Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 5, 61–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:06:55

УДК 517.9

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова

Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины

Существенной особенностью задач теории упругости на периодических структурах, зависящих от двух геометрических параметров, является неклассический характер их усреднения. Самый сложный вид неклассического усреднения возникает на структурах так называемой критической толщины. В статье излагается усреднение периодических сеток этого типа.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

1.1. На рис. 1 изображена периодическая сетка или стержневая структура, составленная из стержней толщины $2h > 0$, ячейка периодичности $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ указана пунктиром. Там же изображена и бесконечно тонкая сетка, отвечающая толщине $h = 0$. Данная сетка есть лишь модельный пример. Наши результаты справедливы и для более сложно устроенных сеток, не обладающих столь богатой симметрией, как эта.

Рис. 1. Периодическая сетка или стержневая структура

Введем некоторые обозначения.

Пусть F^h – периодическая сетка толщины $2h > 0$; $F_\varepsilon^h = \varepsilon F^h$ – гомотетическое сжатие сетки F^h ; F – бесконечно тонкая или сингулярная сетка; μ – периодическая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00114).

нормированная мера, сосредоточенная на сингулярной сетке F и пропорциональная там одномерной мере Лебега,

$$\langle g \rangle = \int_{\square} g \, d\mu$$

– среднее по мере μ .

Через $A = \{a_{ijsp}\}$ обозначим тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии: $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jis p}$. Скалярное произведение симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}$, $\eta = \{\eta_{ij}\}$ определим как $\xi \cdot \eta = \xi_{ij} \cdot \eta_{ij}$, в частности, $\xi \cdot \xi = \xi^2$. Действие тензора A на матрицу ξ есть матрица $A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Тогда $A\xi \cdot \xi = a_{ijsp}\xi_{ij}\xi_{sp}$ – плотность упругой энергии. Предполагаем, что тензор A положительно определен, $A\xi \cdot \xi \geq c_0 \xi^2$, $c_0 > 0$.

Для *изотропного* тензора имеем

$$\begin{aligned} A\xi &= k\xi + k_1 E \operatorname{tr} \xi, \quad k > 0, \quad k_1 \geq 0, \\ \xi &= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} \xi = \xi_{11} + \xi_{22}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

С ограниченной липшицевой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ свяжем перфорированную область $\Omega \cap F_{\varepsilon}^h$ и пространство $W_{\varepsilon,h}$ – замыкание множества $C_0^{\infty}(\Omega)^2$ по норме

$$\left(\int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} (\varphi \cdot \varphi + e(\varphi) \cdot e(\varphi)) \, dx \right)^{1/2},$$

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\} - \text{тензор деформации.}$$

Рассмотрим задачу: найти вектор-функцию $u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} (Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) \, dx &= \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} f \cdot \varphi \, dx \\ \forall \varphi &\in C_0^{\infty}(\Omega)^2, \quad f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Это – обобщенная или вариационная формулировка краевой задачи для системы теории упругости в области $\Omega \cap F_{\varepsilon}^h$, когда на $\partial\Omega \cap \partial F_{\varepsilon}^h$ задается условие закрепления, т.е. условие Дирихле $u^{\varepsilon,h} = 0$, а на остальной части границы области $\Omega \cap F_{\varepsilon}^h$ – условие отсутствия напряжений $Ae(u^{\varepsilon,h})n = 0$, n – нормаль к границе.

Хорошо известно [1], что решение поставленной задачи существует и единственно.

Цель усреднения состоит в том, чтобы изучить поведение решения $u^{\varepsilon,h}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и найти уравнение, которому удовлетворяет предельная функция. Случай, когда толщина $h > 0$ фиксирована, охватывается классической теорией усреднения в перфорированных областях (см. [1]–[3]). Будем считать, что толщина стержней стремится к нулю вместе с ε , т.е. $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. И такая постановка вопроса не является новой. Например, для *скалярных* задач в аналогичной ситуации доказана “сильная” сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_{\varepsilon}^h|} \int_{\Omega} |u^{\varepsilon,h}(x) - u^0(x)|^2 \, dx = 0, \quad (1.3)$$

где u^0 – решение усредненной задачи Дирихле

$$u^0 \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div} A^{\text{hom}} \nabla u^0 + u^0 = f.$$

При этом усредненная матрица A^{hom} определяется с помощью некоторой периодической задачи на сингулярной сетке F . Важно, что предел решений $u^{\varepsilon, h}$ не зависит от способа стремления h к нулю [1; гл. 8].

Для задач теории упругости обнаружен (см. [4], [5]) “масштабный эффект”: усредненное уравнение существенно зависит от того, как толщина h стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Были выделены три случая:

- i) достаточно толстые сетки, когда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)/\varepsilon = \infty$;
- ii) достаточно тонкие сетки, когда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon)/\varepsilon = 0$;
- iii) сетки критической толщины, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon} = \theta > 0. \quad (1.4)$$

Особенностью задач теории упругости является то, что решение $u^{\varepsilon, h}$ “осциллирует” и для него, вообще говоря, не может быть сильной сходимости (1.3). Более точно, в нулевом приближении решение $u^{\varepsilon, h}(x)$ не есть гладкая функция $u^0(x)$, а имеет вид $u(x, x/\varepsilon)$, где $u(x, y)$ – функция двух переменных, периодическая по аргументу y . Функция $u(x, y)$ служит “двухмасштабным пределом” последовательности $u^{\varepsilon, h}$. При этом структура функции $u(x, y)$ и уравнение, которому она удовлетворяет, существенно различаются в указанных выше трех случаях, хотя всегда $u(x, y)$ как функция аргумента y есть “периодическое жесткое перемещение на сингулярной сетке F ”.

Поясним это ключевое понятие. Скажем, что заданный на сингулярной сетке F вектор $u \in L^2(\square, d\mu)^2$ есть *периодическое жесткое перемещение*, если найдется последовательность гладких периодических векторов $\varphi_\delta \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^2$ такая, что

$$\varphi_\delta \rightarrow u, \quad e(\varphi_\delta) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\square, d\mu).$$

Множество периодических жестких перемещений будем обозначать через $\mathcal{R}$. Доказано, что всякий вектор $u \in \mathcal{R}$ допускает единственное представление

$$u(y) = c + \chi(y), \quad (1.5)$$

в котором c – постоянный вектор, а χ – поперечное перемещение. Последнее означает, что на каждом звене сетки F вектор χ ортогонален этому звену. Таким образом, справедливо разложение $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 + \mathcal{R}_1$, где $\mathcal{R}_1$ – множество всех поперечных перемещений.

Ортогональный проектор $P_1: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_1$ переводит постоянный вектор $c \in \mathbb{R}^2$ в поперечное перемещение, которое на каждом звене равно нормальной компоненте этого вектора. Результат записывается как $P_1(y)c$. В выражении вида $P_1(y)f(x)$ вектор f рассматривается как постоянный, x играет роль параметра.

Чтобы лучше понять проблемы критического случая, сформулируем некоторые результаты, справедливые при любом $h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

1) Найдется вектор-функция $u(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu)^2$, периодическая по y , такая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} |u^{\varepsilon, h}(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0. \quad (1.6)$$

Здесь требуется пояснение, так как функция $u(x, \cdot)$ задана на сингулярной сетке F , а для интегрирования в (1.6) нужно, чтобы она была определена на сетке F^h . Достаточно продолжить эту функцию как постоянную в поперечном направлении на каждый стержень, а в точках, принадлежащих двум или более стержням, определить ее как сумму таких продолжений (“естественное” продолжение, см. §2).

2) Вектор $u(x, \cdot)$ есть периодическое жесткое перемещение и в соответствии с разложением (1.5)

$$u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad \chi(x, \cdot) \in \mathcal{R}_1 \text{ для п.в. } x \in \Omega. \quad (1.7)$$

3) Выполнено соотношение

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad -\operatorname{div} A^{\operatorname{hom}} e(u^0) + u^0 + \langle \chi \rangle = f, \quad (1.8)$$

в котором A^{hom} – усредненный тензор,

$$A^{\operatorname{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{w \in C_{\operatorname{per}}^\infty(\square)^2} \int_{\square} A(\xi + e(w)) \cdot (\xi + e(w)) d\mu.$$

Для модельной сетки тензор A^{hom} положительно определенный: $A^{\operatorname{hom}} \xi \cdot \xi \geq c_0 \xi^2$, $c_0 > 0$.

Соотношения (1.7), (1.8) нельзя рассматривать как усредненное уравнение, поскольку они не определяют однозначно саму функцию $u(x, y)$. Необходимо найти дополнительную связь между компонентами u^0 и χ . Для достаточно толстых сеток эта связь имеет тривиальный вид $\chi = 0$, и получаем классическое усреднение

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_\varepsilon^h|} \int_{\Omega \cap F_\varepsilon^h} |u^{\varepsilon, h}(x) - u^0(x)|^2 dx &= 0, \\ u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad -\operatorname{div} A^{\operatorname{hom}} e(u^0) + u^0 &= f. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для достаточно тонких сеток дополнительная связь также известна:

$$u^0(x) + \chi(x, \cdot) - f(x) \perp \mathcal{R}_1.$$

Отсюда и из (1.8) получаем

$$\begin{aligned} u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad -\operatorname{div} A^{\operatorname{hom}} e(u^0) + T u^0 &= T f, \quad T = E - \langle P_1 \rangle, \\ \chi(x, y) &= P_1(y)(f(x) - u^0(x)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для модельной сетки $T = \frac{1}{2}E$.

В настоящей работе мы находим дополнительную связь между компонентами u^0 и χ в случае сеток критической толщины. Оказывается, что компонента $\chi(x, y)$ как функция аргумента y удовлетворяет на каждом звене уравнению четвертого порядка; эти уравнения содержат “пространственную” компоненту u^0 в качестве параметра и связаны между собой некоторыми условиями сопряжения в узлах. Взяты вместе, они дают хорошо поставленную периодическую задачу на сингулярной сетке. Ниже эта задача будет описана.

1.2. Рассмотрим отдельное звено сетки F – отрезок I на плоскости. Пусть τ – направление вдоль звена (одно из двух возможных), ν – нормаль к звену, τ, ν – правая пара ортов, χ – поперечное перемещение на сетке.

Очевидно, что производная $d(\chi \cdot \nu)/d\tau$ не зависит от выбора τ ; обозначим ее через $(\chi \cdot \nu)'$. Аналогично вектор $\nu d^2(\chi \cdot \nu)/d\tau^2$ не зависит от выбора направления и обозначается χ'' . Видим, что инвариантно определены нечетные производные проекции: $(\chi \cdot \nu)', (\chi \cdot \nu)''', \dots$, а также четные производные вектора: $\chi'', \chi^{IV}, \dots$.

Пусть в узле O сходятся звенья $I_1, I_2, \dots, I_m$. Нас будут интересовать следующие свойства.

а) Функция $\chi \cdot \nu_j|_{I_j}, j = 1, \dots, m$, имеет первую и вторую производные, суммируемые с квадратом на отрезке I_j , или коротко $\chi \cdot \nu_j \in H^2(I_j)$.

В этом случае первая производная $(\chi \cdot \nu)'$ непрерывна на замкнутом отрезке I_j и можно говорить о ее значении в узле.

б) Равенство первых производных в узле:

$$(\chi \cdot \nu_1)'|_O = (\chi \cdot \nu_2)'|_O = \dots = (\chi \cdot \nu_m)'|_O. \quad (1.11)$$

в) Закрепление в узле: $\chi|_O = 0$.

Некоторого пояснения требует, быть может, свойство (1.11).

Рассмотрим пример двух отрезков I_1, I_2 , выходящих из начала координат в направлении координатных осей. Поскольку вектор $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ есть поперечное перемещение на $I_1 \cup I_2$, то компонента χ_1 отлична от нуля только на I_2 (где ее запишем как $\chi_1(y_2)$), а χ_2 отлична от нуля только на I_1 (где запишем ее как $\chi_2(y_1)$). Тогда свойство (1.11) означает равенство

$$\frac{d\chi_1(0)}{dy_2} + \frac{d\chi_2(0)}{dy_1} = 0.$$

Возьмем совсем простой пример, когда отрезки I_1, I_2 лежат на одной прямой, скажем, на оси Oy_1 , а “узлом” служит начало координат. Тогда $\chi = \{0, \chi_2(y_1)\}$ и условие (1.11) означает равенство левой и правой производных функции χ_2 в точке $y_1 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{R}_1^0 \subset \mathcal{R}_1$ – это множество всех периодических поперечных перемещений, удовлетворяющих условиям а)–с) на каждом звене и в каждом узле. *Норму в $\mathcal{R}_1^0$* определим как сумму H^2 -норм по всем звеньям.

Теперь можно описать периодическую задачу на сингулярной сетке. Если исходный тензор A изотропен (см. (1.1)), то вектор-функция $\chi = \chi(x, \cdot)$ есть решение вариационной задачи на отыскание минимума

$$\min_{\chi \in \mathcal{R}_1^0} \int_{\square} \left(\frac{\theta^2}{3} \widehat{k} |\chi''|^2 + |\chi|^2 - 2\chi \cdot P_1 c \right) d\mu, \quad (1.12)$$

$$\widehat{k} = \frac{k(k + 2k_1)}{k + k_1}, \quad c = f(x) - u^0(x).$$

Здесь θ – параметр толщины сетки (см. (1.4)), k, k_1 – модули упругости из (1.1).

Для решения этой вариационной задачи выполнена слабая форма уравнения Эйлера

$$\chi \in \mathcal{R}_1^0, \quad \int_{\square} \left(\frac{\theta^2}{3} \widehat{k} \chi'' \cdot v'' + \chi \cdot v - v \cdot P_1 c \right) d\mu = 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}_1^0,$$

из которой вытекает собственно уравнение Эйлера

$$\frac{\theta^2}{3} \widehat{k} \chi^{IV} + \chi = P_1 c, \quad c = f(x) - u^0(x), \quad (1.13)$$

и для каждого узла – “естественное” условие

$$\sum \frac{d^2(\chi \cdot \nu_j)}{d\tau_j^2} \Big|_O = 0, \quad (1.14)$$

где все направления τ_j выбраны выходящими из узла (или входящими в узел).

Часто условия в узлах можно упростить, воспользовавшись симметрией. Например, модельная сетка инвариантна относительно поворота на 180° вокруг любого из своих узлов. Поэтому решение вариационной задачи (1.12) также обладает указанной симметрией и условие (1.11) выглядит так: производные $(\chi \cdot \nu_j)' \Big|_O$ равны нулю. Другими словами, все звенья сингулярной сетки жестко закреплены в узлах, а естественное условие (1.14) выполнено автоматически. Периодическая задача сводится к стандартным краевым задачам на каждом звене в отдельности.

Уравнение (1.13) на сетке F , дополненное условиями в узлах, однозначно разрешимо. Решение можно записать в виде $\chi = \omega(y) P_1 c$, где $\omega(y) = \omega(y, \theta)$ – некоторая периодическая функция на сингулярной сетке. Поскольку $c = f(x) - u^0(x)$, то из (1.8) получаем

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} A^{\text{hom}} e(u^0) + S u^0 &= S f, \quad S = E - \langle \omega P_1 \rangle, \\ \chi(x, y) &= \omega(y) P_1(y) (f(x) - u^0(x)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

причем матрица S удовлетворяет неравенству $T < S < E$, а для модельной сетки она пропорциональна единичной. Первое из полученных соотношений дает отдельную эллиптическую задачу для компоненты $u^0(x)$, а второе – связь между компонентами u^0 и χ . Функция ω зависит от параметра θ , при этом

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} S = E, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \omega P_1 = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} S = T, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \omega P_1 = P_1.$$

Видим, что при $\theta \rightarrow \infty$ уравнение (1.15) переходит в классическое усредненное уравнение (1.9), а при $\theta \rightarrow 0$ переходит в неклассическое уравнение (1.10).

1.3. Дадим более формальное описание усредненной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть V – множество вектор-функций вида

$$u = u^0(x) + \chi(x, y), \quad u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0). \quad (1.16)$$

Скажем, что $u \in V$ есть *решение усредненной задачи*, если интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \widehat{k} \chi'' \cdot \psi'' dx d\mu + \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot \varphi dx d\mu \\ = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi dx d\mu \end{aligned} \quad (1.17)$$

выполнено для любой вектор-функции $\varphi = \varphi^0 + \psi \in V$.

Множество V назовем *энергетическим пространством усредненной задачи*.

Полагая в этом тождестве $\psi = 0$, получаем соотношение (1.8). Далее, взяв $\varphi^0 = 0$, $\psi = \eta(x)v(y)$, где $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \in \mathcal{R}_1^0$, получим тождество

$$\int_{\square} \left(\frac{\theta^2}{3} \widehat{k} \chi'' \cdot v'' + (u^0 + \chi - f) \cdot v \right) d\mu(y) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}_1^0.$$

Вектор $u^0 + \chi - f$ можно заменить вектором $\chi + P_1(u^0 - f)$ и вывести из этого тождества уравнение (1.13) и естественное условие (1.14).

Усредненное уравнение в форме тождества (1.17) более удобно в некоторых вопросах. Например, полагая в этом тождестве $\psi = u$, получаем энергетическое равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \widehat{k} \chi'' \cdot \chi'' dx d\mu + \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot u dx d\mu \\ = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot u dx d\mu. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отметим, что в обоих некритических случаях второе слагаемое слева отсутствует. В работе [5] было доказано, что в критическом случае энергетический баланс требует, чтобы на втором месте слева стояло некоторое положительное слагаемое, но точный вид этого слагаемого не был найден.

Сформулируем основной результат по усреднению в критическом случае.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $u^{\varepsilon, h}$ – решение задачи (1.2), причем тензор A изотропен. Тогда имеет место соотношение (1.6), в котором $u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y)$ есть решение усредненной задачи (1.17). Имеет место также сходимость упругих энергий

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega \cap F_{\varepsilon}^h|} \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) dx \\ = \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(u^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \widehat{k} \chi'' \cdot \chi'' dx d\mu. \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.4. Выше предполагалось, что исходный тензор A изотропен. В случае тензора A общего вида усредненное уравнение немного усложняется, в частности, аналог вариационной задачи (1.12) имеет вид

$$\min_{\chi \in \mathcal{R}_1^0} \int_{\square} \left(\frac{\theta^2}{3} \rho |\chi''|^2 + |\chi|^2 - 2\chi \cdot P_1 c \right) d\mu, \quad c = f(x) - u^0(x),$$

где $\rho = \rho(y)$ – периодическая функция на сетке F , постоянная на каждом звене,

$$\rho = (A^{-1} \eta \cdot \eta)^{-1}, \quad \eta = \tau \times \tau, \quad \tau - \text{направление звена.} \quad (1.20)$$

Напомним, что по определению

$$\tau \times \tau = \{\tau^i \tau^j\}.$$

Для изотропного тензора A (см. (1.1)) функция ρ вычисляется в явном виде. Действительно, в этом случае нетрудно найти обратный тензор:

$$\begin{aligned} A^{-1} \eta &= \frac{\eta}{k} - \frac{k_1}{k(k+2k_1)} E \operatorname{tr} \eta, \\ A^{-1} \eta \cdot \eta &= \frac{\eta \cdot \eta}{k} - \frac{k_1 (\operatorname{tr} \eta)^2}{k(k+2k_1)}, \end{aligned}$$

где η – произвольная симметрическая матрица. Для матрицы $\eta = \tau \times \tau$ имеем $\eta \cdot \eta = 1$, $\operatorname{tr} \eta = 1$ и поэтому $A^{-1} \eta \cdot \eta = 1/\hat{k}$ не зависит от направления стержня. Видим, что в изотропном случае $\rho = \hat{k}$, и приходим к вариационной задаче (1.12).

Для тензора A общего вида теорема усреднения сохраняется, нужно только в (1.17) и (1.19) заменить $\hat{k}$ на ρ .

Еще одно замечание. Модельная сингулярная сетка составлена из четырех периодически повторяющихся бесконечных прямых. Аналогичную структуру имеет и тонкая сетка F^h . Представляют интерес и более сложно устроенные сингулярные сетки, которые нельзя составить из бесконечных прямых (см. рис. 2). В таком случае следует оговорить, как строится соответствующая тонкая сетка F^h . Звено сетки F – это принадлежащий F отрезок, концы которого служат узлами. Для каждого звена I строим полосу I^h ширины $2h$ со средней линией I . Тогда сетка F^h определяется как объединение всех построенных полос. Иногда удобно добавлять сюда еще и круги радиуса h с центрами в узлах.

Рис. 2.

Теорема 1.3 сохраняется для сеток F^h весьма общего вида. Минимальные требования таковы: сингулярная сетка F должна быть связной на торе периодичности и содержать хотя бы один узел, т.е. по крайней мере два неколлинеарных звена.

1.5. Затронем важный вопрос о справедливости теоремы усреднения для задачи теории упругости в статической постановке, т.е. для задачи

$$u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}, \quad \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(\varphi) dx = \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2. \quad (1.21)$$

Для того чтобы эта задача могла быть исследована теми же методами, что и исходная задача (1.2), требуется неравенство Корна

$$\int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} \varphi \cdot \varphi dx \leq c \int_{\Omega \cap F_{\varepsilon}^h} e(\varphi) \cdot e(\varphi) dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2, \quad (1.22)$$

в котором постоянная c не зависит от φ, ε, h .

Неравенство Корна для модельной сетки доказано в §5. В этом случае усредненное уравнение получается из (1.17) вычеркиванием третьего слагаемого слева, т.е. принимает вид

$$u \in V, \quad \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \widehat{k} \chi'' \cdot \psi'' dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi dx d\mu \\ \forall \varphi = \varphi^0 + \psi \in V.$$

Это уравнение для вектор-функции $u = u^0 + \chi$ распадается на отдельные уравнения для компонент u^0 и χ . Компонента u^0 есть решение “обычной” усредненной задачи

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad -\operatorname{div} A^{\text{hom}} e(u^0) = f \quad \text{в } \Omega.$$

Компонента $\chi = \chi(x, \cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi \in \mathcal{R}_1^0, \quad \frac{\theta^2}{3} \widehat{k} \chi^{\text{IV}} = P_1 f$$

на сингулярной сетке F , дополненному естественными краевыми условиями (1.14) в каждом узле.

Формулировка самой теоремы усреднения полностью сохраняется (подробнее см. §4).

§ 2. Предварительные сведения

2.1. В настоящей работе применяется так называемый “measure approach”, соединенный с техникой двухмасштабной сходимости. Сейчас мы отметим только начальные моменты этого подхода.

Пусть μ^h — периодическая нормированная мера на $\mathbb{R}^2$, сосредоточенная на сетке F^h и пропорциональная там плоской мере Лебега. Легко видеть, что

$$d\mu^h \rightharpoonup d\mu, \quad h \rightarrow 0,$$

где μ – мера на сингулярной сетке. Подробнее это означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} \varphi d\mu^h = \int_{\square} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

Определим ε -периодическую меру μ_{ε}^h равенством

$$\mu_{\varepsilon}^h(B) = \varepsilon^2 \mu^h(\varepsilon^{-1}B)$$

для любого борелева множества $B \subset \mathbb{R}^2$. Очевидно, что мера μ_{ε}^h сосредоточена на сжатой сетке F_{ε}^h . Свяжем параметры h и ε , полагая, что $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

В терминах меры μ_{ε}^h задача (1.2) записывается следующим образом:

$$u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}, \quad \int_{\Omega} (Ae(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon, h} \cdot \varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2. \quad (2.1)$$

Здесь правая часть $f^{\varepsilon, h}$ зависит от ε, h , в то время как в (1.2) она была фиксированной. Предполагается, что последовательность $f^{\varepsilon, h}$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^N$, т. е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h < \infty.$$

В интегральном тождестве (2.1) можно взять пробную функцию $\varphi = u^{\varepsilon, h}$ и получить энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} (Ae(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) + u^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon, h} \cdot u^{\varepsilon, h} d\mu_{\varepsilon}^h, \quad (2.2)$$

из которого следует, что

$$u^{\varepsilon, h}, e(u^{\varepsilon, h}) \text{ ограничены в } L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h). \quad (2.3)$$

Видим, что необходимо изучать последовательности, ограниченные в “переменном” пространстве $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$. Специальный математический аппарат позволяет это сделать: ограниченная последовательность оказывается компактной в смысле “слабой двухмасштабной сходимости”. Общие свойства этой сходимости столь же просты, как и свойства классической слабой сходимости в $L^2(\Omega)$.

Наиболее интересные проблемы обнаруживаются при совместном рассмотрении вектор-функции $u^{\varepsilon, h}$ и ее тензора деформации $e(u^{\varepsilon, h})$, когда выполнено условие (2.3). В этом случае слабые двухмасштабные пределы последовательностей $u^{\varepsilon, h}$ и $e(u^{\varepsilon, h})$ связаны между собой и обладают важными для теории усреднения дополнительными свойствами. Указанные вопросы рассматривались в работе [5], но были отмечены только такие свойства, которые справедливы при любом $h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

В настоящей работе выясняется специфика критического случая. Значительная часть излагаемого материала не связана прямо с уравнениями, а относится к доказательству особых свойств слабого двухмасштабного предела произвольной последовательности $u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}$, удовлетворяющей условию ограниченности (2.3).

2.2. Далее мы приводим известные или очевидные факты, связанные с двухмасштабной сходимостью.

Напомним сначала понятие слабой сходимости в $L^2(\square, d\mu^h)$ и свойство среднего значения.

Если последовательность a^h ограничена в $L^2(\square, d\mu^h)$, то слабая сходимость $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(\square, d\mu^h)$ означает, что

$$a \in L^2(\square, d\mu), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} a^h \psi d\mu^h = \int_{\square} a \psi d\mu \quad \forall \psi \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Свойство среднего значения. Пусть Ω – ограниченная измеримая по Жордану область и $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(\square, d\mu^h)$. Тогда $\forall \varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) a^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} \varphi(x) a(y) d\mu. \quad (2.4)$$

Фиксируем некоторую функцию $h(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность $v^{\varepsilon, h}(x)$ слабо двухмасштабно сходится к функции

$$v = v(x, y) \in L^2(\Omega \times \square, dx \times d\mu) = L^2(\Omega \times \square), \quad v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y),$$

если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon, h}(x) \varphi(x) b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu \quad (2.5)$$

для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$.

Отметим некоторые свойства.

i) Ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости.

ii) Полунепрерывность снизу:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h \geq \int_{\Omega} \int_{\square} |v|^2 dx d\mu. \quad (2.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $c^h \rightharpoonup c$ в $L^2(\square, d\mu^h)$, то $c^h(x/\varepsilon) \xrightarrow{2} c(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega} c^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h.$$

Так как $c^h b \rightharpoonup cb$ в $L^2(\square, d\mu^h)$, то по свойству среднего значения (2.4) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\varepsilon) = \int_{\Omega} \int_{\square} c(y) b(y) \varphi(x) dx d\mu,$$

что и требовалось.

В определении 2.1 используется достаточно узкий класс пробных функций $\varphi(x)b(y)$ (к ним автоматически добавляются и линейные комбинации). Но и его полезно сузить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Сходимость $v^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} v$ имеет место, если соотношение (2.5) выполнено для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и любых $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$, финитных в окрестности узлов сетки F .*

Несложное доказательство опускается.

Узлами сетки F^h (а также сжатой сетки F_ε^h) называем участки, принадлежащие двум или более h -стержня́м. Из предложения 2.3 получаем: если две ограниченные в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательности отличаются только в узлах сетки F_ε^h , то они имеют одинаковые слабые двухмасштабные пределы.

Часто требуется расширить класс пробных функций, участвующих в определении 2.1, с сохранением самой сходимости (2.5). В частности, не только избавиться от гладкости функции b , но и сделать ее зависящей от h . Для этой цели привлечем понятие сильной сходимости в $L^2(\square, d\mu^h)$. Напомним, что ограниченная в $L^2(\square, d\mu^h)$ последовательность b^h сильно сходится к функции $b \in L^2(\square, d\mu)$, $b^h \rightarrow b$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} b^h g^h d\mu^h = \int_{\square} b g d\mu, \quad \text{как только } g^h \rightharpoonup g \text{ в } L^2(\square, d\mu^h).$$

Сильная сходимость складывается из слабой сходимости и соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} |b^h|^2 d\mu^h = \int_{\square} |b|^2 d\mu.$$

ЛЕММА 2.4. *Пусть $v^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} v$ и $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\square, d\mu^h)$. Тогда $\forall \varphi \in C(\overline{\Omega})$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon, h}(x) b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v(x, y) b(y) \varphi(x) dx d\mu.$$

Мы подошли к понятию сильной двухмасштабной сходимости $u^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} u(x, y)$. По определению это означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h}(x) z^{\varepsilon, h}(x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} u(x, y) z(x, y) dx d\mu, \quad \text{как только } z^{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} z. \quad (2.7)$$

Известно, что сильная двухмасштабная сходимость складывается из слабой и соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square} |u|^2 dx d\mu. \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если $c^h \rightarrow c$ в $L^2(\square, d\mu^h)$, то $c^h(x/\varepsilon) \xrightarrow{2} c(y)$.*

ПРИМЕР (естественное продолжение). Дана функция $g \in L^2(\square, d\mu)$. Продолжим эту функцию как постоянную в поперечном направлении на каждый h -стержень, а в узлах сетки F^h определим ее как сумму таких продолжений. Получается функция $g_h \in L^2(\square, d\mu^h)$ и нетрудно убедиться, что $g_h \rightarrow g$ в $L^2(\square, d\mu^h)$. Таким образом, в силу предложения 2.5 для естественного продолжения имеем сходимость

$$g_h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{2} g(y).$$

Понятие сильной двухмасштабной сходимости выглядит довольно громоздким, но при определенных условиях его можно упростить.

ЛЕММА 2.6. Пусть $v^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$ и предельная функция v имеет структуру

$$v(x, y) = \sum \varphi_i(x) b_i(y), \quad \varphi_i \in C(\overline{\Omega}), \quad b_i \in L^2(\square, d\mu).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| v^{\varepsilon, h}(x) - v_h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 d\mu_{\varepsilon}^h = 0,$$

где v_h — это естественное продолжение функции $v(x, \cdot)$.

§3. О двухмасштабной сходимости на периодической сетке критической толщины

Здесь мы изучаем произвольную последовательность вектор-функций $u^{\varepsilon, h} \in W_{\varepsilon, h}$, удовлетворяющую условию ограниченности (2.3). Не ограничивая общности, считаем ее слабо двухмасштабно сходящейся: $u^{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$. Общая теория, справедливая в случае произвольного $h(\varepsilon) \rightarrow 0$, дает некоторые сведения о структуре предельной функции, а именно,

$$u^{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup u(x, y) = u^0(x) + \chi(x, y), \quad (3.1)$$

где $u^0 \in H_0^1(\Omega)^2$, $\chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1)$ (см. [5; теорема 12.3]).

Нашей целью будет следующее уточнение указанной структуры.

ТЕОРЕМА 3.1. В критическом случае $\chi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0)$. Другими словами, предельная функция $u(x, y)$ является элементом энергетического пространства усредненной задачи, т.е. $u \in V$.

Другое уточнение относится к свойству полунепрерывности снизу.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть, дополнительно к (3.1), имеет место слабая двухмасштабная сходимость тензоров деформации:

$$e(u^{\varepsilon, h}(x)) \xrightarrow{2} p(x, y). \quad (3.2)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} \int_{\square} \left(A p \cdot p + \frac{\theta^2}{3} \rho \chi'' \cdot \chi'' \right) dx d\mu, \quad (3.3)$$

где A — тензор упругости, ρ — функция, определенная равенством (1.20).

Отметим, что общая теория дает неравенство без второго слагаемого справа.

Приступим к доказательству теоремы 3.1.

Напомним, что определение 1.1 пространства $\mathcal{R}_1^0$ включает условие гладкости на звеньях и условия сопряжения в узлах (см. условия а)–с) в §1).

Ниже мы последовательно проверяем выполнение этих условий для функции χ из (3.1).

3.1. Начнем с одной важной технической леммы. Пусть I – отрезок, принадлежащий сетке F , причем безразлично, содержит он узел или нет. Можно считать, что он целиком лежит в ячейке периодичности.

Сначала рассмотрим случай горизонтального отрезка, расположенного на оси Oy_1 .

Введем 1-периодическую функцию, определенную на периоде $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ равенством

$$\beta_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{h} & \text{при } |t| \leq h; \\ 0 & \text{при } |t| > h, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $0 < h \leq \frac{1}{8}$, и периодический вектор

$$b(y) = b_h(y) = (\beta_0(y_2), 0).$$

Изучим величину

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h}(x) \cdot b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h \\ &= \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon, h}(x) \beta_0\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где функция $\alpha(y_1) \in C_0^{\infty}(I)$ и периодически продолжена на $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

ЛЕММА 3.3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_2(x, y) \alpha'(y_1) \varphi(x) dx d\mu(y). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на полуоткрытые квадраты $[0, \varepsilon)^2 + \varepsilon n$, n – целочисленный вектор, и обозначим отдельный квадрат символом $\varepsilon \square_j$. Поскольку $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то для изучения величины $J(\varepsilon)$ достаточно ограничиться квадратами $\varepsilon \square_j$, целиком содержащимися в области Ω . Их число имеет порядок ε^{-2} .

Интегрирование в (3.5) фактически ведется по системе периодических полосок вида $\varepsilon I^h + \varepsilon n$, где $I^h = I \times [-h, h]$. С функцией $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ свяжем функцию $\varphi_{\varepsilon}(x)$, определенную только на указанных полосках, причем так, что φ_{ε} постоянна в поперечном направлении на каждой полоске и совпадает с φ на средней линии. Очевидно, что

$$|\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что в определении величины $J(\varepsilon)$ функцию φ можно заменить на φ_{ε} , поскольку возникающая погрешность имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, пусть

$$r(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon, h}(x) \beta_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) (\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}(x)) d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Так как $|\beta_0| \leq 1$, то

$$|r(\varepsilon)| \leq ch \int_{\Omega} |u_1^{\varepsilon, h}| d\mu_{\varepsilon}^h = O(\varepsilon).$$

Нам понадобятся некоторые преобразования для вектор-функции $v = v(y) = v(y_1, y_2)$, заданной на полосе $I^h = I \times [-h, h]$. Исходим из равенства

$$\int_{-h}^h y_2 v_1 dy_2 = \frac{h^2}{2} \int_{-h}^h \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dy_2 - \frac{1}{2} \int_{-h}^h y_2^2 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dy_2,$$

получающегося интегрированием по частям. Так как

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial y_2} = e_{12}(v) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial y_1},$$

то

$$\int_{-h}^h y_2 v_1 dy_2 = \frac{1}{2} \int_{-h}^h (y_2^2 - h^2) \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy_2 + \int_{-h}^h e_{12}(v) (h^2 - y_2^2) dy_2.$$

Отсюда для $g \in C_0^\infty(I)$ имеем

$$\int_{I^h} y_2 g(y_1) v_1(y) dy = \frac{1}{2} \int_{I^h} (y_2^2 - h^2) g(y_1) \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy + \int_{I^h} e_{12}(v) g(y_1) (h^2 - y_2^2) dy.$$

Преобразуем первое слагаемое справа. Интегрируя по частям по переменной y_1 и полагая

$$\bar{v}_2(y_1) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_2(y_1, y_2) dy_2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_2^2) v_2(y) g'(y_1) dy &= \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_2^2) \bar{v}_2(y_1) g'(y_1) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_2^2) (v_2 - \bar{v}_2) g'(y_1) dy, \\ \frac{1}{2} \int_{I^h} (h^2 - y_2^2) \bar{v}_2(y_1) g'(y_1) dy &= \frac{2}{3} h^3 \int_I \bar{v}_2 g' dy_1 = \frac{1}{3} h^2 \int_{I^h} v_2 g' dy. \end{aligned}$$

Итак, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{I^h} y_2 v_1(y) g(y_1) dy - \frac{1}{3} h^2 \int_{I^h} v_2(y) g'(y_1) dy \\ = \frac{h^2}{2} \int_{I^h} g(y) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right) \left(1 - \left(\frac{y_2}{h} \right)^2 \right) dy \\ + \frac{h^2}{2} \int_{I^h} (v_2 - \bar{v}_2) g'(y_1) \left(1 - \left(\frac{y_2}{h} \right)^2 \right) dy. \end{aligned}$$

Для вектора $v = v(x)$, заданного в полосе εI^h , соответствующее равенство получается гомотетией и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon I^h} \beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) v_1(x) g \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) dx - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} v_2(x) g' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) dx \\ = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) g \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \left(1 - \left(\beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) dx \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} (v_2(x) - \bar{v}_2(x_1)) g' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \left(1 - \left(\beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right) dx = T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Оценим стоящие справа слагаемые. Очевидно, что

$$|T_1| \leq \frac{lh^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx,$$

где $l = \max(|g| + |g'|)$. Для второго слагаемого с помощью неравенства Пуанкаре

$$\int_{\varepsilon I_h} |v_2 - \bar{v}_2| dx \leq c_0 \varepsilon h \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right| dx \leq c_0 h \varepsilon \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx$$

получим аналогичную оценку

$$|T_2| \leq \frac{c_0 lh^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon I^h} |e(v)| dx.$$

Перепишем эти результаты в терминах меры μ_ε^h . Пусть ρ — характеристическая функция полосы I^h , периодически продолженная на $\mathbb{R}^2$. Тогда выполнена оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon \square} \beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) v_1(x) g \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\varepsilon \square} v_2(x) g' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h \right| \\ \leq \frac{c_1 lh^2}{\varepsilon} \int_{\varepsilon \square} |e(v)| d\mu_\varepsilon^h. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь вернемся к величине $J(\varepsilon)$.

Используем оценку (3.7) в каждом квадрате $\varepsilon \square_j$, полагая в ней

$$v(x) = u^{\varepsilon, h}(x), \quad g(y_1) = \alpha(y_1) \varphi_\varepsilon(\varepsilon y_1).$$

Поскольку в данном случае

$$g' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = \alpha' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi_\varepsilon(x) + O(\varepsilon) = \alpha' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) + O(\varepsilon),$$

то

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\Omega} u_2^{\varepsilon, h}(x) \alpha' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \varphi(x) \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) d\mu_\varepsilon^h + r(\varepsilon), \\ |r(\varepsilon)| &\leq ch^2 \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (|u^{\varepsilon, h}| + |e(u^{\varepsilon, h})|) d\mu_\varepsilon^h = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (3.6) и лемма доказана.

Сформулируем аналог леммы 3.3 в случае произвольно направленного отрезка.

Пусть τ — направление вдоль отрезка I , ν — нормаль к нему, τ, ν — правая пара. Через I^h обозначим стержень (полосу) ширины $2h$ со средней линией I .

На ячейке $\square$ определим функцию

$$\beta(y) = \begin{cases} \frac{1}{h} \nu \cdot (y - y_0) & \text{на } I^h; \\ 0 & \text{на } \square \setminus I^h, \end{cases}$$

где $y_0 \in I$, и периодически продолжим ее на $\mathbb{R}^2$. Функция β совпадает с β_0 (см. (3.4)) в случае горизонтального отрезка, лежащего на оси Oy_1 . Пусть $\alpha(y)$ — гладкая функция, зависящая только от продольной компоненты на стержне I^h и равная нулю в окрестности его торцов. Тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h}(x) \cdot \tau \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h \\ = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u(x, y) \cdot \nu \frac{\partial \alpha(y)}{\partial \tau}(y) \varphi(x) dx d\mu(y), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В случае вертикального отрезка, лежащего на оси Oy_2 , имеем $\tau = (0, 1)$, $\nu = (-1, 0)$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_2^{\varepsilon, h}(x) \beta_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h \\ = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_1(x, y) \alpha'(y_2) \varphi(x) dx d\mu(y). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теперь мы в состоянии доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.4. *На каждом отрезке I , принадлежащем сетке F , нормальная компонента $u \cdot \nu$ есть элемент пространства $H^2(I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со случая горизонтального отрезка и рассмотрим выражение

$$T(\varepsilon) = -\frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^{\varepsilon, h}}{\partial x_1}(x) \beta_0\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h.$$

После интегрирования в нем по частям получим

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &= \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon, h}(x) \beta_0\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \alpha'\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h \\ &\quad + \frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon, h}(x) \beta_0\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} d\mu_{\varepsilon}^h. \end{aligned}$$

Первое слагаемое имеет тип $J(\varepsilon)$ (см. (3.5)), а второе — тип $\varepsilon J(\varepsilon)$. По лемме 3.3

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u_2(x, y) \alpha''(y_1) \varphi(x) dx d\mu. \quad (3.10)$$

Изучим величину $T(\varepsilon)$ иным способом. Так как $|\beta_0| \leq 1$, то последовательность

$$w_\varepsilon(x) = -\frac{\partial u_1^{\varepsilon,h}(x)}{\partial x_1} \beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \quad \text{ограничена в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h).$$

Переходя, если требуется, к подпоследовательности, считаем ее слабо двухмасштабно сходящейся, $w_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} w(x, y)$, $w \in L^2(\Omega \times \square)$. В частности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_\varepsilon(x) \alpha \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} w(x, y) \alpha(y_1) \varphi(x) dx d\mu(y).$$

Сравним это соотношение с (3.10). Поскольку $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ произвольно, то для п.в. $x \in \Omega$ выполнено равенство

$$\int_I w(x, y) \alpha(y_1) dy_1 = \frac{\theta^2}{3} \int_I (u_2^0(x) + \chi_2(x, y)) \alpha''(y_1) dy_1,$$

из которого следует, что

$$w(x, \cdot)|_I = \frac{\theta^2}{3} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y_1^2} \Big|_I$$

или

$$\frac{\theta^2}{3} (\chi \cdot \nu)''_{\tau\tau} \Big|_I = w(x, \cdot)|_I, \quad w \in L^2(\Omega \times I), \quad (3.11)$$

где $\nu = (0, 1)$, $\tau = (1, 0)$.

Для отрезка общего положения рассуждения аналогичны. Рассматриваем выражение

$$T(\varepsilon) = -\frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot (\tau \times \tau) \beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \alpha \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h,$$

где $\beta(y)$, $\alpha(y)$ – те же, что и в (3.8). Интегрируем в этом выражении по частям, используя равенство

$$e(v) \cdot (\tau \times \tau) = \frac{d}{d\tau} (v \cdot \tau).$$

Тогда получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I} u \cdot \nu \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial \tau^2} \varphi(x) dx d\mu(y).$$

Отсюда делаем вывод, что и в случае отрезка общего положения выполнено соотношение (3.11), в котором w есть слабый двухмасштабный предел последовательности

$$-\frac{h}{\varepsilon} e(u^{\varepsilon,h}) \cdot (\tau \times \tau) \beta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Лемма доказана.

На самом деле, по ходу доказательства леммы 3.4 была установлена важная для дальнейшего сходимости. Выделим этот результат в отдельную лемму.

Рассмотрим всю сингулярную сетку, выбрав на каждом звене точку y_0 и направления τ и ν – тангенциальное и нормальное. Определим на сетке F^h матрицу $\sigma(y)$,

$$\sigma(y) = -(\tau \times \tau) \beta(y), \quad \text{где } \beta(y) = \frac{\nu \cdot (y - y_0)}{h} \quad \text{на } h\text{-стержне.} \quad (3.12)$$

В узлах сетки F^h функцию β полагаем равной нулю.

ЛЕММА 3.5. *Имеет место слабая двухмасштабная сходимость*

$$\frac{h}{\varepsilon} e(u^{\varepsilon, h}) \cdot \sigma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \rightharpoonup \frac{\theta^2}{3} (\chi \cdot \nu)''_{\tau\tau}. \quad (3.13)$$

3.2. Приступим к выяснению условий сопряжения в узлах, а именно, к доказательству равенства (1.11) для первых производных.

Достаточно рассмотреть два сходящихся в узле звена и для них установить соответствующее равенство. Чтобы избежать громоздких обозначений, рассмотрим два перпендикулярных отрезка I_1, I_2 , исходящих из начала координат в направлении координатных осей. Длину каждого из них считаем равной $\frac{1}{4}$. На горизонтальном отрезке I_1 функцию u записываем как $u(x, y_1)$, а на вертикальном – как $u(x, y_2)$. Условие (1.11) равенства производных имеет вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_1}(x, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial y_2}(x, 0) = 0. \quad (3.14)$$

Идея доказательства равенства (3.14) состоит в следующем. С ломаной $I_1 \cup I_2$ свяжем “ломаную” полосу, составленную из двух полос – горизонтальной полосы I_1^h и вертикальной полосы I_2^h , $P = P^h = I_1^h \cup I_2^h$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Область P

На ячейке периодичности $\square$ зададим вектор b равенством

$$b(y) = b^h(y) = \begin{cases} \frac{1}{h}(y_2 \Phi'(y_1), 0) & \text{на } I_1^h; \\ \frac{1}{h}(0, y_1 \Phi'(y_2)) & \text{на } I_2^h; \\ 0 & \text{на } \square \setminus P^h \end{cases} \quad (3.15)$$

и периодически продолжим его на $\mathbb{R}^2$. Здесь $\Phi' \in C_0^\infty(0, \frac{1}{4})$, а первообразная Φ нормирована условием $\Phi(\frac{1}{4}) = 0$. В частности, вблизи узла вектор b равен 0 (если только h достаточно мало). Введем выражение

$$l(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h} \cdot b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

которое благодаря структуре вектора b имеет вид

$$l(\varepsilon) = \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon, h}(x) \beta_0 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \Phi' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h + \frac{h}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u_2^{\varepsilon, h}(x) \beta_0 \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \Phi' \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Из соотношений (3.6), (3.9) следует равенство

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I_1} \varphi(x) u_2(x, y) \Phi''(y_1) dx d\mu(y) + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square \cap I_2} \varphi(x) u_1(x, y) \Phi''(y_2) dx d\mu(y).$$

Пока ничего нового не получено – мы просто сложили соотношения (3.6) и (3.9).

С другой стороны, величина $l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon)$ может быть изучена другим способом, что приводит к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Рассмотрим величину l как линейный функционал от Φ при фиксированном $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство*

$$|l|^2 \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt, \quad c = c(\varphi). \quad (3.16)$$

Воспользуемся этим неравенством. Имеем

$$\frac{3}{\theta^2} l = \int_{\Omega} \varphi(x) \left[\int_0^{1/4} u_2(x, y_1) \Phi''(y_1) dy_1 + \int_0^{1/4} u_1(x, y_2) \Phi''(y_2) dy_2 \right] dx.$$

В квадратных скобках дважды произведем интегрирование по частям. Учитывая, что $\Phi' \in C_0^\infty(0, \frac{1}{4})$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{3}{\theta^2} l &= \Phi(0) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1}(x, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial y_2}(x, 0) \right) \varphi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \varphi(x) \left(\int_0^{1/4} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2}(x, y_1) \Phi(y_1) dy_1 + \int_0^{1/4} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2^2}(x, y_2) \Phi(y_2) dy_2 \right) dx. \end{aligned}$$

Второе слагаемое непрерывно по норме $\left(\int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2}$ в силу (3.11), а для непрерывности первого слагаемого требуется, чтобы

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1}(x, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial y_2}(x, 0) \right) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отсюда следует искомое равенство (3.14).

3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.6. В области P (см. рис. 3) рассмотрим задачу Неймана для уравнения $-\operatorname{div}(e(v)) = b$, где вектор b задан равенством (3.15). По определению ее решение – это функция

$$v \in H^1(P)^2, \quad \int_P e(v) \cdot e(\varphi) dy = \int_P b \cdot \varphi dy \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{P})^2. \quad (3.17)$$

Для разрешимости этой задачи требуется, чтобы вектор b был ортогонален на P всем жестким перемещениям, т.е. векторам вида $c + t(-y_2, y_1)$. Выполнение этого условия ортогональности следует из структуры вектора b (см. (3.15)). Решение v определено с точностью до жесткого перемещения (ниже мы этим воспользуемся).

Проверим оценку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_P e(v) \cdot e(v) d\mu^h \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt. \quad (3.18)$$

В тождестве (3.17) возьмем пробную функцию $\varphi = v$. Тогда получим

$$h \int_{\square} e(v) \cdot e(v) dy = \int_{I_1^h} y_2 \Phi'(y_1) v_1(y) dy + \int_{I_2^h} y_1 \Phi'(y_2) v_2(y) dy = T_1 + T_2. \quad (3.19)$$

Оценим величину T_1 . Рассмотрим заштрихованный на рис. 3 многоугольник Q , составленный из двух квадратов со стороной $2h$, и пусть S – правая сторона квадрата, принадлежащего полосе I_1^h . Напомним, что функция $\Phi'(y_1)$ равна нулю в Q .

Из (3.19) в результате интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= - \int_{I_1^h} y_2 \Phi \frac{\partial v_1}{\partial y_1} dy - \int_S \Phi(0) y_2 v_1 dy_2 = T_1' + T_1'', \\ |T_1'| &\leq 2h^{3/2} \left(\int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_P e(v) \cdot e(v) dy \right)^{1/2}, \\ |T_1''| &\leq |\Phi(0)| h^{3/2} \left(\int_S |v_1|^2 dy_2 \right)^{1/2} \leq c |\Phi(0)| h^2 \left(\int_Q e(v) \cdot e(v) dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Во второй оценке на последнем шаге использовано неравенство

$$\int_S |v_1|^2 dy_2 \leq ch \int_Q e(v) \cdot e(v) dy,$$

которое доказывается следующим образом. По теореме о следе

$$\int_S |v_1|^2 dy_2 \leq c \left(h \int_Q |\nabla v_1|^2 dy + h^{-1} \int_Q |v_1|^2 dy \right).$$

Теперь нужно решение v выбрать ортогональным на Q всем жестким перемещениям и воспользоваться неравенством Корна

$$h^{-2} \int_Q |v|^2 dy + \int_Q |\nabla v|^2 dy \leq c \int_Q e(v) \cdot e(v) dy.$$

Мы оценили величину T_1 из (3.19). Оценивая величину T_2 аналогичным способом, получаем неравенство

$$h \int_P e(v) \cdot e(v) dy \leq c \left(\int_P e(v) \cdot e(v) dy \right)^{1/2} \left(h^{3/2} \left(\int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt \right)^{1/2} + c_1 h^2 |\Phi(0)| \right),$$

из которого следует искомое неравенство (3.18), если учесть, что $d\mu^h(y) = (c/h) dy$, $c > 0$.

Далее положим

$$g^h(y) = \begin{cases} e(v) & \text{на } P; \\ 0 & \text{на } \square \setminus P \end{cases}$$

и продолжим g^h периодически на $\mathbb{R}^2$. Тогда оценка (3.18) переписется в виде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\square} |g^h|^2 d\mu^h \leq c \int_0^{1/4} |\Phi|^2 dt, \quad (3.20)$$

а из тождества (3.17) следует, что

$$\varepsilon \int_{\Omega} g^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(\psi(x)) dx = \int_{\Omega} b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \psi(x) dx, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)^2.$$

Поскольку $g^h(x/\varepsilon)$ и $b^h(x/\varepsilon)$ сосредоточены на сетке F_ε^h , то вместо dx можно взять $d\mu_\varepsilon^h$, т.е.

$$\varepsilon \int_{\Omega} g^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot e(\psi(x)) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \psi(x) d\mu_\varepsilon^h, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)^2.$$

Полагая в этом тождестве $\psi = \varphi(x) u^{\varepsilon, h}(x)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$\int_{\Omega} g^h \cdot e(\varphi u^{\varepsilon, h}) d\mu_\varepsilon^h = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^{\varepsilon, h}(x) \cdot b^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi(x) d\mu_\varepsilon^h = \frac{\varepsilon}{h} l(\varepsilon).$$

Последовательность $e(\varphi u^{\varepsilon, h})$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ и по неравенству Коши–Буняковского

$$|l(\varepsilon)|^2 \leq c \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\Omega} \left| g^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h, \quad c = c(\varphi).$$

Покроем область Ω квадратами $\varepsilon \square_j$ (их число имеет порядок $O(\varepsilon^{-2})$). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| g^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h &\leq \sum \int_{\varepsilon \square_j} \left| g^h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mu_\varepsilon^h = \sum \varepsilon^2 \int_{\square} |g^h(y)|^2 d\mu^h \\ &\leq 2|\Omega| \int_{\square} |g^h|^2 d\mu^h. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.20) следует искомое неравенство (3.16).

3.4. Займемся проверкой условия закрепления в узлах. Будем опираться на следующую теорему из теории двухмасштабной сходимости. В ней речь идет о скалярных функциях, причем на структуру сетки накладываются весьма слабые ограничения.

ТЕОРЕМА 3.7. *Допустим, что сингулярная сетка F удовлетворяет единственному условию – она связна на торе периодичности. Пусть далее $h(\varepsilon) \rightarrow 0$ произвольно и последовательность гладких скалярных функций такова, что*

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h + \int_{\Omega} |v^{\varepsilon, h}|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leq c_1 < \infty. \quad (3.21)$$

Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$\begin{aligned} v^{\varepsilon, h}(x) &\xrightarrow{2} v(x, y), \quad v(x, \cdot) \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \\ \varepsilon \nabla v^{\varepsilon, h}(x) &\xrightarrow{2} \nabla_y v(x, y), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$ – соболевское пространство периодических функций.

Более подробно эта теорема обсуждается в §5.

Для применения теоремы 3.7 нужна оценка вида (3.21) для каждой компоненты вектора $u^{\varepsilon, h}$. Такая оценка получается из следующего неравенства типа неравенства Корна

$$h^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mu_{\varepsilon}^h \leq c \int_{\Omega} \left(e(u) \cdot e(u) + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 u \cdot u \right) d\mu_{\varepsilon}^h, \quad u \in C_0(\Omega)^2, \quad (3.23)$$

которое будет доказано в §5. В критическом случае это неравенство обеспечивает оценку вида (3.21) для каждой компоненты вектора $u^{\varepsilon, h}$.

Таким образом, по теореме 3.7 каждая компонента вектора χ принадлежит (для п.в. $x \in \Omega$) соболевскому пространству $H_{\text{per}}^1(\square, d\mu)$, т.е. является непрерывной функцией на сетке F . Поскольку $\chi \in \mathcal{R}_1$, то условие закрепления должно выполняться.

3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. По неравенству Юнга

$$\int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h \geq 2 \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}(x)) \cdot z(x) d\mu_{\varepsilon}^h - \int_{\Omega} A^{-1} z(x) \cdot z(x) d\mu_{\varepsilon}^h \quad (3.24)$$

для любой симметрической матрицы $z \in L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)^3$. Возьмем

$$z(x) = \Phi_0(x, y) + \frac{h}{\varepsilon} \sigma(y) \Phi_1(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon},$$

где $\sigma(y)$ – матрица, определенная в (3.12), Φ_0, Φ_1 – пробные функции (матричная и скалярная соответственно) вида $\sum \varphi_i(x) b_i(y)$, $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, $b_i \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$.

Предел первого слагаемого справа в (3.24) находим с использованием слабой двухмасштабной сходимости (3.2) и (3.13). В результате

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}) \cdot z d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} \left(p \cdot \Phi_0 + \frac{\theta^2}{3} (\chi \cdot \nu)'' \Phi_1 \right) dx d\mu.$$

Учитывая конкретный вид матрицы z , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{-1} z \cdot z d\mu_{\varepsilon}^h &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{-1} \Phi_0 \cdot \Phi_0 d\mu_{\varepsilon}^h + 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} A^{-1} \Phi_0 \cdot \sigma \Phi_1 d\mu_{\varepsilon}^h \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 \int_{\Omega} A^{-1} \sigma \cdot \sigma \Phi_1^2 d\mu_{\varepsilon}^h = T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Величину T_1 находим по свойству среднего значения:

$$T_1 = \int_{\Omega} \int_{\square} A^{-1} \Phi_0 \cdot \Phi_0 dx d\mu.$$

Для вычисления величин T_2 и T_3 воспользуемся следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть $\beta = \beta^h(y)$ — функция, определенная в (3.12). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} 0, \quad \left(\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 \xrightarrow{2} \frac{1}{3}. \quad (3.25)$$

Для доказательства нужно убедиться в том, что $\beta^h \rightarrow 0$, $(\beta^h)^2 \rightarrow \frac{1}{3}$ в $L^2(\square, d\mu^h)$ и воспользоваться предложением 2.2.

Из (3.25)₁ следует, что $T_2 = 0$. Вычислим теперь T_3 . Заметим, что

$$A^{-1}\sigma \cdot \sigma = \beta^2 A^{-1}\eta \cdot \eta, \quad \eta = \tau \times \tau \text{ на } h\text{-стержне с направлением } \tau.$$

Поэтому из (3.25)₂ получаем, что

$$T_3 = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} A^{-1}\eta \cdot \eta \Phi_1^2 dx d\mu = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho^{-1} \Phi_1^2 dx d\mu$$

(см. (1.20)). В результате всех вычислений получаем неравенство

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e(u^{\varepsilon, h}) d\mu_{\varepsilon}^h &\geq \int_{\Omega} \int_{\square} (2p \cdot \Phi_0 - A^{-1}\Phi_0 \cdot \Phi_0) dx d\mu \\ &+ \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} (2(\chi \cdot \nu)'' \Phi_1 - \rho^{-1} \Phi_1^2) dx d\mu. \end{aligned}$$

Берем здесь супремум по Φ_0 и Φ_1 и получаем искомое неравенство (3.3). Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Вывод усредненного уравнения

4.1. Нам понадобятся некоторые сведения о пространстве $\mathcal{R}_1^0$ (см. определение 1.1).

Скажем, что вектор $g \in \mathcal{R}_1^0$ принадлежит множеству D , если

- i) g бесконечно дифференцируем вне некоторой окрестности узлов;
- ii) в окрестности каждого узла он имеет структуру

$$g(y) = C(\omega(y) - \omega(y^0)), \quad (4.1)$$

где C — константа, y^0 — узел, $\omega(y) = (-y_2, y_1)$.

Отметим, что ω — это жесткое перемещение на плоскости, т.е. $e(\omega) = 0$. Подробнее условие (4.1) означает равенство $g(y) \cdot \nu_i = C(\omega(y) - \omega(y^0)) \cdot \nu_i$, где ν_i — нормали к выходящим из узла y^0 звеньям, а константа C — одна и та же для всех i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Множество D плотно в пространстве $\mathcal{R}_1^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение единицы, легко заключить, что достаточно рассмотреть окрестность узла, поскольку гладкие функции плотны в пространстве $H^2(I)$, где I — отрезок.

Пусть из узла $y^0 = 0$ выходит m отрезков длины $\frac{1}{4}$. Имеем

$$g(y) \cdot \nu_i = g_i(t), \quad t = \tau_j \cdot y, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}.$$

По условию $g_i \in H^2(0, \frac{1}{4})$ и

$$g_1(0) = g_2(0) = \dots = g_m(0) = 0, \quad g'_1(0) = g'_2(0) = \dots = g'_m(0) = C. \quad (4.2)$$

Очевидно, что функции $g_i(t) - Ct$ можно аппроксимировать в пространстве $H^2(0, \frac{1}{4})$ функциями, финитными около точки $t = 0$. В результате сами функции $g_i(t)$ будут аппроксимированы функциями $\bar{g}_i(t)$, линейными около точки $t = 0$.

Остается задать вектор $\bar{g}(y)$ равенством $\bar{g}(y) \cdot \nu_i = \bar{g}_i(t)$. В силу (4.2) в некоторой окрестности узла $y^0 = 0$ имеем

$$\bar{g}(y) \cdot \nu_i = Ct = C\tau_i \cdot y = C\omega(y) \cdot \nu_i,$$

т.е. выполнено равенство (4.1). Предложение доказано.

ЛЕММА 4.2. Для любого вектора $g \in D$ найдется его продолжение $g^h = g^h(y)$ на сетку F^h такое, что

- i) $e_y(g^h) = 0$ в окрестности каждого узла;
- ii)

$$Ae_y(g^h) = h[(g \cdot \nu)''\rho]_h \sigma + O(h^2), \quad (4.3)$$

где $\sigma = \sigma(y)$ — матрица, определенная равенством (3.12), $\rho = \rho(y)$ — скалярная функция из (1.20), $[(g \cdot \nu)''\rho]_h$ — естественное продолжение функции $(g \cdot \nu)''\rho$ на F^h ;

- iii) имеет место сильная сходимость

$$g^h \rightarrow g \quad \text{в} \quad L^2(\square, d\mu^h). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим узел $y_0 = 0$. В некоторой окрестности этого узла вектор g совпадает с жестким перемещением (см. (4.1)). Определим g^h этой же формулой и в δ -окрестности точки $y_0 = 0$ на сетке F^h , т.е. положим

$$g^h(y) = C\omega(y), \quad |y| \leq \delta, \quad y \in F^h. \quad (4.5)$$

Теперь вектор g надо продолжить на каждый h -стержень вне окрестности узла, причем это продолжение должно быть согласованным с (4.5).

Изучим сначала случай, когда тензор A изотропен.

Рассмотрим горизонтальный стержень $I = [0, l]$. На нем вектор g имеет вид

$$g(y) = (0, a(y_1)), \quad a(y_1) = Cy_1, \quad 0 \leq y_1 \leq \delta, \quad (4.6)$$

где C — та же константа, что и в (4.5). Продолжим этот вектор на стержень $I \times [-h, h]$ равенством

$$g^h(y) = \left(-y_2 a'(y_1), a(y_1) + k_2 a''(y_1) \frac{y_2^2}{2} \right), \quad k_2 = \frac{k_1}{k + k_1}.$$

Данное продолжение согласовано с ранее построенным продолжением (4.5), поскольку на участке $[0, \delta] \times [-h, h]$ в силу (4.6) имеем

$$g^h(y) = (-y_2 C, C y_1) = C \omega(y).$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} e_y(g^h) &= \begin{pmatrix} -y_2 a''(y_1) & O(h^2) \\ O(h^2) & k_2 y_2 a''(y_1) \end{pmatrix}, \\ A e_y(g^h) &= \begin{pmatrix} -\widehat{k} y_2 a''(y_1) & O(h^2) \\ O(h^2) & 0 \end{pmatrix} = -\widehat{k} y_2 a''(y_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(h^2). \end{aligned}$$

Поскольку для горизонтального стержня

$$\sigma(y) = -\frac{1}{h} y_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то соотношение (4.3) выполнено (напомним, что для изотропного тензора $\rho = \widehat{k}$).

Аналогичное построение нетрудно провести и для наклонного стержня. В этом случае

$$g(y) = \nu a(t), \quad t = \tau \cdot y, \quad a(t) = C t, \quad 0 \leq t \leq \delta,$$

а продолжение на h -стержень определяем равенством

$$g^h(y) = \nu \left(a(\tau \cdot y) + a''(\tau \cdot y) \frac{(\nu \cdot y)^2}{2} k_2 \right) - \tau(\nu \cdot y) a'(\tau \cdot y).$$

Это продолжение согласовано с продолжением (4.5), так как вблизи узла

$$g^h(y) = C \nu(\tau \cdot y) - C \tau \nu \cdot y = C(\nu(\tau \cdot y) - \tau(\nu \cdot y)) = C(-y_2, y_1) = C \omega(y).$$

Теперь построим продолжение в случае тензора A общего вида.

Начнем с горизонтального отрезка $I = [0, l]$, где вектор g имеет вид (4.6), и положим

$$g^h(y) = \left(-y_2 a'(y_1) - \alpha a''(y_1) \frac{y_2^2}{2}, a(y_1) - \beta a''(y_1) \frac{y_2^2}{2} \right),$$

где α, β – подлежащие определению константы. Это продолжение, действующее вне окрестности узлов, очевидно согласовано с продолжением (4.5). Так как

$$-e_y(g^h) = \begin{pmatrix} y_2 a''(y_1) & \alpha y_2 a''(y_1) \\ \alpha y_2 a''(y_1) & \beta y_2 a''(y_1) \end{pmatrix} + O(h^2) = y_2 a''(y_1) \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + O(h^2),$$

то для выполнения соотношения (4.3) требуется равенство

$$A \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором

$$c = \rho = (A^{-1} \eta \cdot \eta)^{-1}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. (1.20)). Определим матрицу $z = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ равенством

$$z = c A^{-1} \eta$$

и убедимся, что $\gamma = 1$. Действительно,

$$\gamma = z \cdot \eta = c A^{-1} \eta \cdot \eta = 1.$$

Тем самым константы α, β однозначно определены и соотношение (4.3) обеспечено.

В случае наклонного стержня построение аналогично. Лемма полностью доказана.

4.2. Установим следующую теорему усреднения.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $u^{\varepsilon,h}$ – решение задачи (2.1), причем последовательность правых частей $f^{\varepsilon,h}$ слабо двухмасштабно сходится

$$f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x, y). \quad (4.7)$$

Тогда имеет место слабая двухмасштабная сходимоссть (3.1) и предельная функция u есть решение усредненной задачи (1.17).

Если сходимоссть правых частей является сильной двухмасштабной

$$f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x, y),$$

то сходимоссть решений становится также сильной двухмасштабной. При этом имеет место сходимоссть упругих энергий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [5] доказано, что (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$e(u^{\varepsilon,h}) \xrightarrow{2} e(u^0) + v, \quad (4.8)$$

$$v \in L^2(\Omega, \mathcal{V}_{\text{pot}}), \quad A(e(u^0) + v) \in L^2(\Omega, \mathcal{V}_{\text{sol}}). \quad (4.9)$$

Здесь $\mathcal{V}_{\text{pot}} = \mathcal{V}_{\text{pot}}(\square, d\mu)$ – пространство периодических потенциальных матриц, определяемое как замыкание множества $\{e(\varphi), \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square)^2\}$ в $L^2(\square, d\mu)^3$, а $\mathcal{V}_{\text{sol}} = \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ – пространство соленоидальных матриц, $\mathcal{V}_{\text{sol}} = (\mathcal{V}_{\text{pot}})^\perp$ в $L^2(\square, d\mu)^3$. Кроме того, доказано соотношение

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad -\operatorname{div} A^{\text{hom}} e(u^0) + \langle u \rangle = \langle f \rangle, \quad (4.10)$$

совпадающее с (1.8) в том случае, когда f не зависит от y . Оно получено некоторым предельным переходом в интегральном тождестве (2.1). Теперь необходимо сделать специальный предельный переход в этом тождестве с учетом особенностей критического случая.

В интегральном тождестве (2.1) возьмем пробную функцию

$$\varphi(x) = w(x)g^h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $g^h(y)$ – продолжение на F^h вектора $g(y) \in D$, рассмотренное в лемме 4.2. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e_y(g^h) w d\mu_\varepsilon^h + \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon,h}) \cdot (g^h \times \nabla w) d\mu_\varepsilon^h \\ = \int_{\Omega} (f^{\varepsilon,h} - u^{\varepsilon,h}) \cdot g^h w d\mu_\varepsilon^h. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь при вычислении $e(\varphi)$ воспользовались равенством

$$e(wg^h) = \varepsilon^{-1} w e_y(g^h) + \frac{1}{2} (g^h \times \nabla w + \nabla w \times g^h).$$

Предел правой части в (4.11) вычисляется просто. Действительно, из (4.4) и предложения 2.5 следует сильная сходимость $g^h(x/\varepsilon) \xrightarrow{2} g(y)$, которая вместе со слабой сходимостью (3.1), (4.7) приводит к равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (f^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}) \cdot g^h w d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} (f - u) \cdot g w dx d\mu.$$

Найдем предел первого слагаемого в левой части (4.11). Из (4.3) имеем

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} A e(u^{\varepsilon, h}) \cdot e_y(g^h) w d\mu_{\varepsilon}^h = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}) \cdot A e_y(g^h) w d\mu_{\varepsilon}^h \\ &= \frac{h}{\varepsilon} \int_{\Omega} e(u^{\varepsilon, h}) \cdot \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) [(g \cdot \nu)'' \rho]_h w d\mu_{\varepsilon}^h + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Слабая сходимость (3.13) и сильная сходимость $[(g \cdot \nu)'' \rho]_h \xrightarrow{2} (g \cdot \nu)'' \rho$ позволяют заключить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_1(\varepsilon) = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho(\chi \cdot \nu)'' (g \cdot \nu)'' w dx d\mu = \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho \chi'' \cdot g'' w dx d\mu.$$

Рассмотрим второе слагаемое в левой части (4.11). Из сильной двухмасштабной сходимости $g^h(x/\varepsilon) \xrightarrow{2} g(y)$ и слабой двухмасштабной сходимости (4.8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \int_{\square} A(e(u^0(x)) + v(x, y)) \cdot (g(y) \times \nabla w) dx d\mu.$$

Поскольку периодическая матрица $A(e(u^0(x)) + v(x, \cdot))$ соленоидальна (см. (4.9)), то она поточечно ортогональна матрице $g(\cdot) \times \nabla w(x)$ (см. [5; лемма 5.3]). Это означает, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2(\varepsilon) = 0$. Итак, установлено тождество

$$\frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho \chi'' \cdot \psi'' dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} (f - u) \cdot \psi dx d\mu, \quad (4.12)$$

в котором $\psi(x, y) = w(x)g(y)$, $g \in D$. Отсюда заключаем (в силу предложения 4.1), что это тождество выполнено для любого $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0)$.

Рассмотрим произвольный элемент энергетического пространства V ,

$$\varphi(x, y) = \varphi^0(x) + \psi(x, y), \quad \varphi^0 \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \psi \in L^2(\Omega, \mathcal{R}_1^0).$$

Из (4.10) следует, что

$$\int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot \varphi^0 dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi^0 dx d\mu.$$

Если теперь сложить это тождество с тождеством (4.12), то получим, что u есть решение усредненного уравнения (1.17). Этим исчерпан случай слабой сходимости правых частей.

Изучим случай сильной сходимости $f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x,y)$. Для этого рассмотрим второй вариант задачи (2.1), в котором решение обозначено через $v^{\varepsilon,h}$, а правая часть — через $z^{\varepsilon,h}$, т.е.

$$v^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} (Ae(v^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + v^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} z^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2.$$

Полагая здесь $\varphi = u^{\varepsilon,h}$, а в (2.1) $\varphi = v^{\varepsilon,h}$, получаем формулу Грина–Бетти

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} v^{\varepsilon,h} \cdot f^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h.$$

Считаем, что $z^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} z$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\square} v \cdot f dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot z dx d\mu. \quad (4.13)$$

Здесь мы воспользовались сильной сходимостью $f^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} f$ (см. (2.7)), слабой сходимостью $v^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} v$, где v — решение усредненного уравнения, а также формулой Грина–Бетти, связывающей решения u, v усредненного уравнения. Поскольку $z^{\varepsilon,h}$ — произвольная слабо двухмасштабно сходящаяся последовательность, то равенство (4.13) дает искомую сильную двухмасштабную сходимость $u^{\varepsilon} \xrightarrow{2} u$ (см. (2.7)).

Сходимость энергий устанавливается теперь совсем просто. Из (2.2) и (2.8) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_{\varepsilon}^h + \int_{\Omega} \int_{\square} u \cdot u dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot u dx d\mu.$$

Сравнивая это равенство с энергетическим равенством (1.18), получаем (1.19). Теорема доказана.

Теперь обратимся к исходной задаче (1.2) с гладкой правой частью f . Компонента u^0 является решением эллиптической задачи (1.15)₁ и поэтому $u^0 \in C(\overline{\Omega})^2$. Тогда из представления (1.15)₂ следует, что выполнены условия леммы 2.6 и сильная сходимость $u^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} u$ влечет соотношение (1.6). Тем самым и теорема 1.3 доказана.

Наконец рассмотрим задачу теории упругости в статической постановке. Запишем уравнение (1.21) в виде

$$u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} f^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^2, \quad (4.14)$$

где правая часть $f^{\varepsilon,h}$ зависит от ε, h .

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x,y)$. Тогда имеет место слабая двухмасштабная сходимость (3.1) и предельная функция $u(x,y) = u^0(x) + \chi(x,y)$ есть решение усредненной задачи

$$u \in V, \quad \int_{\Omega} A^{\text{hom}} e(u^0) \cdot e(\varphi^0) dx + \frac{\theta^2}{3} \int_{\Omega} \int_{\square} \rho \chi'' \cdot \psi dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\square} f \cdot \varphi dx d\mu \\ \forall \varphi = \varphi^0 + \psi \in V. \quad (4.15)$$

Если сходимость правых частей является сильной двухмасштабной, т.е. $f^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} f(x,y)$, то сходимость решений становится также сильной двухмасштабной. При этом имеет место сходимость упругих энергий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Корна (1.22) для решений $u^{\varepsilon,h}$ выполнено условие ограниченности (2.3). Без потери общности считаем, что имеет место сходимость (3.1), причем $u \in V$ по теореме 3.1.

Формально задачу (4.15) можно записать в виде (2.1), а именно,

$$u^{\varepsilon,h} \in W_{\varepsilon,h}, \quad \int_{\Omega} (Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} g^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu_{\varepsilon}^h,$$

где $g^{\varepsilon,h} = u^{\varepsilon,h} + f^{\varepsilon,h}$. Поскольку $g^{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} g(x, y) = u(x, y) + f(x, y)$, то по теореме 4.3 предельная функция u есть решение усредненной задачи (4.15). Этим исчерпан случай слабой сходимости правых частей.

Сильная сходимость $u^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} u$, а также сходимость энергий устанавливаются в точности так же, как и в теореме 4.3. Теорема доказана.

§ 5. Приложение: некоторые вспомогательные вопросы

5.1. Начнем с некоторых неравенств в единичном квадрате $\square = (0, 1)^2$.

ЛЕММА 5.1. *Справедливо неравенство*

$$\int_{\square} |\nabla v|^2 dy \leq c \left(\int_{\square} e(v) \cdot e(v) dy + \int_{\square} |v_2|^2 dy \right), \quad v \in C^{\infty}(\square)^2. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допуская, что эта оценка неверна, найдем гладкие векторы v^k такие, что

$$\int_{\square} |\nabla v^k|^2 dy = 1, \quad \int_{\square} (e(v^k) \cdot e(v^k) + |v_2^k|^2) dy \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Без потери общности предполагаем, что $\int_{\square} v_1^k dy = 0$. Последовательность v^k ограничена в $H^1(\square)^2$ и можно считать ее слабо сходящейся, т.е. $v^k \rightharpoonup v$, $\nabla v^k \rightharpoonup \nabla v$ в $L^2(\square)$. Тогда из (5.2) имеем

$$e(v) = 0, \quad v_2 = 0, \quad \int_{\square} v_1 dy = 0.$$

Отсюда получаем, что $v = 0$. С другой стороны, из классического неравенства Корна

$$\int_{\square} |\nabla v|^2 dy \leq c_1 \int_{\square} (e(v) \cdot e(v) + v \cdot v) dy$$

следует, что $\int_{\square} |v^k|^2 \geq c_1/2 > 0$ при достаточно большом k , что противоречит сильной сходимости $v^k \rightarrow 0$ в $L^2(\square)$. Лемма доказана.

Рис. 4.

ЛЕММА 5.2. Пусть T_1, T_2 – две полосы ширины h , примыкающие к левой и правой сторонам квадрата $\square$ (см. рис. 4). Тогда

$$\int_{\square} |\nabla v|^2 dy \leq c \left(\int_{\square} e(v) \cdot e(v) dy + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \int_{T_i} |v_2|^2 dy \right), \quad v \in C^\infty(\square)^2, \quad (5.3)$$

причем константа c не зависит от h .

Доказывается эта лемма тем же способом, что и лемма 5.1, с использованием стандартных свойств следа функций из $H^1(\square)$.

Ниже удобно считать, что стержни (полосы) имеют толщину h , а не $2h$, как это было в основном тексте.

Рассмотрим полосу $I^h = [0, 1] \times [0, h]$.

Делаем стандартную в теории пластин замену

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = hy_2, \quad u_1 = v_1, \quad u_2 = h^{-1}v_2, \quad (5.4)$$

в результате которой неравенство (5.1) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{I^h} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + h^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + h^4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx \\ & \leq c \int_{I^h} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + h^4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + h^2 u_2^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h^2 \int_{I^h} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx \leq c \int_{I^h} (e(u) \cdot e(u) + h^2 u_2^2) dx,$$

а поскольку

$$\int_{I^h} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx \leq \int_{I^h} e(u) \cdot e(u) dx,$$

то получаем оценку

$$h^2 \int_{I^h} |\nabla u|^2 dx \leq c \int_{I^h} (e(u) \cdot e(u) + h^2 u_2^2) dx.$$

Для полосы $\varepsilon I^h = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon h]$ соответствующая оценка, получающаяся гомотетией, имеет вид

$$h^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u|^2 dx \leq c \int_{\varepsilon I^h} \left(e(u) \cdot e(u) + \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 u_2^2 \right) dx. \quad (5.5)$$

Из этой оценки следует оценка (3.23), использованная для вывода условий закрепления в узлах. Действительно, достаточно просуммировать оценки вида (5.5) по всем элементарным полоскам εI^h , которые принадлежат $\Omega \cap F_\varepsilon^h$.

5.2. Из оценки (5.3), сделав согласованную замену (5.4) функции v на функцию u и переменной y на переменную x , выводим оценку на полосе I^h :

$$h^2 \int_{I^h} |\nabla u|^2 dx \leq c \left(\int_{I^h} e(u) \cdot e(u) dx + h \sum_{i=1}^2 \int_{Q_h^i} |u_2|^2 dx \right),$$

где Q_n^1, Q_h^2 — квадраты со стороной h , примыкающие к торцам полосы I^h (см. рис. 5).

Рис. 5.

Отсюда гомотетией получаем оценку

$$h^2 \int_{\varepsilon I^h} |\nabla u|^2 dx \leq c \left(\int_{\varepsilon I^h} e(u) \cdot e(u) dx + \frac{h}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{\varepsilon h}^i} |u_2|^2 dx \right). \quad (5.6)$$

Нам понадобятся также некоторые элементарные вариации неравенства Фридрихса для скалярных функций.

i) Для гладкой в полосе I^h функции w выполнена оценка

$$\int_{I^h} |w|^2 dx \leq c \left(\int_{I^h} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_h^i} |w|^2 dx \right),$$

из которой гомотетией получаем оценку

$$\int_{\varepsilon I^h} |w|^2 dx \leq c \left(\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{\varepsilon h}^i} |w|^2 dx \right). \quad (5.7)$$

(В этой оценке в отличие от (5.6) можно ограничиться одним из двух квадратов.)

ii) Если P — горизонтальная полоса ширины t , пересекающая область Ω , то для $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_P |w|^2 dx \leq d \int_P \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx, \quad (5.8)$$

где d — диаметр области Ω . Кроме того, для любого квадрата Q_t со стороной t , принадлежащего полосе P ,

$$\int_{Q_t} |w|^2 dx \leq td \int_P \left| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|^2 dx. \quad (5.9)$$

5.3. Приступим непосредственно к доказательству неравенства Корна (1.22) для модельной сетки. Для ясности проведем все рассуждения для случая квадратной сетки.

Квадратная сетка составлена из горизонтальных полос $P = P_j$ и вертикальных полос $S = S_j$, имеющих толщину $t = \varepsilon h$. Эти полосы пересекаются по квадратам Q_t со стороной $t = \varepsilon h$.

Рассмотрим отдельную горизонтальную полосу P . Для компоненты u_1 по неравенству Фридрихса имеем

$$\int_P |u_1|^2 dx \leq d \int_P \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 dx \leq d \int_P e(u) \cdot e(u) dx. \quad (5.10)$$

Чтобы оценить компоненту u_2 , выделим на полосе фрагмент типа εI^h (см. рис. 6).

Рис. 6.

Из (5.7), (5.6) получим

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon I^h} |u_2|^2 dx &\leq c \left(\varepsilon^2 \int_{\varepsilon I^h} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{\varepsilon h}^i} |u_2|^2 dx \right) \\ &\leq c_1 \left(\left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 \int_{\varepsilon I^h} e(u) \cdot e(u) dx + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{\varepsilon h}^i} |u_2|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Согласно оценке вида (5.9) для вертикальных полос, пересекающих $Q_{\varepsilon h}^1$, $Q_{\varepsilon h}^2$, и функции $w = u_2$ имеем

$$\frac{1}{h} \int_{Q_{\varepsilon h}^1} |u_2|^2 dx + \frac{1}{h} \int_{Q_{\varepsilon h}^2} |u_2|^2 dx \leq 2d\varepsilon \left(\int_{S_1} e(u) \cdot e(u) dx + \int_{S_2} e(u) \cdot e(u) dx \right),$$

где S_1 , S_2 – соответствующие вертикальные полосы. Отсюда суммированием по всем фрагментам типа εI^h , на которые можно разбить полосу P , получаем

$$\int_P |u_2|^2 dx \leq c_2 \left(\int_P e(u) \cdot e(u) dx + \varepsilon \int_{\Omega} e(u) \cdot e(u) dx \right).$$

Теперь просуммируем полученные неравенства по всем горизонтальным полоскам и учтем, что число этих полосок имеет порядок ε^{-1} . В результате получим оценку

$$\sum \int_{P_j} |u_2|^2 dx \leq c_2 \int_{\Omega} e(u) \cdot e(u) dx.$$

Отсюда и из (5.10), а также аналогичных оценок для вертикальных полос S_j следует неравенство (1.22).

Отметим, что много ценного материала по неравенствам Корна и вообще задачам теории упругости на стержневых структурах имеется в работах С. А. Назарова (см. [6]–[8]). Разнообразные неравенства Корна на тонких структурах, в том числе те, что использованы при изучении задач (1.21), (2.1), можно найти в работе авторов [9].

5.4. Перейдем к обсуждению теоремы 3.7 из теории двухмасштабной сходимости.

Если μ – периодическая мера в $\mathbb{R}^N$, то соотношение $\operatorname{div} b = a$ (в смысле меры μ) означает, что $a \in L^2(\square, d\mu)$, $b \in L^2(\square, d\mu)^N$ и

$$\int_{\square} b \cdot \nabla \varphi d\mu = - \int_{\square} a \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square).$$

В частности, если $a = 0$, то вектор b соленоидален, $b \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$.

Пусть μ^h , μ – периодические меры, $\mu^h \rightharpoonup \mu$. Напомним (см. [5]) так называемые аппроксимативные условия.

i) Для любой функции a из некоторого плотного в $L^2(\square, d\mu)/\mathbb{R}^1$ множества найдутся $a^h \in L^2(\square, d\mu^h)$, $b^h \in L^2(\square, d\mu)^N$ такие, что $\operatorname{div} b^h = a^h$ (в смысле меры μ^h), $a^h \rightarrow a$, $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\square, d\mu^h)$.

ii) Для любого вектора $b \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$ найдется вектор $b^h \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ такой, что $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\square, d\mu^h)$ (сильная аппроксимируемость соленоидальных векторов).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть μ^h , μ – периодические борелевы меры, $\mu^h \rightharpoonup \mu$, которые связаны аппроксимативными условиями i), ii). Пусть, кроме того, для предельной меры μ справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_{\square} \varphi^2 d\mu \leq C \int_{\square} |\nabla \varphi|^2 d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad \int_{\square} \varphi d\mu = 0. \quad (5.11)$$

Тогда для последовательности скалярных функций $v^{\varepsilon, h}$, удовлетворяющей условию ограниченности (3.21), выполнено свойство (3.22).

В классическом случае, когда $d\mu^h = dy$ – мера Лебега, эта теорема доказана в [10], [11].

Случай постоянной борелевой меры ($\mu^h = \mu$) рассмотрен в [12; теорема 4.5]. Доказательство общей версии проводится аналогично с использованием аппроксимативных условий.

5.5. Обратимся непосредственно к теореме 3.7. Неравенство Пуанкаре (5.11) есть следствие связности сингулярной сетки. Поэтому остается проверить аппроксимативные условия i), ii).

Начнем с проверки условия ii). Пусть b – соленоидальный вектор на сетке F , $b \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu)$. Непосредственно из определения

$$\int_{\square} b \cdot \nabla \varphi \, d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$$

легко получить (см. [11; §9]) условия, которым вектор b удовлетворяет на каждом звене и в каждом узле сетки F .

Пусть $I_1, \dots, I_m$ – все звенья, сходящиеся в узле O , $\tau_1, \dots, \tau_m$ – единичные направляющие векторы этих звеньев, выбранные выходящими из узла. Тогда

$$\begin{aligned} b|_{I_i} &= b_i \tau_i, \quad b_i = \text{const}, \\ \sum_{i=1}^m b_i &= 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Для построения вектора $b^h \in V_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ решим вспомогательную задачу в некоторой окрестности Q_h каждого узла O . Определим окрестность Q_h как объединение круга радиуса h с центром в узле O и m полос, у которых ширина $-2h$, длина $-4h$, а средняя линия лежит на I_i , и пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ – внешние торцы этих полос (см. рис. 7). В области Q_h рассмотрим следующую задачу Неймана

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla u) &= 0 \quad \text{в } Q_h; \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на остальной части } \partial Q_h, \end{aligned}$$

где n – единичная внешняя нормаль к ∂Q_h .

Рис. 7. Область Q_h

Разрешимость этой задачи следует из (5.12), и несложные вычисления приводят к оценке

$$\int_{Q_h} |\nabla u|^2 \, dx \leq ch^2.$$

Положим

$$b^h = \begin{cases} \nabla u & \text{в } Q_h; \\ b_h & \text{вне } Q_h, \end{cases}$$

где b_h – естественное продолжение вектора b . Тогда $b^h \in \mathcal{V}_{\text{sol}}(\square, d\mu^h)$ и $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\square, d\mu^h)$.

Тем самым условие ii) проверено.

Обратимся к проверке условия i).

Легко видеть, что в пространстве $L^2(\square, d\mu)/\mathbb{R}^1$ плотны гладкие функции, равные нулю в окрестности узлов. Пусть a – такая периодическая функция. Из неравенства Пуанкаре (5.11) следует, что задача

$$v \in H_{\text{per}}^1(\square, d\mu), \quad \operatorname{div} \nabla v = a$$

имеет решение. Положим $b = \nabla v$.

Вне области Q_h функцию a и вектор b продолжим естественным образом. В окрестности узлов вектор b соленоидален, и его можно продолжить в область Q_h указанным выше способом.

Отметим, что вопросы, связанные с ашпроксимативными свойствами, рассматривались в работе [13].

Список литературы

1. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
3. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
4. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Докл. АН. 2001. Т. 380. № 6. С. 741–745.
5. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 81–148.
6. Nazarov S. A. Korn's inequalities for functions of spatial bodies and thin rods // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. № 3. P. 219–243.
7. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Произвольные плоские системы анизотропных балок // Труды МИРАН. 2002. Т. 236. С. 234–261.
8. Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. Т. 2. № 8. С. 19–24.
9. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О неравенствах Корна на тонких периодических структурах // Докл. РАН. 2003. V. 388. № 5. P. 588–592.
10. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
11. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
12. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
13. Chechkin G. A., Jikov V. V., Lukkassen D., Piatnitski A. L. On homogenization of networks and junctions // Asymptot. Anal. 2002. V. 30. № 1. P. 61–80.

Владимирский государственный педагогический университет;
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru, leonowmw@cs.msu.ru

Поступила в редакцию
03.06.2002