Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 4, 125–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm7310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:46:22

УДК 517.968

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором

Рассматривается нелинейное однородное интегральное уравнение типа уравнения Гаммерштейна, имеющее важное применение в кинетической теории газов. Доказано существование положительного решения этого уравнения и описано его асимптотическое поведение на бесконечности.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: интегральное уравнение типа уравнения Гаммерштейна, факторизация интегральных операторов, сходимост итерации, точечный предел, асимптотика решения.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f(x) \geq 0$:

$$f(x) = \int_0^\infty k(x, t) Y(f(t)) dt, \quad x \in (0, +\infty). \quad (1.1)$$

Здесь ядро $k(x, t)$ имеет такую структуру:

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|x-t|} d\sigma(s), \quad (1.2)$$

где $\alpha(x, s) \geq \beta > 0$ – измеримая функция на $(0, +\infty) \times [a, b]$, $0 < a < b \leq +\infty$, $\sigma(s) \uparrow$ на $[a, b]$, причем

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} \int_0^\infty k(x, t) dt = \int_a^b d\sigma(s) = 1. \quad (1.3)$$

Функция $Y(x)$ задается следующей формулой:

$$Y(x) = x - \omega(x), \quad 0 \leq \omega \downarrow, \quad x \in [0, +\infty), \quad \omega \in L_1(0, +\infty) \cap C[0, +\infty). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.1) возникает в кинетической теории газов и в случае ядра вида (1.2) оно описывает задачу о течении газа со скольжением вдоль плоской твердой стенки. При этом роль функции $f(x)$ играет среднемассовая скорость газа (см. [1]–[3]).

Уравнение (1.1) для случая $\omega(x) \equiv 0$ было изучено в [4]. В предположении, что ядро $k(x, t)$ зависит от разности своих аргументов, т.е. $k(x, t) \equiv k_0(x - t)$ и

$$\begin{aligned} 0 \leq k_0 \in L_1(-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k_0(x) dx = 1, \\ k_0(-x) = k_0(x), \quad x \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (1.5)$$

уравнение (1.1) (с условиями (1.4)) исследовалось в [5].

В настоящей работе при некоторых дополнительных ограничениях на функцию $\alpha(x, s)$ доказано существование положительного решения уравнения (1.1) с условиями (1.2)–(1.4) и найдена асимптотика полученного решения на бесконечности. Оказывается, что нелинейные эффекты существенны в окрестности нуля, а асимптотическое поведение решения на бесконечности и в линейном, и в нелинейном случаях одинаково, т.е. оба решения ведут себя как $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см. теорему 4).

§ 2. Некоторые обозначения и вспомогательные факты

Обозначим через Ω класс следующих интегральных операторов:

$$(K\varphi)(x) = \int_0^\infty k(x, t)\varphi(t) dt, \quad \varphi \in M(0, +\infty), \quad (2.1)$$

где

$$\mu(k) \equiv \sup_{x \in (0, +\infty)} \operatorname{ess} \int_0^\infty |k(x, t)| dt < +\infty, \quad (2.2)$$

а $M(0, +\infty)$ – пространство функций, почти всюду ограниченных на $(0, +\infty)$. Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\|K\|_{M(0, +\infty)} \leq \mu(k). \quad (2.3)$$

ЛЕММА 1. *Класс Ω замкнут относительно умножения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, операторы $K, H \in \Omega$. Обозначим через W их произведение: $W = HK$. Тогда ядро оператора W имеет следующий вид:

$$w(x, t) = \int_0^\infty k(x, y)h(y, t) dy. \quad (2.4)$$

Так как $\mu(k), \mu(h) < +\infty$, то из (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |w(x, t)| dt &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty k(x, y)h(y, t) dy \right| dt \leq \int_0^\infty \int_0^\infty |k(x, y)| |h(y, t)| dy dt \\ &= \int_0^\infty |k(x, y)| \int_0^\infty |h(y, t)| dt dy \leq \mu(k)\mu(h) < +\infty, \end{aligned}$$

и поэтому $\mu(w) \leq \mu(k)\mu(h) < +\infty$, т.е. $W \in \Omega$.

Введем также следующие простейшие вольтерровы операторы:

$$(V_+ f)(x) = \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \quad (V_- f)(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t) dt, \quad \beta > 0. \quad (2.5)$$

Нетрудно убедиться в том, что операторы $V_\pm$ действуют в $L_p(0, +\infty)$, $p \geq 1$. Обозначим через $(I + U_\pm)$ резольвентные операторы операторов $(I - V_\pm)$. Легко проверить, что

$$(U_+ f)(x) = \beta \int_0^x f(t) dt, \quad (U_- f)(x) = \beta \int_x^\infty f(t) dt. \quad (2.6)$$

Операторы $U_{\pm}$ переводят пространство $L_1(0, +\infty)$ в пространства $M(0, +\infty)$ и $M(0, +\infty) \cap C_0(0, +\infty)$ соответственно, где $C_0(0, +\infty)$ – пространство непрерывных на $(0, +\infty)$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Отметим, что операторы $V_{\pm}$ (и их резольвентные операторы) играют важную роль в построении положительного решения уравнения (1.1).

§ 3. Задача факторизации

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для заданных операторов $K \in \Omega$ и $V_{\pm}$ (соответственно вида (2.1), (1.2) и (2.5)) найти такой интегральный оператор W вида $(Wf)(x) = \int_0^{\infty} w(x, t)f(t) dt$, действующий в $M(0, +\infty)$, чтобы имела место факторизация

$$I - K = (I - V_-)(I - W)(I - V_+), \quad (3.1)$$

где I – единичный оператор.

ЛЕММА 2. Оператор $I - K$ допускает факторизацию (3.1), где $V_{\pm}$ – простейшие вольтерровы операторы вида (2.4), а W – интегральный оператор вида

$$(Wf)(x) = \int_0^{\infty} w(x, t)f(t) dt, \quad (3.2)$$

действующий в $M(0, +\infty)$, ядро которого задается следующей формулой:

$$w(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_a^b (\alpha(x, s) - \beta) e^{-\alpha(x, s)(x-t)} d\sigma(s) \\ \quad + \frac{\beta}{2} \int_x^{\infty} \int_a^b (\alpha(y, s) - \beta) e^{-\alpha(y, s)(y-t)} d\sigma(s) dy, & x \geq t, \\ \frac{1}{2} \int_a^b (\alpha(x, s) + \beta) e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s) \\ \quad + \frac{\beta}{2} \int_x^t \int_a^b (\alpha(y, s) + \beta) e^{-\alpha(y, s)(t-y)} d\sigma(s) dy \\ \quad + \frac{\beta}{2} \int_t^{\infty} \int_a^b (\alpha(y, s) - \beta) e^{-\alpha(y, s)(y-t)} d\sigma(s) dy - \beta, & x < t. \end{cases} \quad (3.3)$$

Факторизация (3.1) понимается как равенство операторов, действующих в $M(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$I - K = (I - V_-)(I + U_-)(I - K)(I + U_+)(I - V_+). \quad (3.4)$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$(K_+ f)(x) = \int_0^x k_+(x, t)f(t) dt, \quad (K_- f)(x) = \int_x^{\infty} k_-(x, t)f(t) dt, \quad (3.5)$$

где

$$k_+(x, t) = \begin{cases} k(x, t), & \text{если } x \geq t, \\ 0, & \text{если } x < t, \end{cases} \quad k_-(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq t, \\ k(x, t), & \text{если } x < t. \end{cases} \quad (3.6)$$

Заметим, что

$$K = K_+ \oplus K_-. \quad (3.7)$$

Учитывая (2.5) и (3.6), обозначим через W следующую операторную сумму:

$$\begin{aligned} W = & K_+ - U_+ + K_- + K_+U_+ + K_-U_+ - U_- - U_-U_+ \\ & + U_-K_+ + U_-K_- + U_-K_+U_+ + U_-K_-U_+. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Проводя несложные вычисления, получаем для ядер вышеприведенных операторов:

$$\begin{aligned} \text{a) } [K_+U_+](x, t) &= \beta \int_t^x k_+(x, y) dy \theta(x - t), \\ \text{b) } [U_-K_-](x, t) &= \beta \int_x^t k_-(y, t) dy \theta(t - x), \\ \text{c) } [K_-U_+](x, t) &= \begin{cases} \beta \int_x^\infty k_-(x, y) dy, & \text{если } x \geq t, \\ \beta \int_t^\infty k_-(x, y) dy, & \text{если } x < t, \end{cases} \\ \text{d) } [U_-K_+](x, t) &= \begin{cases} \beta \int_x^\infty k_+(y, t) dy, & \text{если } x \geq t, \\ \beta \int_t^\infty k_+(y, t) dy, & \text{если } x < t, \end{cases} \\ \text{e) } [U_-K_+U_+](x, t) &= \begin{cases} \beta^2 \int_x^\infty \int_t^y k_+(y, z) dz dy, & \text{если } x \geq t, \\ \beta^2 \int_t^\infty \int_t^y k_+(y, z) dz dy, & \text{если } x < t, \end{cases} \\ \text{f) } [U_-K_-U_+](x, t) &= \begin{cases} \beta^2 \int_x^\infty \int_y^\infty k_-(y, z) dz dy, & \text{если } x \geq t, \\ \beta^2 \int_t^\infty \int_y^\infty k_-(y, z) dz dy + \beta^2 \int_x^t \int_t^\infty k_-(y, z) dz dy, & \text{если } x < t. \end{cases} \end{aligned}$$

где θ – функция Хевисайда,

Действительно, для произвольного f имеем

$$\begin{aligned} (U_-K_-U_+f)(x) &= \beta^2 \int_x^\infty dy \int_y^\infty k_-(y, z) dz \int_0^z f(t) dt \\ &= \beta^2 \int_x^\infty dy \int_y^\infty k_-(y, z) dz \int_0^y f(t) dt + \beta^2 \int_x^\infty dy \int_y^\infty k_-(y, z) dz \int_y^z f(t) dt. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в последних двух слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} (U_-K_-U_+f)(x) &= \beta^2 \int_x^\infty dy \int_0^x f(t) dt \int_y^\infty k_-(y, z) dz \\ &+ \beta^2 \int_x^\infty dy \int_x^y f(t) dt \int_y^\infty k_-(y, z) dz + \beta^2 \int_x^\infty dy \int_y^\infty f(t) dt \int_t^\infty k_-(y, z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta^2 \int_0^x f(t) dt \int_x^\infty dy \int_y^\infty k_-(y, z) dz + \beta^2 \int_x^\infty f(t) dt \int_t^\infty dy \int_y^\infty k_-(y, z) dz \\
&\quad + \beta^2 \int_x^\infty f(t) dt \int_x^t dy \int_t^\infty k_-(y, z) dz.
\end{aligned}$$

Таким образом, п. f) доказан. Доказательства пп. а)–е) более просты. В (3.8), переходя от операторных равенств к равенствам ядер, получаем факторизацию (3.1). Легко убедиться в том, что оператор W действует в $M(0, +\infty)$.

§ 4. Решение соответствующего линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим следующее неоднородное интегральное уравнение с ядром вида (1.2):

$$\varphi(x) = 2\omega(x) + \int_0^\infty k(x, t)\varphi(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad (4.1)$$

где функция ω удовлетворяет условию (1.4). Используя факторизацию (3.1), уравнение (4.1) запишем в виде

$$(I - V_-)(I - W)(I - V_+)\varphi = 2\omega. \quad (4.2)$$

Для того чтобы решить это уравнение, надо последовательно решить следующие три уравнения:

$$(I - V_-)\varphi_1 = 2\omega, \quad (4.3)$$

$$(I - W)\varphi_2 = \varphi_1, \quad (4.4)$$

$$(I - V_+)\varphi = \varphi_2. \quad (4.5)$$

Заметим, что решение уравнения (4.3) имеет такую структуру:

$$\varphi_1(x) = 2\omega(x) + 2\beta \int_x^\infty \omega(t) dt. \quad (4.6)$$

Так как $\omega \in L_1(0, +\infty) \cap M(0, +\infty)$, то $\varphi_1 \in M(0, +\infty)$. Перейдем теперь к решению уравнения (4.4). Для этого, накладывая некоторые дополнительные условия на $\alpha(x, s)$, докажем, что оператор W в отличие от оператора K является сжимающим в пространстве $M(0, +\infty)$. Имеем

$$|(Wf)(x)| = \left| \int_0^\infty w(x, t)f(t) dt \right| \leq \|f\|_{M(0, +\infty)} \int_0^\infty |w(x, t)| dt. \quad (4.7)$$

Далее будем предполагать, что

$$\inf_{(x, s)} \text{ess } \alpha(x, s) = \beta > 0, \quad w \geq 0. \quad (4.8)$$

Следовательно, учитывая (4.7), достаточно доказать, что

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} \text{ess } \int_0^\infty w(x, t) dt < 1. \quad (4.9)$$

Имеем

$$\int_0^\infty w(x, t) dt = \int_0^x w_+(x, t) dt + \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_x^\delta w_-(x, t) dt. \quad (4.10)$$

Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w(x, t) dt &= 1 - \frac{1}{2} \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(x, s)}\right) e^{-\alpha(x, s)x} d\sigma(s) \\ &\quad - \frac{\beta}{2} \int_x^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) e^{-\alpha(y, s)y} d\sigma(s) dy \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_\delta^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) e^{-\alpha(y, s)(y-\delta)} d\sigma(s) dy \\ &\quad - \frac{\beta}{2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_x^\delta \int_a^b \left(1 + \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) e^{-\alpha(y, s)(\delta-y)} d\sigma(s) dy. \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$\int_0^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) d\sigma(s) dy < +\infty, \quad (4.11)$$

то

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_\delta^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) e^{-\alpha(y, s)(y-\delta)} d\sigma(s) dy = 0. \quad (4.12)$$

Следовательно, учитывая (4.12), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w(x, t) dt &\leq 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_x^\delta \int_a^b \left(1 + \frac{\beta}{\alpha(y, s)}\right) e^{-\alpha(y, s)(\delta-y)} d\sigma(s) dy \\ &\leq 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\frac{1}{\alpha_0(s)} + \frac{\beta}{\alpha_0^2(s)}\right) (1 - e^{-\alpha_0(s)(\delta-x)}) d\sigma(s), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\alpha_0(s) = \sup_{x \in (0, +\infty)} \text{ess } \alpha(x, s) < +\infty. \quad (4.14)$$

Таким образом, из (4.13) имеем

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} \text{ess } \int_0^\infty w(x, t) dt \leq 1 - \frac{\beta}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{\alpha_0(s)} + \frac{\beta}{\alpha_0^2(s)}\right) d\sigma(s) \equiv \rho < 1. \quad (4.15)$$

Заметим, что интегралы $\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0(s)}$, $\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)}$ конечны. Действительно,

$$\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0(s)} \leq \frac{1}{\beta} \int_a^b d\sigma(s) = \frac{1}{\beta}, \quad \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)} \leq \frac{1}{\beta^2} \int_a^b d\sigma(s) = \frac{1}{\beta^2}. \quad (4.16)$$

Из неравенств (4.7) и (4.8) в силу условия $w(x, t) \geq 0$ следует, что оператор W является сжимающим в пространстве $M(0, +\infty)$ с коэффициентом сжатия ρ . Итак, уравнение (4.4) имеет единственное неотрицательное (поскольку $\omega, w \geq 0$) ограниченное решение $\varphi_2(x)$. Решая уравнение (4.5), получаем

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) + \beta \int_0^x \varphi_2(t) dt, \quad (4.17)$$

откуда следует, что $\varphi(x) = O(x)$, $x \rightarrow +\infty$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

а) существуют

$$\inf_{(x,s)} \operatorname{ess} \alpha(x,s) = \beta > 0, \quad \alpha_0(s) = \sup_{x \in (0,+\infty)} \operatorname{ess} \alpha(x,s) < +\infty,$$

б) сходится интеграл

$$\int_0^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) d\sigma(s) dy, \quad \omega \geq 0.$$

Пусть, кроме того, ω удовлетворяет условию (1.4). Тогда уравнение (4.1) имеет неотрицательное решение $\varphi(x)$, причем $\varphi(x) = O(x)$, $x \rightarrow +\infty$.

§ 5. Соответствующее линейное однородное уравнение

Рассмотрим следующее однородное уравнение относительно искомой функции $\psi(x)$ с ядром (1.2):

$$\psi(x) = \int_0^\infty k(x,t)\psi(t) dt. \quad (5.1)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнение (5.1) имеет положительное решение $\psi(x)$, причем $\psi(x) = O(x)$, $x \rightarrow +\infty$, и $\psi(x) \geq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – решение уравнения (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя факторизацию (3.1), запишем уравнение (5.1) в следующем виде:

$$(I - V_-)(I - W)(I - V_+)\psi = 0. \quad (5.2)$$

Обозначим $(I - V_+)\psi = \psi_1$, $(I - W)\psi_1 = \psi_2$. Для того чтобы решить уравнение (5.2), надо последовательно решить следующие уравнения:

$$(I - V_-)\psi_2 = 0, \quad (5.3)$$

$$(I - W)\psi_1 = \psi_2, \quad (5.4)$$

$$(I - V_+)\psi = \psi_1. \quad (5.5)$$

Сначала рассмотрим уравнение (5.3):

$$\psi_2(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} \psi_2(t) dt. \quad (5.6)$$

Заметим, что $\psi_2(x) \equiv c = \operatorname{const} \neq 0$ удовлетворяет уравнению (5.6). Возьмем

$$c = \max \left\{ \sup_{x \in (0,+\infty)} \operatorname{ess} \varphi_2(x), \omega(0), \frac{1}{\beta} \right\}, \quad (5.7)$$

где $\varphi_2(x)$ – положительное и ограниченное решение уравнения (4.4) (см. § 4).

Рассмотрим теперь уравнение (5.4):

$$\psi_1(x) = c + \int_0^\infty w(x,t)\psi_1(t) dt, \quad x \in (0,+\infty). \quad (5.8)$$

Определим для него следующий итерационный процесс:

$$\psi_1^{(n+1)}(x) = c + \int_0^\infty w(x, t) \psi_1^{(n)}(t) dt, \quad \psi_1^{(0)} = c, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (0, +\infty). \quad (5.9)$$

По индукции нетрудно проверить, что

$$\text{а) } \psi_1^{(n)} \uparrow \text{ по } n, \quad \text{б) } c \leq \psi_1^{(n)}(x) \leq \frac{c}{1-\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (0, +\infty), \quad (5.10)$$

где число ρ задается формулой (4.15). Таким образом, последовательность функций $\{\psi_1^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ п.в. на $(0, +\infty)$ сходится к ограниченной функции $\psi_1(x)$, причем

$$c \leq \psi_1(x) \leq \frac{c}{1-\rho}. \quad (5.11)$$

Убедимся в том, что предельная функция $\psi_1(x)$ удовлетворяет уравнению (5.8). Сначала из (5.9), учитывая (5.10), имеем

$$\psi_1^{(n+1)}(x) \leq c + \int_0^\infty w(x, t) \psi_1(t) dt.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\psi_1(x) \leq c + \int_0^\infty w(x, t) \psi_1(t) dt. \quad (5.12)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty w(x, t) \psi_1^{(n)}(t) dt \leq \psi_1(x) - c,$$

откуда, с учетом теоремы Леви (см. [6]), приходим к неравенству

$$\int_0^\infty w(x, t) \psi_1(t) dt \leq \psi_1(x) - c. \quad (5.13)$$

Комбинируя (5.12) и (5.13), заключаем, что $\psi_1(x)$ является решением уравнения (5.8). Перейдем теперь к уравнению (5.5):

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} \psi(t) dt. \quad (5.14)$$

Непосредственной проверкой убедимся в том, что функция

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \beta \int_0^x \psi_1(t) dt \quad (5.15)$$

является единственным решением уравнения (5.14). Из (5.10) и (5.14) следует, что

$$\psi(x) = O(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, с учетом (5.7), (5.11) и (5.15), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &\geq c + c\beta x \geq \sup_{x \in (0, +\infty)} \text{ess } \varphi_2(x) + \beta \int_0^x \sup_{t \in (0, +\infty)} \text{ess } \varphi_2(t) dt \\ &\geq \varphi_2(x) + \beta \int_0^x \varphi_2(t) dt = \varphi(x). \end{aligned}$$

§ 6. Одно обобщение уравнения (5.1)

Рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение:

$$F(x) = \lambda(x) \int_0^\infty k(x, t) F(t) dt, \quad (6.1)$$

где

$$\lambda(x) = 1 - \frac{\omega(\psi(x))}{\psi(x)}. \quad (6.2)$$

Докажем, что уравнение (6.1) имеет нетривиальное решение с асимптотикой $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнение (6.1) имеет нетривиальное неотрицательное решение $F(x)$, причем $F(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$, и $\psi(x) \leq F(x) \leq 2\lambda(x)\psi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с уравнением (6.1) рассмотрим следующее неоднородное интегральное уравнение:

$$\varphi_*(x) = 2\omega(\psi(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty k(x, t) \varphi_*(t) dt, \quad x \in (0, +\infty). \quad (6.3)$$

Определим для него итерации по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_*^{(n+1)}(x) &= 2\omega(\psi(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty k(x, t) \varphi_*^{(n)}(t) dt, & \varphi_*^{(0)} &= 2\omega(\psi(x)), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, & x &\in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Так как $c \geq 1/\beta$ и $c \geq \omega(0)$, то $\psi(x) \geq c + x \geq x$ и, следовательно, в силу монотонности функции $\omega(x)$ имеем

$$0 \leq 2\omega(\psi(x)) \leq 2\omega(x), \quad \omega(\psi(x)) \leq \omega(0) \leq c \leq \psi(x). \quad (6.5)$$

Поэтому

$$0 \leq \lambda(x) \leq 1. \quad (6.6)$$

Учитывая (6.5) и (6.6), по индукции проверим, что

$$\text{a) } \varphi_*^{(n)} \uparrow \text{ по } n, \quad \text{b) } \varphi_*^{(n)}(x) \leq \varphi(x). \quad (6.7)$$

Из этих соотношений следует, что последовательность $\{\varphi_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ п.в. на $(0, +\infty)$ имеет точечный предел φ_* , причем $\varphi_*(x) \leq \varphi(x)$. Нетрудно убедиться в том, что предельная функция φ удовлетворяет уравнению (6.3). Заметим, что функция

$$F_*(x) = 2\psi(x) - \varphi_*(x) \geq 0 \quad (6.8)$$

удовлетворяет уравнению (6.1) и имеет асимптотику $O(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Действительно, подставляя функцию $F_*(x)$ в уравнение (6.1) и учитывая (6.2) и (6.3), получим требуемое. Рассмотрим теперь следующие итерации:

$$F^{(n+1)}(x) = \lambda(x) \int_0^\infty k(x, t) F^{(n)}(t) dt, \quad F^{(0)}(x) = 2\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

По индукции легко проверяется, что

$$\text{а) } F^{(n)}(x) \downarrow \text{ по } n, \quad \text{б) } F^{(n)}(x) \geq F_*(x). \quad (6.10)$$

Поэтому последовательность функций $\{F^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел $F(x)$, который удовлетворяет уравнению (6.1), причем

$$F_*(x) \leq F(x) \leq 2\lambda(x)\psi(x). \quad (6.11)$$

Так как $\varphi_*(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$, то из (6.8) следует, что $F_*(x) \geq \psi(x)$. Таким образом,

$$\psi(x) \leq F_*(x) \leq F(x) \leq 2\lambda(x)\psi(x) \quad (6.12)$$

и тем самым теорема доказана.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\tilde{F}(x) = \int_0^{\infty} k(x, t)\lambda(t)\tilde{F}(t) dt. \quad (6.13)$$

Очевидно, что если $F(x)$ – ненулевое решение для (6.1), то $\tilde{F}(x) = F(x)/\lambda(x)$ удовлетворяет уравнению (6.13). Из (6.12) следует, что

$$\psi(x) \leq \tilde{F}(x) \leq 2\psi(x). \quad (6.14)$$

Решение $\tilde{F}(x)$ и неравенство (6.14) нам понадобятся в дальнейших рассуждениях.

§ 7. Решение основного уравнения

В этом параграфе, используя результаты §§ 2–6, докажем существование положительного решения уравнения (1.1) и изучим асимптотическое поведение этого решения на бесконечности. Рассмотрим следующие итерации:

$$f^{(n+1)}(x) = \int_0^{\infty} k(x, t)Y(f^{(n)}(t)) dt, \quad f^{(0)}(x) = 2\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Заметим, что последовательность $f^{(n)}(x) \downarrow$ по n . Действительно, при $n = 0$ имеем

$$f^{(1)}(x) = 2 \int_0^{\infty} k(x, t)\psi(t) dt - \int_0^{\infty} k(x, t)\omega(2\psi(t)) dt \leq 2\psi(x) = f^{(0)}(x).$$

Пусть $f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n)}(x)$. Из монотонности функции $Y(x)$ следует, что

$$f^{(n+2)}(x) = \int_0^{\infty} k(x, t)Y(f^{(n+1)}(t)) dt \leq \int_0^{\infty} k(x, t)Y(f^{(n)}(t)) dt = f^{(n+1)}(x).$$

Таким образом, последовательность $\{f^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывает по n . Ниже по индукции докажем, что

$$f^{(n)}(x) \geq \tilde{F}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

При $n = 0$ это неравенство следует из (6.14). Предположим, что $f^{(n-1)}(x) \geq \tilde{F}(x)$, и докажем (7.2). Имеем

$$f^{(n)}(x) \geq \int_0^\infty k(x, t) \tilde{F}(t) dt - \int_0^\infty k(x, t) \omega(\tilde{F}(t)) dt. \quad (7.3)$$

Так как $\omega \downarrow$, то из (6.14), учитывая (6.2), имеем

$$\omega(\tilde{F}(x)) \leq \omega(\psi(x)) = (1 - \lambda(x))\psi(x) \leq (1 - \lambda(x))\tilde{F}(x). \quad (7.4)$$

Учитывая (7.4), из (7.3) получаем

$$f^{(n)}(x) \geq \int_0^\infty k(x, t) \lambda(t) \tilde{F}(t) dt = \tilde{F}(x). \quad (7.5)$$

Таким образом, последовательность функций $\{f^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ п.в. сходится к функции $f(x)$, причем

$$\psi(x) \leq \tilde{F}(x) \leq f(x) \leq 2\psi(x). \quad (7.6)$$

Убедимся, что предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1). Сначала, учитывая неравенство

$$f^{(n)}(x) \geq f(x), \quad (7.7)$$

из (7.1) получаем, что $f^{(n+1)}(x) \geq \int_0^\infty k(x, t) Y(f(t)) dt$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$f(x) \geq \int_0^\infty k(x, t) Y(f(t)) dt. \quad (7.8)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty k(x, t) Y(f^{(n)}(t)) dt \geq f(x). \quad (7.9)$$

Используя (7.7), (7.9), монотонность функции $Y(x)$ и неотрицательность ядра $k(x, t)$, с учетом теоремы Леви, получаем

$$\int_0^\infty k(x, t) Y(f(t)) dt \geq f(x). \quad (7.10)$$

Комбинируя (7.8) и (7.10), заключаем, что $f(x)$ является решением уравнения (1.1). Из (7.6) следует, что $f(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнение (1.1) имеет нетривиальное неотрицательное решение $f(x)$, причем $f(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$, и $\psi(x) \leq f(x) \leq 2\psi(x)$.

В заключение выражаем глубокую благодарность Н.Б. Енгибаряну за обсуждения результатов работы, а также рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978; пер. с англ.: С. Cercignani, *Theory and application of the Boltzmann equation*, Elsevier, New York, 1975.

- [2] М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Наука, М., 1967.
- [3] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа”, *Матем. моделирование*, **16**:1 (2004), 67–74.
- [4] Х. А. Хачатрян, “Разрешимость консервативного интегрального уравнения на полуоси”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **37**:4 (2002), 73–80; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “Solvability of a conservative integral equation on the half-line”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **37**:4 (2002), 30–37.
- [5] Л. А. Арабаджан, “Решения интегрального уравнения типа Гаммерштейна”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **32**:1 (1997), 21–28; англ. пер.: L. G. Arabajian, “Solutions of certain integral equations of Hammerstein type”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **32**:1 (1997), 17–24.
- [6] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

А. Х. Хачатрян (A. Kh. Khachatryan)

Институт математики НАН

Республики Армении, г. Ереван

E-mail: aghavard@hotmail.ru

Поступила в редакцию

06.10.2008 и 11.07.2009

Х. А. Хачатрян (Kh. A. Khachatryan)

Институт математики НАН

Республики Армении, г. Ереван

E-mail: khach82@rambler.ru