Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Митина, В. М. Тюрин, К обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными в пространствах Гёльдера и Соболева, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 5, 97–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:24:00

УДК 517.98

О. А. Митина, В. М. Тюрин

К обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными в пространствах Гёльдера и Соболева

В работе изучается одновременная обратимость линейных дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами в пространствах векторных функций Гёльдера и Соболева, а также в некоторых других функциональных пространствах.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Рассматривается скалярный линейный дифференциальный оператор

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N},$$

с частными производными $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Коэффициенты A_α являются равномерными почти периодическими функциями на $\mathbb{R}^n$ класса C^1 , т.е. $A_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Оператор P предполагается эллиптическим на $\mathbb{R}^n$:

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \xi^\alpha \right| \geq \varepsilon_0 |\xi|^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

положительная постоянная ε_0 не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ – пространство Лебега, нормированное стандартным образом; $H^m = H^m(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева, норма в котором обозначается через $\|\cdot\|_m$; $S^2 = S^2(\mathbb{R}^n)$ – пространство Степанова измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{0s} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{K(x)} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $K(x)$ – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x ; H^{ms} – пространство Соболева–Степанова, состоящее из функций $u \in S^2$, у которых обобщенные производные $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq m$ (см. [1; гл. 1, § 5]), принадлежат пространству S^2 , с нормой

$$\|u\|_{ms} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0s};$$

$C^{m+\gamma} = C^{m+\gamma}(\mathbb{R}^n)$ – пространство Гёльдера функций $u(x)$, ограниченных и непрерывных вместе со своими производными $D^\alpha u$ до порядка m включительно на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а производные $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| = m$ равномерно непрерывны по Гёльдеру с показателем $\gamma \in (0, 1)$. Норма в $C^{m+\gamma}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\|u\|_{m+\gamma} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_C + \langle u \rangle_{m+\gamma}, \\ \|D^\alpha u\|_C &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^\alpha u(x)\|, \\ \langle u \rangle_{m+\gamma} &= \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \neq y} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|}{|x - y|^\gamma}.\end{aligned}$$

Далее полагаем $C^\gamma = C^{0+\gamma}$, $C^0 = C$, $C^m = C^{m+0}$, т.е. дополнительные ограничения на производные порядка m функций $u \in C^m$ отсутствуют, $\langle u \rangle_{0+\gamma} = \langle u \rangle_\gamma$, $L^2 = H^0$, $S^2 = H^{0s}$.

В работе установлена одновременная обратимость операторов $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$, $P: H^{ms} \rightarrow S^2$, при этом существенно используются специальные коэрцитивные оценки. Большинство неравенств для дифференциальных операторов носят качественный характер. Эквивалентность свойств обратимости оператора P в L^2 и пространстве Безикевича B^2 изучалась в [2].

§ 2. Обратимость в пространстве Степанова.

Аналог теоремы Мухамадиева

Рассмотрим

$$\tilde{P} = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{A}_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $\tilde{A}_\alpha(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} A_\alpha(x + h_j)$ в C , $h_j \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| \leq m$. Операторы $\tilde{P}$ называются *предельными операторами* и играют важную роль в теории Фавара и обратимости линейных дифференциальных операторов (см., например, работы [3]–[7]).

Следующая теорема является аналогом теоремы Мухамадиева [8]. В ней старшие коэффициенты A_α , $|\alpha| = m$, оператора P считаются постоянными.

Далее будем пользоваться удобным определением корректности [9] оператора $P: G \rightarrow F$. Последний называется *корректным*, если $\|u\|_G \leq k \|Pu\|_F$, где $k = k(P, G, F) > 0$ не зависит от $u \in G$.

ТЕОРЕМА 1. *Если любое уравнение $\tilde{P}u = 0$ не имеет ненулевых решений в H^{ms} , то оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ обратим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем корректность оператора $P: H^{ms} \rightarrow S^2$. Допустим противное. Тогда можно указать такую последовательность $u_j \in H^{ms}$, что $\|u_j\|_{ms} = 1$, $\|Pu_j\|_{0s} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{K(h_j)} |D^\alpha u_j(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq a_0$$

при некоторых $h_j \in \mathbb{R}^n$ и $a_0 > 0$, a_0 не зависит от h_j , u_j . Положим $v_j(x) = u_j(x + h_j)$. Очевидно,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{K(h_j)} |D^\alpha v_j(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq a_0. \quad (1)$$

Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $r_j \rightarrow \infty$. Рассмотрим сужения функций v_j (с сохранением обозначений) на шар $B(0, r_1) \subset \mathbb{R}^n$, которые, очевидно, принадлежат пространству Соболева $H^m(B(0, r_1))$. Так как множество v_j ограничено в $H^m(B(0, r_1))$, то оно предкомпактно в пространстве $H^{m-1}(B(0, r_1 - \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, $r_1 > \varepsilon$ [10; §113, теорема 1]. Следовательно, найдется последовательность натуральных чисел $j_1(1) < \dots < j_1(\nu) < \dots$ такая, что сужения функций $v_{j_1(\nu)}$ на шар $B(0, r_1)$ сходятся в $H^{m-1}(B(0, r_1 - \varepsilon))$ при $\nu \rightarrow \infty$. Аналогичным образом строим подпоследовательность $j_2(\nu)$ последовательности $j_1(\nu)$, для которой сужения функций $v_{j_2(\nu)}$ на шар $B(0, r_2)$ сходятся в пространстве $H^{m-1}(B(0, r_2 - \varepsilon))$. Продолжая этот процесс, определим диагональную последовательность $j_\nu(\nu)$. Сужения функций $v_{j_\nu(\nu)}$ на любую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ сходятся в пространстве $H^{m-1}(\Omega)$. Но поскольку последовательность $v_{j_\nu(\nu)}$ ограничена в $H^{(m-1)s}$, то она локально сходится в $H^{(m-1)s}$. Итак, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность функций v_j локально сходится в $H^{(m-1)s}$.

Из эллиптичности оператора P следует коэрцитивная оценка

$$\|u\|_m \leq c_1 \|u\|_0 + c_1 \|Pu\|_0 \quad (2)$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от $u \in H^m$. Неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$\|u\|_{ms} \leq c_2 \|u\|_{0s} + c_2 \|Pu\|_{0s}, \quad (3)$$

$u \in H^{ms}$, $c_2 > 0$ не зависит от u . Применим оценку (3) к функции $\varphi(x, \xi, T)u(x)$, где $u \in H^{ms}$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ — гладкая финитная функция с носителем в шаре $B(\xi, 2T)$, причем $\varphi(x, \xi, T) = 1$ при $x \in B(\xi, T)$ и $|D^\alpha \varphi| \leq b_1 T^{-|\alpha|}$ (b_1 не зависит от $T > 1$, $|\alpha| \neq 0$). В результате получим локальное равномерное коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{|x-\xi| \leq T} \left(\int_{K(x)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq c_2 \sup_{|x-\xi| \leq 2T+3\sqrt{n}/2} \left(\int_{K(x)} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \frac{b_1 c_2}{T} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{|x-\xi| \leq 2T+3\sqrt{n}/2} \left(\int_{K(x)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ c_2 \sup_{|x-\xi| \leq 2T+3\sqrt{n}/2} \left(\int_{K(x)} |Pu(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad |\alpha| = m, \end{aligned} \quad (4)$$

в произвольной точке $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Так как последовательность v_j локально сходится в $H^{(m-1)s}$, то согласно (4) производные $D^\alpha v_j$ порядка m локально сходятся в L^2 . Следовательно, последовательность $v_j \in H^{ms}$ локально сходится в H^{ms} к некоторой функции $v(x)$. Из (1) имеем

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{K(0)} |D^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq a_0. \quad (5)$$

Обозначим

$$P_h = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x+h) D^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

и будем считать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_\alpha(x+h_j) = \tilde{A}_\alpha(x).$$

Поскольку $P_{h_j} v_j = f_j(x+h_j)$ и оператор $P: H^{ms} \rightarrow S^2$ локально непрерывен, то $\tilde{P}v = 0$. Согласно (5) $v \neq 0$, что противоречит условию теоремы, т.е. оператор $P: H^{ms} \rightarrow S^2$ корректен.

2) Поскольку $C^{m+\gamma} \subset H^{ms}$, то предельные уравнения $\tilde{P}u = 0$ не имеют ненулевых решений в $C^{m+\gamma}$. По теореме Мухамадиева [8] оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ обратим.

Возьмем произвольную функцию $f \in L^2$ и рассмотрим свертку

$$\rho_\varepsilon * f = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) f(y) dy,$$

где усредняющая функция $\rho_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть гладкая (бесконечно дифференцируемая) финитная функция, носитель которой принадлежит шару $B(0, \varepsilon)$, и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \rho_\varepsilon(x) \leq \frac{r_0}{\varepsilon^n}, \quad \varepsilon > 0,$$

постоянная $r_0 > 0$ не зависит от ε и x . Как известно, $\rho_\varepsilon * f \in L^2$ и $\rho_\varepsilon * f \rightarrow f$ в L^2 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Полунорма $\langle \rho_\varepsilon * f \rangle_\gamma$ допускает оценку

$$\langle \rho_\varepsilon * f \rangle_\gamma \leq 2 \|\rho_\varepsilon\|_0 + \|\rho_\varepsilon\|_C \beta_n^{1/2} (1+\varepsilon)^{n/2} \|f\|_0,$$

β_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $\rho_\varepsilon * f \in L^{2,\gamma}$. Пространство $L^{2,\gamma}$ состоит из функций $u \in L^2$, у которых

$$\|u\|_{L^{2,\gamma}}^2 = \|u\|_0^2 + \langle u \rangle_\gamma < \infty.$$

Так как $L^{2,\gamma}$ вложено в C^γ [11], то свертка $\rho_\varepsilon * f \in C^\gamma$. В силу обратимости оператора $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ уравнение $Pu = \rho_\varepsilon * f$ имеет единственное решение $u_\varepsilon \in C^{m+\gamma}$. Покажем, что функция $u \in H^m$. Согласно [12] корректность оператора $P: H^{ms} \rightarrow S^2$ равносильна корректности оператора $P: H^m \rightarrow L^2$. Для

корректного оператора $P: H^m \rightarrow L^2$ имеет место локальная равномерная коэрцитивная оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x-\xi| \leq T} |D^\alpha u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq a_1 \left(\int_{|x-\xi| \leq 2T} |Pu_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{a_1}{T} \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x-\xi| \leq 2T} |D^\alpha u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (6) \end{aligned}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $a_1 > 0$ не зависит от T и u_ε [12]. Неравенство [6] носит рекуррентный характер. Из него по индукции находим

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x-\xi| \leq T} |D^\alpha u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \|Pu_\varepsilon\|_0 \sum_{v=0}^{t-1} a_1^{v+1} 2^{-C_v^2} T^{-v} \\ & \quad + a_1^t 2^{-C_s^2} T^{-s} \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x-\xi| \leq 2^t T} |D^\alpha u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (7) \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{N}$, C_v^2 – биномиальные коэффициенты. Выберем t так, чтобы при любом $T > \max\{a_1, \sqrt{n}\}$ выполнялось неравенство

$$\frac{\beta_n^{1/2} 2^{tn/2} T^{n/2}}{2C_t^2 T^t} < 1.$$

Тогда в силу (7) имеем

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x-\xi| \leq T} |D^\alpha u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq |D^\alpha u_\varepsilon|_{C^m} + \left(\frac{2KT}{2T-K} + \frac{K^3}{4T^2} \right) \|Pu_\varepsilon\|_0.$$

Отсюда следует $u_\varepsilon \in H^m$. Переходя к пределу в неравенстве (7) при $T \rightarrow \infty$, получаем

$$\|u_\varepsilon\|_m \leq a_1 \|Pu_\varepsilon\|_0.$$

Если $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то последовательность u_{ε_j} фундаментальна в H^m , так как

$$\|u_{\varepsilon_j} - u_{\varepsilon_i}\|_m \leq a_1 \|\rho_{\varepsilon_j} * f - \rho_{\varepsilon_i} * f\|_0.$$

В силу полноты пространства H^m в H^m существует предел $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_j} = u$. Поскольку оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ непрерывен, то $Pu = f$. Это значит, что оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ обратим. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 оператор $P: H^{m,s} \rightarrow S^2$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимость оператора $P: H^{m,s} \rightarrow S^2$ эквивалентна обратимости оператора $P: H^m \rightarrow L^2$ [12].

§ 3. Некоторые вспомогательные результаты

Пусть F — одно из пространств C, S^2, L^2 . Тогда W^m обозначает одно из пространств $C^m, H^{m,s}, H^m$. Рассмотрим на некотором линейном многообразии $V^m \subset W^m$ полунорму $\langle u \rangle$.

Оператор $P: W^m \rightarrow F$ назовем ε -коэрцитивным относительно полунормы $\langle \cdot \rangle$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $d(\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^m} \leq \varepsilon \langle u \rangle + d(\varepsilon) \|Pu\|_F$$

для всех $u \in V^m$.

ЛЕММА 1 [11]. Оператор $P: C^m \rightarrow C$ ε -коэрцитивен относительно полунормы $\langle \cdot \rangle_{m,\gamma}$ тогда и только тогда, когда оператор $P: H^{m,s} \rightarrow S^2$ ε -коэрцитивен относительно этой же полунормы.

ЛЕММА 2 [11]. Если любое однородное уравнение $\tilde{P}u = 0$ не имеет ненулевых решений в $C^{m+\gamma}$, то оператор $P: C^m \rightarrow C$ является ε -коэрцитивным относительно полунормы $\langle \cdot \rangle_{m,\gamma}$.

ЛЕММА 3. Из обратимости оператора $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ следует обратимость всех предельных операторов $\tilde{P}: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ обратим и норма обратного оператора $P^{-1}: C^\gamma \rightarrow C^{m+\gamma}$ равна k_γ . Пространства $C^{m+\gamma}$ и C^γ инвариантны относительно оператора сдвига $S(h)u = u(x+h)$. Оператор

$$P_h = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x+h) D^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

можно записать в виде

$$P_h = S(h)PS(-h).$$

Отсюда вытекает обратимость операторов $P_h: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$. Поскольку

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}} \leq k_\gamma \|P_h u\|_{C^\gamma},$$

то операторы $P_h: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ равномерно обратимы относительно $h \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим произвольный предельный оператор $\tilde{P}$ с коэффициентами $\tilde{A}_\alpha(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} A_\alpha(x+h_j)$. Из равенства $P_{h_j}u = \sum_{|\alpha| \leq m} (A_\alpha(x+h_j) - \tilde{A}_\alpha(x))D^\alpha u(x) + \tilde{P}u$, $u \in C^{m+\gamma}$, нетрудно получить оценку

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}} \leq 2k_\gamma \|\tilde{P}u\|_{C^\gamma}. \quad (8)$$

Из неравенства (8) следует, что последовательность $u_j = P_{h_j}^{-1}f$ при любой функции $f \in C^\gamma$ имеет в $C^{m+\gamma}$ предел $u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$, который является решением уравнения $\tilde{P}u = f$. Вместе с (8) это означает обратимость оператора $\tilde{P}: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функция $u \in S^2$ имеет частные производные $\partial u / \partial x_i \in L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $u \in L^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свертку $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$. Из оценки

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \frac{r_0 \beta_n}{\text{mes } B(x, \varepsilon)} \int_{B(x, \varepsilon)} |u(x) - u(z)| dz$$

следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u(x) - u_\varepsilon(x)| = 0$$

почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Так как $|\partial u_\varepsilon / \partial x_i| \leq \|\partial u / \partial x_i\|_{L^\infty} = c_3$, то $|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq c_3|x - y|$. В произвольной точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(\xi)| &\leq \sup_{x, y \in B(\xi, r)} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| + \frac{1}{\text{mes } B(\xi, r)} \int_{B(\xi, r)} |u(x)| dx \\ &\leq 2c_3r + r^{-n/2} \beta_n^{-n/2} \|u\|_{0s}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Поэтому почти во всех точках $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|u(x)| \leq 2c_3r + r^{-n/2} \beta_n^{-n/2} \|u\|_{0s}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 4 верна при любом $p \geq 1$.

Через H_∞^{ms} обозначим линейное многообразие функций $u \in H^{ms}$, у которых производные $D^\alpha u \in L^\infty$ при $|\alpha| = m$. Положим

$$\langle u \rangle_m^\Omega = \sum_{|\alpha|=m} \text{ess sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in H_\infty^{ms}.$$

ЛЕММА 5. Пусть предельные уравнения $\tilde{P}u = 0$ не имеют ненулевых решений в H_∞^{ms} . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $d = d(\varepsilon)$, что

$$\|u\|_{ms} \leq \varepsilon \langle u \rangle_m^{B(0, d)} + d \|Pu\|_{0s} \quad (9)$$

при условии $u \in H_\infty^{ms}$, а оператор P равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предположить противное, то можно найти число $\delta_0 > 0$ и последовательность $u_j \in H^{ms}$ такие, что $\|u_j\|_{ms} = 1$, $\|Pu_j\|_{0s} \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, $\langle u_j \rangle_m^{B(0, j)} \leq \delta_0$. Согласно доказательству теоремы 1 из последовательности u_j выделим подпоследовательность u_{j_v} , локально сходящуюся в H^{ms} к некоторой функции $\nu \in H^{ms}$, при этом $\nu \neq 0$ и $\tilde{P}\nu = 0$. В любой точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |D^\alpha \nu(\xi)| &\leq \varepsilon^{-n} \int_{K(\xi, \varepsilon)} |D^\alpha \nu(x) - D^\alpha \nu(\xi)| dx + \delta_0 \\ &\quad + \varepsilon^{-n/2} \int_{K(\xi, \varepsilon)} |D^\alpha \nu(x) - D^\alpha u_{j_v}(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

где $K(\xi, \varepsilon)$ — куб с центром в точке ξ и ребром длины ε . Устремляя $v \rightarrow \infty$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем для почти всех ξ неравенство $|D^\alpha \nu(\xi)| \leq \delta_0$, т.е. $D^\alpha \nu \in L^\infty$, $|\alpha| \leq m$, $\nu \in H_\infty^m$. Так как $\nu \neq 0$, то получили противоречие с исходными данными. Лемма доказана.

Коэрцитивное неравенство вида

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}} \leq \lambda(\|u\|_C + \|Pu\|_{C^\gamma}), \quad (10)$$

$\lambda > 0$, $u \in C^{m+\gamma}$, обычно называется *оценкой Шаудера для оператора* $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$.

ЛЕММА 6. *Для того чтобы имела место оценка Шаудера (10), необходимо, чтобы оператор P был равномерно эллиптичен в $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \geq 1$, $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$, h — скаляр, $u = e^{isx}h$. Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{m,\gamma} &= s^{m+\gamma} |\xi|^\gamma \langle e^{it} \rangle_\gamma \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha| |h|, \\ \|Pu\|_C &\leq (a_0^{(1)} s^m + \dots + a_m^{(1)}) |h|, \\ \langle Pu \rangle_\gamma &\leq s^{m+\gamma} |\xi|^\gamma \langle e^{it} \rangle_\gamma \left| \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \xi^\alpha h \right| + (b_0^{(1)} s^{m-1+\gamma} + \dots + b_{m-1}^{(1)} s^\gamma) |h| \\ &\quad + (b_0^{(2)} s^{m-1} + \dots + b_{m-1}^{(2)}) |h|, \end{aligned}$$

причем коэффициенты $a_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, m$, и $b_j^{(i)}$, $i = 1, 2$, $j = 0, \dots, m-1$, не зависят от s , x , h . Согласно (10) имеем

$$\begin{aligned} s^{m+\gamma} |\xi|^\gamma \langle e^{it} \rangle_\gamma \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha| |h| &\leq \lambda |h| + \lambda s^{m+\gamma} |\xi|^\gamma \langle e^{it} \rangle_\gamma \left| \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \xi^\alpha h \right| \\ &\quad + \lambda (b_0^{(1)} s^{m-1+\gamma} + \dots + b_{m-1}^{(1)} s^\gamma) |h| + \lambda (b_0^{(2)} s^{m-1} + \dots + b_{m-1}^{(2)}) |h| \\ &\quad + \lambda (a_0^{(1)} s^m + \dots + a_m^{(1)}) |h|. \end{aligned}$$

Разделим это неравенство на $s^{m+\gamma} |\xi|^\gamma \langle e^{it} \rangle_\gamma$, $\xi \neq 0$, и затем перейдем к пределу при $s \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha| |h| \leq \lambda \left| \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \xi^\alpha h \right|.$$

Отсюда уже несложно вывести равномерную эллиптичность оператора P в $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

§4. Эквивалентность свойств обратимости линейных дифференциальных операторов в пространствах Гёльдера и Соболева

Ниже через $H^{m+\gamma,s}$ обозначается нормированное пространство функций $u \in H^{m,s}$ с конечной нормой $\|u\|_{H^{m+\gamma,s}} = \|u\|_{m,s} + \langle u \rangle_{m,\gamma}$. Пространство $H^{m+\gamma,s}$ вложено в $C^{m+\gamma}$ [11].

ТЕОРЕМА 2. *Операторы $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ и $P: H^m \rightarrow L^2$ обратимы одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обратим оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$. Обратимый оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ по теореме Банаха корректен, следовательно, для него справедлива оценка Шаудера. По лемме 6 оператор P равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$. По лемме 3 обратимы все предельные операторы $\tilde{P}: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$, следовательно, уравнения $\tilde{P}u = 0$ не имеют ненулевых решений в $C^{m+\gamma}$. Согласно лемме 2 оператор $P: C^m \rightarrow C$ ε -коэрцитивен относительно полунормы $\langle \cdot \rangle_{m,\gamma}$. По лемме 1 для любого $\eta > 0$ существует $d = d(\eta) > 0$ такое, что

$$\|u\|_{m,s} \leq \eta \langle u \rangle_{m,\gamma} + d(\eta) \|Pu\|_{0,s}, \quad (11)$$

если $u \in H^{m+\gamma,s}$.

Рассмотрим теперь ненулевое решение $u \in H_\infty^{m+\gamma,s}$ уравнения $Pu = 0$. Нетрудно проверить, что свертка $\rho_\varepsilon * u = u_\varepsilon \in H^{m+\gamma,s}$. Выберем $h \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{K(h)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \geq M_0 \|u\|_{m,s}. \quad (12)$$

Из (12) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,s} &\leq M_0^{-1} \delta(\varepsilon) + M_0^{-1} \|u_\varepsilon\|_{m,s}, \\ \delta(\varepsilon) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{K(h)} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Величина $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оценивая Pu_ε в S^2 , замечаем, что

$$Pu_\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m-1} A_\alpha \rho_\varepsilon * D^\alpha u - \rho_\varepsilon * A_\alpha D^\alpha u.$$

Отсюда получаем

$$\|Pu_\varepsilon\|_{0,s} \leq N_m^{1/2} r_{(\varepsilon)}^{1/2} \|u\|_{m,s}, \quad (14)$$

N_m — число производных порядка $|\alpha| \leq m$,

$$r(\varepsilon) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x-y| \leq \varepsilon} |A_\alpha(x) - A_\alpha(y)|.$$

По лемме 4 функция u и ее производные $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq m$, принадлежат пространству L^∞ . Это дает возможность получить оценку

$$\|Pu_\varepsilon\|_{C^\gamma} \leq a_2 \|u\|_{\infty, m}, \quad \|u\|_{\infty, m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\| < \infty,$$

постоянная $a_2 > 0$ не зависит от u, ε . Поскольку $u_\varepsilon \in C^{m+\gamma}$, то из последнего неравенства в силу обратимости оператора $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ имеем

$$\langle u \rangle_{m, \gamma} \leq a_2 k_\gamma \|u\|_{\infty, m}. \quad (15)$$

Неравенства (11), (13)–(15) приводят к следующей оценке:

$$\|u\|_{ms} \leq M_0^{-1} \delta(\varepsilon) + a_2 k_\gamma \eta \|u\|_{\infty, m} + d(\eta) M_0^{-1} r^{1/2}(\varepsilon) N_m^{1/2} \|u\|_{ms}. \quad (16)$$

Выберем η так, чтобы $8a_2 k_\gamma \eta \|u\|_{\infty, m} < \|u\|_{ms}$. Затем определим $\varepsilon > 0$ из условий $4M_0^{-1} \delta(\varepsilon) \leq \|u\|_{ms}$ и $4d(\eta) M_0^{-1} N_m^{1/2} r^{1/2}(\varepsilon) < 1$. Это можно сделать, так как $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда из (16) имеем $1 \leq \frac{3}{4}$, поскольку $u \neq 0$. Следовательно, уравнение $Pu = 0$ не имеет ненулевых решений в H_∞^{ms} . По лемме 3 все предельные уравнения $\tilde{P}u = 0$ также не имеют ненулевых решений в H_∞^{ms} . Поэтому справедлива лемма 5. В силу (9) если $u \in H_\infty^{ms}$, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|u\|_{ms} &\leq \eta \langle u \rangle_m^{B(0, d)} + d(\eta) \|P_h u\|_{0s}, \\ \|u\|_{ms} &\leq \eta \langle u \rangle_m^{B(0, d)} + d(\eta) \|\tilde{P}_h u\|_{0s}. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $u \in H^{ms}$, $\tilde{P}u = 0$, $u \neq 0$, $\left(\int_{K(\xi)} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{0s}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Будем считать также, что шар $B(0, d(1))$ и точка ξ принадлежат некоторому шару $B(0, R)$. Положим $u^h(x) = u(x - h)$, $T = T(h) = \frac{1}{2} \text{dist}(\xi + h, B(0, R)) > \max\{1, \sqrt{n}/2\}$. Функция $\nu_{T_\varepsilon}^h = u_\varepsilon^h(x) \varphi(x, \xi + h, T)$, где $u_\varepsilon^h(x) = (\rho_\varepsilon * u^h)(x)$, принадлежат пространству H_∞^{ms} . Очевидно, $\langle \nu_{T_\varepsilon}^h \rangle_m^{B(0, d(1))} = 0$. Применим неравенство (17) при $\eta = 1$ к функции $\nu_{T_\varepsilon}^h$

$$\|\nu_{T_\varepsilon}^h\|_{ms} \leq d(1) \|\tilde{P} \nu_{T_\varepsilon}^h\|_{0s} \leq d(1) \|\varphi \tilde{P} u_\varepsilon^h\|_{0s} + d(1) \|\tilde{Q}(u_\varepsilon^h, \varphi)\|_{0s}.$$

Из этих неравенств, огрубляя оценки слагаемых правой части, получаем

$$\|\nu_{T_\varepsilon}^h\|_{ms} \leq \left(d(1) N_m r(\varepsilon) + d(1) \frac{b_2}{T} \right) \|u\|_{ms}. \quad (18)$$

Так как оператор $\tilde{P}: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ обратим, то согласно лемме 6 оператор $\tilde{P}$ равномерно эллиптический на $\mathbb{R}^n$. Тогда имеет место коэрцитивное неравенство (3), из которого следует коэрцитивное неравенство в S^2 :

$$\|u\|_{ms} \leq c_4 \|u\|_{0s} + c_5 \|\tilde{P}u\|_{0s}, \quad (19)$$

$u \in H^{ms}$, постоянные $c_4 > 0$, $c_5 > 0$ не зависят от u . Учитывая выбор точки ξ , свойства функции $\varphi(x, \xi + h, T)$, на основании неравенств (18), (19) находим

$$\|u\|_{0s} \leq 2 \left(\int_{K(\xi+h)} |u^h(x) - u_\varepsilon^h(x)|^2 dx \right)^{1/2} + d(1) \left(N_m r(\varepsilon) + \frac{b_2}{T} \right) c_4 \|u\|_{0s}.$$

Точку h выберем таким образом, чтобы $4b_2c_4d(1) < T$. В этом случае

$$\|u\|_{0s} \leq 4c_4d(1)N_m r(\varepsilon)\|u\|_{0s} + 4 \left(\int_{K(\xi+h)} |u^h(x) - u_\varepsilon^h(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Так как $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и второе слагаемое в (20) также стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, то неравенство (20) противоречиво при малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, уравнение $\tilde{P}u = 0$ не имеет ненулевых решений в H^{ms} . Как отмечалось выше, обратимый оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$. По теореме 1 оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ обратим.

В другую сторону. Пусть известно, что оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ обратим. Так как оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ непрерывен, то его обратный оператор по теореме Банаха непрерывен и, значит, корректен с некоторой постоянной $k_1 = k(P, H^m, L^2) > 0$.

Возьмем ненулевое решение $u \in C^{m+\gamma}$ уравнения $Pu = 0$. Для него согласно (7) имеем неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x| \leq T} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} &\leq K_1^t 2^{-C_t^2} T^{-t} \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x| \leq 2T} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq k_1^t (2^t T)^{n/2} 2^{-C_t^2} T^{-t} \beta_n^{1/2} \|u\|_{C^m}. \end{aligned} \quad (21)$$

Считая T достаточно большим положительным числом, устремляем $t \rightarrow \infty$ в (21). В результате получаем

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{|x| \leq T} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} \leq 0.$$

Поскольку T произвольно, то из последнего неравенства заключаем, что $u(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Вместе с оператором $P: H^m \rightarrow L^2$ корректны все предельные операторы $\tilde{P}: H^m \rightarrow L^2$. Этот факт вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x-\xi| \leq T} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} &\leq a_2 \left(\int_{|x-\xi| \leq 2T} |\tilde{P}u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ a_2 \sup_{|x-\xi| \leq 2T} |A_\alpha(x+h_j) - \tilde{A}_\alpha(x)| \left(\int_{|x| \leq T} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u| \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \frac{a_3}{T} \max_\alpha \|A_\alpha\|_C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_0 + \frac{a_3}{T} \|\tilde{P}u\|_0. \end{aligned}$$

Постоянные $a_2 > 0$ и $a_3 > 0$ не зависят от u и T . По доказанному предельные уравнения $\tilde{P}u = 0$ не имеют ненулевых решений в $C^{m+\gamma}$. Так как корректный оператор $P: H^m \rightarrow L^2$ равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$ [11], то по теореме Мухамадиева [8] оператор $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$ обратим. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если при некоторых $\gamma_0 \in (0, 1)$ обратим оператор $P: C^{m+\gamma_0} \rightarrow C_0^{\gamma_0}$, то при всех $\gamma \in (0, 1)$ обратимы операторы $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$.

ТЕОРЕМА 3. Операторы $P: C^{m+\gamma} \rightarrow C^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $P: H^m \rightarrow L^2$ и $P: H^{ms} \rightarrow S^2$ обратимы одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [12] операторы $P: H^m \rightarrow L^2$ и $P: H^{ms} \rightarrow S^2$ обратимы одновременно. Отсюда и из теоремы 2 вытекает теорема 3. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Шубин М. А.* Теоремы о совпадении спектров псевдодифференциального почти периодического оператора в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $B^2(\mathbb{R}^n)$ // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. № 1. С. 200–215.
3. *Favard J.* Sur les equations differentielles a coefficients presque-periodiques // Acta Math. 1927. V. 51. P. 31–81.
4. *Мухамадиев Э. М.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 47–49.
5. *Жиков В. В.* Некоторые новые результаты в абстрактной теории Фавара // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 33–40.
6. *Жиков В. В., Левитан Б. М.* Теория Фавара // УМН. 1977. Т. 32. № 2. С. 123–171.
7. *Жиков В. В., Левитан Б. М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
8. *Мухамадиев Э. М.* Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. № 6. С. 1292–1295.
9. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
10. *Смирнова В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: ГИФМЛ, 1959.
11. *Тюрин В. М.* О некоторых коэрцитивных неравенствах для линейных дифференциальных операторов с частными производными // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 3. С. 650–659.
12. *Тюрин В. М.* К обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными в некоторых пространствах функций на $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1419–1425.

Липецкий государственный
технический университет

Поступила в редакцию
13.12.2001 и 10.01.2003