Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Антикано́нические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 4, 147–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:40:32

УДК 513.6

И. А. Чельцов

Антиканонические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре

В работе описываются все бирациональные перестройки трех многообразий Фано размерности 3 степени 4 в многообразия Фано с каноническими особенностями, в расслоения на эллиптические кривые и в расслоения на поверхности типа КЗ.

Библиография: 9 названий.

Рассматриваемые многообразия считаются проективными и определенными над $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работах [1], [2]. Автор признателен М. М. Гриненко, В. А. Исковских, Ю. Г. Прохорову, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за плодотворные беседы.

§ 1. Введение

Пусть X – одно из следующих трехмерных многообразий: гладкая квартика, общая¹ квартика с обыкновенной двойной точкой O , гладкое двойное накрытие квадрики Q с ветвлением в поверхности S степени восемь. Тогда X – терминальное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$, $-K_X^3 = 4$, $\varphi|_{-K_X}$ является вложением для квартики и двойным накрытием в случае квадрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Многообразие Фано V с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$ называется *бirationально жестким* в том случае, если V не может быть бирационально перестроено в многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$, неизоморфное V , и в расслоение на многообразия с размерностью Кодайры $-\infty$.

В работах [3]–[5] доказано, что X является бирационально жестким. Однако априори X может быть бирационально перестроено в отличные от X многообразия Фано с каноническими и даже с терминальными особенностями.

ПРИМЕР 1.2. Возьмем общую трехмерную квартику X с обыкновенной двойной точкой O , раздуем ее $\rho: V \rightarrow X$ в O , $\psi_O = \varphi|_{-2K_V} \circ \rho^{-1}$ бирационально и $X_O = \psi_O(X)$ является многообразием Фано с терминальными особенностями и $-K_{X_O}^3 = 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть X – общая трехмерная квартика с обыкновенной двойной точкой O . Тогда для каждой прямой C на X , проходящей через O , существует бирациональное отображение $\psi_C: X \dashrightarrow X_C$ такое, что X_C – многообразие Фано с терминальными особенностями и $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$.

¹Мы будем считать, что X содержит ровно 24 прямых, проходящих через особую точку.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. Пусть X – гладкое двойное накрытие квадрики Q , разветвленное в поверхности S степени восемь. Тогда для каждой кривой C на X с условием $-K_X \cdot C = 1$ существует бирациональное отображение $\psi_C: X \dashrightarrow X_C$ такое, что X_C – многообразие Фано с каноническими особенностями, $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$ и X_C имеет терминальные особенности, если и только если образ C на Q не лежит в S .

Мы докажем утверждения 1.3 и 1.4 в §2. Основная цель настоящей работы состоит в доказательстве следующего результата.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $Y \not\cong X$ – трехмерное многообразие Фано с каноническими особенностями, бирационально эквивалентное X . Тогда X не может быть гладкой кватрикой; в случае, когда X является общей трехмерной кватрикой с обыкновенной двойной точкой O , $Y \cong X_O$ или $Y \cong X_C$ для прямой C на кватрике X , проходящей через точку O ; а в случае, когда X является двойным накрытием трехмерной гладкой квадрики с ветвлением в поверхности степени восемь, $Y \cong X_C$ для неприводимой кривой C на многообразии X с условием $-K_X \cdot C = 1$.

Группа бирациональных автоморфизмов многообразия X была описана в [3]–[5], где было описано такое множество $\mathcal{S}_X$ бирациональных инволюций многообразия X , что последовательность $1 \rightarrow \prod_{\tau \in \mathcal{S}_X} \tau \rightarrow \text{Bir } X \rightarrow \text{Aut } X \rightarrow 1$ точна, $\mathcal{S}_X = \emptyset$ для гладкой кватрики, $\mathcal{S}_X$ содержит 25 инволюций для трехмерной кватрики с обыкновенной двойной точкой – одна инволюция индуцирована особой точкой и 24 инволюции индуцированы проходящими через особую точку прямыми, а в случае гладкого двойного накрытия квадрики Q с ветвлением в поверхности S степени восемь все инволюции в $\mathcal{S}_X$ индуцированы кривыми C на X с $-K_X \cdot C = 1$, образ которых на Q не содержится в S . Таким образом, элементы $\mathcal{S}_X$ состоят во взаимно однозначном соответствии с терминальными многообразиями Фано, которые бирационально эквивалентны и неизоморфны многообразию X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. Рассмотрим бирационально жесткое трехмерное многообразие Фано V и конечную подгруппу $G \subset \text{Bir } V$. Существует бирациональное отображение $\gamma: V \dashrightarrow Y$ такое, что Y является многообразием Фано с терминальными особенностями и $\gamma \circ G \circ \gamma^{-1} \subset \text{Aut } Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле рациональных функций $K(V)$ на V , нормальную проективную модель W поля G -инвариантных рациональных функций на V и нормализацию Y многообразия W в $K(V)$. Многообразие Y бирационально V , а группа G действует на Y бигекулярно. Требуемое утверждение следует из применения G -эквивариантной программы минимальных моделей к G -эквивариантному разрешению особенностей Y .

Таким образом, для каждой инволюции $\tau \in \mathcal{S}_X$ существует бирациональное отображение $\gamma: X \dashrightarrow Y$ на трехмерное многообразие Фано Y с терминальными особенностями, на котором инволюция $\gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ бигекулярна. И наоборот, на каждом трехмерном многообразии Фано Y с терминальными особенностями, которое бирационально эквивалентно и неизоморфно многообразию X , существует бигекулярная инволюция τ_Y , которая индуцирует бирациональную инволюцию множества $\mathcal{S}_X$.

Многообразие X не может быть бирационально перестроено ни в какое расслоение на многообразия с размерностью Кодаиры $-\infty$, однако оно может быть перестроено в расслоение на многообразия с размерностью Кодаиры нуль.

ПРИМЕР 1.6. Возьмем пучок $\mathcal{H}$ в $|-K_X|$, рассмотрим прямую $L \subset \mathbb{P}^4$ на антиканоническом образе многообразия X и композицию γ морфизма $\varphi|_{-K_X|}$ и проекции из L . Разрешение неопределенностей отображения γ задает бирациональную перестройку многообразия X в расслоение на эллиптические кривые, а разрешение неопределенностей отображения $\varphi|_{\mathcal{H}}$ задает бирациональную перестройку в расслоение на поверхности типа КЗ.

Следует отметить, что расслоения, описанные в примере 1.6, могут быть рассмотрены в одном ключе – они задаются ограничениями проекций из линейных подпространств в $\mathbb{P}^4$ на антиканонический образ многообразия X . Вследствие чего мы будем называть такие расслоения просто “расслоениями, заданными проекциями”.

Результаты работ [2] и [6], [7] заставляют сделать естественное предположение, что с точностью до бирациональной эквивалентности расслоений и с точностью до действия группы бирациональных автоморфизмов бирациональными перестройками многообразия X в расслоения, заданные проекциями, исчерпываются все бирациональные перестройки многообразия X в расслоения на многообразия с размерностью Кодаиры нуль. Более того, это предположение было *доказано* в работе [2] для гладкой квартики и гладкого двойного накрытия трехмерной квадрики, но доказательство содержало ошибку, которая привела к новому пропущенному типу расслоений, как было показано автору В. А. Исковских (см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Гладкая точка P на рассматриваемом многообразии X называется *K -специальной*, если для некоторого натурального числа m полная линейная система $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент, где многообразие V – это раздутие многообразия X в точке P .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. *Рассмотрим раздутие $\rho: V \rightarrow X$ гладкой точки P на рассматриваемом многообразии X . Предположим, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ линейная система $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент. Тогда $|-mK_V|$ является пучком, а ее общий элемент состоит из объединения неприводимых поверхностей с размерностью Кодаиры нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем общий дивизор $H \in |-K_X|$, проходящий через P , рассмотрим его собственный прообраз $\tilde{H}$ на V . Тогда $|-nK_V - \tilde{H}| = \emptyset$ для $n \in \mathbb{N}$, так как в противном случае $|-mK_V|$ содержит неподвижную компоненту. Теперь из $K_V^2 \cdot \tilde{H} = 0$ и вложения $H^0(\mathcal{O}_V(-nK_V)) \subset H^0(\mathcal{O}_{\tilde{H}}(-nK_V))$ следует, что линейная система $|-mK_V|$ является пучком.

Предположим теперь, что натуральное число m является минимальным натуральным числом таким, что пучок $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент. Возьмем две общие поверхности S_1 и S_2 в пучке $|-mK_V|$ и рассмотрим их образы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ на многообразии X соответственно. Поверхности $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ неприводимы, приведены и имеют особенность в точке P кратности $2m$. Для завершения доказательства мы должны показать, что размерность Кодаиры поверхностей S_1 и S_2 равна нулю.

Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H} \subset |-K_X|$ поверхностей, проходящих через P , и рассмотрим общую поверхность H в $\mathcal{H}$. Из равенства $\text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) = 4m^2$ следует, что пересечение $S_1 \cap S_2$ не содержит кривых, принадлежащих исключительному дивизору раздутия ρ , и все кривые в $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ стягиваются отображением $\varphi_{\mathcal{H}}$. Таким образом, в случае, когда многообразие X является кватрикой, пересечение $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ состоит из всех прямых, проходящих через точку P . В случае, когда многообразие X является двойным накрытием гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$, из равенства $H \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2)$ следует, что точка P — единственная базисная точка линейной системы $\mathcal{H}$, которая содержится в пересечении $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. Таким образом, во всех возможных случаях собственные прообразы кривых в пересечении $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ на поверхностях S_1 и S_2 могут быть одновременно стянуты регулярными морфизмами. В частности, из формулы субприсоединения следует, что канонические дивизоры разрешений особенностей поверхностей S_1 и S_2 могут быть стянуты регулярными морфизмами. Значит, размерность Кодайры поверхностей S_1 и S_2 может быть равна либо нулю, либо $-\infty$, но многообразие X бирационально жестко и поэтому не может содержать пучков поверхностей с размерностью Кодайры $-\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1.9. *Каждая K -специальная точка на X задает его бирациональную перестройку в расслоение на поверхности кодайровой размерности нуль.*

ПРИМЕР 1.10. Рассмотрим кватрику $X \subset \mathbb{P}^4$ и гладкую точку P на X такие, что в окрестности точки P кватрика X задана уравнением $q_1 + q_2 + q_1 q_2 + q_4 = 0$ для однородных многочленов q_i степени i таких, что система $q_1 = q_2 = q_4 = 0$ имеет лишь конечное число однородных решений. Тогда P является K -специальной и задает бирациональную перестройку кватрики X в расслоение на КЗ-поверхности с одним кратным слоем кратности 2, который является собственным прообразом касательного в точке P гиперплоского сечения кватрики X .

Докажем следующий результат.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *С точностью до бирациональной эквивалентности расслоений и с точностью до действия группы бирациональных автоморфизмов все бирациональные перестройки многообразия X в расслоения на многообразия с размерностью Кодайры нуль исчерпываются бирациональными перестройками в расслоения, заданные проекциями и K -специальными точками.*

В завершение параграфа мы покажем, что в случае, когда многообразие X является двойным накрытием трехмерной квадрики, расслоения, заданные K -специальными точками, в то же время являются расслоениями, заданными проекциями.

ЛЕММА 1.11. *Пусть X — двойное накрытие гладкой трехмерной квадрики Q , разветвленное в гладкой поверхности $S \subset Q$ степени восемь. Тогда точка P на многообразии X является K -специальной точкой в том и только том случае, когда образ точки P на квадрике Q содержится в поверхности ветвления S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что образ P на Q лежит на S . Рассмотрим пучок поверхностей $\mathcal{H}_P \subset |-K_X|$, образы которых на Q касаются S в образе P .

По построению каждая поверхность в $\mathcal{H}_P$ особа в P и $\mathcal{H}_P$ не может иметь неподвижных компонент, следовательно, точка P является K -специальной.

Предположим, что P является K -специальной, но ее образ на Q не лежит на S , раздуем $\rho: V \rightarrow X$ точку P , возьмем две общие поверхности S_1 и S_2 в $|-mK_V|$ и рассмотрим их образы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ на X соответственно, где m — это наименьшее натуральное число такое, что $|-mK_V|$ не имеет неподвижных компонент. Поверхности $\bar{S}_i$ неприводимы, приведены и имеют кратность $2m$ в P . Рассмотрим линейную систему поверхностей $\mathcal{H} \subset |-K_X|$, проходящих через P . Базисное множество $\mathcal{H}$ содержит точку $\hat{P} \neq P$. Пусть H — общий дивизор в $\mathcal{H}$. Тогда из равенства $\text{mult}_P(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2) = 4m^2$ следует, что $\hat{P} \notin \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ и все кривые пересечения $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ стягиваются в $\hat{P}$. Следовательно, пересечение $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ состоит из конечного числа кривых C_λ таких, что $P \in C_\lambda$ и $-K_X \cdot C_\lambda = 1$. Возьмем произвольную кривую C в пересечении $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ и рассмотрим кривую $\hat{C}$ на многообразии X , которая проходит через $\hat{P}$ и образ которой на Q совпадает с образом кривой C . Рассмотрим ограничение S_1 на общую поверхность D в $|-K_X|$, содержащую C и $\hat{C}$. По построению $S_1|_D = \text{mult}_C(S_1)C + B$ и носитель кривой B не содержит C и $\hat{C}$, поскольку в противном случае S_1 содержала бы $\hat{C}$ и S_2 также содержала бы $\hat{C}$ в силу общности выбора S_i , но $\hat{P} \notin \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$. С другой стороны, на D выполнены равенства $C \cdot \hat{C} = 4$ и $C^2 = -2$, а также $\text{mult}_P(B) \geq 2m - \text{mult}_C(S_1)$. Пересекая кривую B с C и $\hat{C}$, мы получаем противоречие: $m \geq 4 \text{mult}_C(S_1)$ и $3 \text{mult}_C(S_1) \geq m$.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. Пусть X — гладкое двойное накрытие квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$ с ветвлением в поверхности $S \subset Q$ степени восемь, точка P на X является K -специальной и $\hat{P} \in S$ — ее образ на квадрике Q . Тогда расслоение, заданное точкой P , является расслоением на поверхности типа КЗ, индуцированным проекцией из двумерного линейного подпространства $T \subset \mathbb{P}^4$, касательного к поверхности S в точке $\hat{P}$.

§2. Конструкция двух бирациональных отображений

Рассмотрим трехмерную квартику X , имеющую простую двойную точку O такую, что на X лежат ровно 24 прямых, проходящих через точку O . Тогда $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$, а $-K_X$ является гиперплоским сечением X . Зафиксируем прямую C на X , проходящую через O . Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O , положим $Q = f^{-1}(O)$, раздуем $g: V \rightarrow W$ собственный прообраз C , положим $E = g^{-1}(f^{-1}(C))$ и $Q_V = g^{-1}(Q)$. Тогда $|-K_V|$ свободна, $\psi_{|-K_V|}$ является эллиптическим расслоением с сечением Q_V , а его ограничение на Q_V бирационально и стягивает две гладкие кривые C_1, C_2 . Отметим, что численно эффективный и объемный дивизор $(f \circ g)^*(-K_X) - K_V$ имеет нулевое пересечение только с C_1 и C_2 и существует флоп $\rho: V \dashrightarrow \hat{V}$ в C_1 и C_2 . Ограничение ρ на общую поверхность в $|-K_V|$ является изоморфизмом, $\psi_{|-K_{\hat{V}}|} = \psi_{|-K_V|} \circ \rho$, а линейная система $|-K_{\hat{V}}|$ свободна. Поверхность $\rho(Q_V)$ изоморфна $\mathbb{P}^2$, а ее нормальное расслоение в $\hat{V}$ изоморфно $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$. Теперь стянем $\hat{g}: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$ поверхность $\rho(Q_V)$ в точку $P \cong \frac{1}{2}(1, 1, 1)$, тогда $-K_{\hat{W}}^3 = \frac{1}{2}$ и базисное множество $|-K_{\hat{W}}|$ состоит из точки P . Следовательно, $-K_{\hat{W}}$ численно эффективен и объемен и для $n \gg 0$ линейная система $|-nK_{\hat{W}}|$ задает бирациональный морфизм на нормальное многообразие X_C , которое является многообразием Фано с терминальными особенностями и $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$, что доказывает утверждение 1.3.

Теперь докажем утверждение 1.4.

Рассмотрим гладкое двойное накрытие $\theta: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^4$ квадрики Q , разветвленное в поверхности S степени восемь, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X$ и $-K_X \sim \theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_Q)$. Возьмем гладкую и рациональную кривую $C \subset X$ с $-K_X \cdot C = 1$, раздуем $f: W \rightarrow X$ ее, положим $E = f^{-1}(C)$ и обозначим через C_1 единственную базисную кривую $|-K_W|$. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую C_1 и положим $G = g^{-1}(C_1)$, тогда $|-K_V|$ свободна, а $\varphi|_{-K_V|}$ является эллиптическим расслоением с сечением $G \cong \mathbb{F}_1$. Возьмем исключительное сечение $C_2 \subset G$. Если $N_{C_2/V} \cong \mathcal{O}_{C_2}(m) \oplus \mathcal{O}_{C_2}(n)$, то $m + n = -2$ и из вложения нормальных пучков $N_{C_2/G} \subset N_{C_2/V}$ следует $N_{C_2/V} \cong \mathcal{O}_{C_2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{C_2}(-1)$. Раздуем $r: Y \rightarrow V$ кривую C_2 и положим $R = r^{-1}(C_2) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Стянем $\hat{r}: Y \rightarrow \hat{V}$ поверхность R на кривую $\hat{C}_2 \subset \hat{V}$ так, что $\hat{r} \circ r^{-1}$ — флоп в C_2 , $\hat{r}$ стягивает исключительное сечение поверхности $r^{-1}(G) \cong \mathbb{F}_1$. Положим $\hat{G} = \hat{r} \circ r^{-1}(G) \cong \mathbb{P}^2$, тогда $N_{\hat{G}/\hat{V}} \cong \mathcal{O}_{\hat{G}}(-2)$. Стянем $\hat{g}: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$ поверхность $\hat{G}$ в особую точку $\hat{P} \cong \frac{1}{2}(1, 1, 1)$, отображение $\rho = \hat{g} \circ \hat{r} \circ r^{-1} \circ g^{-1}$ — лог-флип для $(W, \varepsilon|-K_W|)$ при $\varepsilon > 1$, следовательно, $\hat{W}$ проективно и $\mathbb{Q}$ -факториально, $-K_{\hat{W}}^3 = \frac{1}{2}$, базисное множество $|-K_{\hat{W}}|$ состоит из точки $\hat{P}$, $-K_{\hat{W}}$ численно эффективен и объемен и $|-nK_{\hat{W}}|$ для $n \gg 0$ задает бирациональный морфизм на многообразие Фано X_C с каноническими особенностями с $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$. В случае $\theta(C) \not\subset S$ построенное бирациональное отображение не стягивает дивизоров на X , откуда следует терминальность X_C . В случае $\theta(C) \subset S$ построенное отображение стягивает поверхность на X , которая заматывается обратными образами прямых на Q , касающихся S в $\theta(C)$, значит, X_C имеет особенность типа A_1 вдоль общей точки одной кривой. Таким образом, утверждение 1.4 доказано.

§ 3. Гладкая трехмерная квартика

Рассмотрим произвольную гладкую квартику X в $\mathbb{P}^4$. Тогда $\text{Pic } X = -\mathbb{Z}K_X$ и антиканонический дивизор $-K_X$ рационально эквивалентен гиперплоскому сечению квартики X . Пусть (X, M_X) — подвижная лог-пара такая, что $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Особенности лог-пары (X, M_X) каноничны, а $\text{CS}(X, M_X)$ является одним из следующих: $\emptyset$, $\{P\}$ для K -специальной точки P , $\{L\}$ для прямой L на квартике X , $\{X \cap H\}$ для двумерного линейного подпространства $H \subset \mathbb{P}^4$. Более того, в случае, когда $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$, граница M_X лежит в слоях рационального отображения, заданного K -специальной точкой P , а в случае, когда $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую, M_X лежит в слоях проекции из $\text{CS}(X, M_X)$.*

Заметим, что из теоремы 3.1 следует основная теорема для X (см. [7]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Из теоремы 3.1 следует дополнительная теорема для гладкой трехмерной квартики X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует бирациональное отображение $\theta: X \dashrightarrow Y$ на расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, общий слой которого есть эллиптическая кривая либо поверхность с размерностью Кодaira нуль. Пусть $M_X = \lambda\theta^{-1}(|\tau^*(D)|)$ для достаточно большого дивизора D на Z и такого $\lambda > 0$, что $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Предположим, что (X, M_X) терминальна. В этом случае для некоторого $\gamma > 1$ лог-пара

$(X, \gamma M_X)$ будет канонической моделью, но $\kappa(X, \gamma M_X) < 3$ по построению. Следовательно, $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$ и по теореме 3.1 либо $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$ для K -специальной точки P на кваттике X , либо $\text{CS}(X, M_X) = \{L\}$ для прямой L , либо $\text{CS}(X, M_X) = \{X \cap H\}$ для двумерного линейного подпространства $H \subset \mathbb{P}^4$.

Если $\text{CS}(X, M_X)$ не состоит из прямой или размерность Y равна двум, то из теоремы 3.1 следуют необходимые утверждения, поэтому будем считать, что τ является расслоением на поверхности и $\text{CS}(X, M_X) = \{L\}$. Раздуем $f: V \rightarrow X$ прямую L , положим $E = f^{-1}(L)$ и $M_V = f^{-1}(M_X)$. Из теоремы 3.1 следует, что M_V содержится в слоях эллиптического расслоения $\varphi|_{-K_V|}$ и $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Особенности (V, M_V) не терминальны, поскольку в этом случае $\kappa(V, \delta M_V) = 2$ для $\delta > 1$, но $\kappa(V, \delta M_V) \leq 1$ по построению. Значит, $\text{CS}(V, M_V) \neq \emptyset$. Пусть $\text{CS}(V, M_V)$ содержит точку P_V . В этом случае $f(P_V) \in \text{CS}(X, M_X)$, что противоречит предположению. Значит, $\text{CS}(V, M_V)$ содержит кривую $\hat{L} \subset V$ такую, что $\hat{L} \subset E$, но M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V|}$, следовательно, $\hat{L}$ стягивается морфизмом $\varphi|_{-K_V|}$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}$ поверхностей в $| -K_V |$, проходящих через $\hat{L}$. Рациональное отображение $\varphi_{\mathcal{H}} \circ f^{-1}$ является проекцией из некоторого двумерного линейного подпространства $T \subset \mathbb{P}^4$, которое содержит L . Пусть $g: W \rightarrow V$ — разрешение особенностей рационального отображения $\varphi_{\mathcal{H}}$, положим $M_W = g^{-1}(M_V)$, $h = \varphi_{\mathcal{H}} \circ g^{-1}$ и рассмотрим общий слой D_W расслоения h . Тогда

$$M_W|_{D_W} \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i \in I} c_i F_i|_{D_W}$$

для некоторых рациональных чисел c_i и g -исключительных дивизоров F_i , причем по крайней мере один из g -исключительных дивизоров, доминирующих $\hat{L}$, не содержится в носителе дивизора $\sum_{i \in I} c_i F_i$. Разбирая все возможные случаи, можно показать отрицательную определенность формы пересечения кривых $F_i|_{D_W}$ на поверхности D_W . Таким образом, подвижность $M_W|_{D_W}$ влечет $M_W|_{D_W} = \emptyset$. Следовательно, M_W содержится в слоях h , откуда вытекает необходимое утверждение, а также тот факт, что L высекается на X подпространством T с кратностью 4.

В оставшейся части параграфа мы докажем теорему 3.1. Каноничность особенностей каждой подвижной лог-пары на X с $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальным лог-каноническим дивизором эквивалентна бирациональной жесткости X , поэтому мы будем предполагать, что особенности (X, M_X) канонические.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку P . Тогда P является K -специальной, $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$ и граница M_X лежит в слоях отображения, заданного K -специальной точкой P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем общее гиперплоское сечение H_P кваттики X , проходящее через P . Из $H_P \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_P(M_X^2)$ и локального неравенства Пухликова в форме теоремы 4.1 работы [2] следует $\text{mult}_P(M_X) = 2$. Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку P и положим $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда $M_W \sim_{\mathbb{Q}} -K_W$ и $| -nK_W |$ не имеет неподвижных компонент для некоторого $n \gg 0$, P является K -специальной, а $| -nK_W |$ является пучком по утверждению 1.8. Из равенства $\text{mult}_P(M_X^2) = 4$ следует, что носитель M_X^2 состоит из всех прямых, проходящих через P . В частности, через P проходит конечное число прямых на X . Базисное множество пучка $f(| -nK_W |)$

также состоит из всех прямых, проходящих через P , откуда следует, что M_X лежит в слоях $\varphi_{f(|-nK_W|)}$.

Предположим, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит элементы, отличные от P . Как мы уже показали, носитель эффективного цикла M_X^2 состоит из прямых, проходящих через точку P . Следовательно, существует прямая C на X такая, что точка P содержится в ней и либо сама прямая C является центром канонических особенностей лог-пары (X, M_X) , либо множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит еще одну K -специальную точку на прямой C . Рассмотрим общее гиперплоское сечение H_C кватрики X , проходящее через кривую C . Поверхность H_C гладкая и $M_X|_{H_C} = \text{mult}_C(M_X)C + B_C$ для некоторой подвижной границы B_C . Из неравенства $B_C^2 \geq (2 - \text{mult}_C(M_X))^2$ следует неравенство $\text{mult}_C(M_X) \leq \frac{2}{3}$. Если $\text{CS}(X, M_X)$ содержит еще одну точку на C , мы получаем противоречие: $B_C^2 = 4 - 2 \text{mult}_C(M_X) - 2 \text{mult}_C^2(M_X) \geq 2(2 - \text{mult}_C(M_X))^2$.

Можно считать, что $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек, но содержит неприводимую приведенную кривую C . Каноничность особенностей лог-пары (X, M_X) влечет равенство $\text{mult}_C(M_X) = 1$. Из неравенства $4 = -K_X \cdot M_X^2 \geq -K_X \cdot C$ следует, что степень кривой $C \subset \mathbb{P}^4$ не превышает 4.

ЛЕММА 3.4. *Кривая C содержится в двумерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кривая C не содержится ни в каком двумерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$. Кривая C является либо гладкой кривой степени 3 или 4, либо рациональной кривой степени 4 с одной двойной точкой.

Предположим, что кривая C гладкая. В этом случае раздуем $f: W \rightarrow X$ ее и положим $E = f^{-1}(C)$, $M_W = f^{-1}(M_X)$ и $d = -K_X \cdot C$. Базисное множество линейной системы $|f^*(-dK_X) - E|$ не содержит кривых, но $(f^*(-dK_X) - E) \cdot M_W^2 < 0$.

Можно считать, что C — рациональная кватрика с двойной точкой P . Рассмотрим композицию $f: W \rightarrow X$ раздутия P и собственного прообраза C . Возьмем f -исключительные дивизоры G и E такие, что $f(E) = C$ и $f(G) = P$. Базисное множество $|f^*(-4K_X) - E - 2G|$ не содержит кривых, но $(f^*(-4K_X) - E - 2G) \cdot M_W^2 < 0$ для $M_W = f^{-1}(M_X)$, поскольку $2 > \text{mult}_P(M_X) \geq \text{mult}_C(M_X) = 1$.

ЛЕММА 3.5. *Если C — прямая, то M_X лежит в слоях проекции из C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем $f: W \rightarrow X$ прямую C , положим $M_W = f^{-1}(M_X)$, тогда линейная система $|-K_W|$ свободна, морфизм $\varphi_{|-K_W|}$ является расслоением на эллиптические кривые, необходимое утверждение следует из $M_W \sim_{\mathbb{Q}} -K_W$.

ЛЕММА 3.6. *Пусть C — прямая и $\text{CS}(X, M_X) \neq \{C\}$. Тогда существует двумерное линейное подпространство $T \subset \mathbb{P}^4$ такое, что $C \subset T$, $\text{CS}(X, M_X) = \{X \cap T\}$, а граница M_X лежит в слоях проекции из T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем $f: V \rightarrow X$ прямую C и рассмотрим исключительный дивизор E бирационального морфизма f и границу $M_V = f^{-1}(M_X)$. Из леммы 3.5 следует, что M_V содержится в слоях расслоения $\varphi_{|-K_V|}: V \rightarrow \mathbb{P}^2$. По сделанному предположению множество $\text{CS}(V, M_V)$ содержит некоторую кривую $\hat{L}$, не содержащуюся в E . Из подвижности M_V следует, что $\hat{L}$ стягивается $\varphi_{|-K_V|}$. Рассмотрим пучок поверхностей $\mathcal{H}$ в $|-K_V|$, проходящих через $\hat{L}$. Возьмем общую

поверхность D в $\mathcal{H}$. Поверхность D является поверхностью типа КЗ с не более чем каноническими особенностями, а отображение $\varphi_{\mathcal{H}} \circ f^{-1}$ является проекцией из некоторого двумерного линейного подпространства T в $\mathbb{P}^4$ такого, что прямая C и кривая $L = f(\widehat{L})$ содержатся в T . Заметим, что кратность, с которой прямая C высекается на квартике X подпространством T , не превышает 3. Необходимое утверждение следует теперь из аргументов, использованных в окончании доказательства утверждения 3.2.

ЛЕММА 3.7. *Если степень C равна 4, то M_X лежит в слоях проекции из C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.4 кривая C высекается на X некоторым двумерным линейным подпространством $T \subset \mathbb{P}^4$. Пусть $\mathcal{H}_T$ – пучок гиперплоских сечений X , проходящих через T , $f: W \rightarrow X$ – разрешение особенностей $\varphi_{\mathcal{H}_T}$ и $g = \varphi_{\mathcal{H}_T} \circ f^{-1}$, причем f является изоморфизмом вне C , W гладко и содержит один дивизор E , доминирующий C . Рассмотрим $M_W = f^{-1}(M_X)$ и общий слой D расслоения g . Ограничение $M_W|_D$ эквивалентно $\sum_{i \in I} c_i F_i|_D$ для некоторых $c_i \in \mathbb{Q}$, где все образы $f(F_i)$ являются точками на C . Подвижность $M_W|_D$ влечет $M_W|_D = \emptyset$. Следовательно, M_W содержится в слоях g , откуда вытекает необходимое утверждение.

ЛЕММА 3.8. *Пусть C содержится в двумерном линейном подпространстве T и является либо коникой, либо кубикой. Тогда множество $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из всех неприводимых компонент $X \cap T$, а M_X лежит в слоях проекции из T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}_T$ – пучок гиперплоских сечений квартики X , содержащих T , а D – общая поверхность в $\mathcal{H}_T$. Тогда D является поверхностью типа КЗ с каноническими особенностями. Предположим, что C – плоская кубика. В этом случае $X \cap T = C \cup L$ и $M_X|_D = C + \text{mult}_L(M_X)L + B_D$ для подвижной границы B_D , которая эквивалентна $(1 - \text{mult}_L(M_X))L$. Из $L^2 < 0$ следует, что $L \in \text{CS}(X, M_X)$, и требуемое утверждение следует из леммы 3.6.

Пусть C является коникой и $X \cap T = C \cup L_1 \cup L_2$ для прямых $L_1 \neq L_2$. Тогда $M_X|_D = C + \text{mult}_{L_1}(M_X)L_1 + \text{mult}_{L_2}(M_X)L_2 + B_D$ для подвижной границы B_D , которая эквивалентна $(1 - \text{mult}_{L_1}(M_X))L_1 + (1 - \text{mult}_{L_2}(M_X))L_2$, и форма пересечения прямых L_1 и L_2 отрицательно определена. Таким образом, $L_i \in \text{CS}(X, M_X)$ и требуемое утверждение следует из применения леммы 3.6.

Предположим, что C является коникой и $X \cap T = C \cup R$ для прямой R на X . В этом случае $M_X|_D = C + \alpha R + B_D$ для некоторого рационального $\alpha \geq \text{mult}_R(M_X)$ и подвижной границы B_D . Однако граница B_D эквивалентна $(2 - \alpha)R$ и $R^2 < 0$, откуда следует, что граница B_D пуста. С другой стороны, базисное множество пучка $\mathcal{H}_T$ состоит из C и R , откуда следует, что M_X содержится в слоях $\varphi_{\mathcal{H}_T}$ и $R \in \text{CS}(X, M_X)$.

Пусть C – коника и $X \cap T = C$. Раздуем $f: V \rightarrow X$ конику C , положим $E = f^{-1}(C)$ и $M_V = f^{-1}(M_X)$. Рассмотрим общую поверхность S в $|-K_V| = f^{-1}(\mathcal{H}_T)$. Тогда для некоторой подвижной границы B_S на S мы имеем $M_V|_S = \text{mult}_{\widehat{C}}(M_V)\widehat{C} + B_S$, где кривая $\widehat{C}$ является единственной базисной кривой пучка $|-K_V|$. С другой стороны, граница B_S эквивалентна $\text{mult}_{\widehat{C}}(M_V)\widehat{C}$ и $\widehat{C}^2 < 0$.

Значит, $B_S = \emptyset$, а граница M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V|}$, поскольку базисное множество пучка $|-K_V|$ состоит из $\hat{C}$.

Мы доказали теорему 3.1.

§ 4. Особая трехмерная квартика

Рассмотрим трехмерную квартику X с одной простой двойной точкой O , через которую проходят ровно 24 прямых на X . В примере 1.2 была построена бирациональная перестройка $\psi_O: X \dashrightarrow X_O$ на терминальное многообразие Фано с $-K_{X_O}^3 = 2$, а в § 2 для каждой прямой $C \subset X$, содержащей O , была построена перестройка $\psi_C: X \dashrightarrow X_C$ на терминальное многообразие Фано с $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Предположим, что существует бирациональное отображение $\sigma: X \dashrightarrow Y$ на каноническое многообразие Фано Y . Пусть $M_Y = \frac{1}{n}|-nK_Y|$ для некоторого $n \gg 0$, а лог-пары (X, M_X) , (X_O, M_{X_O}) и (X_C, M_{X_C}) бирационально эквивалентны лог-паре (Y, M_Y) . Тогда с точностью до действия группы $\text{Bir } X$ одна из лог-пар (X, M_X) , (X_O, M_{X_O}) или (X_C, M_{X_C}) имеет полутерминальные особенности² и $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальный лог-канонический дивизор.*

Из единственности канонической модели следует, что основная теорема для квартики X вытекает из утверждения 4.1 (см. [7]). Следующий результат равносильна бирациональной жесткости квартики X , которая доказана в [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Для каждой подвижной лог-пары (X, M_X) , которая имеет размерность Кодaira нуль, существует $\tau \in \text{Bir } X$ такой, что $(X, \tau(M_X))$ имеет канонические особенности и $K_X + \tau(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0$.*

Для доказательства утверждения 4.1 нам понадобится описание множества центров канонических особенностей лог-пар с каноническими особенностями и размерностью Кодaira нуль на квартике X , а также один вспомогательный результат.

ТЕОРЕМА 4.3. *Рассмотрим подвижную лог-пару (X, M_X) с каноническими особенностями и $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\text{CS}(X, M_X)$ является одним из следующих множеств: $\emptyset$, $\{O\}$, $\{P\}$ для K -специальной точки P , $\{C\}$ для проходящей через точку O прямой C , $\{O, C\}$ для проходящей через точку O прямой C , $\{C\}$ для не проходящей через точку O прямой C , $\{O, X \cap H\}$ для проходящего через O двумерного линейного подпространства H , $\{X \cap H\}$ для не проходящего через O двумерного линейного подпространства H . Более того, предположим дополнительно, что $\text{CS}(X, M_X)$ непусто, не состоит из точки O и не состоит из прямой C на X , проходящей через точку O . Тогда если $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую, то M_X лежит в слоях проекции из $\text{CS}(X, M_X)$, а если $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$ для K -специальной точки P , то подвижная граница M_X лежит в слоях отображения, заданного K -специальной точкой P .*

² Лог-пара (X, M_X) полутерминальна, если $\exists \lambda > 1$ такое, что $(X, \lambda M_X)$ канонична.

ЛЕММА 4.4. *Рассмотрим лог-пару (V, B_V) , где $V \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, дивизор B_V эффективен и имеет тип (α, β) в группе $\text{Pic } V \otimes \mathbb{Q}$ для некоторых α и β в $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Тогда лог-пара (V, B_V) имеет лог-терминальные особенности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересекая B_V со слоями проекций на $\mathbb{P}^1$, мы видим, что множество центров лог-канонических особенностей $\text{LCS}(V, B_V)$ не содержит кривых. Предположим, что $\text{LCS}(V, B_V)$ содержит некоторую точку $O \in V$. Рассмотрим дивизор H на поверхности V , имеющий тип $(1 - \alpha, 1 - \beta)$ в группе $\text{Pic } V \otimes \mathbb{Q}$. Дивизор H обилен и $H^0(\mathcal{O}_V(D)) = 0$ для $D = K_V + B_V + H$, но по теореме Шокурова об обращении в нуль (см. [2]) отображение $H^0(\mathcal{O}_V(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(D))$ сюръективно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Из теоремы 4.3 следует основная теорема для кватрики X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим существование нетривиального бирационального отображения $\sigma: X \dashrightarrow Y$ на трехмерное многообразие Фано Y с каноническими особенностями. Пусть $M_Y = \frac{1}{n} | -nK_Y |$ для некоторого достаточно большого натурального числа n и $M_X = \sigma^{-1}(M_Y)$. Тогда $\kappa(X, M_X) = 0$ и по утверждению 4.2 мы можем заменить отображение σ на его композицию с некоторым бирациональным автоморфизмом кватрики X , так что особенности подвижной лог-пары (X, M_X) будут каноническими и $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Пусть $M_{X_O} = \psi_O(M_X)$ и $M_{X_C} = \psi_C(M_X)$ для любой прямой C на кватрике X , проходящей через особую точку O , где отображения ψ_O и ψ_C являются бирациональными отображениями из примера 1.2 и утверждения 1.3 соответственно. Как следует из утверждения 4.1, для доказательства основной теоремы достаточно показать, что одна из лог-пар (X, M_X) , (X_O, M_{X_O}) или (X_C, M_{X_C}) имеет полутерминальные особенности и $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальный лог-канонический дивизор.

Мы можем считать, что особенности лог-пары (X, M_X) не являются терминальными. В этом случае из теоремы 4.3 и конструкции подвижной границы M_Y следует, что либо $\text{CS}(X, M_X) = \{O\}$, либо $\text{CS}(X, M_X) = \{C\}$ для некоторой прямой C на кватрике X , проходящей через особую точку O .

Предположим, что $\text{CS}(X, M_X) = \{C\}$ для некоторой прямой C на кватрике X , проходящей через особую точку O . В этом случае раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O , а затем раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $f^{-1}(C)$. Рассмотрим g -исключительный дивизор E , положим $Q_V = g^{-1}(f^{-1}(O))$ и $M_V = (f \circ g)^{-1}(M_X)$. Тогда $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} a(V, M_V, Q_V)Q_V$ и $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Допустим, что особенности подвижной лог-пары (V, M_V) не терминальны. Тогда множество $\text{CS}(V, M_V)$ содержит кривую $C_V \subset E$, доминирующую прямую C . Однако последнее противоречит $M_V \cdot D = a(V, M_V, Q_V) \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, где D — слой морфизма $\varphi|_{-K_V|}$, проходящий через некоторую точку кривой C_V . Значит, особенности (V, M_V) терминальны, и из конструкции ψ_C следует, что лог-пара (X_C, M_{X_C}) полутерминальна и $K_{X_C} + M_{X_C} \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Для завершения доказательства мы можем считать, что единственным центром канонических особенностей лог-пары (X, M_X) является особая точка O . В этом случае раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O и положим $Q = f^{-1}(O)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда по теореме 3.11 работы [9] $K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X)$. Более того, морфизм многообразия W на многообразии X_O является крепантным для (W, M_W) .

Следовательно, для завершения доказательства нам нужно показать, что особенности лог-пары (W, M_W) терминальны. Заметим, что все элементы множества $\text{CS}(W, M_W)$ содержатся в исключительном дивизоре Q .

Допустим, что множество $\text{CS}(W, M_W)$ содержит некоторую точку $O_W \in Q$, которая не принадлежит собственному прообразу никакой прямой на квартике X , проходящей через точку O . В этом случае из локального неравенства Пухликова в форме теоремы 4.1 работы [2] следует, что $\text{mult}_{O_W}(M_W^2) \geq 4$. Пересекая цикл M_W^2 с общей поверхностью в $|-K_W|$, проходящей через O_W , мы получаем противоречие.

Предположим, что $\text{CS}(W, M_W)$ содержит точку $O_W \in Q$ такую, что $O_W \in f^{-1}(C)$ для некоторой прямой C на X . Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $f^{-1}(C)$, возьмем исключительный дивизор E и положим $M_V = g^{-1}(M_W)$. По теореме о связности Шокурова $\text{LCS}(E, M_V|_E) \neq \emptyset$, что противоречит лемме 4.4. Таким образом, мы показали, что множество $\text{CS}(W, M_W)$ не содержит точек.

Предположим, что $\text{CS}(W, M_W)$ содержит кривую Z в Q . Пересекая M_W со слоями проекций квадрики $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, мы заключаем, что кривая Z сама является слоем проекции квадрики Q на один из сомножителей. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую Z , рассмотрим общий дивизор H в пучке $|-K_V|$ и положим $M_V = g^{-1}(M_W)$. Поверхность H является поверхностью типа КЗ с не более чем каноническими особенностями и $M_V|_H = \text{mult}_{\hat{Z}}(M_V)\hat{Z} + \sum_{i \in I} \alpha_i C_i + B_H$ для некоторых рациональных чисел $\alpha_i \geq \text{mult}_{C_i}(M_V)$ и подвижной границы B_H , где кривые $\hat{Z}$ и C_i — базисные кривые пучка $|-K_V|$ такие, что $\varphi|_{-K_W}|(g(\hat{Z})) = \varphi|_{-K_W}|(Z)$, а кривые C_i отображаются в прямые на квартике X , которые проходят через особую точку O . С другой стороны, форма пересечения кривых $\hat{Z}$ и C_i на H отрицательно определена и $M_V|_H$ эквивалентно ограничению $H|_H$, которое эквивалентно $\hat{Z} + \sum_{i \in I} a_i C_i$ для некоторых натуральных чисел a_i . Следовательно, $B_H = \emptyset$, а граница M_V содержится в слоях $\varphi|_{-K_V}|$, откуда, в свою очередь, следует, что прямые $f \circ g(C_i)$ являются центрами канонических особенностей лог-пары (X, M_X) . Однако по построению M_V не может содержаться в слоях $\varphi|_{-K_V}|$ и по сделанному предположению $\text{CS}(X, M_X) = \{O\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *Из теоремы 4.3 следует дополнительная теорема для X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что квартика X может быть бирационально перестроена с помощью бирационального отображения $\theta: X \dashrightarrow Y$ в некоторое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, общий слой которого является либо эллиптической кривой, либо поверхностью с размерностью Кодаиры нуль. Положим $M_X = \lambda \theta^{-1}(|\tau^*(D_Z)|)$ для достаточно большого дивизора D_Z на Z и такого λ , что $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. В силу утверждения 4.2 мы можем считать, что подвижная лог-пара (X, M_X) имеет канонические особенности.

Допустим, что особенности лог-пары (X, M_X) терминальны. Тогда для некоторого рационального числа γ лог-пара $(X, \gamma M_X)$ будет канонической моделью, но по построению $\kappa(X, \gamma M_X) < 3$. Таким образом, $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$. Более того, из тех же рассуждений следует, что особенности лог-пар (X_O, M_{X_O}) и (X_C, M_{X_C}) не могут быть полутерминальными, где $M_{X_O} = \psi_O(M_X)$ и $M_{X_C} = \psi_C(M_X)$ для прямой C на квартике X , проходящей через точку O , а отображения ψ_O и ψ_C — бирациональные отображения из примера 1.2 и утверждения 1.3 соответственно. Та-

ким образом, из доказательства утверждения 4.5 следует, что $\text{CS}(X, M_X) \neq \{O\}$ и $\text{CS}(X, M_X) \neq \{C\}$ для всех прямых C на X , содержащих точку O . Следовательно, по теореме 4.3 множество $\text{CS}(X, M_X)$ является одним из следующих множеств: $\{P\}$ для K -специальной точки P , $\{O, C\}$ для проходящей через точку O прямой C , $\{C\}$ для не проходящей через точку O прямой C , $\{O, X \cap H\}$ для проходящего через O двумерного линейного подпространства H , $\{X \cap H\}$ для не проходящего через O двумерного линейного подпространства H , и если $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую, то M_X лежит в слоях проекции из $\text{CS}(X, M_X)$, а если $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$ для K -специальной точки P , то M_X лежит в слоях отображения, заданного K -специальной точкой P . В частности, в случае, когда τ является эллиптическим расслоением, или $\text{CS}(X, M_X) \neq \{O, C\}$ ни для какой прямой C на X , проходящей через O , или $\text{CS}(X, M_X) \neq \{C\}$ ни для какой прямой C на X , не проходящей через O , из теоремы 4.3 следуют все необходимые утверждения. Таким образом, для завершения доказательства мы можем считать, что τ является расслоением на поверхности с размерностью Кодaira нуль, а множество $\text{CS}(X, M_X)$ является либо $\{O, C\}$ для проходящей через O прямой C , либо $\{C\}$ для не проходящей через O прямой C , а M_X лежит в слоях проекции из прямой C . Случай, когда $\text{CS}(X, M_X) = \{C\}$ для некоторой прямой C на X , не проходящей через точку O , покрывается доказательством утверждения 3.2. Поэтому мы будем предполагать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из точки O и некоторой прямой C на кватерике X , проходящей через точку O .

Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O и положим $Q = f^{-1}(O)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. В этом случае из теоремы 3.11 работы [9] следует, что $\text{mult}_O(M_X) = 1$ и $K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Пусть $\text{CS}(W, M_W)$ содержит точку O_W . Тогда $O_W \in Q$ и $\text{mult}_{O_W}(M_W^2) \geq 4$ по локальному неравенству Пухликова в форме теоремы 4.1 работы [2]. Если O_W не содержится в собственном прообразе прямой на X , пересекая M_W^2 с общей поверхностью в $|-K_W|$, проходящей через O_W , получаем противоречие. Значит, $O_W \in f^{-1}(L)$ для некоторой прямой L на X . Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $f^{-1}(L)$, рассмотрим g -исключительный дивизор E и положим $M_V = g^{-1}(M_W)$. Тогда $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и по теореме о связности Шокурова $\text{LCS}(E, M_V|_E) \neq \emptyset$, что противоречит лемме 4.4.

Пусть $\text{CS}(W, M_W)$ содержит кривую $Z \subset Q$. Тогда $f^{-1}(C) \cap Z \neq \emptyset$ и Z является слоем проекции поверхности $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на $\mathbb{P}^1$. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую Z , возьмем общий дивизор H в $|-K_V|$ и положим $M_V = g^{-1}(M_W)$. Тогда ограничение $M_V|_H$ есть граница $\text{mult}_{\hat{Z}}(M_V)\hat{Z} + \sum_{i \in I} \alpha_i C_i + B_H$ для некоторых рациональных чисел $\alpha_i \geq \text{mult}_{C_i}(M_V)$ и подвижной границы B_H , где кривые $\hat{Z}$ и C_i – базисные кривые пучка $|-K_V|$ такие, что $\varphi|_{-K_W|}(g(\hat{Z})) = \varphi|_{-K_W|}(Z)$, кривые C_i отображаются в прямые на X , содержащие O , и $f \circ g(C_j) = C$ для некоторого $j \in I$. С другой стороны, форма пересечения кривых $\hat{Z}$ и C_i на H отрицательно определена, а $M_V|_H$ эквивалентен $H|_H$, который, в свою очередь, эквивалентен $\hat{Z} + \sum_{i \in I} a_i C_i$ для некоторых $a_i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $B_H = \emptyset$ и граница M_V содержится в слоях рационального отображения $\varphi|_{-K_V|}$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Таким образом, мы можем считать, что единственным центром канонических особенностей лог-пары (W, M_W) является кривая $\hat{C} = f^{-1}(C)$. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $\hat{C}$, рассмотрим исключительный дивизор E раздутия g и положим $Q_V =$

$g^{-1}(Q)$ и $M_V = g^{-1}(M_W)$. Тогда $K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} 0$, $|-K_V|$ свободна, $\varphi|_{-K_V|}$ является эллиптическим расслоением с сечением Q_V , M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V|}$ и $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Множество $\text{CS}(V, M_V)$ непусто. С другой стороны, $\text{CS}(V, M_V)$ не может содержать точек и кривых, стягиваемых g , поскольку в этом случае их образы на W содержались бы в $\text{CS}(W, M_W) = \{\hat{C}\}$. Следовательно, $\text{CS}(V, M_V)$ содержит доминирующую $\hat{C}$ кривую $\tilde{C} \subset E$, но M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V|}$. Значит, $\tilde{C}$ стягивается $\varphi|_{-K_V|}$, но морфизм $\varphi|_{-K_V|}|_E$ не стягивает ни одной кривой.

В оставшейся части этого параграфа мы докажем теорему 4.3. Зафиксируем подвижную границу (X, M_X) такую, что особенности лог-пары (X, M_X) каноничны, выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ и $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 4.7. *Пусть $\text{CS}(X, M_X)$ содержит гладкую точку P . Тогда P является K -специальной точкой, $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$ и M_X лежит в слоях рационального отображения, заданного K -специальной точкой P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 3.3 следует, что P является K -специальной, выполнено равенство $\text{mult}_P(M_X) = 2$ и M_X лежит в слоях отображения, заданного точкой P , и либо $\text{CS}(X, M_X) = \{P\}$, либо существует центр канонических особенностей лог-пары (X, M_X) , который является подмножеством некоторой прямой C на X , проходящей через P и O . Предположим, что $\text{CS}(X, M_X) \neq \{P\}$, рассмотрим общее гиперплоское сечение H_C кватрики X , содержащее кривую C . Тогда для некоторой подвижной границы B_C имеем $M_X|_{H_C} = \text{mult}_C(M_X)C + B_C$. Более того, из $\text{mult}_P(B_C) \geq 2 - \text{mult}_C(M_X)$ и $B_C^2 = 4 - 2 \text{mult}_C(M_X) - \frac{3}{2} \text{mult}_C^2(M_X)$ следует, что $\text{mult}_C(M_X) \leq \frac{4}{5}$. В частности, $C \notin \text{CS}(X, M_X)$ и либо $\text{CS}(X, M_X)$ содержит еще одну K -специальную точку на C , либо $O \in \text{CS}(X, M_X)$.

Предположим, что C содержит две K -специальные точки в $\text{CS}(X, M_X)$. В этом случае $B_C^2 = 4 - 2 \text{mult}_C(M_X) - \frac{3}{2} \text{mult}_C^2(M_X) \geq 2(2 - \text{mult}_C(M_X))^2$, что невозможно, значит, $O \in \text{CS}(X, M_X)$ и $\text{mult}_O(M_X) = 1$ по теореме 3.11 работы [9], откуда следует неравенство $B_C^2 \geq (2 - \text{mult}_C(M_X))^2 + 2(1 - \frac{1}{2} \text{mult}_C(M_X))^2$, которое противоречит равенству $B_C^2 = 4 - 2 \text{mult}_C(M_X) - \frac{3}{2} \text{mult}_C^2(M_X)$.

Можно считать, что $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит гладких точек на X , но содержит кривую C такую, что степень кривой $C \subset \mathbb{P}^4$ не превосходит 4 и $\text{mult}_C(M_X) = 1$.

ЛЕММА 4.8. *Кривая C содержится в двумерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно, тогда C является либо гладкой кривой, либо рациональной кривой степени 4 с двойной точкой. В случае, когда $O \notin C$, из доказательства леммы 3.4 следует противоречие, поэтому будем считать, что $O \in C$.

Предположим, что C гладкая и ее степень равна 3 или 4. Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O , раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $f^{-1}(C)$, обозначим через E исключительный дивизор раздутия g и положим $Q_V = (f \circ g)^{-1}(O)$, $M_V = (f \circ g)^{-1}(M_X)$, а также $d = -K_X \cdot C$. Тогда $(f \circ g)^*(-dK_X) - Q_V - E$ численно эффективен и граница M_V эквивалентна дивизору $(f \circ g)^*(-K_X) - \text{mult}_O(M_X)Q_V - E$, но $((f \circ g)^*(-dK_X) - Q_V - E) \cdot M_V^2 < 0$.

Допустим, что C – рациональная кривая степени 4 с двойной точкой P и $P \neq O$. Пусть $h: U \rightarrow X$ – композиция раздутий точек P и O с раздутием собственного прообраза C , $M_U = h^{-1}(M_X)$, $Q_U = h^{-1}(O)$, $F = h^{-1}(P)$ и G – h -исключительный дивизор такой, что $h(G) = C$. Тогда $M_U \sim_{\mathbb{Q}} h^*(-K_X) - \text{mult}_O(M_X)Q_U - \text{mult}_P(M_X)F - G$, линейная система $|h^*(-4K_X) - Q_U - 2F - G|$ не имеет базисных кривых, но непосредственные вычисления показывают, что $(h^*(-4K_X) - Q_U - 2F - G) \cdot M_U^2 < 0$.

Пусть C – рациональная кривая степени 4 с двойной точкой O . Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку O и $g: V \rightarrow W$ кривую $f^{-1}(C)$. Тогда $M_V \sim_{\mathbb{Q}} (f \circ g)^*(-K_X) - \text{mult}_O(M_X)Q_V - E$, где $Q_V = (f \circ g)^{-1}(O)$, $E = g^{-1}(f^{-1}(C))$ и $M_V = (f \circ g)^{-1}(M_X)$. Непосредственные вычисления показывают, что $((f \circ g)^*(-4K_X) - Q_V - E) \cdot M_V^2 < 0$, но легко видеть, что линейная система $|(f \circ g)^*(-4K_X) - Q_V - E|$ не имеет базисных кривых.

ЛЕММА 4.9. Пусть C – прямая и $O \in \text{CS}(X, M_X)$, если $O \in C$. Тогда M_X лежит в слоях проекции из C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $O \notin C$ пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие C , в противном случае пусть $f: W \rightarrow X$ – композиция раздутия O и раздутия собственного прообраза кривой C . Тогда $M_W \sim_{\mathbb{Q}} -K_W$, $M_W \cdot K_W^2 = 0$, $|-K_W|$ свободна и $\varphi|_{-K_W}|$ является эллиптическим расслоением. Значит, M_W содержится в слоях $\varphi|_{-K_W}|$.

ЛЕММА 4.10. Пусть C – прямая, $O \notin C$ и $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую $L \neq C$. Тогда существует двумерное линейное подпространство $T \subset \mathbb{P}^4$, содержащее C и L , такое, что $\text{CS}(X, M_X) = \{O, X \cap T\}$, если $O \in T$, $\text{CS}(X, M_X) = \{X \cap T\}$, если $O \notin T$, а граница M_X лежит в слоях проекции из T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем $f: V \rightarrow X$ кривую C , обозначим через E исключительный дивизор f и положим $M_V = f^{-1}(M_X)$. Тогда $|-K_V|$ свободна, $\varphi|_{-K_V}|$ является эллиптическим расслоением, а M_V содержится в слоях $\varphi|_{-K_V}|$ по лемме 4.9, но $\text{CS}(V, M_V)$ содержит $\hat{L} = f^{-1}(L)$. Значит, $\hat{L}$ стягивается морфизмом $\varphi|_{-K_V}|$ в точку.

Пусть $\mathcal{H}$ – пучок поверхностей в $|-K_V|$, проходящих через $\hat{L}$, а D – общая поверхность пучка $\mathcal{H}$. Тогда D является поверхностью типа КЗ с каноническими особенностями, а отображение $\varphi_{\mathcal{H}} \circ f^{-1}$ является проекцией из двумерного линейного подпространства $T \subset \mathbb{P}^4$, содержащего обе кривые C и L . В случае $O \notin T$ необходимое утверждение следует из доказательства леммы 3.6. Поэтому будем предполагать, что $O \in T$.

Предположим, что M_V лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$, а $\text{CS}(X, M_X)$ содержит все кривые пересечения $X \cap T$. Рассмотрим разрешение особенностей $h: U \rightarrow V$ отображения $\varphi_{\mathcal{H}}$, возьмем общий слой S расслоения $\varphi_{\mathcal{H}} \circ h^{-1}$ и положим $M_U = h^{-1}(M_V)$. Тогда выполнено соотношение $M_U|_S \sim_{\mathbb{Q}} (1 - \text{mult}_O(M_X))Q_U|_S$ для дивизора Q_U , который отображается в точку O на X . Дивизор Q_U не содержится в слоях расслоения $\varphi_{\mathcal{H}} \circ h^{-1}$, поэтому $O \in \text{CS}(X, M_X)$. Значит, для завершения доказательства нужно показать, что все кривые $X \cap T$ принадлежат $\text{CS}(X, M_X)$, а M_V

содержится в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$. Однако последнее утверждение следует из аргументов, использованных в окончании доказательства утверждения 3.2.

ЛЕММА 4.11. *Пусть C – прямая, содержащая точку O , а $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую $L \neq C$. Тогда существует двумерное линейное подпространство $T \subset \mathbb{P}^4$ такое, что $\text{CS}(X, M_X) = \{O, X \cap T\}$ и M_X лежит в слоях проекции из T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем общее гиперплоское сечение S кватрики X , проходящее через прямую C . Поверхность S является поверхностью типа КЗ с одной обыкновенной двойной точкой O . Рассмотрим ограничение $M_X|_S = C + B_S$ для некоторой подвижной границы B_S на поверхности S . Предположим, что C и L не содержатся ни в каком двумерном подпространстве в $\mathbb{P}^4$. Тогда пересечение $S \cap L$ содержит такую точку P , что $P \notin C$. Следовательно, $1 > B_S^2 \geq \text{mult}_P^2(M_X) = 1$. Значит, существует двумерное подпространство $T \subset \mathbb{P}^4$, содержащее кривые C и L .

Предположим, что все кривые $X \cap T$ принадлежат $\text{CS}(X, M_X)$ и M_X лежит в слоях проекции ψ из T . Пусть $h: U \rightarrow V$ – разрешение неопределенностей ψ , S_U – общий слой расслоения $\psi \circ h^{-1}$ и $M_U = h^{-1}(M_X)$. Тогда $M_U|_{S_U} \sim_{\mathbb{Q}} (1 - \text{mult}_O(M_X))Q_U|_{S_U}$ для дивизора Q_U такого, что $h(Q_U) = O$. Поверхность Q_U не содержится в слоях расслоения $\psi \circ h^{-1}$. Значит, $O \in \text{CS}(X, M_X)$. Таким образом, для завершения доказательства мы должны показать, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит все компоненты пересечения $X \cap T$ и M_X лежит в слоях проекции из T , но это следует из аргументов, использованных в окончании доказательства утверждения 3.2.

ЛЕММА 4.12. *Предположим, что C является кривой степени 4, которая содержится в двумерном линейном подпространстве $T \subset \mathbb{P}^4$. Тогда M_X лежит в слоях проекции из T и $O \in \text{CS}(X, M_X)$ в том и только том случае, когда $O \in T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ гиперплоских сечений кватрики X , проходящих через $X \cap T$. Разрешим неопределенности рационального отображения $\varphi_{\mathcal{H}_T}$ посредством такого бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$, что трехмерное многообразие W содержит ровно один f -исключительный дивизор E , доминирующий кривую C , и вне кривой C морфизм f является изоморфизмом. Пусть D – общий слой расслоения на КЗ-поверхности $g = \varphi_{\mathcal{H}_T} \circ f^{-1}$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда выполнено соотношение $D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i \in I} a_i F_i$, где образы всех дивизоров F_i на X являются точками на кривой C и $a_i \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i \in I} c_i F_i|_D$ для некоторых рациональных чисел c_i . Из подвижности ограничения $M_W|_D$ следует, что граница M_W содержится в слоях расслоения g .

Предположим, что кривая C содержит точку O . В этом случае бирациональный морфизм f может быть выбран таким образом, что $f = g \circ h$ для раздутия $g: V \rightarrow X$ точки O и некоторого бирационального морфизма h . Пусть Q – исключительный дивизор раздутия g и $Q_W = h^{-1}(Q)$. Тогда $F_j = Q_W$ для некоторого $j \in I$ и $F_j|_D$ нетривиально. Однако $c_j = 1 - \text{mult}_O(M_X)$. Значит, точка $O \in \text{CS}(X, M_X)$.

ЛЕММА 4.13. Пусть C – коника или кубика, лежащая в двумерном линейном подпространстве $T \subset \mathbb{P}^4$. Тогда граница M_X содержится в слоях проекции из T и либо $\text{CS}(X, M_X) = \{O, X \cap T\}$ и $O \in T$, либо $\text{CS}(X, M_X) = \{X \cap T\}$ и $O \notin T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_T$ гиперплоских сечений квартики X , проходящих через кривую C . Пусть D – общий дивизор в пучке $\mathcal{H}_T$. Тогда D – поверхность типа КЗ с не более чем каноническими особенностями.

Допустим, что C – плоская кубика. Тогда $M_X|_D = C + \text{mult}_L(M_X)L + B_D$ для некоторой прямой $L \subset D$ и подвижной границы B_D на поверхности D . Более того, граница B_D эквивалентна $(1 - \text{mult}_L(M_X))L$ и $L^2 < 0$. Следовательно, $L \in \text{CS}(X, M_X)$ и требуемое утверждение вытекает из лемм 4.10 и 4.11.

Предположим, что C является коникой и $X \cap T = C \cup L_1 \cup L_2$ для прямых L_1 и L_2 на квартике X . Из численных свойств подвижной части $M_X|_D$ имеем $L_i \in \text{CS}(X, M_X)$, и требуемое утверждение следует из лемм 4.10 и 4.11.

Пусть C – коника, $X \cap T = C$. Если $O \notin C$, то требуемое утверждение следует из доказательства леммы 3.9, поэтому допустим, что $O \in C$. Пусть $f: V \rightarrow X$ – композиция раздутия O и собственного прообраза C , $Q_V = f^{-1}(O)$, E – исключительный дивизор, доминирующий C , $M_V = f^{-1}(M_X)$ и S – общий элемент в $|-K_V|$. Тогда на S имеет место соотношение $M_V|_S = \text{mult}_{\hat{C}}(M_V)\hat{C} + \sum_{i=1}^k \alpha_i Z_i + B_S$, где $\hat{C} \subset E$ и $Z_i \subset Q_V$ суть базисные кривые $|-K_V|$, а граница B_S подвижна. На поверхности S граница B_S численно эквивалентна дивизору $\text{mult}_{\hat{C}}(M_V)\hat{C} + \sum_{i=1}^k \beta_i Z_i$ для некоторых $\beta_i \in \mathbb{Q}$ и форма пересечения кривых $\hat{C}$ и Z_i отрицательно определена. Таким образом, $B_S = \emptyset$ и M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V}|$. Из явного описания M_X следует $O \in \text{CS}(X, M_X)$.

Таким образом, мы доказали теорему 4.3.

§ 5. Двойное накрытие квадрики

Пусть $\theta: X \rightarrow Q$ – гладкое двойное накрытие трехмерной квадрики Q , разветвленное в поверхности $S \subset Q$ степени восемь. Тогда $\text{Pic } X = -\mathbb{Z}K_X$ и $-K_X$ является поднятием гиперплоского сечения квадрики Q . В § 4 для каждой кривой C на X с $-K_X \cdot C = 1$ мы построили бирациональное отображение $\psi_C: X \dashrightarrow X_C$ такое, что X_C – многообразие Фано с терминальными особенностями и $-K_{X_C}^3 = \frac{1}{2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть существует бирациональная перестройка $\sigma: X \dashrightarrow Y$ на многообразии Фано Y с каноническими особенностями, $M_Y = \frac{1}{n}|-nK_Y|$ для $n \gg 0$ и лог-пары (X, M_X) и (X_C, M_{X_C}) бирационально эквивалентны (Y, M_Y) . Тогда с точностью до действия $\text{Bir } X$ либо (X, M_X) , либо одна из (X_C, M_{X_C}) имеет полутерминальные особенности и $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальный лог-канонический дивизор.

Как и в случае квартики, основная теорема для X следует из утверждения 5.1, а следующий результат равносильен бирациональной жесткости X , доказанной в [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. Рассмотрим подвижную лог-пару (X, M_X) на рассматриваемом многообразии X такую, что $\kappa(X, M_X) = 0$. Тогда для не-

которого бирационального автоморфизма $\tau \in \text{Bir } X$ особенности лог-пары $(X, \tau(M_X))$ каноничны и выполнено соотношение $K_X + \tau(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ТЕОРЕМА 5.3. *Рассмотрим подвижную лог-пару (X, M_X) с каноническими особенностями и $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальным лог-каноническим дивизором. Тогда*

$$\text{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \emptyset, \\ \{C\} \text{ для кривой } C \subset X \text{ с } -K_X \cdot C = 1, \\ \{C\} \text{ для кривой } C \subset X, \text{ где } \theta(C) - \text{прямая и } -K_X \cdot C = 2, \\ \{C_1 \cup C_2\}, \text{ где } \theta(C_1) = \theta(C_2) - \text{прямые и } -K_X \cdot (C_1 + C_2) = 2, \\ \left\{ \bigcup_{i \in I} C_i, \bigcup_{j \in J} P_j \right\}, \text{ где } C_i - \text{все базисные кривые пучка} \\ \mathcal{H} \subset |-K_X|, \text{ а } P_j - \text{особые точки общей} \\ \text{поверхности в } \mathcal{H}, \end{cases}$$

и выполнено одно из следующего: особенности лог-пары (X, M_X) терминальны; множество $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из некоторой кривой C с $-K_X \cdot C = 1$, особенности лог-пары $(\psi_C(X), \psi_C(M_X))$ полутерминальны, а ее лог-канонический дивизор численно тривиален, где ψ_C – бирациональное отображение из утверждения 1.4; множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит некоторую точку P , $\theta(P) \in S$ и M_X лежит в слоях композиции θ с проекцией из касательного пространства к S в $\theta(P)$; M_X лежит в слоях композиции θ с проекцией из $\theta(\text{CS}(X, M_X))$.

По аналогии с доказательством утверждения 4.5 несложно показать, что из теоремы 5.3 следует основная теорема для многообразия X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Из теоремы 5.3 следует дополнительная теорема для X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X может быть перестроено $\sigma: X \dashrightarrow Y$ в расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$ такое, что общий слой отображения τ является либо эллиптической кривой, либо поверхностью с размерностью Кодаиры нуль. Пусть для достаточно большого дивизора D_Z и $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ $M_X = \lambda \sigma^{-1}(|\tau^*(D_Z)|)$. По утверждению 5.2 мы можем считать, что (X, M_X) имеет канонические особенности и $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Предположим, что особенности лог-пары (X, M_X) терминальны. Тогда для некоторого $\gamma > 0$ лог-пара $(X, \gamma M_X)$ будет канонической моделью. С другой стороны, из построения границы M_Y следует выполнение неравенства $\kappa(Y, \gamma M_Y) < 3$. Таким образом, $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

Пусть L – кривая на многообразии X с $-K_X \cdot L = 1$. Рассмотрим подвижную лог-пару (X_L, M_{X_L}) , где $M_{X_L} = \psi_L(M_X)$ и $\psi_L: X \dashrightarrow X_L$ – бирациональное отображение из утверждения 1.4. Предположим, что особенности лог-пары (X_L, M_{X_L}) полутерминальны и выполнено соотношение $K_{X_L} + M_{X_L} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда подвижная лог-пара $(X_L, \gamma M_{X_L})$ будет канонической моделью для некоторого положительного рационального числа γ , что противоречит неравенству $\kappa(Y, \gamma M_Y) < 3$.

По теореме 5.3 либо $\text{CS}(X, M_X)$ содержит некоторую точку P и $\theta(P) \in S$, либо

$$\text{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \{L\} \text{ для кривой } L \subset X \text{ с } -K_X \cdot L = 1, \\ \{C\} \text{ для кривой } C \subset X \text{ такой, что } \theta(C) \text{ — прямая и } -K_X \cdot C = 2, \\ \{L_1 \cup L_2\}, \text{ где } \theta(L_1) = \theta(L_2) \text{ — прямая и } -K_X \cdot (L_1 + L_2) = 2, \\ \left\{ \bigcup_{i \in I} C_i \right\}, \text{ где } C_i \text{ — все базисные кривые пучка } \mathcal{H} \subset |-K_X|. \end{cases}$$

В обоих случаях M_X лежит в слоях ψ , где рациональное отображение ψ является либо композицией θ и проекции из $\theta(\text{CS}(X, M_X))$, либо композицией θ и проекции из касательного пространства к S в точке $\theta(P)$ в случае, когда $P \in \text{CS}(X, M_X)$.

В частности, в случае, когда множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку P многообразия X , из теоремы 5.3 следует, что τ — расслоение на поверхности типа КЗ, эквивалентное расслоению, которое задано проекцией из касательного пространства к поверхности S в точке $\theta(P)$. В случае, когда множество $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из базисных кривых пучка $\mathcal{H} \subset |-K_X|$ и образ множества $\text{CS}(X, M_X)$ на квадрике Q не является прямой, из теоремы 5.3 следует, что расслоение τ является расслоением на поверхности типа КЗ, эквивалентное расслоению, которое задано рациональным отображением $\varphi_{\mathcal{H}}$. В случае, когда τ является расслоением на эллиптические кривые, из теоремы 5.3 следует, что τ как расслоение бирационально эквивалентно расслоению, которое задано композицией двойного накрытия θ и проекции из некоторой прямой на квадрике Q .

Можно считать, что τ — расслоение на поверхности с размерностью Кодаиры нуль,

$$\text{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \{L\} \text{ для кривой } C \subset X \text{ с } -K_X \cdot L = 1, \\ \{C\} \text{ для кривой } C \subset X \text{ такой, что } \theta(C) \text{ — прямая и } -K_X \cdot C = 2, \\ \{L_1 \cup L_2\}, \text{ где } \theta(L_1) = \theta(L_2) \text{ — прямая и } -K_X \cdot (L_1 + L_2) = 2, \end{cases}$$

и M_X лежит в слоях композиции θ и проекции из прямой $\theta(\text{CS}(X, M_X))$. Мы должны показать, что M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$ для некоторого пучка $\mathcal{H} \subset |-K_X|$.

Предположим, что единственным центром канонических особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) является гладкая рациональная кривая L такая, что выполнено равенство $-K_X \cdot L = 1$. Раздуем $f: W \rightarrow X$ кривую L . Пусть E — исключительный дивизор раздутия f , $M_W = f^{-1}(M_X)$, а $\tilde{L}$ — базисная кривая антиканонической линейной системы $|-K_W|$. Тогда $\tilde{L}$ — гладкая рациональная кривая, и из конструкции бирационального отображения ψ_L из утверждения 1.4 следует, что для некоторого достаточно большого натурального числа n $\psi_L = \varphi_{|-nK_{\widehat{W}}|} \circ \rho$, где бирациональное отображение $\rho: W \dashrightarrow \widehat{W}$ — антифлип в кривой $\tilde{L}$.

Предположим, что особенности лог-пары (W, M_W) терминальны. Возьмем рациональное число $\zeta > 1$ такое, что особенности подвижной лог-пары $(W, \zeta M_W)$ терминальны. Пусть $M_{\widehat{W}} = \rho(M_W)$. Тогда особенности подвижной лог-пары $(\widehat{W}, \zeta M_{\widehat{W}})$ также терминальны, поскольку ρ — лог-флип для лог-пары $(W, \zeta M_W)$. С другой стороны, лог-канонический дивизор $K_{\widehat{W}} + M_{\widehat{W}}$ численно тривиален. В частности, морфизм $\varphi_{|-nK_{\widehat{W}}|}$ крепантен для терминальной лог-пары $(\widehat{W}, \zeta M_{\widehat{W}})$. Следовательно, лог-пара $(X_L, \psi_L(M_X))$ имеет полутерминальные особенности и

численно тривиальный лог-канонический дивизор, но мы уже показали, что это невозможно. Таким образом, $\text{CS}(W, M_W)$ содержит неприводимую кривую $T \subset E$ такую, что $f(T) = C$.

Предположим, что $T \neq \hat{L}$ и $\hat{L} \subset E$. Пересекая границу M_W с достаточно общим слоем морфизма $f|_E : E \rightarrow C$, мы получаем противоречие.

Предположим, что $T \neq \hat{L}$ и $\hat{L} \not\subset E$. Пусть D_W — общая поверхность в $|-K_W|$. Тогда поверхность D_W является гладкой поверхностью типа КЗ, $T \cap D_W \neq \emptyset$ и выполнено соотношение $M_W|_{D_W} = \text{mult}_{\hat{L}}(M_W)\hat{L} + R_{D_W} \sim_{\mathbb{Q}} \hat{L} + F$ для некоторой подвижной границы R_{D_W} и эллиптической кривой F такой, что $F \cdot \hat{L} = 1$, но $M_W \cdot \hat{L} = -1$, значит, $\text{mult}_{\hat{L}}(M_W) > 0$. Пересекая $M_W|_{D_W}$ с кривой в $|F|$, проходящей через точку пересечения $T \cap D_W$, получаем противоречие.

Таким образом, $T = \hat{L}$, $\hat{L} \subset E$, образ L на Q содержится в S , а $\hat{L}$ является исключительным сечением линейчатой поверхности E . Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую $\hat{L}$ и положим $G_V = f^{-1}(\hat{L})$ и $M_V = g^{-1}(M_W)$. Морфизм $\varphi|_{-K_V|}$ является эллиптическим расслоением с сечением $G_V \cong \mathbb{F}_1$ и $M_V \cdot K_V^2 = 0$. Значит, M_V лежит в слоях $\varphi|_{-K_V|}$.

Особенности (V, M_V) не терминальны и $\text{CS}(V, M_V)$ содержит кривую $\tilde{L} \subset G_V$, но мы уже показали, что M_V содержится в слоях $\varphi|_{-K_V|}$. Значит, $\tilde{L}$ стягивается $\varphi|_{-K_V|}$ в точку, а кривая $\tilde{L}$ является исключительным сечением поверхности $G_V \cong \mathbb{F}_1$.

Раздуем $h: U \rightarrow V$ кривую $\tilde{L}$. Положим $R = h^{-1}(\tilde{L})$ и $M_U = h^{-1}(M_V)$. Рассмотрим достаточно общую поверхность D в пучке $|-K_U|$. Поверхность D является поверхностью типа КЗ с каноническими особенностями и $M_U|_D = \sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{L}_i + B_D$, где $\tilde{L}_i$ — базисные кривые пучка $|-K_U|$, B_D является подвижной границей на поверхности D и $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. С другой стороны, ограничение $M_U|_D$ эквивалентно $D|_D$, что, в свою очередь, эквивалентно $\sum_{i=1}^k \beta_i \tilde{L}_i$ для $\beta_i \in \mathbb{N}$. Форма пересечения кривых $\tilde{L}_i$ на поверхности D отрицательно определена. Таким образом, B_D пуста и граница M_U лежит в слоях $\varphi|_{-K_U|}$.

Предположим, что $(X, M_X) = \{C\}$, $-K_X \cdot C = 2$ и $\theta(C)$ — прямая. Тогда C является либо гладкой эллиптической кривой, либо рациональной кривой с одной двойной точкой. Возьмем линейную систему $\mathcal{H}_C$ поверхностей в $|-K_X|$, проходящих через кривую C . Отображение $\varphi_{\mathcal{H}_C}$ является композицией двойного накрытия θ и проекции из прямой $\theta(C)$. Рассмотрим бирациональный морфизм $r: V_C \rightarrow X$ такой, что r стягивает один дивизор G , доминирующий C , V_C терминально, $\mathcal{H}_{V_C} = r^{-1}(\mathcal{H}_C)$ свободна и $\varphi_{\mathcal{H}_{V_C}}$ является эллиптическим расслоением. Пусть $M_{V_C} = r^{-1}(M_X)$. Равенство $\text{mult}_C(M_X) = 1$ влечет $\mathcal{H}_{V_C}^2 \cdot M_{V_C} = 0$. Следовательно, граница M_{V_C} лежит в слоях эллиптического расслоения $\varphi_{\mathcal{H}_{V_C}}$ и граница M_{V_C} численно эквивалентна $\mathcal{H}_{V_C}$. Значит, особенности (V_C, M_{V_C}) не являются терминальными, поскольку в противном случае $\kappa(V_C, \gamma M_{V_C}) = 2$ для всех рациональных чисел $\gamma > 1$, но из построения подвижной границы M_X следует неравенство $\kappa(X, \gamma M_X) \leq 1$. Таким образом, множество $\text{CS}(V_C, M_{V_C})$ содержит такую кривую $\hat{C}$, что $r(\hat{C}) = C$, но мы уже показали, что M_{V_C} содержится в слоях $\varphi|_{-K_V|}$. Значит, $\hat{C}$ стягивается $\varphi|_{-K_V|}$ и является исключительным сечением линейчатой поверхности G . Пусть $\mathcal{H}_{\hat{C}}$ — пучок поверхностей в $\mathcal{H}_{V_C}$, проходящих

через кривую $\widehat{C}$, а $D_{\widehat{C}}$ – общая поверхность в пучке $\mathcal{H}_{V_C}$. Тогда на поверхности $D_{\widehat{C}}$ выполнено соотношение $M_{V_C}|_{D_{\widehat{C}}} \sim_{\mathbb{Q}} \widehat{C}$. Значит, $M_{V_C}|_{D_{\widehat{C}}} = \widehat{C}$, но кривая $\widehat{C}$ является базисным множеством пучка $\mathcal{H}_{\widehat{C}}$. Следовательно, M_{V_C} лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$.

Для завершения доказательства мы можем считать, что $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из двух гладких рациональных кривых $L_1 \neq L_2$, которые отображаются θ на одну прямую на Q . Рассмотрим композицию $s: \overline{X} \rightarrow X$ раздутия кривой L_1 с раздутием собственного прообраза кривой L_2 . Пусть $M_{\overline{X}} = s^{-1}(M_X)$, а E_1 и E_2 – исключительные дивизоры бирационального морфизма s , которые доминируют кривые L_1 и L_2 соответственно. Тогда $|-K_{\overline{X}}|$ свободна, $\varphi_{|-K_{\overline{X}}|}$ является эллиптическим расслоением с двумя сечениями – E_1 и E_2 , $M_{\overline{X}}$ лежит в слоях $\varphi_{|-K_{\overline{X}}|}$ и $E_2 \cong \mathbb{F}_1$, особенности лог-пары $(\overline{X}, M_{\overline{X}})$ не терминальны. Тогда $\text{CS}(V_C, M_{V_C})$ содержит кривую $\overline{L}_2$ такую, что образ кривой $\overline{L}_2$ на многообразии X является либо кривой L_1 , либо кривой L_2 . Мы можем считать, что кривая $\overline{L}_2$ доминирует кривую L_2 – в противном случае мы можем заменить бирациональный морфизм s на композицию раздутия кривой L_2 с последующим раздутием собственного прообраза кривой L_1 . Граница $M_{\overline{X}}$ содержится в слоях эллиптического расслоения $\varphi_{|-K_{\overline{X}}|}$. Следовательно, $\overline{L}_2$ – исключительное сечение поверхности E_2 . Рассмотрим пучок $\mathcal{H}_{\overline{X}} \subset |-K_{\overline{X}}|$, состоящий из поверхностей, которые проходят через кривую $\overline{L}_2$. Пусть $D_{\overline{X}}$ – достаточно общая поверхность в пучке $\mathcal{H}_{\overline{X}}$. Тогда $M_{\overline{X}}|_{D_{\overline{X}}} = \overline{L}_2 + \sum_{i=1}^k a_i \overline{Z}_i + B_{D_{\overline{X}}}$, где $B_{D_{\overline{X}}}$ – подвижная граница, $\overline{Z}_i$ – отличные от $\overline{L}_2$ базисные кривые пучка $\mathcal{H}_{\overline{X}}$ и $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. На поверхности $D_{\overline{X}}$ ограничение $M_{\overline{X}}|_{D_{\overline{X}}}$ эквивалентно $D_{\overline{X}}|_{D_{\overline{X}}}$, что, в свою очередь, эквивалентно дивизору $\overline{L}_2 + \sum_{i=1}^k b_i \overline{Z}_i$ для целых b_i . Форма пересечения кривых $\overline{Z}_i$ на поверхности $D_{\overline{X}}$ отрицательно определена. Следовательно, подвижная граница $B_{D_{\overline{X}}}$ пуста и носитель ограничения $M_{\overline{X}}|_{D_{\overline{X}}}$ состоит из базисного множества пучка $\mathcal{H}_{\overline{X}}$. Таким образом, $M_{\overline{X}}$ лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}_{\overline{X}}}$.

В оставшейся части этого параграфа мы докажем теорему 5.3. Рассмотрим подвижную границу (X, M_X) , имеющую канонические особенности. Предположим, что выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ и $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 5.5. *Предположим, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку P . Тогда образ P на Q лежит на S , $\text{CS}(X, M_X) = \{P, \bigcup_{i \in I} C_i, \bigcup_{j \in J} P_j\}$ и M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$ для пучка поверхностей $\mathcal{H}$ в $|-K_X|$, особых в точке P , C_i – все базисные кривые пучка $\mathcal{H}$, а P_j – базисные точки пучка $\mathcal{H}$ такие, что $\theta(P_j) \in S$ и касательное пространство к S в точках $\theta(P_j)$ совпадает с касательным пространством к S в $\theta(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим общую поверхность H_P в $|-K_X|$, которая проходит через P . Из $H_P \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_P(M_X^2)$ и из локального неравенства Пухликова в форме теоремы 4.1 работы [2] следует, что $\text{mult}_P(M_X) = 2$.

Раздуем $f: W \rightarrow X$ точку P . Положим $E = f^{-1}(P)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда выполнено соотношение $M_W \sim_{\mathbb{Q}} -K_W$, $|-nK_W|$ не имеет неподвижных компонент для $n \gg 0$, P является K -специальной точкой и $\theta(P) \in S$ по лемме 1.11. В частности, линейная система $|-K_W|$ является пучком без неподвижных компонент.

Рассмотрим кривую $C \subset X$ такую, что либо $-K_X \cdot C = 1$, либо кривая C особа в точке P и выполнено условие $-K_X \cdot C = 2$. Кривая C содержится в базисном множестве $f(|-K_W|)$ и носителе M_X^2 . С другой стороны, $M_W^2 \cdot (f^*(-K_X) - E) = 0$, дивизор $f^*(-K_X) - E$ численно эффективен и объемен, $|k(f^*(-K_X) - E)|$ свободна для некоторого $k \gg 0$. Таким образом, базисное множество пучка $f(|-K_W|)$ и носитель цикла M_X^2 состоят из конечного числа кривых C_λ таких, что либо C_λ гладкая и выполнено равенство $-K_X \cdot C_\lambda = 1$, либо C_λ особа в P и $-K_X \cdot C_\lambda = 2$. Откуда следует необходимое утверждение.

Можно считать, что $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек и содержит кривую C такую, что выполнено неравенство $-K_X \cdot C \leq 4$.

ЛЕММА 5.6. *Допустим, что $-K_X \cdot C = 1$ и C является единственным центром в $\text{CS}(X, M_X)$. Тогда либо M_X лежит в слоях композиции θ с проекцией из $\theta(C)$, либо $(X_C, \psi_C(M_X))$ имеет терминальные особенности и $\mathbb{Q}$ -рационально тривиальный лог-канонический дивизор, где рациональное $\psi_C: X \dashrightarrow X_C$ — бирациональное отображение из утверждения 1.4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что кривая C гладкая и рациональная, а ее образ на квадрике Q является прямой. Раздуем $f: W \rightarrow X$ кривую C . Пусть E — исключительный дивизор раздутия f , $M_W = f^{-1}(M_X)$ и C_1 — единственная базисная кривая линейной системы $|-K_W|$. Тогда кривая C_1 гладкая и рациональная, а из конструкции бирационального отображения ψ_C следует, что $\psi_C = \varphi_{|-nK_{\widehat{W}}|} \circ \rho$ для $n \gg 0$, где бирациональное отображение $\rho: W \dashrightarrow \widehat{W}$ является антифлипом в кривой C_1 .

Предположим, что лог-пара (W, M_W) терминальна. Возьмем $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$ такое, что особенности $(W, \zeta M_W)$ терминальны. Пусть $M_{\widehat{W}} = \rho(M_W)$. Особенности $(\widehat{W}, \zeta M_{\widehat{W}})$ терминальны, поскольку ρ является лог-флипом для $(W, \zeta M_W)$. Бирациональный морфизм $\varphi_{|-nK_{\widehat{W}}|}$ крепантен для $(\widehat{W}, \zeta M_{\widehat{W}})$, откуда следует, что (X_C, M_{X_C}) имеет полутерминальные особенности и $K_{X_C} + M_{X_C} \sim_{\mathbb{Q}} 0$, где $M_{X_C} = \psi_C(M_X)$.

Предположим, что особенности лог-пары (X_C, M_{X_C}) полутерминальны и выполнено соотношение $K_{X_C} + M_{X_C} \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда особенности (W, M_W) также полутерминальны, поскольку $(\widehat{W}, M_{\widehat{W}})$ является крепантным поднятием лог-пары (X_C, M_{X_C}) и ρ^{-1} является лог-флопом для лог-пары $(\widehat{W}, M_{\widehat{W}})$.

Для завершения доказательства мы можем считать, что лог-пара (W, M_W) не терминальна. В этом случае из соотношения $K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} 0$ следует, что $\text{CS}(W, M_W)$ содержит кривую $T \subset E$ такую, что $f(T) = C$.

Предположим, что $T = C_1$ и кривая $C_1 \subset E$. Раздуем $g: V \rightarrow W$ кривую C_1 и положим $M_V = g^{-1}(M_W)$. В этом случае $|-K_V|$ свободна, $\varphi_{|-K_V|}$ является эллиптическим расслоением и $M_V \cdot K_V^2 = 0$. Значит, M_V содержится в слоях $\varphi_{|-K_V|}$, а граница M_X лежит в слоях $\varphi_{|-K_V|} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$, но $\varphi_{|-K_V|} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ является композицией θ и проекции из $\theta(C)$. Таким образом, неравенство $\kappa(V, \gamma M_V) < 3$ выполнено для всех рациональных чисел $\gamma > 1$. В частности, (X_C, M_{X_C}) не может иметь полутерминальные особенности и $\mathbb{Q}$ -рационально эквивалентный канонический дивизор.

Предположим, что $T \neq C_1$ и $C_1 \subset E$. Тогда, пересекая границу M_W с достаточным общим слоем морфизма $f|_E: E \rightarrow C$, мы получаем $E \subset M_W$, что противоречит подвижности границы M_W .

Предположим теперь, что $T \neq C_1$ и $C_1 \not\subset E$. Пусть D_W — достаточно общий дивизор в линейной системе $|-K_W|$. Тогда D_W является гладкой поверхностью типа КЗ, $T \cap D_W \neq \emptyset$ и $M_W|_{D_W} = \text{mult}_{C_1}(M_W)C_1 + R_{D_W} \sim_{\mathbb{Q}} C_1 + F$ для некоторой подвижной границы R_{D_W} и эллиптической кривой F такой, что $F \cdot C_2 = 1$. С другой стороны, $M_W \cdot C_1 = -1$. Таким образом, $\text{mult}_{C_1}(M_W) > 0$. Пересекая $M_W|_{D_W}$ с кривой в $|F|$, проходящей через точку $T \cap D_W$, мы получаем противоречие.

ЛЕММА 5.7. *Образ кривой C на квадрике Q является прямой или коникой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что степень кривой $\theta(C)$ больше чем 2. Ограничение $\theta|_C$ является изоморфизмом, и образ C на Q является либо рациональной кривой степени 4 с одной двойной точкой, либо гладкой кривой степени 3 или 4.

Предположим, что кривая C гладкая. В этом случае либо кривая C является рациональной кривой, либо кривая C является эллиптической кривой и выполнено равенство $-K_X \cdot C = 4$. Раздвем $f: W \rightarrow X$ кривую C . Пусть E — исключительный дивизор бирационального морфизма f , $M_W = f^{-1}(M_X)$ и $d = -K_X \cdot C$. Мы покажем, что дивизор $f^*(-dK_X) - E$ численно эффективен. В случае, когда образ кривой C на квадрике Q не содержится в поверхности ветвления S , пусть $\tilde{C} \neq C$ — кривая на многообразии X , образ которой на квадрике Q совпадает с образом кривой C . Тогда базисное множество линейной системы $|f^*(-dK_X) - E|$ содержится в кривой $\hat{C} = f^{-1}(\tilde{C})$. Таким образом, дивизор $f^*(-dK_X) - E$ имеет неотрицательное пересечение со всеми кривыми на многообразии W , кроме, быть может, кривой $\hat{C}$, но непосредственные вычисления показывают, что выполнено неравенство $(f^*(-dK_X) - E) \cdot \hat{C} > 0$. В случае, когда образ кривой C на квадрике Q содержится в поверхности S , базисное множество линейной системы $|f^*(-dK_X) - E|$ содержится в исключительном дивизоре E . Можно считать, что нормальное расслоение $N_{C/X}$ разложимо. Непосредственные вычисления показывают, что $(f^*(-dK_X) - E)|_E \cdot s_{\infty} \geq 0$ для исключительного сечения s_{∞} линейчатой поверхности E . Мы показали, что дивизор $f^*(-dK_X) - E$ численно эффективен, но $(f^*(-dK_X) - E) \cdot M_W^2 < 0$.

Итак, можно считать, что $-K_X \cdot C = 4$, а кривая C является рациональной кривой с одной двойной точкой P . Пусть $g: V \rightarrow X$ — композиция раздвигания P и раздвигания собственного прообраза кривой C , $M_V = g^{-1}(M_X)$, а G и H — два исключительных дивизора бирационального морфизма g , где H — исключительный дивизор раздвигания собственного прообраза кривой C . Из аргументов предыдущего случая следует численная эффективность дивизора $f^*(-4K_X) - H - 2G$, однако непосредственные вычисления дают $(f^*(-4K_X) - H - 2G) \cdot M_W^2 < 0$.

ЛЕММА 5.8. *Если $\theta(C)$ — коника, то $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из всех базисных кривых пучка $\mathcal{H} \subset |-K_X|$ проходящих через C поверхностей, а M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Либо $-K_X \cdot C = 2$ и ограничение $\theta|_C$ является изоморфизмом, либо $-K_X \cdot C = 4$ и ограничение $\theta|_C$ является двойным накрытием. Пред-

положим, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 4$. Пусть $f: W \rightarrow X$ – разрешение особенностей рационального отображения $\varphi_{\mathcal{H}}$ такое, что f является изоморфизмом вне кривой C , многообразие W гладкое и содержит ровно один f -исключительный дивизор E , доминирующий кривую C . Положим $\tau = \varphi_{\mathcal{H}} \circ f^{-1}$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Достаточно общий слой D морфизма τ рационально эквивалентен дивизору $f^*(-K_X) - E - \sum_{i \in I} a_i F_i$, где все $f(F_i)$ являются точками на кривой C , а все числа a_i целые. С другой стороны, на поверхности D ограничение $M_W|_D$ является $\mathbb{Q}$ -рационально эквивалентным дивизору $\sum_{i \in I} c_i F_i|_D$ для некоторых рациональных чисел c_i . Следовательно, $M_W|_D = \emptyset$ и M_W лежит в слоях расслоения τ , откуда следует необходимое утверждение.

Предположим теперь, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 2$, а образ кривой C на квадрике Q не содержится в поверхности ветвления S . Рассмотрим гладкую рациональную кривую $\tilde{C}$ на многообразии X такую, что $\tilde{C} \neq C$ и образы кривых $\tilde{C}$ и C на квадрике Q совпадают. Пусть D_C – общий дивизор в пучке $\mathcal{H}$. Тогда $\tilde{C} \subset D_C$ и имеет место $M_X|_{D_C} = C + \text{mult}_{\tilde{C}}(M_X)\tilde{C} + R_{D_C} \sim_{\mathbb{Q}} C + \tilde{C}$ для некоторой подвижной границы R_{D_C} . С другой стороны, на поверхности D выполнено неравенство $\tilde{C}^2 < 0$. Таким образом, граница R_{D_C} пуста, $\text{mult}_{\tilde{C}}(M_X) = 1$ и множество центров канонических особенностей $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую $\tilde{C}$, но базисное множество пучка $\mathcal{H}$ состоит из кривых C и $\tilde{C}$. Следовательно, M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$.

Пусть $-K_X \cdot C = 2$ и $\theta(C) \subset S$. Раздуем $g: V \rightarrow X$ кривую C , возьмем исключительный дивизор F и положим $M_V = g^{-1}(M_X)$, $\mathcal{H}_V = f^{-1}(\mathcal{H})$. Пусть D_V – общий дивизор пучка $\mathcal{H}_V$. Базисное множество пучка $\mathcal{H}_V$ состоит из сечения $\tilde{C}$ линейчатой поверхности F , и выполнено соотношение $M_V|_{D_V} = \text{mult}_{\tilde{C}}(M_V)\tilde{C} + R_{D_V}$ для подвижной границы R_{D_V} . На D_V ограничение $M_V|_{D_V}$ эквивалентно $-K_V|_{D_V} \sim \tilde{C}$. С другой стороны, на поверхности D_V имеет место неравенство $\tilde{C}^2 < 0$. Таким образом, граница R_{D_V} пуста и носитель ограничения $M_V|_{D_V}$ содержится в базисном множестве пучка $\mathcal{H}_V$. Следовательно, M_V лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}_V}$.

Мы можем считать, что образ кривой C на квадрике Q является прямой.

ЛЕММА 5.9. *Предположим, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит кривую L и $\theta(L) \neq \theta(C)$, тогда $\theta(L)$ – прямая, $\theta(C) \cap \theta(L) \neq \emptyset$, $\text{CS}(X, M_X)$ состоит из всех базисных кривых пучка $\mathcal{H}$ в $|-K_X|$, состоящего из поверхностей, проходящих через обе кривые C и L , а M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 5.7 и 5.8 следует, что $\theta(L)$ – прямая. Предположим, что $-K_X \cdot C = 1$ и $\theta(L) \cap \theta(C) = \emptyset$. Раздуем $f: W \rightarrow X$ кривую C . Пусть E – исключительный дивизор раздутия f , $\hat{L} = f^{-1}(L)$, $M_W = f^{-1}(M_X)$ и D_W – достаточно общий дивизор в линейной системе $|-K_W|$. В этом случае базисное множество линейной системы $|-K_W|$ состоит из одной гладкой рациональной кривой C_1 , поверхность D_W является гладкой поверхностью типа КЗ, $\hat{L} \cap D_W \neq \emptyset$ и для некоторой подвижной границы R_{D_W} на D_W выполнено $M_W|_{D_W} = \text{mult}_{C_1}(M_W)C_1 + R_{D_W} \sim_{\mathbb{Q}} C_1 + F$, где кривая F эллиптическая и $F \cdot C_1 = 1$. Более того, выполнение строгого неравенства $M_W \cdot C_1 < 0$ влечет

$\text{mult}_{C_1}(M_W) > 0$. Пересекая $M_W|_{D_W}$ с кривой пучка $|F|$, проходящей через точку пересечения $\hat{L} \cap D_W$, мы получаем противоречие.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 2$ и $\theta(L) \cap \theta(C) = \emptyset$. Тогда кривая C является либо гладкой эллиптической кривой, либо рациональной кривой с одной особой двойной точкой. Пусть $\mathcal{H}_C$ – линейная система поверхностей в антиканонической линейной системе $|-K_X|$, проходящих через кривую C . Отображение $\varphi_{\mathcal{H}_C}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является композицией двойного накрытия θ и проекции из прямой $\theta(C)$. Рассмотрим терминальное раздутие $r: V_C \rightarrow X$ для лог-пары $(X, \mathcal{H}_C)$ с каноническими особенностями такое, что линейная система $\mathcal{H}_{V_C} = r^{-1}(\mathcal{H}_C)$ свободна и морфизм $\varphi_{\mathcal{H}_{V_C}}$ является эллиптическим расслоением. Положим $M_{V_C} = r^{-1}(M_X)$. Тогда $M_{V_C} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{V_C}$. Следовательно, граница M_{V_C} лежит в слоях расслоения $\varphi_{\mathcal{H}_{V_C}}$. С другой стороны, прямой образ кривой L на многообразии V_C является центром канонических особенностей лог-пары (V_C, M_{V_C}) , который не содержится в слоях расслоения $\varphi_{\mathcal{H}_{V_C}}$, что противоречит подвижности границы M_{V_C} .

Таким образом, мы показали, что $\theta(L) \cap \theta(C) \neq \emptyset$. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}$ в линейной системе $|-K_X|$, состоящий из поверхностей, проходящих через обе кривые C и L . Нам нужно показать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит все базисные кривые пучка $\mathcal{H}$ и M_X лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}}$.

Предположим, что $-K_X \cdot C = -K_X \cdot L = 1$. Пусть $g: V \rightarrow X$ – композиция раздутия C и раздутия L , D_V – общая поверхность в $|-K_V|$ и $M_V = g^{-1}(M_X)$. Выполнено соотношение $M_V|_{D_V} = \sum_{i=1}^k \alpha_i Z_i + R_{D_V}$ для подвижной границы R_{D_V} , базисных кривых Z_i пучка $|-K_V|$ и неотрицательных рациональных α_i . На поверхности D_V ограничение $M_V|_{D_V}$ эквивалентно $-K_V|_{D_V} \sim \sum_{i=1}^k \beta_i Z_i$ для $\beta_i \in \mathbb{N}$. С другой стороны, на поверхности D_V форма пересечения кривых Z_i отрицательно определена, следовательно, M_V лежит в слоях $\varphi_{|-K_V|}$, откуда следует, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит все базисные кривые пучка $\mathcal{H}$.

Предположим, что $-K_X \cdot C = -K_X \cdot L = 2$. Пусть D – достаточно общая поверхность в пучке $\mathcal{H}$. Тогда $M_X|_D = C + L + R_D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X|_D \sim C + L$ для некоторой подвижной границы R_D . Следовательно, $R_D = \emptyset$ и ограничение $M_X|_D$ состоит из двух базисных кривых пучка $\mathcal{H}$, откуда следует, что M_X лежит в слоях $\varphi_{|-K_X|}$.

Для завершения доказательства мы должны рассмотреть два случая: $-K_X \cdot C = 2$ и $-K_X \cdot L = 1$ либо $-K_X \cdot C = 1$ и $-K_X \cdot L = 2$. Без ограничения общности будем считать, что $-K_X \cdot C = 2$ и $-K_X \cdot L = 1$. Пусть $h: U \rightarrow X$ – раздутие L , $\hat{L}$ – базисная кривая $|-K_U|$, положим $\hat{C} = h^{-1}(C)$, $M_U = h^{-1}(M_X)$ и $\mathcal{H}_U = h^{-1}(\mathcal{H})$. Возьмем общую поверхность D_U в $\mathcal{H}_U$. Кривые $\hat{C}$ и $\hat{L}$ содержатся в базисном множестве пучка $\mathcal{H}_U$. Если C особа и ее особая точка содержится в L , то базисное множество пучка $\mathcal{H}_U$ содержит Z , которая отображается в особую точку кривой C . Если C гладкая или особая точка C не принадлежит L , то базисное множество $\mathcal{H}_U$ состоит из $\hat{L}$ и $\hat{C}$ и мы положим $Z = \emptyset$. Тогда $M_U|_{D_U} = \hat{C} + \text{mult}_{\hat{L}}(M_U)\hat{L} + \alpha Z + R_{D_U}$ для некоторой подвижной границы R_{D_U} и $\alpha = \text{mult}_Z(M_U)$, когда $Z \neq \emptyset$. На D_U ограничение $M_U|_{D_U}$ эквивалентно $\hat{C} + \hat{L} + Z$, а форма пересечения кривых Z и $\hat{L}$ отрицательно определена. Следовательно, граница R_{D_U} пуста, $\text{mult}_{\hat{L}}(M_U) = 1$ и, когда $Z \neq \emptyset$, выполнено равенство $\text{mult}_Z(M_U) = 1$. Таким образом, M_U лежит в слоях $\varphi_{\mathcal{H}_U}$.

и все базисные кривые пучка $\mathcal{H}$ являются центрами канонических особенностей лог-пары (X, M_X) . Более того, в случае, когда кривая C особа и ее особая точка принадлежит кривой L , из равенства $\text{mult}_Z(M_U) = 1$ следует, что особая точка кривой C принадлежит $\text{CS}(X, M_X)$, а все поверхности в $\mathcal{H}$ особые в этой точке, но мы предполагали, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек многообразия X .

Можно считать, что $\text{CS}(X, M_X)$ отображается на прямую на квадрике Q .

ЛЕММА 5.10. Пусть $-K_X \cdot C = 2$. Тогда $\text{CS}(X, M_X) = \{C\}$, а M_X лежит в слоях композиции двойного накрытия θ с проекцией из $\theta(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H}_C$ поверхностей $| -K_X |$, содержащих кривую C . Разрешим неопределенности $f: W \rightarrow X$ рационального отображения $\varphi_{\mathcal{H}_C}$, так что многообразие W гладко и содержит ровно один дивизор $E \subset W$, доминирующий кривую C . Положим $\mathcal{H}_W = f^{-1}(\mathcal{H}_C)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда выполнено равенство $M_W \cdot \mathcal{H}_W^2 = 0$, откуда следует необходимое утверждение.

Можно считать, что $-K_X \cdot C = 1$ и $\text{CS}(X, M_X) = \{C, L\}$, $L \neq C$ и $\theta(L) = \theta(C)$, из доказательства леммы 5.10 следует, что M_X лежит в слоях композиции θ с проекцией из $\theta(C)$. Это завершает доказательство теоремы 5.3.

Список литературы

1. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
2. Cheltsov I. Log models of birationally rigid varieties // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. P. 3843–3875.
3. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Лютта // Матем. сб. 1971. Т. 86. С. 140–166.
4. Iskovskikh V. A. Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties // J. Soviet Math. 1980. V. 13. P. 815–868.
5. Пухляков А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135. С. 472–496.
6. Чельцов И. А. Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 145–156.
7. Чельцов И. А. О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–160.
8. Исковских В. А. Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 3–86.
9. Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Explicit birational geometry of 3-folds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 259–312. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)

Москва
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию
18.10.2001 и 22.10.2002