p}^{(p)} \quad \forall j, k$;*
- (4) *среди весов $\lambda_1 - \lambda_0, \dots, \lambda_m - \lambda_0$, $-\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ встречаются все $\pi_1^{(k)}$, $1 \leq k \leq p$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (1)–(4) теоремы 9 означают, что $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_p}$ – прямое произведение и в разложении L -модуля $V_0(-\lambda_0)$ (здесь, как и выше, $V = \mathrm{C}v_{\lambda_0} \oplus V_0$) встречаются только полиномиальные представления L и среди них – минимальные представления всех сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что X гладко (в точках Y_0) тогда и только тогда, когда Z гладко, т.е. вопрос сводится к аффинным вложениям.

Пусть, как и выше, $\mu_1, \dots, \mu_s$ – все старшие веса $L : V$. Имеем вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{V}_0 = \bigoplus \mathrm{L}(V_L(\mu_j - \lambda_0))$, $y_0 \mapsto 0$.

Если Z гладко, то по фундаментальной лемме Луны (§ 3) Z изоморфно проектируется на $T_0 Z$ при $(L \times L)$ -эквивариантном проектировании $\mathbb{V}_0 \rightarrow T_0 Z$. Перенумеровав μ_j , получаем $Z \cong \mathrm{L}(V_L(\mu_1 - \lambda_0)) \oplus \dots \oplus \mathrm{L}(V_L(\mu_p - \lambda_0))$, $p \leq s$.

Пусть при этом изоморфизме $e \mapsto (e_1, \dots, e_p)$. При проекции $Z \rightarrow \mathrm{L}(V_L(\mu_k - \lambda_0))$ плотная орбита $L \subset Z$ проектируется на плотную орбиту Le_k , поэтому e_k – ненулевой скалярный оператор, и после перенормировки изоморфизма можно считать его единичным. Тогда проекция гомоморфно отображает L на $\mathrm{GL}(V_L(\mu_k - \lambda_0))$. По соображениям размерности $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_p}$, $n_k = \dim V_L(\mu_k - \lambda_0)$, а $\mu_k - \lambda_0$ – старшие веса минимальных представлений GL_{n_k} , $k = 1, \dots, p$.

Полугруппа $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ L -порождается весами $\mu_k - \lambda_0$ и состоит из старших весов всевозможных полиномиальных представлений L (т.е. продолжаемых на Z). Из описания полиномиальных представлений GL_n следует, что $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$ свободно порождается весами $\pi_j^{(k)}$, где $\pi_1^{(k)}$ – старший вес минимального представления GL_{n_k}

и $V_L(\pi_j^{(k)}) = \bigwedge^j V_L(\pi_1^{(k)})$. Отсюда с учетом леммы 3 легко вытекают условия (1)–(4).

Обратно, если условия (1)–(4) выполнены, то $L \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_p}$ и старшие веса в $\mathbb{C}[Z]$ отвечают всевозможным полиномиальным представлениям L , откуда $Z \cong \mathrm{Mat}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}$, т.е. гладко.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае регулярного веса λ_0 $L = T$ и критерий гладкости сводится к условиям (2) и (4): X гладко (в точках Y_0) $\iff \Sigma_0$ порожден базисом $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(p)}$ решетки $\mathfrak{X}$ и $\lambda_0 + \pi^{(k)}$ лежат в системе весов $T : V$.

ПРИМЕР. Пусть $G = \mathrm{SO}_{2l+1}$ и $V = V(\lambda_0)$ – неприводимое представление фундаментального старшего веса $\lambda_0 = \omega_i$. При $i < l$ многообразие X не будет гладким – нарушается условие (1) (или (3) при $l = 2$).

В случае спинорного представления имеем $\lambda_0 = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l)/2$, где $\pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_l$ – ненулевые веса тавтологического представления SO_{2l+1} . Веса спинорного представления имеют вид $(\pm \varepsilon_1 \pm \cdots \pm \varepsilon_l)/2$, $\Pi = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}$, $\Pi_L = \Pi \setminus \{\varepsilon_l\}$. При ограничении на L старшие веса V имеют вид $\mu_1 = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2$, $\mu_2 = (\varepsilon_1 + \cdots - \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2, \dots, \mu_l = (-\varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)/2$. Векторы $\pi_k = \mu_k - \lambda_0$ порождают Σ_0 и образуют базис $\mathfrak{X} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \rangle$: $\pi_1 = -\varepsilon_1$, $\pi_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \pi_l = -\varepsilon_1 - \cdots - \varepsilon_l$. Легко видеть и условие (3). Таким образом, X гладко.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя более тонкую версию локальной структуры в окрестности незамкнутой орбиты, можно получить условия нормальности и гладкости в любой точке X .

§ 12. Примеры

В качестве иллюстрации доказанных выше общих теорем опишем геометрические свойства эквивариантных компактификаций простых алгебраических групп в пространствах проективно-линейных операторов фундаментальных и присоединенных представлений. В каждом случае мы опишем структуру множества орбит и выясним нормальность и гладкость компактификации.

Результаты представлены в таблицах 1, 2. Мы рассматриваем представление простой алгебраической группы G , указанной с точностью до конечнолистного накрытия в столбце “Группа”, в модуле $V = V(\lambda_0)$, где λ_0 – фундаментальный вес или старший корень. Фундаментальные представления обозначаются в столбце “Модуль” указанием старшего веса λ_0 , а присоединенные, если они не являются фундаментальными, символом Ad . Простые корни и соответственно фундаментальные веса нумеруются согласно [30] (так что $V(\omega_1)$ всегда имеет минимальную размерность).

Мы рассматриваем $(G \times G)$ -многообразие $X = \overline{\mathrm{Ad} G} \subseteq \mathbb{P}(L(V))$. В столбце “Орбиты” указаны размерности и граф примыкания $(G \times G)$ -орбит в X . Для классических групп указаны также представители орбит (задаваемые проекторами $V \twoheadrightarrow V_\Gamma$; если $V = \mathfrak{g}$, то V_Γ – центр $(\mathfrak{p}_{|\Gamma|})_{\mathfrak{u}}$ или $(\mathfrak{p}_{\|\Gamma\|})_{\mathfrak{u}}$). Эта информация может быть легко получена из теоремы 8 и следующей леммы (ср. [17; теорема 2]).

ЛЕММА 4. Пусть $V = V(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathfrak{X}^+$, и $L \subseteq P = P(\lambda_0)$ – стандартная подгруппа Леви. Грани $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$, пересекающие C , суть $\Gamma = \mathcal{P} \cap (\lambda_0 + \langle \Pi_\Gamma \rangle)$, где $\langle \Pi_\Gamma \rangle \subseteq \Pi$ – подсистема простых корней, никакая связная компонента которой не содержится в Π_L , или $\Pi_\Gamma = \emptyset$. При этом $|\Gamma| = \langle \Pi_\Gamma \rangle$, системы

простых корней $L_{|\Gamma|}$ и $L_{(\Gamma)^\perp}$ суть Π_Γ и $\Pi_{\Gamma^\perp} = \Pi_L \cap (\Pi_\Gamma)^\perp$, а e_Γ — $L_{|\Gamma|}$ -эквивариантный проектор на $V_{L_{|\Gamma|}}(\lambda_0) \subseteq V_G(\lambda_0)$.

В частности, при $\lambda_0 = \omega_i$ Π_Γ есть связная подсистема Π , содержащая α_i , или $\emptyset$, а $\Pi_{\Gamma^\perp} = (\Pi_\Gamma)^\perp \cap \Pi \setminus \{\alpha_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Грани $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$, $\text{int } \Gamma \cap C \neq \emptyset$, высекаются опорными функциями $\gamma \in -C$. Рассмотрим подсистему корней $\Delta_\gamma = \Delta \cap \gamma^\perp$ с простыми корнями из $\Pi_\gamma = \Delta_\gamma \cap \Pi$. Пространство $|\Gamma|$ порождается корнями $\alpha \in \Delta_\gamma^+$, для которых $e_{-\alpha} v_{\lambda_0} \neq 0$, т.е. $\alpha \in \Delta_\gamma^+ \setminus \Delta_L^+$ или, что равносильно, α выражается с положительными коэффициентами через связную подсистему простых корней $\Pi' \subseteq \Pi_\gamma$, $\Pi' \not\subseteq \Pi_L$. Через такие α линейно выражаются все такие Π' , поэтому $|\Gamma| = \langle \Pi_\Gamma \rangle$, где Π_Γ — объединение связных компонент Π_γ , не содержащихся в Π_L . Отсюда следует описание Γ , описание e_Γ вытекает из $V_\Gamma = V_{L_{|\Gamma|}}(\lambda_0)$, а остальные утверждения леммы очевидны.

Графы примыкания орбит совпадают с графами примыкания орбит в неприводимых простых алгебраических полугруппах (которые являются конусами над нашими проективными компактификациями), вычисленными в [17].

В столбце “ L ” мы указываем подгруппу Леви в $P = P(\lambda_0)$, а в столбце “ L -веса” — ненулевые старшие веса $L : V(-\lambda_0)$. Если их слишком много, то мы указываем только $-\alpha_j \in -(\Pi \setminus \Pi_L)$ (которые L -порождают остальные старшие веса по лемме 3). Используются следующие обозначения: ε — базисный вес центрального (одномерного) тора; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — веса тавтологического представления классической подгруппы GL_n в $\mathbb{C}^n$ (для ортогональной и симплектической групп $\varepsilon_{n-i} = -\varepsilon_i$); $\pi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ — старший вес $\bigwedge^i \mathbb{C}^n$; если L представлена как факторгруппа прямого произведения нескольких групп, то веса сомножителей различаются метками $', ''$, $\dots$.

В столбцах “Нормальность” и “Гладкость” отмечено, обладает ли X указанным свойством. Если свойство нормальности нарушается, мы указываем причину (см. предложения 7, 9): если S — полугруппа старших весов $L : \mathbb{C}[Z]$ и $\mu \notin S$, но $k\mu \in S$, то мы пишем “ $\nexists \mu, \exists k\mu$ ”. При проверке нормальности полезны следующие две леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $G_i : V_i$ ($i = 1, \dots, s$) — точные представления связных редуктивных групп, причем $Z(G_i)$ действуют гомотетиями. Пусть Z_i, Z — замыкания образов $G_i, G_1 \times \dots \times G_s$ в $L(V_i), L(V_1 \otimes \dots \otimes V_s)$ соответственно. Тогда Z нормально $\iff Z_1, \dots, Z_s$ нормальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $\mathbb{C}[Z_1 \times \dots \times Z_s]$ полиградуирована действием s -мерного тора $Z(G_1) \times \dots \times Z(G_s)$, причем $\mathbb{C}[Z]$ — алгебра инвариантов подтора $T_0 = \{(t_1, \dots, t_s) \mid t_1 \dots t_s = 1\}$. Поэтому нормальность Z следует из нормальности $Z_1, \dots, Z_s$, прямых произведений и факторов нормальных многообразий [27; приложение I, 4.4, II.3.3, теорема 1].

С другой стороны, действие $Z(G_i) : Z_i$ гомотетиями поднимается на $\tilde{Z}_i$. Пусть $f_i \in \mathbb{C}[\tilde{Z}_i]$ — произвольная однородная функция. Выберем для всех $j \neq i$ однородные функции $f_j \in \mathbb{C}[\tilde{Z}_j]$ той же степени и рассмотрим $f = f_1 \dots f_s \in \mathbb{C}[Z_1 \times \dots \times Z_s]^{T_0}$. Это рациональная функция на $Z_1 \times \dots \times Z_s$, постоянная на T_0 -орбитах. Легко видеть, что все T_0 -орбиты в $(Z_1 \setminus \{0\}) \times \dots \times (Z_s \setminus \{0\})$ замкнуты в $Z_1 \times \dots \times Z_s$, т.е. T_0 -орбиты общего положения замкнуты. Поскольку

замкнутые орбиты разделяются инвариантными многочленами, то f спускается до рациональной функции на Z , целой над $\mathbb{C}[Z]$ [27; приложение I, 3.7, теорема 2, III.3.3, теорема 1]. Поэтому если Z нормально, то $f \in \mathbb{C}[Z]$, откуда $f_i \in \mathbb{C}[Z_i]$, а следовательно, Z_i нормально.

ЛЕММА 6. Пусть G – одна из групп GL_n , $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2l}$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}_{2l}$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_n$, $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_l$ ($l = 6, 7$), а $V = V(\mu_0)$, $\mu_0 = \pi_k$, $\varepsilon + \omega_1$, $\varepsilon + \omega_1$, $\varepsilon + \omega_{[n/2]}$, $\varepsilon + \omega_1$ соответственно. Тогда замыкание $Z \subseteq \mathrm{L}(V)$ образа G нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – полугруппа старших весов $G : \mathbb{C}[Z]$ (G -порожденная μ_0). Согласно предложению 7 и последующим замечаниям Z нормально $\iff S$ насыщена, т.е. $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$, где $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}S$, а $\Sigma_0 = \mathbb{Q}_+ S$ – конус над $C \cap \mathcal{P}$.

В случае $G = \mathrm{GL}_n$ все веса в S полиномиальны, т.е. имеют вид $\mu = m_1\varepsilon_1 + \dots + m_n\varepsilon_n$, $m_1 \geq \dots \geq m_n \geq 0$. Из формулы Пъери для разложения $V(\mu) \otimes V(\pi_k)$, где μ – любой полиномиальный вес, легко следует, что S – насыщенная полугруппа, состоящая из всех полиномиальных весов μ таких, что $m_2 + \dots + m_n \geq (k-1)m_1$ и $m_1 + \dots + m_n$ делится на k .

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2l}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + m_1\varepsilon_1 + \dots + m_l\varepsilon_l$, $m_1 \geq \dots \geq m_l \geq 0$, $m - m_1 - \dots - m_l \in 2\mathbb{Z}_+$. Все они принадлежат S : $k\varepsilon + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ – старшие веса $\bigwedge^k V(\mu_0)$, 2ε – старший вес $V(\mu_0)^{\otimes 2}$, а прочие μ – их $\mathbb{Z}_+$ -линейные комбинации. Поэтому S насыщена.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}_{2l}$ ситуация аналогична, только доминантные веса имеют вид $\mu = m\varepsilon + m_1\varepsilon_1 + \dots + m_{l-1}\varepsilon_{l-1} \pm m_l\varepsilon_l$.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{2l+1}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + (m_1\varepsilon_1 + \dots + m_l\varepsilon_l)/2$, $m \geq m_1 \geq \dots \geq m_l \geq 0$, $m \equiv m_1 \equiv \dots \equiv m_l \pmod{2}$. Все они принадлежат S : $2\varepsilon + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ ($0 \leq k < l$) – старшие веса $V(\mu_0)^{\otimes 2}$, $\mu_0 = \varepsilon + (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l)/2$, а прочие μ – их $\mathbb{Z}_+$ -линейные комбинации. Поэтому S насыщена.

В случае $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_{2l}$ доминантные веса $V(\mu_0)^{\otimes m}$ суть $\mu = m\varepsilon + (m_1\varepsilon_1 + \dots + m_l\varepsilon_l)/2$, $m \geq m_1 \geq \dots \geq m_{l-1} \geq |m_l|$, $(l-2)m \geq m_1 + \dots + m_{l-1} - m_l$, $m \equiv m_1 \equiv \dots \equiv m_l \pmod{2}$, $lm \equiv m_1 + \dots + m_l \pmod{4}$. Задаваемая этими условиями насыщенная полугруппа порождается весами $\mu_0 = \varepsilon + \omega_l$, $2\varepsilon + \omega_{l-2k}$ ($1 \leq k \leq l/2$), $4\varepsilon + \omega_i + \omega_j$ ($0 \leq i \leq j \leq l-2$, $i \equiv j \pmod{2}$), $k\varepsilon + \omega_{l-i} + (k-2)\omega_{l-1}$ ($2 \leq k \leq i \leq l$, $k \equiv i \pmod{2}$), $(k+2)\varepsilon + \omega_{l-i} + \omega_{l-j} + (k-2)\omega_{l-1}$ ($2 \leq k \leq i \leq j \leq l$, $i \equiv j+k \pmod{2}$). (Здесь $\omega_0 = 0$.) Легко убедиться, что все они являются старшими весами в соответствующих $V(\mu_0)^{\otimes m}$ (где m – коэффициент при ε), а значит, наша полугруппа совпадает с S .

Аналогичное рассуждение применяется для $G = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{E}_l$: рассматривается полугруппа $\mathfrak{X} \cap \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \mathbb{Q}_+(C \cap \mathcal{P})$. Ее образующие суть следующие веса: $k\varepsilon + \omega_k$, $(k+9-l)\varepsilon + \omega_k$ ($0 \leq k \leq l-3$, $\omega_0 = 0$), $(l-2)\varepsilon + \omega_{l-2} + \omega_l$, $(l-1)\varepsilon + 2\omega_{l-2}$, $4\varepsilon + \omega_{l-2}$, $2\varepsilon + \omega_{l-1}$, $(l-1)\varepsilon + \omega_{l-1} + 2\omega_l$, $l\varepsilon + 3\omega_l$, $3\varepsilon + \omega_l$. Можно проверить, что все они возникают как старшие веса в $V(\mu_0)^{\otimes m}$, а значит, $S = \mathfrak{X} \cap \Sigma_0$. Рутинные вычисления мы опустим.

Таблица 1. Орбиты и примыкания

Группа	Модуль	Орбиты
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	ω_1, ω_l	$Y_r \ni \langle \varphi \rangle, \mathrm{rk} \varphi = r, \dim Y_r = 2nr - r^2 - 1$ $Y_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1$
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	ω_k $1 < k < l$	$Y_{sr} \ni \langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{r-s} \rangle$ $\dim Y_{sr} = 2nr - r^2 - s^2 - 1, \dim Y_{kk} = 2nk - 2k^2$ $ \begin{array}{ccccc} Y_{0n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{0,k+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_{k-1,n} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{k-1,k+1} \longrightarrow Y_{kk} \end{array} $
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	Ad	$\dim Y_0 = n^2 - 1, \dim Y_{sr} = n^2 - (r-s)^2 - 2$ $ \begin{array}{ccccc} & & Y_{11} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & Y_{12} & & \\ Y_0 & \nearrow & & \searrow & \cdots \\ & \nearrow & Y_{22} & \searrow & \\ & & \vdots & & Y_{1,n-1} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y_{n-2,n-1} & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & Y_{n-1,n-1} & & \end{array} $
$B_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l + 1$	ω_k $k < l$	$Y_{sr} \ni \langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{r-s} \rangle$ $Y_s \ni \langle \bigwedge^k \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes \bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{n-2s} \rangle$ $\mathbb{C}^s \perp \mathbb{C}^{n-2s} \supset \mathbb{C}^{r-s}$ – подпространства в $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^{r-s}$ изотропны, а $\mathbb{C}^{n-2s}$ невырождено $\dim Y_{sr} = (2n - 2r - 1)r - s^2 - 1$ $\dim Y_{kk} = (2n - 3k - 1)k, \dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$ $ \begin{array}{ccccccc} Y_0 & \longrightarrow & Y_{0l} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{0,k+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & \downarrow & \longrightarrow & \downarrow & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_{k-1} & \longrightarrow & Y_{k-1,l} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{k-1,k+1} \longrightarrow Y_{kk} \end{array} $
$B_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l + 1$	ω_l	$Y_s \ni \langle S^n \twoheadrightarrow \bigwedge^s \mathbb{C}^s \otimes S^{n-2s} \rangle$ S^m – пространство спиноров над $\mathbb{C}^m$ $\mathbb{C}^s \perp \mathbb{C}^{n-2s}$ – подпространства в $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}^s$ изотропно, а $\mathbb{C}^{n-2s}$ невырождено $\dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$ $Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_l$
$C_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	ω_k	Орбиты и примыкания аналогичны случаю B_l , лишь $\bigwedge^{k-s} \mathbb{C}^{n-2s}$ ($s = 0, \dots, k$) заменяется на старшую компоненту; $\dim Y_{sr} = (2n - 2r + 1)r - s^2 - 1,$ $\dim Y_{kk} = (2n - 3k + 1)k, \dim Y_s = n(n+1)/2 - s^2$
$C_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	Ad	$\dim Y = n(n+1)/2, \dim Y_r = (2n - 2r + 1)r - 1$ $Y \longrightarrow Y_l \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1$

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

Группа	Модуль	Орбиты
$D_l = SO_n$ $n = 2l$	ω_k $k \leq l - 2$	<p>Y_s, Y_{sr} такие же, как для B_l, но Y_{sl} разбивается на две орбиты $Y_{sl}^\pm$ в соответствии с выбором $\mathbb{C}^l = \mathbb{C}^s \oplus \mathbb{C}^{l-s}$ в одной из двух связанных компонент изотропного грассманиана</p>
$D_l = SO_n$ $n = 2l$	ω_{l-1}, ω_l	<p> $Y_s \ni \langle S_\pm^n \rightarrow \wedge^s \mathbb{C}^s \otimes S_\pm^{n-2s} \rangle$ $Y'_s \ni \langle S_\pm^n \rightarrow \wedge^l \mathbb{C}^l \otimes \mathbb{C}^{l-s} \rangle$ $S_\pm^m \subset S^m$ - пространства полуспиноров $\mathbb{C}^l = \mathbb{C}^s \oplus \mathbb{C}^{l-s} \subset \mathbb{C}^n$ изотропно $\dim Y_s = n(n-1)/2 - s^2$, $\dim Y'_s = n(n-1)/2 - s^2 - 1$ $(0 \leq s \leq l-3)$ $\dim Y_{l-2} = l^2 + 3l - 7$, $\dim Y_{l-1} = l(l-1)$ </p>
G_2	ω_1, ω_2	$14 \rightarrow 13 \rightarrow 10$
F_4	ω_1, ω_4	$52 \rightarrow 51 \rightarrow 48 \rightarrow 43 \rightarrow 30$
F_4	ω_2, ω_3	$52 \rightarrow 51 \rightarrow 48$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $51 \rightarrow 50 \rightarrow 47 \rightarrow 40$
E_6	ω_1, ω_5	$78 \rightarrow 77 \rightarrow 74$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $77 \rightarrow 76 \rightarrow 73 \rightarrow 66 \rightarrow 53 \rightarrow 32$
E_6	ω_2, ω_4	
E_6	ω_3	

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

Группа	Модуль	Орбиты
E_6	ω_6	
E_7	ω_1	
E_7	ω_2	
E_7	ω_3	
E_7	ω_4	
E_7	ω_5	
E_7	ω_6	

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

Группа	Модуль	Орбиты
E_7	ω_7	
E_8	ω_1	
E_8	ω_2	
E_8	ω_3	
E_8	ω_4	
E_8	ω_5	

Таблица 1 (продолжение)

Группа	Модуль	Орбиты
E_8	ω_6	
E_8	ω_7	
E_8	ω_8	

ТАБЛИЦА 2. Нормальность и гладкость

Группа	Модуль	L	L -веса	Нормальн.	Гладк.
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	ω_1, ω_l	GL_l	π'_1	да	да
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	ω_k $1 < k < l$	$\mathrm{PG}(\mathrm{L}_k \times \mathrm{L}_{n-k})$	$\pi'_i + \pi''_i$ $i \leq k, n - k$	да	нет
$A_l = \mathrm{SL}_n$ $n = l + 1$	Ad	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_{n-2}$	$\varepsilon', 2\varepsilon', \pi'_1, \varepsilon' + \pi''_1,$ $\varepsilon' + \pi''_{n-3} - \pi''_{n-2},$ $2\varepsilon' + \pi''_{n-3} - \pi''_{n-2},$ $\varepsilon' + \pi'_1 + \pi''_{n-3} - \pi''_{n-2}$	да	$n \leq 3$
$B_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l + 1$	ω_k $k < l$	$\mathrm{GL}_k \times \mathrm{SO}_{n-2k}$	$\pi'_i + \pi'_j + \pi''_m$ $m \leq i - j$ $m \equiv i - j \pmod{2}$	нет $\nexists \pi'_1, \exists 2\pi'_1$	нет
$B_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l + 1$	ω_l	GL_l	$\pi'_1, \dots, \pi'_l$	да	да
$C_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	ω_k $k < l$	$\mathrm{P}(\mathrm{GL}_k \times \mathrm{Sp}_{n-2k})$	$\pi'_1 + \pi''_1, \dots$	да	$n = 4$
$C_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	ω_l	$\mathrm{GL}_l/\mathbb{Z}_2$	$2\pi'_1, \dots, 2\pi'_l$	$n = 2$ $\nexists \pi'_2, \exists 2\pi'_2$	$n = 2$
$C_l = \mathrm{Sp}_n$ $n = 2l$	Ad	$\mathrm{P}(\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{n-2})$	$\varepsilon' + \pi'_1, 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + 2\pi''_1, 3\varepsilon' + \pi''_1$	да	$n \leq 4$
$D_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l$	ω_k $k \leq l - 2$	$\mathrm{P}(\mathrm{GL}_k \times \mathrm{SO}_{n-2k})$	те же, что для B_l , и получаемые заменой $\varepsilon''_l \leftrightarrow \varepsilon''_{l+1}$	да	нет
$D_l = \mathrm{SO}_n$ $n = 2l$	ω_{l-1}, ω_l	$\mathrm{GL}_l/\mathbb{Z}_2$	$\pi'_2, \pi'_4, \dots$	да	$n = 6$
G_2	ω_1	GL_2	$\pi'_1, \pi'_2, \pi'_1 + \pi'_2, 2\pi'_2$	да	да
G_2	ω_2	GL_2	$2\pi'_1, 3\pi'_1, \pi'_2, 2\pi'_2$ $3\pi'_1 - \pi'_2$	нет $\nexists \pi'_1, \exists 2\pi'_1$	нет
F_4	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_7$	$\varepsilon' + \omega'_3, 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + \omega''_1, 3\varepsilon' + \omega''_3$	да	нет
F_4	ω_2	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3$	$\pi'_1 + \pi''_1, \dots$	да	нет
F_4	ω_3	$\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{GL}_2$	$2\pi'_1 + \pi''_1, \dots$	нет $\nexists \pi'_2 + \pi''_1$ $\exists 2\pi'_2 + 2\pi''_1$	нет
F_4	ω_4	$\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_6$	$\varepsilon' + \omega'_3, 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + 2\omega''_1, 3\varepsilon' + \omega''_3$	нет $\nexists \varepsilon' + \omega''_1$ $\exists 2\varepsilon' + 2\omega''_1$	нет

ТАБЛИЦА 2 (продолжение)

Группа	Модуль	L	L -веса	Нормальн.	Гладк.
E_6	ω_1, ω_5	$\mathbb{C}^\times \times \text{Spin}_{10}$	$\varepsilon' + \omega_5'', 2\varepsilon' + \omega_1''$	да	нет
E_6	ω_2, ω_4	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	да	нет
E_6	ω_3	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_3 \times \text{SL}_3$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	да	нет
E_6	ω_6	$\text{GL}_6/\mathbb{Z}_3$	$\pi_3', \pi_6', 2\pi_6',$ $\pi_3' + \pi_6', \pi_1' + \pi_5'$	да	нет
E_7	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times E_6$	$\varepsilon' + \omega_1'', 2\varepsilon' + \omega_5'', 3\varepsilon'$	да	нет
E_7	ω_2	$\text{GL}_2 \times \text{Spin}_{10}$	$\pi_1' + \omega_5'', \dots$	да	нет
E_7	ω_3	$\text{GL}_3 \times \text{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	да	нет
E_7	ω_4	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_3 \times \text{SL}_4$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	да	нет
E_7	ω_5	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_6$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	да	нет
E_7	ω_6	$\mathbb{C}^\times \times \text{Spin}_{12}/\mathbb{Z}_2$	$\varepsilon' + \omega_6'', 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + \omega_2'', 3\varepsilon' + \omega_6''$	да	нет
E_7	ω_7	$\text{GL}_7/\mathbb{Z}_3$	$\pi_3', \dots$	да	нет
E_8	ω_1	$\mathbb{C}^\times \times E_7$	$\varepsilon' + \omega_1'', 2\varepsilon', 4\varepsilon',$ $2\varepsilon' + \omega_6'', 3\varepsilon' + \omega_1''$	да	нет
E_8	ω_2	$\text{GL}_2 \times E_6$	$\pi_1' + \omega_1'', \dots$	да	нет
E_8	ω_3	$\text{GL}_3 \times \text{Spin}_{10}$	$\pi_1' + \omega_5'', \dots$	да	нет
E_8	ω_4	$\text{GL}_4 \times \text{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	да	нет
E_8	ω_5	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_3 \times \text{SL}_5$	$\pi_1' + \pi_1'' + \pi_1''', \dots$	да	нет
E_8	ω_6	$\text{GL}_2 \times \text{SL}_7$	$\pi_1' + \pi_2'', \dots$	да	нет
E_8	ω_7	$\mathbb{C}^\times \times \text{Spin}_{14}$	$\varepsilon' + \omega_7'', \dots$	да	нет
E_8	ω_8	$\text{GL}_8/\mathbb{Z}_3$	$\pi_3', \dots$	да	нет

Список литературы

1. *Semple J. G.* The variety whose points represent complete collineations of S_r on S'_r // *Rend. Mat. Appl.* (5). 1951. V. 10. P. 201–208.
2. *Neretin Yu. A.* Hinges and the Study–Semple–Satake–Furstenberg–De Concini–Procesi–Oshima boundary // *Kirillov’s seminar on representation theory*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 165–230. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 181.)
3. *De Concini C., Procesi C.* Complete symmetric varieties // *Lecture Notes in Math.* 1983. V. 996. P. 1–44.
4. *De Concini C., Procesi C.* Complete symmetric varieties. II // *Algebraic groups and related topics* / ed. R. Hotta. Tokio: Kinokuniya, 1985. P. 481–513. (Adv. Stud. Pure Math. V. 6.)
5. *De Concini C., Procesi C.* Cohomology of compactifications of algebraic groups // *Duke Math. J.* 1986. V. 53. P. 585–594.
6. *Strickland E. S.* A vanishing theorem for group compactifications // *Math. Ann.* 1987. V. 277. P. 165–171.
7. *Bifet E., de Concini C., Procesi C.* Cohomology of regular embeddings // *Adv. Math.* 1990. V. 82. № 1. P. 1–34.
8. *Littelmann P., Procesi C.* Equivariant cohomology of wonderful compactifications // *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory*. Boston: Birkhäuser, 1990. P. 219–262. (Progr. Math. V. 92.)
9. *Strickland E. S.* Computing the equivariant cohomology of group compactifications // *Math. Ann.* 1991. V. 291. № 2. P. 275–280.
10. *Brion M.* The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition // *Comment. Math. Helv.* 1998. V. 73. P. 137–174.
11. *Brion M., Polo P.* Large Schubert varieties // *Represent. Theory*. 2000. V. 4. P. 97–126.
12. *Luna D., Vust Th.* Plongements d’espaces homogènes // *Comment. Math. Helv.* 1983. V. 58. P. 186–245.
13. *Knop F.* The Luna–Vust theory of spherical embeddings // *Proc. of the Hyderabad conference on algebraic groups* / ed. S. Ramanan. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.
14. *Brion M.* Variétés sphériques // *Notes de la session de la S. M. F. “Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques”*. Grenoble, 1997; <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps>.
15. *Putcha M. S.* Linear algebraic monoids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
16. *Renner L. E.* Classification of semisimple algebraic monoids // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1985. V. 292. P. 93–223.
17. *Putcha M. S., Renner L. E.* The system of idempotents and the lattice of $\mathcal{J}$ -classes of reductive algebraic monoids // *J. Algebra*. 1988. V. 116. P. 385–399.
18. *Putcha M. S.* Monoids on groups with BN-pairs // *J. Algebra*. 1989. V. 120. P. 139–169.
19. *Renner L. E.* Classification of semisimple varieties // *J. Algebra*. 1989. V. 122. P. 275–287.
20. *Vinberg E. B.* On reductive algebraic semigroups // *Lie groups and Lie algebras: E. B. Dynkin’s seminar* / ed. S. Gindikin, E. Vinberg. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 145–182. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 169.)
21. *Rittatore A.* Algebraic monoids and group embeddings // *Transform. Groups*. 1998. V. 3. P. 375–396.
22. *Попов В. Л.* Стягивания действий редуктивных алгебраических групп // *Матем. сб.* 1986. Т. 130 (172). № 3. С. 310–334.
23. *Brion M., Inamdar S. P.* Frobenius splitting of spherical varieties // *Algebraic groups and their generalizations: Classical methods. Part I* / ed. W. J. Haboush, B. J. Parshall. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 207–218. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 56.)
24. *Brion M.* Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques // *Duke Math. J.* 1989. V. 58. № 2. P. 397–424.
25. *Brion M., Luna D., Vust Th.* Espaces homogènes sphériques // *Invent. Math.* 1986. V. 84. P. 617–632.
26. *Luna D.* Slices étales // *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*. 1973. V. 33. P. 81–105.

- 27. *Kraft H.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
- 28. *Vust Th.* Plongements d'espaces symétriques algébriques: une classification // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1990. V. 17. №2. P. 165–194.
- 29. *Brion M.* Sur la géométrie des variétés sphériques // Comment. Math. Helv. 1991. V. 66. P. 237–262.
- 30. *Винберг Э. Б., Онищук А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `timashev@mech.math.msu.su`

Поступила в редакцию
02.07.2002