Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Б. Орочко, Условие непроницаемости точки вырождения одночленного симметрического дифференциального оператора четного порядка, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 5, 109–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:15:30

УДК 517.98

Ю. Б. Орочко

**Условие непроницаемости точки
вырождения одночленного симметрического
дифференциального оператора четного порядка**

Пусть $a(x) \in C^\infty[0, h]$, $b(x) \in C^\infty[-h, 0]$, $h > 0$, – действительные функции, не имеющие нулей на обозначенных отрезках. Зафиксируем числа $p > 0$, $q > 0$ и рассмотрим дифференциальные выражения (ДВ)

$$\begin{aligned}s_p^+[f](x) &= (-1)^n (x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}(x), \\ s_q^-[f](x) &= (-1)^n ((-x)^q b(x) f^{(n)})^{(n)}(x)\end{aligned}$$

произвольного четного порядка $2n$, вырождающиеся в точке $x = 0$. Через H_p^+ и H_q^- обозначим симметрические минимальные операторы, порожденные $s_p^+[f](x)$ и $s_q^-[f](x)$ соответственно в гильбертовых пространствах $L^2(0, h)$ и $L^2(-h, 0)$.

“Сшивая” ДВ $s_p^+[f](x)$ и $s_q^-[f](x)$ в точке $x = 0$, мы получаем новое ДВ $s_{pq}[f](x)$, $x \in [-h, h]$, вырождающееся в указанной внутренней точке отрезка $[-h, h]$. При определенных ограничениях на p и q ДВ $s_{pq}[f](x)$ порождает симметрический минимальный оператор H_{pq} , действующий в $L^2(-h, h)$ и являющийся симметрическим расширением ортогональной суммы операторов $H_q^- \oplus H_p^+$. Мы называем точку $x = 0$ внутренним барьером для ДВ $s_{pq}[f](x)$ и находим условия, при которых справедливо равенство $H_{pq} = H_q \oplus H_p$. Естественно назвать такой внутренний барьер непроницаемым внутренним препятствием, если это равенство имеет место, и проницаемым внутренним препятствием, если оно несправедливо. Основной результат данной статьи состоит в том, что точка $x = 0$ – непроницаемое внутреннее препятствие, если $p, q \geq 2n - \frac{1}{2}$, причем этот результат является, в определенном смысле, точным.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Зафиксируем число $h > 0$ и рассмотрим два дифференциальных выражения (ДВ) произвольного четного порядка $2n \geq 2$, одно из которых

$$s_q^-[f](x) = (-1)^n ((-x)^q b(x) f^{(n)})^{(n)}(x), \quad x \in [-h, 0],$$

зависит от параметра $q > 0$, а другое

$$s_p^+[f](x) = (-1)^n (x^p a(x) f^{(n)})^{(n)}(x), \quad x \in [0, h],$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00138).

– от параметра $p > 0$. Будем предполагать, что функции $b(x)$ и $a(x)$ действительны и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a(x) &\in C^\infty[0, h], & a(x) &\neq 0 \text{ при } x \in [0, h], \\ b(x) &\in C^\infty[-h, 0], & b(x) &\neq 0 \text{ при } x \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1.1)$$

так что ДВ $s_p^+[f](x)$ и $s_q^-[f](x)$ вырождаются соответственно в левом и правом концах своих отрезков определения.

“Сшивая” указанные ДВ в точке $x = 0$, мы получаем на отрезке $[-h, h]$ новое ДВ

$$s_{pq}[f](x) = (-1)^n (c(x)f^{(n)})^{(n)}(x), \quad c(x) = \begin{cases} x^p a(x), & x \in [0, h]; \\ (-x)^q b(x), & x \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.2)$$

вырождающееся во внутренней точке $x = 0$ отрезка $[-h, h]$ – нуле коэффициент $c(x)$ левостороннего порядка q и правостороннего порядка p . Так как параметры q, p , от которых зависит коэффициент $c(x)$ ДВ $s_{pq}[f](x)$, независимы и могут принимать любые (а не только целые) положительные значения, то, вообще говоря, $c(x) \notin C^\infty[-h, h]$. Для справедливости включения $c(x) \in C^\infty[-h, h]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $q = p = l$, l – некоторое натуральное число, и чтобы функция, равная $(-1)^l b(x)$ при $x \in [-h, 0]$ и $a(x)$ при $x \in (0, h]$, была бесконечно дифференцируема на отрезке $[-h, h]$.

В данной статье изучается симметрический минимальный оператор H_{pq} в гильбертовом пространстве $L^2(-h, h)$, порожденный ДВ $s_{pq}[f](x)$, понимаемый в классическом смысле как замыкание оператора $f(x) \mapsto s_{pq}[f](x)$ с областью определения $C_0^\infty(-h, h)$. Этот оператор, зависящий от параметров p, q , корректно определен для любых $p, q > n - \frac{1}{2}$. В случае, когда по крайней мере один из параметров p, q принимает значения, не превосходящие $n - \frac{1}{2}$, для корректности определения оператора H_{pq} необходимо, чтобы этот параметр принимал только целые значения и между функциями $a(x), b(x)$ существовала определенная связь в точке $x = 0$.

Символом $\text{Def } H$ обозначается значение индексов дефекта действительного симметрического оператора H , действующего в $L^2(\alpha, \beta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для теорем 1, 2 симметричность относительно точки 0 интервала $(-h, h)$, на котором заданы ДВ $s_{pq}[f](x)$ и оператор H_{pq} , не имеет принципиального значения. Они остаются верны и тогда, когда эти ДВ и оператор определены на интервалах вида $(-h_1, h_2)$, $h_1 \neq h_2$.

ДВ $s_q^-[f](x)$, $s_p^+[f](x)$ порождают классические симметрические минимальные операторы H_p^+ , H_q^- , действующие соответственно в гильбертовых пространствах $L^2(0, h)$ и $L^2(-h, 0)$. Продолжая функции из $L^2(0, h)$ нулем на промежуток $(-h, 0]$, а функции из $L^2(-h, 0)$ – нулем на промежуток $[0, h]$, мы можем рассматривать эти гильбертовы пространства как два взаимно ортогональных подпространства в $L^2(-h, h)$, ортогональная сумма которых совпадает с $L^2(-h, h)$. С такой точки зрения оператор H_{pq} является действительным симметрическим расширением ортогональной суммы $H_q^- \oplus H_p^+$ действительных симметрических операторов H_p^+ и H_q^- , действующих в указанных подпространствах. В данной работе получены условия, при которых справедливы равенства

$$H_q^- \oplus H_p^+ = H_{pq}, \quad (1.3)$$

$$\text{Def } H_q^- = \text{Def } H_p^+ = n, \quad (1.4)$$

$$\text{Def } H_{pq} = \text{Def } H_q^- + \text{Def } H_p^+ = 2n. \quad (1.5)$$

Обсудим эвристический смысл равенств (1.3), (1.4), основанный на соображениях, в которых отрезок $[-h, h]$ рассматривается как виртуальная материальная одномерная среда со свойствами, описываемыми коэффициентом ДВ (1.2). В такой среде могут происходить эволюционные процессы вида $\mathbf{u}(t) = U(t, A)\varphi$, $t \in [0, +\infty)$, где A – какое-нибудь самосопряженное расширение оператора H_{pq} (“гамильтониан” процесса), $U(t, A)$ – та или иная функция (например, e^{itA}) от оператора A и времени t , функция $\varphi(x) \in L^2(-h, h)$ характеризует внешнее воздействие на интервал $(-h, h)$, возбуждающее процесс $\mathbf{u}(t)$. Эвристически точка $x = 0$, в которой “сшиваются” два различных ДВ $s_p^+[f](x)$ и $s_q^-[f](x)$, является внутренним барьером для развития указанных процессов. Можно показать, что если операторы H_q^-, H_p^+ обладают свойством (1.4), то любое самосопряженное расширение A^- первого из них в $L^2(-h, 0)$ задается самосопряженными краевыми условиями в точке $-h$, а произвольное самосопряженное расширение A^+ второго в $L^2(0, h)$ – аналогичными краевыми условиями в точке h . Поэтому в случае, когда для операторов H_{pq}, H_q^-, H_p^+ справедливы равенства (1.3), (1.4), эволюционный процесс $\mathbf{u}(t)$ с “гамильтонианом” $A = A^- \oplus A^+$ допускает представление $\mathbf{u}(t) = U(t, A^-)\varphi_- + U(t, A^+)\varphi_+$, в котором через $\varphi_-(x)$ и $\varphi_+(x)$ обозначены сужения внешнего возмущения $\varphi(x)$ соответственно на интервалы $(-h, 0)$ и $(0, h)$. Если возмущение $\varphi(x)$ сосредоточено на одном из указанных интервалов (т.е. выполняется одно из равенств $\varphi_- = 0, \varphi_+ = 0$), то развитие эволюционного процесса $\mathbf{u}(t)$ во времени происходит полностью в пределах того же интервала, т.е. внутренний барьер, находящийся в точке $x = 0$ рассматриваемой виртуальной среды, непроницаем для $\mathbf{u}(t)$, так как через указанную точку этот процесс не может распространиться на смежный интервал.

В том случае, когда оператор H_{pq} не допускает разложения в ортогональную сумму операторов, действующих в $L^2(-h, 0)$ и $L^2(0, h)$, любое его самосопряженное расширение A получается путем наложения на функции $y(x) \in \mathcal{D}(H_{pq}^*)$ краевых условий в точках $-h$ и h и условий сопряжения, связывающих значения, принимаемые функциями $y(x)$ слева от точки $x = 0$, со значениями, принимаемыми ими справа от нее. В силу последнего свойства эволюционный процесс вида $U(t, A)\varphi$, порождаемый внешним возмущением $\varphi(x)$ с носителем, расположенным слева или справа от точки $x = 0$, хотя и наталкивается на барьер в этой точке, однако этот барьер является проницаемым для него, так как упомянутые условия сопряжения позволяют ему проникнуть через указанную точку в соседний интервал.

На основании приведенных эвристических соображений мы называем внутренней точку вырождения $x = 0$ ДВ $s_{pq}[f](x)$ *непроницаемым внутренним препятствием*, если справедливы равенства (1.3) и (1.4). Если же оператор H_{pq} нельзя разложить в ортогональную сумму операторов, действующих в $L^2(0, h)$ и $L^2(-h, 0)$, то точку x естественно назвать *проницаемым внутренним препятствием для ДВ $s_{pq}[f](x)$* .

§ 2. Основной результат и его следствия

При изучении свойства непроницаемости или проницаемости точки $x = 0$ относительно ДВ $s_{pq}[f](x)$ мы будем использовать некоторые общие факты теории расширений симметрических операторов.

Пусть фиксирован интервал $I \subset \mathbb{R}$ и действительный симметрический оператор A действует в $L^2(I)$. Как обычно, скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2(I)$ будем обозначать через (f, g) , а размерность любого подпространства $\mathcal{L}$ в $L^2(I)$ – через $\dim \mathcal{L}$. Если зафиксировать число z , $\operatorname{Im} z \neq 0$, и ввести дефектное подпространство $\mathcal{N} \subset L^2(I)$ оператора A , отвечающее числу $\bar{z}$ (оно состоит из функции $u = u(x) \in L^2(I)$, удовлетворяющих условию $(Af, u) = \bar{z}(f, u)$ для любой $f(x) \in \mathcal{D}(A)$), то справедливо равенство $\operatorname{Def} A = \dim \mathcal{N}$.

Предположим, что пространство $L^2(I)$ можно разложить в ортогональную сумму взаимно ортогональных подпространств $\mathcal{L}^-$ и $\mathcal{L}^+$, в первом из которых действует симметрический оператор A^- , а во втором – симметрический оператор A^+ , причем оператор A является симметрическим расширением в $L^2(I)$ их ортогональной суммы $A^- \oplus A^+$. Дефектные подпространства симметрических операторов A^- и A^+ , отвечающие числу $\bar{z}$, обозначим соответственно через $\mathcal{N}^-$ и $\mathcal{N}^+$. В данной работе используется следующее простое утверждение, доказательство которого мы опускаем.

ЛЕММА 1. *Равенство $\mathcal{N}^- \oplus \mathcal{N}^+ = \mathcal{N}$ указанных дефектных подпространств, отвечающих по крайней мере одному числу $\bar{z}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, эквивалентно равенству операторов $A^- \oplus A^+ = A$.*

Рассмотрим действительный симметрический оператор H_{pq} в $L^2(-h, h)$, порожденный ДВ $s_{pq}[f](x)$ с фиксированными значениями параметров $p, q > 2n - \frac{1}{2}$, склеенным из соответствующих ДВ $s_q^-[f](x)$ и $s_p^+[f](x)$. Пусть H_q^- и H_p^+ – симметрические минимальные операторы, порожденные последними ДВ соответственно в $L^2(-h, 0)$ и $L^2(0, h)$. Если положить $A^- = H_q^-$ и $A^+ = H_p^+$, то в качестве симметрического расширения A ортогональной суммы этих симметрических операторов в $L^2(-h, h)$ можно взять оператор H_{pq} . В дальнейшем мы будем называть указанные операторы H_q^-, H_p^+ согласованными с оператором H_{pq} .

Зафиксируем число z , $\operatorname{Im} z \neq 0$, и рассмотрим отвечающие ему дефектные подпространства $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N}_p^+ \subset L^2(0, h)$ оператора H_p^+ , $\mathcal{N}^- = \mathcal{N}_q^- \subset L^2(-h, 0)$ оператора H_q^- , а также дефектное подпространство $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{pq} \subset L^2(-h, h)$ оператора H_{pq} .

Так как коэффициент каждого из ДВ $s_p^+[f]$ и $s_q^-[f]$ не имеет нулей соответственно на интервалах $(0, h)$ и $(-h, 0)$, то дефектное подпространство $\mathcal{N}^+$ оператора H_p^+ совпадает с линейным многообразием решений $y(x)$ дифференциального уравнения

$$s_p^+[y] = (-1)^n (x^p a(x) y^{(n)})^{(n)} = zy, \quad x \in (0, h), \quad (2.1)$$

принадлежащих $L^2(0, h)$, а дефектное подпространство $\mathcal{N}^-$ оператора H_q^- – с линейным многообразием решений $y(x)$ дифференциального уравнения

$$s_q^-[y] = (-1)^n (|x|^q b(x) y^{(n)})^{(n)} = zy, \quad x \in (-h, 0), \quad (2.2)$$

принадлежащих $L^2(-h, 0)$. Ввиду того, что дифференциальное выражение $s_{pq}[f](x)$ имеет на интервале $(-h, h)$ внутреннюю точку вырождения $x = 0$, описание дефектного подпространства $\mathcal{N}$ оператора H_{pq} имеет более сложный вид. Сопоставим ДВ $s_{pq}[f](x)$ билинейную форму

$$\begin{aligned} Q[f, y](x) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} ((c(x)f^{(n)}(x))^{(n-1-j)} \overline{y^{(j)}(x)} \\ &\quad - f^{(j)}(x) \overline{(c(x)y^{(n)}(x))^{(n-1-j)}}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

от достаточно гладких функций $f(x)$, $y(x)$, через которую выражаются внеинтегральные члены в тождестве Лагранжа

$$\int_{\alpha}^{\beta} s_{pq}[f](x) \overline{g(x)} dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \overline{s_{pq}[g](x)} dx + Q[f, g](\beta) - Q[f, g](\alpha),$$

справедливым для любого отрезка $[\alpha, \beta]$, являющегося частью одного из промежутков $[-h, 0)$, $(0, h]$. Интересующее нас подпространство $\mathcal{N}_{pq}$ можно описать следующим образом.

ЛЕММА 2. *Рассматриваемое дефектное подпространство $\mathcal{N}_{pq}$ оператора H_{pq} есть совокупность функций $y(x) \in L^2(-h, h)$, обладающих тремя свойствами:*

- 1) $y(x) \in \mathcal{N}_q^- \oplus \mathcal{N}_p^+$, где $\mathcal{N}_q^-$, $\mathcal{N}_p^+$ – введенные дефектные подпространства соответственно операторов H_q^- и H_p^+ , согласованных с оператором H_{pq} ;
- 2) $\forall f(x) \in C_0^\infty(-h, h)$ существуют односторонние пределы

$$Q[f, y](+0) = \lim_{x \rightarrow +0} Q[f, y](x), \quad Q[f, y](-0) = \lim_{x \rightarrow -0} Q[f, y](x); \quad (2.4)$$

- 3) в точке $x = 0$ выполняется условие сопряжения

$$Q[f, y](-0) = Q[f, y](+0) \quad \forall f(x) \in C_0^\infty(-h, h). \quad (2.5)$$

Простое доказательство леммы 2 мы опустим.

Согласно лемме 1 при заданных значениях параметров p, q свойство (1.3) непроницаемости нуля $x = 0$ коэффициента ДВ $s_{pq}[f]$ равносильно справедливости формулы $\mathcal{N}_q^- \oplus \mathcal{N}_p^+ = \mathcal{N}_{pq}$. Следовательно, нахождение условий непроницаемости или проницаемости точки $x = 0$ может быть сведено к изучению взаимосвязи между дефектными подпространствами $\mathcal{N}_q^- \subset L^2(-h, 0)$, $\mathcal{N}_p^+ \subset L^2(0, h)$ и $\mathcal{N}_{pq} \subset L^2(-h, h)$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой пары значений параметров*

$$p, q \geq 2n - \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

можно найти комплексное число z , $\text{Im } z \neq 0$, такое, что дефектные подпространства $\mathcal{N}_q^-$, $\mathcal{N}_p^+$, $\mathcal{N}_{pq}$ симметрических операторов H_q^- , H_p^+ и H_{pq} обладают свойствами

$$\mathcal{N}_q^- \oplus \mathcal{N}_p^+ = \mathcal{N}_{pq}, \quad (2.7)$$

$$\dim \mathcal{N}_q^- = \dim \mathcal{N}_p^+ = n, \quad (2.8)$$

$$\dim \mathcal{N}_{pq} = \dim \mathcal{N}_q^- + \dim \mathcal{N}_p^+ = 2n, \quad (2.9)$$

равносильными свойствам (1.3)–(1.5) указанных операторов. Таким образом, при условии (2.6) точка $x = 0$ является непроницаемым внутренним препятствием для дифференциального выражения $s_{pq}[f](x)$.

В связи с теоремой 1 естественно возникает вопрос о взаимосвязи между операторами, рассматриваемыми в теореме 1, в тех случаях, когда условие (2.6) не выполняется. Можно показать, что при $n - \frac{1}{2} < p, q < 2n - \frac{1}{2}$ вместо равенств (1.4) имеют место оценки $\text{Def } H_p^+, \text{Def } H_q^+ \geq n + 1$ и справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $n - \frac{1}{2} < p, q < 2n - \frac{1}{2}$, то оператор H_{pq} не раскладывается в ортогональную сумму операторов H_q^-, H_q^+ или их симметрических расширений и для него справедливо неравенство $\text{Def } H_{pq} \geq 2n + 1$. Это означает, что при указанных условиях точка $x = 0$ является проникаемым внутренним препятствием для дифференциального выражения $s_{pq}[f](x)$.

В данной статье мы не можем привести доказательство теоремы 2 из-за его значительного объема. Краткое обсуждение этого результата мы приводим в последнем параграфе.

Теоремы 1 и 2 имеют интересные следствия, относящиеся к симметрическому минимальному оператору H , порожденному в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ действительным дифференциальным выражением $S[f](x) = (-1)^n (C(x)f^{(n)})^{(n)}$, $n \geq 1$, с действительным коэффициентом $C(x)$, $x \in \mathbb{R}$, нули которого образуют бесконечную возрастающую последовательность $\{x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, обладающую свойствами $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} x_j = \pm\infty$.

Будем считать, что функция $C(x)$ бесконечно дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$, в которой $C(x) \neq 0$, и говорить, что ее нуль x_j имеет двусторонний порядок q_j, p_j , если на достаточно малом отрезке $[-h, h]$ функция $s(x) = C(x_j + x)$ допускает представление, указанное в формуле (1.2), с параметрами $p = p_j, q = q_j$ и функциями $a(x), b(x)$, удовлетворяющими условиям (1.1).

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 1. Пусть коэффициент $C(x)$ ДВ $S[f](x)$, заданного на всей числовой оси, обладает перечисленными свойствами и двусторонний порядок q_j, p_j каждого его нуля x_j удовлетворяет условиям $p_j, q_j \geq 2n - \frac{1}{2}$. Тогда симметрический минимальный оператор H , порожденный этим ДВ в $L^2(\mathbb{R})$, самосопряжен. Более того, при любом $j, -\infty < j < +\infty$, самосопряжен симметрический минимальный оператор H_j , порожденный ДВ $s[f](x)$ в $L^2(x_{j-1}, x_j)$ и справедливо ортогональное разложение $H = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} H_j$.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 2. Если условие $p_j, q_j \geq 2n - \frac{1}{2}$, наложенное в следствии теоремы 1 на двусторонние порядки нулей коэффициента $C(x)$ рассматриваемого в ней ДВ $S[f](x)$, заменить условием $n - \frac{1}{2} < p_j, q_j < 2n - \frac{1}{2}$, $-\infty < j < +\infty$, то соответствующий оператор H теряет свойство самосопряженности и для него становится справедливым равенство $\text{Def } H = +\infty$.

Доказательства сформулированных следствий теорем 1, 2 получаются с помощью своеобразного метода локализации, состоящего из двух этапов. Первый из этих этапов состоит в сдвиге начала координат на действительной оси в каждый нуль x_j коэффициента $C(x)$ ДВ $S[f](x)$ и последующем применении теорем 1, 2 к операторам H_{pq} , порожденным ДВ $s[f](x)$ с коэффициентами $s(x) = C(x_j + x)$, $-\infty < j < +\infty, x \in [-h, h], h > 0$ — достаточно малое число. Основным инструментом второго этапа является известная формула Кодаиры (см., например, [1; гл. 13, следствие 2.24]), выражающая индексы дефекта симметрического минимального дифференциального оператора, заданного на промежутке J числовой оси, через индексы дефекта аналогичных операторов на промежутках, получаемых при расщеплении промежутка J его внутренней точкой. В силу ограниченности рамок данной статьи мы не можем привести развернутое доказательство указанных следствий.

Сформулированные следствия теорем 1 и 2, в частности, применимы к симметрическому минимальному оператору H в $L^2(\mathbb{R})$, порожденному ДВ $S[f](x)$ с

коэффициентом $C(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. В этом случае первое из указанных следствий утверждает, что оператор H самосопряжен и раскладывается в бесконечную ортогональную сумму минимальных самосопряженных операторов H_j , порожденных рассматриваемым ДВ в пространствах $L^2(x_{j-1}, x_j)$, $-\infty < j < +\infty$, если порядки всех нулей функции $C(x)$ (очевидно, принимающие только целые значения) больше или равны $2n$. В силу второго следствия тот же оператор H имеет бесконечные индексы дефекта, если порядки всех нулей коэффициента $C(x)$ принимают (целые) значения в пределах от n до $2n - 1$. Заметим, что первый пример симметрического минимального оператора в $L^2(\mathbb{R})$ с бесконечными индексами дефекта, порожденного ДВ $s[f](x) = (-1)^n (c(x)f^{(n)})^{(n)}$, $n \geq 1$, был построен в статье [2].

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана действительная функция $c(x) \in C_0^\infty[\alpha, \beta]$, положительная на интервале (α, β) и имеющая в точках α, β нули одинакового порядка p . Известно, что индексы дефекта симметрического минимального оператора T_p в $L^2(\alpha, \beta)$, порожденного ДВ $s[f](x) = (-1)^n (c(x)f^{(n)})^{(n)}$, $n \geq 1$, вырождающимся на границе указанного интервала, не превосходят $2n$. Для $p = 1, 2, \dots, 2n - 1$ их значения вычислены Трибелем (см. [3; гл. 7, § 7.4.2]). Как видно из теорем 1, 2, если вырождение ДВ $s[f](x)$ происходит *внутри* промежутка его задания, соответствующий минимальный оператор и, в частности, его индексы дефекта приобретают новые специфические свойства. Выполненная нами работа, основанная на рутинных, но достаточных трудоемких вычислениях и использующая только классические асимптотические методы для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, частично восполняет пробел в литературе, в которой такие операторы ранее не изучались.

§ 3. Схема доказательства теоремы 1. Формулировки вспомогательных теорем 3–5

Нетрудно убедиться в том, что теорема 1 будет доказана, если мы проведем вычисления, состоящие из следующих трех этапов.

Этап 1. Построение фундаментального семейства решений $\{y_k(x)\}_{k=1}^{2n}$ дифференциального уравнения (2.1) при значениях параметра $p \geq 2n - \frac{1}{2}$ с известной асимптотикой функций $y_k(x)$ и их производных до порядка $2n - 1$ включительно при $x \rightarrow +0$.

Этап 2. Проверка того, что только n функций этого фундаментального семейства (для определенности $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$) принадлежат $L^2(0, h)$.

Этап 3. Установление существования при каждом k , $1 \leq k \leq n$, первого из пределов (2.4) для решения $y(x) = y_k(x)$ дифференциального уравнения (2.1) и равенства его нулю.

Объясним, почему последовательное проведение перечисленных действий обеспечивает справедливость всех утверждений теоремы 1.

По завершении этапов 1, 2 мы получим базис в дефектном подпространстве $\mathcal{N}_p^+$ оператора H_p^+ , состоящий из n решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, дифференциального уравнения (2.1), построенных на этапе 1. Очевидным следствием этого результата является равенство (2.8) в его части, относящейся к $\mathcal{N}_p^+$.

После проведения этапа 3 мы получим существование первого из пределов формулы (2.4) и равенство его нулю для функций $y(x)$, обладающих свойством 1, указанным в лемме 2.

Чтобы получить равенство (2.8) в его части, относящейся к дефектному подпространству $\mathcal{N}_q^-$ оператора H_q^- , и убедиться в существовании второго предела из (2.4) (а также в равенстве его нулю), заметим, что если в дифференциальном уравнении (2.2) с параметром $q \geq 2n - \frac{1}{2}$ сделать замену аргумента $x \mapsto -x$, то оно перейдет в дифференциальное уравнение, отличающееся от (2.1) только обозначениями параметра (q вместо p) и второго множителя коэффициента ($b(-x)$ вместо $a(x)$). Поэтому для получения фундаментального семейства решений $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.2) достаточно рассмотреть фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1), построенное на этапе 1 (зависящее, конечно, от $a(x)$ и p), в случае, когда $a(x) = b(-x)$, $p = q$, и положить $\eta_k(x) = y_k(-x)$, $x \in (-h, 0)$, $1 \leq k \leq 2n$. Согласно способу получения последнего фундаментального семейства решений дифференциального уравнения (2.2) оно обладает двумя свойствами: 1) только n из них (например, $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq n$) принадлежат $L^2(-h, 0)$, т.е. образуют базис в $\mathcal{N}_q^-$; 2) для каждой из указанных n функций $\eta_k(x)$ второй из пределов (2.4) существует и равен нулю при $g(x) = \eta_k(x)$. Так как функции $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, образуют базис в $\mathcal{N}_q^-$, то утверждение (2.8) теоремы 1 справедливо не только для $\mathcal{N}_p^+$, но и для $\mathcal{N}_q^-$. В силу свойства 2) второй из пределов (2.4) существует и равен нулю для любой функции $y(x) \in \mathcal{N}_q^- \oplus \mathcal{N}_p^+$.

Перечисленные результаты означают, что при выполнении условия (2.6) любая функция $y(x) \in \mathcal{N}_q^- \oplus \mathcal{N}_p^+ \supseteq \mathcal{N}_{pq}$, т.е. обладающая первым из трех свойств, указанных в лемме 2, также обладает вторым и третьим свойствами (равенство (2.5) для $y(x)$ вытекает из того, что, как было отмечено, обе его части равны нулю) и, следовательно, по лемме 2 принадлежит $\mathcal{N}_{pq}$. Так устанавливается справедливость утверждения (2.7) теоремы 1. Наконец, утверждение (2.9) этой теоремы является непосредственным следствием формул (2.7), (2.8).

Первый этап доказательства теоремы 1 мы начнем с преобразования дифференциального уравнения (2.1) в эквивалентную систему дифференциальных уравнений (СДУ).

Сопоставим каждому решению $y(x)$ дифференциального уравнения (2.1) вектор-функцию $\mathbf{u}(x) = \{u_j(x)\}_{j=1}^{2n}$, $u_j(x) = x^{j-1}y^{(j-1)}(x)$, $x \in (0, h)$. Тогда согласно [4; гл. 4, §12] $\mathbf{u}(x)$ является решением СДУ $x\mathbf{u}' = -B(x)\mathbf{u}$, $x \in (0, h)$, с некоторым матричным коэффициентом $B(x)$. Производя в этой СДУ замену аргумента $x = e^{-t}$, мы преобразуем ее в новую систему

$$\mathbf{v}' = B(e^{-t})\mathbf{v}, \quad t \in (t_0, +\infty), \quad t_0 = -\ln h. \quad (3.1)$$

Решения $y(x)$ дифференциального уравнения (2.1) связаны с решениями $\mathbf{v}(t) = \{v_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ СДУ (3.1) взаимно однозначным соответствием

$$x^{j-1}y^{(j-1)}(x) = v_j(-\ln x), \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad x \in (0, h). \quad (3.2)$$

Поэтому для получения асимптотики решений дифференциального уравнения (2.1) и их производных до порядка $2n - 1$ включительно при $x \rightarrow +0$ достаточно вычислить асимптотику решений $\mathbf{v}(t)$ СДУ (3.1) при $t \rightarrow +\infty$.

Условимся представлять квадратные матрицы $D = \{d_{jk}\}_{j,k=1}^{2n}$ порядка $2n$ в блочной форме

$$D = \{D^{lm}\}_{l,m=1}^2 = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} \\ D^{21} & D^{22} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

каждый из четырех блоков D^{lm} которой является квадратной матрицей порядка n , расположенной на пересечении соответствующих строк и столбцов матрицы D . Вычисления показывают, что $B(e^{-t}) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_0^{12} \\ B^{21}(e^{-t}) & B^{22}(e^{-t}) \end{pmatrix}$, причем блоки, из которых состоит последняя блочная матрица, имеют вид

$$A_0^{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$A_0^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A},$$

$$B^{21}(e^{-t}) = b_1(t)\mathcal{A}, \quad b_1(t) = (-1)^{n+1} z \frac{e^{(p-2n)t}}{a(e^{-t})}, \quad (3.5)$$

$$B^{22}(e^{-t}) = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n+1) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n+2) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(n+3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(2n-2) & -1 \\ b_{n+1}(t) & b_{n+2}(t) & b_{n+3}(t) & b_{n+4}(t) & \dots & b_{2n-1}(t) & b_{2n}(t) - (2n-1) \end{pmatrix},$$

$$b_k(t) = C_n^{k-n-1} \sum_{l=0}^{2n-k+1} C_{2n-k+1}^l p^{\{2n-k-l+1\}} e^{-lt} \frac{a^{(l)}(e^{-t})}{a(e^{-t})}, \quad n+1 \leq k \leq 2n.$$

В последней формуле применено обозначение

$$p^{\{r\}} = \prod_{l=0}^{r-1} (p-l), \quad r = 1, 2, \dots, \quad p^{\{0\}} = 1. \quad (3.6)$$

В теории конечных разностей многочлен $p^{\{r\}}$ порядка r от переменной p принято называть *обобщенной r -ой степенью* этой переменной. В дальнейшем нам понадобятся ее очевидные свойства

$$\frac{dp^{\{r\}}}{dp} = p^{\{r\}} \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{p-l}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad \frac{dp^{\{0\}}}{dp} = 0; \quad (3.7)$$

$$p^{\{r\}} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad r > p. \quad (3.8)$$

Асимптотика при $t \rightarrow +\infty$ коэффициента $b_1(t)$ имеет вид

$$b_1(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{z}{a(0)} e^{(p-2n)t} (1 + O(e^{-t})) \rightarrow \infty, & p > 2n; \\ (-1)^{n+1} \frac{z}{a(0)} (1 + O(e^{-t})), & p = 2n; \\ (-1)^{n+1} \frac{z}{a(0)} e^{-(2n-p)t} (1 + O(e^{-t})) \rightarrow 0, & p < 2n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Поведение на бесконечности коэффициентов $b_k(t)$, $n+1 \leq k \leq 2n$, описывается формулой

$$\begin{aligned} b_k(t) &= \alpha_k + (\beta_k + o(1))e^{-t}, \\ \alpha_k &= C_n^{2n-k+1} p^{\{2n-k+1\}}, \\ \beta_k &= n C_{n-1}^{2n-k} p^{\{2n-k\}} \frac{a'(0)}{a(0)}. \end{aligned}$$

При $p > 2n$ из определения функции $b_1(t)$ следуют асимптотические оценки

$$b'_1(t), b''_1(t) = O(e^{(p-2n)t}), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (3.10)$$

которые нам понадобятся в §5.

При $p > 2n$ СДУ (3.1) можно представить в виде

$$\mathbf{v}' = (A_{-1}(t) + A_0 + e^{-t}A_1(t))\mathbf{v}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (3.11)$$

$$A_{-1}(t) = b_1(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_0^{12} \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

блоки A_0^{11}, A_0^{12} последней матрицы указаны в (3.4), а

$$A_0^{22} = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n+1) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n+2) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(n+3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(2n-2) & -1 \\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \alpha_{n+3} & \alpha_{n+4} & \dots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} - (2n-1) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Точное описание единственного ненулевого блока $A_1^{22}(t)$ матрицы

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^{22}(t) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

нам не понадобится; мы ограничимся лишь замечанием, что элементы его первых $n-1$ строк равны нулю и при $t \rightarrow +\infty$ существуют пределы элементов его последней строки, равные β_k , $n+1 \leq k \leq 2n$. В силу этого замечания

$$A_1^{22}(t) = \{u_{jk}(t)\}_{j,k=n+1}^{2n}, \quad u_{jk}(t) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

В формулах (3.12), (3.14) нулем обозначены нулевые блоки.

Если $p = 2n$, то СДУ (3.1) можно представить в виде

$$\mathbf{v}' = (\tilde{A}_0 + e^{-t} \tilde{A}_1(t)) \mathbf{v}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (3.16)$$

причем блочные представления матриц $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1(t)$ имеют вид

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_0^{12} \\ \tilde{A}_0^{21} & A_0^{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_1^{21}(t) & \tilde{A}_1^{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Структура блоков A_0^{11} , A_0^{12} , A_0^{22} матрицы $\tilde{A}_0$ указана в формулах (3.4), (3.13), а ее блок $\tilde{A}_0^{21} = (-1)^{n+1}(z/a(0))\mathcal{A}$. Элементы ненулевых блоков $\tilde{A}_1^{21}(t)$, $\tilde{A}_1^{22}(t)$ матрицы $\tilde{A}_1(t)$ (их точный вид нам не понадобится) либо тождественно равны нулю, либо имеют конечные пределы при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{A}_1(t) = \tilde{A}_1(+\infty). \quad (3.17)$$

При $2n - 1 < p < 2n$ СДУ (3.1) допускает представление

$$\mathbf{v}' = (A_0 + e^{-(2n-p)t} \tilde{A}_1(t)) \mathbf{v}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (3.18)$$

с матрицей A_0 , описание которой дано в (3.12), и некоторой матрицей $\tilde{A}_1(t)$, обладающей свойством (3.17).

Будем называть СДУ

$$\mathbf{w}' = (J + C(t)) \mathbf{w}, \quad t \in [T, +\infty), \quad (3.19)$$

относительно вектор-функции $\mathbf{w}(t) = \{w_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ почти диагональной, если матрица J диагональна и, вообще говоря, зависит от t ($J = J(t)$), а $C(t)$ – матрица с элементами, абсолютно интегрируемыми на полуоси $[T, +\infty)$.

При вычислении асимптотики на бесконечности решений $\mathbf{v}(t) = \{v_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ СДУ (3.11) при $p > 2n$, СДУ (3.16) при $p = 2n$, СДУ (3.18) при $2n - 1 < p < 2n$ мы показываем, что с помощью замены $\mathbf{v}(t) = H \mathbf{w}(t)$ с соответствующим образом подобранной (возможно, зависящей от t) матрицей H каждая из них приводится к почти диагональному виду. После этого мы применяем к полученной СДУ классический результат (см., например, [5; гл. 7, теорема 1]) об асимптотике решений почти диагональных СДУ при $t \rightarrow +\infty$. Проводя обратный ход – возвращаясь от решений СДУ (3.19) к соответствующим решениям одной из СДУ (3.11), (3.16), (3.18), а затем применяя формулу (3.2), мы получаем асимптотику решений дифференциального уравнения (2.1) и их производных при $x \rightarrow +0$.

При $p > 2n$ описанная схема приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3. Пусть параметры p и z , присутствующие в дифференциальном уравнении (2.1), удовлетворяют условиям $p > 2n$, $\text{Im}((-1)^n z/a(0)) > 0$. Представим константу $(-1)^n z/a(0)$ в показательной форме

$$\frac{(-1)^n z}{a(0)} = d_0 e^{i\theta_0}, \quad d_0 = \frac{|z|}{a(0)}, \quad \theta_0 = \arg \frac{(-1)^n z}{a(0)} \in (0, \pi), \quad (3.20)$$

введем обозначения

$$\theta_k = \frac{\theta_0}{2n} + \frac{\pi}{n}(k-1), \quad \gamma_k = \frac{2n}{p-2n} d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_k}, \quad 1 \leq k \leq 2n. \quad (3.21)$$

Тогда у уравнения (2.1) есть фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, обладающих следующими асимптотическими свойствами:

$$\begin{aligned} x^{j-1} y_k^{(j-1)}(x) &= (-1)^{j-1} d_0^{(j-1)/(2n)} e^{i(j-1)\theta_k} (1 + o(1)) \exp(\gamma_k x^{-(p/(2n)-1)} (1 + o(1))), \\ &x \rightarrow +0, \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В случае, когда $p = 2n$, для наших целей достаточно иметь сведения об асимптотическом поведении на бесконечности решений дифференциального уравнения (2.1) только для комплексных чисел z с достаточно малым значением $|z|$. Такие сведения дает

ТЕОРЕМА 4. *Существует такое число $\varepsilon > 0$, что дифференциальное уравнение (2.1) с $p = 2n$ и любым числом z , удовлетворяющим условиям*

$$0 < |z| < \varepsilon, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad (3.23)$$

имеет фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, асимптотические свойства которых при $x \rightarrow +0$ описываются формулой

$$x^{j-1} y_k^{(j-1)}(x) = \exp(-\lambda_k(z) \ln x) (-\lambda_k(z))^{\{j-1\}} (1 + o(1)), \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (3.24)$$

Числа $\lambda_k(z)$, присутствующие в этой формуле, обладают свойствами

$$|\lambda_k(z) - (k - n)| < \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Im} \lambda_k(z) \neq 0, \quad 1 \leq k \leq 2n. \quad (3.25)$$

Для значений параметра p , удовлетворяющих условию $2n-1 \leq p \leq 2n$, используемые нами сведения об асимптотике при $t \rightarrow +\infty$ решений дифференциального уравнения (2.1) дает

ТЕОРЕМА 5. *При $2n-1 < p < 2n$, $z \neq 0$ дифференциальное уравнение (2.1) имеет фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, такое, что при $x \rightarrow +0$ для первых n из них (с индексами k , $1 \leq k \leq n$) справедливы асимптотические формулы*

$$x^{j-1} y_k^{(j-1)}(x) = \begin{cases} x^{k-1} ((k-1)^{\{j-1\}} + o(1)), & 1 \leq j \leq n; \\ O(x^{k-1+2n-p}), & n+1 \leq j \leq 2n, \end{cases} \quad (3.26)$$

а для решений $y_k(x)$ с индексами k , $n+1 \leq k \leq 2n$, — асимптотические формулы

$$x^{j-1} y_k^{(j-1)}(x) = (k-1-p)^{\{j-1\}} x^{k-1-p} (1 + o(1)), \quad 1 \leq j \leq 2n. \quad (3.27)$$

Обоснованию справедливости утверждений теоремы 3 посвящены § 4 и § 5. Доказательства теорем 4 и 5 приведены в § 6. Материал, изложенный в этих параграфах, составляет наиболее трудоемкий этап 1 схемы вычислений, изложенной в начале данного параграфа. Сейчас, в предположении справедливости перечисленных теорем, мы проведем этапы 2 и 3 той же схемы последовательно для $p > 2n$, $p = 2n$ и $2n - \frac{1}{2} \leq p < 2n$.

1) При $p > 2n$ этап 2 доказательства теоремы 1 состоит в выделении из полученного в теореме 3 фундаментального семейства решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1) функций $y_k(x) \in L^2(0, h)$. Для этой цели мы используем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. *Последовательность θ_k , $1 \leq k \leq 2n$, обладает тем свойством, что ни одно из чисел $\cos \theta_k$, $1 \leq k \leq 2n$, не равно нулю. Более того, ровно n членов этой числовой последовательности положительны, а остальные ее n членов отрицательны.*

Доказательство леммы 3 мы не приводим, так как оно имеет элементарный характер.

В силу леммы 3 и определения констант γ_k последовательность $\operatorname{Re} \gamma_k$, $1 \leq k \leq 2n$, состоит из n положительных и n отрицательных чисел. С учетом этого свойства из асимптотической формулы (3.22) следует, что при $p > 2n$ фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1), построенное в теореме 5, разбивается на две группы. Первая группа состоит из n решений $y_k(x)$, для которых константа γ_k , присутствующая в асимптотической формуле (3.22), удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \gamma_k < 0$, а вторая — из n решений $y_k(x)$, для которых $\operatorname{Re} \gamma_k > 0$. Из формулы (3.22), рассматриваемой при $j = 1$, следует, что решения $y_k(x)$, составляющие первую группу, принадлежат $L^2(0, h)$, а решения второй группы не принадлежат этому пространству. Без ограничения общности можно считать, что $y_k(x) \in L^2(0, h)$ и, более того, соответствующие выражения (3.22) экспоненциально убывают при $x \rightarrow +0$, если $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq 2n$, и $y_k(x) \notin L^2(0, h)$, если $n+1 \leq k \leq 2n$. Следствием экспоненциального убывания при $x \rightarrow +0$ выражений (3.22) для $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq 2n$ является дополнительное свойство

$$x^r y_k^{(j-1)}(x) = o(1), \quad x \rightarrow +0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad r \geq 0. \quad (3.28)$$

На этапе 3 используемой схемы для значений параметра $p > 2n$ в выражение (2.3) с функциями $f(x) \in C_0^\infty(-h, h)$, рассматриваемое при $x \in (0, h)$, подставляются функции $y(x) = y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, — решения дифференциального уравнения (2.1) с $p > 2n$, полученные в теореме 5, после чего вычисляется $\lim_{x \rightarrow +0} Q[f, y_k](x)$. Из свойства (3.28) функций $y_k(x)$ и того, что $c(x) = x^p a(x) = O(x^p)$ при $x \rightarrow +0$ в силу (1.2), следует, что при $1 \leq k \leq n$ каждый из этих пределов существует и равен нулю. На этом завершается третий заключительный этап доказательства теоремы 1 при $p > 2n$.

2) При $p = 2n$ на этапе 2 используемой схемы вычислений из полученного в теореме 4 фундаментального семейства решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1) с $p = 2n$ и числом z , удовлетворяющим условию (3.23), выделяются решения, принадлежащие $L^2(0, h)$. Так как числа $\lambda_k(z)$, присутствующие в формуле (3.24), удовлетворяют условию (3.25), то $\operatorname{Re} \lambda_k(z) = k - n + \alpha_k$,

$|\alpha_k| < \frac{1}{4}$, $1 \leq k \leq 2n$. Из этого свойства и асимптотической формулы (3.24), рассматриваемой при $j = 1$, следует, что $|y_k(x)| = x^{n-k-\alpha_k}(1 + o(1))$, $x \rightarrow +0$, $1 \leq k \leq 2n$. Поэтому функции $y_k(x)$ принадлежат $L^2(0, h)$ тогда и только тогда, когда $1 \leq k \leq n$.

На этапе 3 доказательства теоремы 1 в ее части, относящейся к $p = 2n$, нужно показать, что $\lim_{x \rightarrow +0} Q[f, y_k](x) = 0$, $f(x) \in C_0^\infty(-h, h)$, для каждой из функций $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, полученных в теореме 4. Чтобы прийти к этому результату, подставим функцию $y(x) = y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, в формулу (2.3) и полученное выражение запишем в виде линейной комбинации производных функции $y_k(x)$:

$$Q[f, y_k](x) = \sum_{j=1}^{2n} q_j[f](x) y_k^{(j-1)}(x), \quad (3.29)$$

$$q_j[f](x) = \begin{cases} \sum_{l=n}^{2n-j} (-1)^{n-1-j} C_{n-j}^{l-n} c^{(2n-j-l)}(x) f^{(l)}(x), & 1 \leq j \leq n; \\ \sum_{l=0}^{2n-j} (-1)^{n-1-l} C_{n-1-l}^{j-1-n} c^{(2n-j-l)}(x) f^{(l)}(x), & n+1 \leq j \leq 2n \end{cases}$$

(C_m^r – биномиальные коэффициенты). При $x \rightarrow +0$, $x \in (0, h]$, из формулы (1.2) вытекают асимптотические выражения

$$q_j[f](x) = \begin{cases} (-1)^{n-1-j} p^{\{n-j\}} a(0) x^{p-n+j} (f^{(n)}(0) + o(1)), & 1 \leq j \leq n; \\ (-1)^{n-1} C_{n-1}^{j-1-n} p^{\{2n-j\}} a(0) x^{p-2n+j} (f(0) + o(1)), & n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases} \quad (3.30)$$

Если $p = 2n$, $x \rightarrow +0$, то их следствиями являются оценки выражения $q_j[f](x)$ вида $O(x^{j+n})$ при $1 \leq j \leq n$ и $O(x^j)$ при $n+1 \leq j \leq 2n$. Применяя их вместе с оценками $y_k^{(j-1)}(x) = O(x^{n-k+1-\alpha_k-j})$, вытекающими из формул (3.24) и $\operatorname{Re} \lambda_k(z) = k - n + \alpha_k$, $|\alpha_k| < \frac{1}{4}$, получаем, что выражения (3.29) имеют асимптотику $Q[f, y_k](x) = O(x^{n-k+1-\alpha_k}) = o(1)$, $x \rightarrow +0$, для любого k , $1 \leq k \leq n$. Этот результат означает, что первый из пределов (2.4) существует и равен нулю для построенных в теореме 4 решений $y(x) = y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, дифференциального уравнения (2.1) с $p = 2n$. Так завершается этап 3 доказательства теоремы 1 при указанном значении параметра p .

3) Если $2n - \frac{1}{2} \leq p < 2n$, то на этапе 2 используемой схемы вычислений применяется теорема 5, дающая фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1) для указанных значений p . Из формул (3.26), (3.27), рассматриваемых при $j = 1$, вытекает асимптотика при $x \rightarrow +0$ этих решений, имеющая вид $y_k(x) = x^{k-1}(1 + o(1))$, $1 \leq k \leq n$, и $y_k(x) = x^{k-1-p}(1 + o(1))$, $n+1 \leq k \leq 2n$. Поэтому $y_k(x) \in L^2(0, h)$ только при $1 \leq k \leq n$. Таким образом, рассматриваемое фундаментальное семейство обладает свойством, проверяемым на этапе 2.

В рассматриваемом случае на завершающем этапе 3 в выражение (3.29) подставляются функции $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, полученные в теореме 5, после чего суммы, задающие выражения $Q[f, y_k](x)$, разбиваются на две части $Q_1[f, y_k](x)$ и $Q_2[f, y_k](x)$, отвечающие соответственно слагаемым с номерами $1 \leq j \leq n$ и $n+1 \leq j \leq 2n$. Заменяя в каждой из них функции $q_j[f](x)$ их асимптотиками (3.30), а производные функций $y_k(x)$ – их асимптотиками, вытекающими из формулы (3.26), и проводя рутинные упрощения полученных асимптотических выражений, получаем, что $Q_1[f, y_k](x) = O(x^{p-n+k})$, $Q_2[f, y_k](x) = O(x^k)$,

$x \rightarrow +0$. Так как $2n - \frac{1}{2} \leq p < 2n$, то из последних формул следует свойство $Q[f, y_k](x) = Q_1[f, y_k](x) + Q_2[f, y_k](x) = o(1)$, $1 \leq k \leq n$, при $x \rightarrow +0$. Таким образом, если справедлива теорема 5, то так же, как и раньше (при $p > 2n$ и $p = 2n$), при $2n - \frac{1}{2} \leq p < 2n$ первый предел из (2.4) существует и равен нулю для решений $y(x) = y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, дифференциального уравнения (2.1), полученных в этой теореме. Последнее наблюдение завершает этап 3 доказательства теоремы 1 при указанных ограничениях на параметр p .

Из приведенных рассуждений следует, что для получения теоремы 1 в полном объеме остается доказать теоремы 3–5.

§ 4. Начало доказательства теоремы 3

Главную роль в доказательстве теоремы 3 играет асимптотика решений СДУ (3.11) со значением параметра $p > 2n$ при $t \rightarrow +\infty$. Ее вычисление осложняется тем, что первое слагаемое матричного коэффициента СДУ (3.11) (см. (3.12)) зависит от t и, более того, единственный ненулевой элемент этой матрицы не ограничен при $t \rightarrow +\infty$. Мы покажем, что СДУ (3.11) можно привести к почти диагональному виду с помощью метода, изложенного в теореме 3 из [5; гл. 7, § 22]. Ниже этот метод излагается для более общей СДУ

$$\mathbf{v}' = (A_{-1}(t) + A_0(t) + A_1(t))\mathbf{v}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (4.1)$$

с квадратными матрицами $A_{-1}(t)$, $A_0(t)$, $A_1(t)$ порядка $2n$, дифференцируемыми на полуоси $[t_0, +\infty)$.

Условимся обозначать символом $\text{Diag}\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ квадратную диагональную матрицу порядка $2n$ с диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$, а символом C^+ — матрицу, получаемую из матрицы $C = \{c_{jk}\}_{j,k=1}^{2n}$ путем замены элементов ее главной диагонали нулями. Равенство $C^+ = C$ равносильно тому, что все диагональные элементы матрицы C равны нулю. Нам также понадобится коммутатор $[C, D] = CD - DC$ квадратных матриц C, D порядка $2n$. Через E мы обозначаем единичную квадратную матрицу порядка $2n$.

Для того чтобы теорема 3 из [5; гл. 7, § 22] была применима к СДУ (4.1), она должна удовлетворять некоторым условиям. Их проверка требует проведения вычислений, состоящих из следующих четырех шагов.

Шаг 1. При любом фиксированном t следует определить структуру жордановой формы $J(t)$ матрицы $A_{-1}(t) + A_0(t)$. Теорема 3 из [5; гл. 7, § 22] применима только к СДУ (4.1), для которых, во-первых,

$$J(t) = \text{Diag}\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{2n} \quad (4.2)$$

с диагональными элементами $\lambda_k(t)$, например, непрерывными на некоторой полуоси $[T, +\infty)$, $T \geq t_0$, и, во-вторых, для всех j и k разность $\text{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t))$ не меняет знака при $t \geq T$.

Шаг 2. Пусть это условие выполнено. Тогда для каждого фиксированного $t \in [T, +\infty)$ следует найти какой-нибудь базис в C^{2n} , состоящий из собственных векторов $\mathbf{b}_k(t) = \{b_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$ матрицы $A_{-1}(t) + A_0(t)$, отвечающих ее собственным значениям $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, после чего ввести невырожденную матрицу $B(t) = \{b_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$. Она обладает свойством

$$(A_{-1}(t) + A_0(t))B(t) = B(t)J(t), \quad t \in [T, +\infty). \quad (4.3)$$

Так как собственные векторы матрицы $A_{-1}(t) + A_0(t)$ определяются неоднозначно с точностью до скалярного множителя, то матрица $B(t)$ также определяется неоднозначно. Если найдена одна из таких матриц $B_0(t)$, то их общий вид дается формулой

$$B(t) = B_0(t)\delta(t), \quad \delta(t) = \text{Diag}\{\delta_k(t)\}_{k=1}^{2n}; \quad (4.4)$$

главная диагональ последней диагональной матрицы состоит из произвольных функций $\delta_k(t) \neq 0$, $t \in [T, +\infty)$. Наряду с $B(t)$ нам понадобится матрица $B'_0(t)$, элементы которой также вычисляются на этом этапе.

Шаг 3. После того, как матрица $B_0(t)$ найдена, нужно вычислить элементы матриц $B_0^{-1}(t)$ и $B^{-1}(t) = \delta^{-1}(t)B_0^{-1}(t)$, а также рассмотреть матрицу

$$Q(t) = \{q_{jk}(t)\}_{j,k=1}^m = B_0^{-1}(t)B'_0(t). \quad (4.5)$$

Вычисления, проведенные в [5; гл. 7, §22], показывают, что если

$$\delta_k(t) = e^{-\int_T^t q_{kk}(\tau) d\tau}, \quad 1 \leq k \leq 2n, \quad (4.6)$$

то матрица (4.4) обладает свойством

$$(B^{-1}(t)B'(t))^+ = B^{-1}(t)B'(t), \quad t \in [T, +\infty), \quad (4.7)$$

т.е. все ее диагональные элементы равны нулю. В дальнейших вычислениях предполагается, что диагональные элементы $\delta_k(t)$ матрицы $\delta(t)$ имеют вид, указанный в формуле (4.6). Поэтому достаточно вычислить только диагональные элементы $q_{kk}(t)$ матрицы $Q(t)$, $1 \leq k \leq 2n$.

Шаг 4. На этом шаге полученные ранее матрицы $J(t)$, $B(t)$, $B^{-1}(t)$ используются для нахождения трех матриц $X_i(t) = \{x_{jk,i}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$, $i = -1, 0$, $X(t) = \{x_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$ из системы условий

$$[X_i(t), J(t)] = (B^{-1}(t)A'_i(t)B(t))^+, \quad i = -1, 0, \quad (4.8)$$

$$[X(t), J(t)] = -X_{-1}(t), \quad (4.9)$$

$$(X_i(t))^+ = X_i(t), \quad i = -1, 0, \quad X^+(t) = X(t). \quad (4.10)$$

В силу свойства (4.7) матрицы $B(t)$ вид матриц $X_i(t)$, $i = -1, 0$, и $X(t)$, удовлетворяющих условиям (4.8)–(4.10), определяется однозначно.

Теорема 3 из [5; гл. 7, §22] утверждает, что если любой элемент каждой из четырех матриц

$$X'(t), \quad X_{-1}(t)X(t), \quad X_0(t), \quad e^{-t}B^{-1}(t)A_1(t)B(t) \quad (4.11)$$

абсолютно интегрируем на полуоси $[T, +\infty)$ и, дополнительно, существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det[E + X(t)] \neq 0, \quad (4.12)$$

то СДУ (4.1) приводится к почти диагональному виду (3.19) с матрицей $J(t)$ – жордановой формой (4.2) матрицы $A_{-1}(t) + A_0(t)$ – подстановкой

$$\mathbf{v}(t) = B(t)(E + X(t))\mathbf{w}(t), \quad t \in [T, +\infty). \quad (4.13)$$

Согласно изложенной схеме первый шаг в обосновании применимости теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11) с параметром $p > 2n$ и комплексным числом z , зафиксированным в теореме 3, состоит в проверке того, что жорданова форма суммы первых двух слагаемых матричного коэффициента этой СДУ – матриц (3.12) – имеет диагональный вид. Начнем такую проверку с рассмотрения определителей $\Delta_\infty(\lambda) = \det(A_0 - \lambda E)$, $\Delta_t(\lambda) = \det(A_{-1}(t) + A_0 - \lambda E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in [t_0, +\infty)$. Представим единичную матрицу E в блочной форме $\begin{pmatrix} \tilde{E} & 0 \\ 0 & \tilde{E} \end{pmatrix}$ с диагональными блоками $\tilde{E}$ – единичными матрицами порядка n . Из описания матрицы A_0 , данного в (3.12), следует, что матрица $A_0 - \lambda E$ является треугольной; поэтому $\Delta_\infty(\lambda) = \det(A_0^{11} - \lambda \tilde{E}) \det(A_0^{22} - \lambda \tilde{E})$. Из формулы (3.4) следует, что $\det(A_0^{11} - \lambda \tilde{E}) = (-\lambda)^{\{n\}}$, а из (3.13) и вида констант α_k , указанного ниже (3.9), вытекает, что разложение определителя $\det(A_0^{22} - \lambda \tilde{E})$ по последней строке дает для него выражение $\sum_{l=0}^n C_n^l (-n-\lambda)^{\{n-l\}} (p-n-\lambda)^{\{l\}}$, равное $(p-n-\lambda)^{\{n\}}$ в силу известной формулы теории конечных разностей (см., например, [6; ч. 1, задача 35]¹). Если после подсчета определителя $\Delta_\infty(\lambda)$ вычислять определитель $\Delta_t(\lambda)$, раскладывая его по первому столбцу, все элементы которого, кроме первого и последнего, равны нулю, то получим представление

$$\Delta_t(\lambda) = \Delta_\infty(\lambda) + b_1(t), \quad \Delta_\infty(\lambda) = \det(A_0 - \lambda E) = (-\lambda)^{\{n\}} (p-n-\lambda)^{\{n\}}. \quad (4.14)$$

Определитель $\Delta_\infty(\lambda)$, рассматриваемый как многочлен от λ порядка $2n$, имеет $2n$ однократных действительных корней

$$\lambda_k = \begin{cases} -(k-1), & 1 \leq k \leq n; \\ p - (k-1), & n+1 \leq k \leq 2n, \end{cases} \quad (4.15)$$

которые являются собственными значениями матрицы A_0 ; из определения (3.6) обобщенных степеней также следует, что

$$\Delta_\infty(\lambda) = \lambda^{2n} (1 + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Так как $p > 2n$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$, то из (3.5) вытекает свойство $\operatorname{Im} b_1(t) \neq 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, вследствие которого при фиксированном $t \in [t_0, +\infty)$ любое собственное значение λ_0 матрицы $A_{-1}(t) + A_0$, т.е. корень многочлена $\Delta_t(\lambda)$ от переменной λ , обладает свойством $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$. Для проверки его однократности достаточно убедиться в том, что все корни многочлена $(\partial \Delta_t / \partial \lambda)(\lambda) = \Delta'_\infty(\lambda)$ порядка $2n-1$ действительны, так что $(\partial \Delta_t / \partial \lambda)(\lambda_0) = \Delta'_\infty(\lambda_0) \neq 0$. Это верно, так как действительный многочлен $\Delta_\infty(\lambda)$ имеет $2n$ однократных действительных корней (4.15).

Согласно формуле (3.5) функция $b_1(t)$ с параметром $p > 2n$ бесконечно дифференцируема на полуоси $[t_0, +\infty)$, причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} |b_1(t)| = +\infty$. Поэтому при изменении параметра t от t_0 до $+\infty$ собственные значения матрицы $A_{-1}(t) + A_0$ образуют $2n$ ветвей $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, в комплексной плоскости со свойствами

$$\begin{aligned} \lambda_k(t) &\in C^1[t_0, +\infty), \\ \Delta_\infty(\lambda_k(t)) + b_1(t) &= 0, \\ \operatorname{Im} \lambda_k(t) &\neq 0, \quad \lambda_j(t) \neq \lambda_k(t) \quad \text{при } j \neq k, \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \end{aligned} \quad (4.17)$$

¹ Автор благодарен К. А. Мирзоеву, обратившему его внимание на возможность замены прямого доказательства этого равенства указанной ссылкой.

Это означает, что при любом $t \in [t_0, +\infty)$ жорданова форма $J(t)$ матрицы $A_{-1}(t) + A_0$ имеет диагональный вид (4.2) с указанными $2n$ ветвями $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, корней многочлена $\Delta_t(\lambda)$. В дальнейших вычислениях используются следующие асимптотические свойства собственных значений $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, матрицы $A_{-1}(t) + A_0$ на бесконечности.

ЛЕММА 4. 1) При $t \rightarrow +\infty$ для каждого значения k , $1 \leq k \leq 2n$, справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \lambda_k(t) &= d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_k} e^{(p/(2n)-1)t} (1 + O(e^{-\mu t})), \quad 0 < \mu = \min \left\{ \frac{p}{2n} - 1, 1 \right\} \leq 1, \\ (-\lambda_k(t))^{(r)} &= (-1)^r d_0^{r/(2n)} e^{ir\theta_k} e^{r(p/(2n)-1)t} (1 + O(e^{-\mu t})), \quad r = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.18)$$

значения углов θ_k указаны в формуле (3.21), а левая часть формулы (4.19) — это выражение (3.6) при $p = -\lambda_k(t)$.

2) Существует такое число $T \geq t_0$, что $\operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) \neq 0$, $1 \leq j, k \leq 2n$, $j \neq k$, при любом $t \geq T$.

3) При $t \rightarrow +\infty$ для производной $\lambda'_k(t)$ каждой из функций $\lambda_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, справедлива асимптотическая формула

$$\lambda'_k(t) = \left(\frac{p}{2n} - 1 \right) d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_k} e^{(p/(2n)-1)t} (1 + O(e^{-\mu t})). \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $b_1(t)$ является бесконечно большой при $t \rightarrow +\infty$, то из равенства (4.17) следует, что $\Delta_\infty(\lambda_k(t))$ обладает таким же свойством; поэтому $\lambda_k(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow +\infty$, $1 \leq k \leq 2n$. Из этого свойства и (4.17) вытекает асимптотика $\lambda_k(t) = d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_k} e^{(p/(2n)-1)t} (1 + \alpha(t))$, $\alpha(t) = o(1)$, $t \rightarrow +\infty$. В сочетании с формулами (4.16) и (3.20) она влечет за собой асимптотику $\Delta_\infty(\lambda_k(t)) = (-1)^{n+1} (z/a(0)) e^{(p-2n)t} (1 + \alpha(t))^{2n} (1 + O(e^{-(p/(2n)-1)t}))$, $t \rightarrow +\infty$. При замене последним выражением первого слагаемого левой части равенства, приведенного в (4.17), а ее второго слагаемого — асимптотическим выражением (3.9), отвечающим значениям $p > 2n$, получаем асимптотическое уравнение для бесконечно малой $\alpha(t)$, из которого тривиально выводится формула $\alpha(t) = O(e^{-\mu t})$, $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, справедлива асимптотика (4.18). Асимптотика (4.19) является простым следствием формулы (4.18). Для проверки справедливости второго утверждения леммы 4 воспользуемся тем, что формула (4.18) влечет за собой асимптотику

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)) \\ &= d_0^{1/(2n)} e^{(p/(2n)-1)t} \left(\sin \frac{\theta_0 + \pi(j+k-2)}{2n} \sin \frac{\pi(k-j)}{2n} + o(1) \right), \quad (4.21) \\ &t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad j \neq k. \end{aligned}$$

Отличие от нуля ее главного члена для указанных j, k проверяется с помощью элементарных рассуждений. Это означает справедливость второго утверждения леммы 4.

Чтобы убедиться в справедливости формулы (4.20), продифференцируем равенство из (4.17) по t с учетом определения функции $b_1(t)$, данного в (3.5), и представления $\Delta_\infty(\lambda) = \lambda^{2n} + \sum_{l=0}^{2n-1} c_l \lambda^l$ (с некоторыми числовыми коэффициентами c_l), вытекающего из (4.14). Так как $\lambda_k(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то, заменяя слагаемые продифференцированного равенства (4.17) их асимптотиками на бесконечности, получаем равенство

$$\frac{2n\lambda_k^{2n}(t)}{\lambda_k(t)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda_k(t)}\right)\right) \lambda'_k(t) + \frac{(-1)^{n+1} z(p-2n)}{a(0)} e^{(p-2n)t} (1 + O(e^{-t})) = 0, \\ t \rightarrow +\infty.$$

Разрешая его относительно $\lambda'_k(t)$ и применяя тривиальные асимптотические оценки вместе с формулами (4.18) и (3.20), получаем (4.20).

Из леммы 4 вытекают следующие асимптотические выражения на бесконечности для разностей собственных значений матрицы $A_{-1}(t) + A_0$, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\lambda_k(t) - \lambda_j(t) = d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_0/(2n)} e^{(p/(2n)-1)t} (e^{i\pi(k-1)/n} - e^{i\pi(j-1)/n}) \\ \times (1 + O(e^{-\mu t})), \quad (4.22)$$

$$\lambda'_k(t) - \lambda'_j(t) = \left(\frac{p}{2n} - 1\right) d_0^{1/(2n)} e^{i\theta_0/(2n)} e^{(p/(2n)-1)t} \\ \times (e^{i\pi(k-1)/n} - e^{i\pi(j-1)/n}) (1 + O(e^{-\mu t})), \quad (4.23) \\ t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq j, k \leq 2n.$$

На шаге 1 проверки применимости к СДУ (3.11) теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] мы установили, что жорданова форма $J(t)$ матрицы $A_{-1}(t) + A_0$ имеет диагональный вид (4.2) и, дополнительно, показали, что в силу второго утверждения леммы 4 на некоторой полуоси $[T, +\infty)$ выражения $\operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t))$, $j \neq k$, не меняют знака.

Шаг 2 проверки применимости теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11) начинается с нахождения собственных векторов матрицы $A_{-1}(t) + A_0$. Нетрудно показать, что при каждом k , $1 \leq k \leq 2n$, вектор

$$\{(-\lambda_k(t))^{j-1}\}_{j=1}^{2n}. \quad (4.24)$$

является собственным вектором указанной матрицы, отвечающим ее собственному значению $\lambda_k(t)$. Поэтому матрицы $B(t)$ и $B_0(t)$ из (4.3), (4.4) допускают следующее описание:

$$B_0(t) = \{(-\lambda_k(t))^{j-1}\}_{j,k=1}^{2n}, \quad (4.25)$$

$$B(t) = B_0(t)\delta(t) = \{(-\lambda_k(t))^{j-1}\delta_k(t)\}_{j,k=1}^{2n}, \quad (4.26)$$

на этом этапе вычислений $\delta_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, — это произвольные функции параметра $t \in [t_0, +\infty)$, не имеющие нулей.

Чтобы найти элементы матрицы $B'_0(t)$, т.е. производные от функций $(-\lambda_k(t))^{j-1} = p^{\{r\}}$, $p = -\lambda_k(t)$, $r = j-1$, применим правило дифференцирования сложной функции вместе с (3.7). Тогда получим

$$B'_0(t) = \{((- \lambda_k(t))^{j-1})'\}_{j,k=1}^{2n} = \left\{(-\lambda_k(t))^{j-1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{\lambda'_k(t)}{\lambda_k(t) + l}\right\}_{j,k=1}^{2n}. \quad (4.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно последнему равенству формулы (3.7) элементы первой строки матрицы $B'_0(t)$ равны нулю. Чтобы (4.27) не противоречила этому факту, следует считать, что суммы $\sum_{l=l_1}^{l_2} \dots$ равны нулю при $l_2 < l_1$.

Перейдем к вычислениям, составляющим шаг 3 проверки применимости теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11). Для нахождения вида элементов матрицы $B_0^{-1}(t)$ достаточно найти матрицу, обратную к матрице $\mathcal{B}_0 = \{(-\lambda_k)^{\{j-1\}}\}_{j,k=1}^{2n}$, зависящей от $2n$ параметров – попарно различных комплексных чисел λ_k , $1 \leq k \leq 2n$, после чего подставить в нее значения $\lambda_k = \lambda_k(t)$. Рассмотрим многочлены

$$p_j(x) = \prod_{l=1, l \neq j}^{2n} (x + \lambda_l), \quad x \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad (4.28)$$

порядка $2n-1$ от комплексной переменной x , зависящие от $2n-1$ параметров. Для каждого из них справедлива формула

$$p_j(x) = \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\Delta^l p_j(0)}{l!} x^{\{l\}} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\Delta^{r-1} p_j(0)}{(r-1)!} x^{\{r-1\}}, \quad (4.29)$$

в которой использован символ $\Delta^r p_j(0)$ для значения в точке $x = 0$ конечной разности (с шагом, равным 1) порядка $r = 0, 1, 2, \dots$ от многочлена $p_j(x)$. Представление (4.29) следует из формулы [7; гл. 1, формула (40)] и замечания [7; гл. 1, § 3, п. 4] о совпадении многочлена любого порядка m и его интерполяционного многочлена того же порядка. Подстановка значений $x = -\lambda_k$ в (4.29) дает равенство суммы $\sum_{l=1}^{2n} (\Delta^{l-1} p_j(0) / (l-1)! (-\lambda_k)^{\{l-1\}})$ числу $p_j(-\lambda_j) \neq 0$ при $k = j$ и числу $p_j(-\lambda_k) = 0$ при $k \neq j$. С помощью этого замечания легко проверяется справедливость формулы

$$\mathcal{B}_0^{-1} = \left\{ \frac{\Delta^{k-1} p_j(0)}{(k-1)! p_j(-\lambda_j)} \right\}_{j,k=1}^{2n}.$$

Так как $B_0(t)$ при фиксированном t есть матрица $\mathcal{B}_0$, отвечающая числам $\lambda_k = \lambda_k(t)$, то, вводя обозначение

$$p_j(x, t) = \prod_{l=1, l \neq j}^{2n} (x + \lambda_l(t)), \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad (4.30)$$

как следствие полученной формулы имеем выражение

$$B_0^{-1}(t) = \left\{ \frac{\Delta_x^{k-1} p_j(0, t)}{(k-1)! p_j(-\lambda_j(t), t)} \right\}_{j,k=1}^{2n}, \quad (4.31)$$

через $\Delta_x^{k-1} p_j(0, t)$ обозначена частная разность порядка $k-1$ от функции двух переменных $p_j(x, t)$ по переменной x при $x = 0$.

Сравнение коэффициентов при x^{2n-1} в выражениях (4.28) и (4.29) для многочленов $p_j(x)$ приводит к тому, что $\Delta^{2n-1} p_j(0) / (2n-1)! = 1$. В случае, когда $p_j(x) = p_j(x, t)$, последнее равенство приобретает вид

$$\frac{\Delta_x^{2n-1} p_j(0, t)}{(2n-1)!} = 1, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad 1 \leq j \leq 2n. \quad (4.32)$$

Из формул (4.26) и (4.31) следует, что

$$B^{-1}(t) = \left\{ \frac{\Delta_x^{k-1} p_j(0, t)}{(k-1)! \delta_j(t) p_j(-\lambda_j(t), t)} \right\}_{j,k=1}^{2n}. \quad (4.33)$$

В вычисленных нами выражениях для элементов матрицы $B^{-1}(t)$ присутствуют функции $p_j(-\lambda_j(t), t)$. Если в (4.30) подставить значение $x = -\lambda_j(t)$ и применить асимптотическую формулу (4.22) с $k = l$, то получим для них асимптотику

$$\begin{aligned} p_j(-\lambda_j(t), t) &= D_j e^{(1-1/(2n))(p-2n)t} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (4.34) \\ D_j &= d_0^{1-1/(2n)} e^{i(1-1/(2n))\theta_0} \prod_{l=1, l \neq j}^{2n} (e^{i\pi(l-1)/n} - e^{i\pi(j-1)/n}) = \text{const} \neq 0, \\ 1 &\leq j \leq 2n. \end{aligned}$$

Чтобы матрицу $B(t)$, полученную в (4.26), можно было использовать в приложении теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11), она обязана удовлетворять условию (4.7), а для этого диагональные элементы $\delta_k(t)$ матрицы $\delta(t)$ из (4.26) должны вычисляться по формуле (4.6) со значением $T = t_0$ и функциями $q_{kk}(t)$ — диагональными элементами матрицы $Q(t)$, введенной в (4.5). Их вычисление проводится с помощью формул (4.31) и (4.27), из которых следуют достаточно громоздкие выражения

$$q_{kk}(t) = \frac{1}{p_k(-\lambda_k(t), t)} \sum_{r=1}^{2n} \frac{\Delta_x^{r-1} p_k(0, t)}{(r-1)!} (-\lambda_k(t))^{\{r-1\}} \sum_{l=0}^{r-2} \frac{\lambda'_k(t)}{\lambda_k(t) + l}.$$

Покажем, что их можно упростить.

Если вычислить производную от многочлена $p_j(x)$, используя его представление (4.28) и (4.29), то для $p'_j(x)$ получим два выражения, одно из которых имеет вид

$$p_j(x) \sum_{l=1, l \neq j}^{2n} \frac{1}{x + \lambda_l}, \quad x \neq -\lambda_l, \quad 1 \leq l \leq 2n, \quad l \neq j,$$

а другое

$$\sum_{r=2}^{2n} \frac{\Delta^{r-1} p_j(0)}{(r-1)! x^{\{r-1\}}} \sum_{l=0}^{r-2} \frac{1}{x - l}, \quad x \neq 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Используя их, можно получить два различных выражения для производной от функции $p_j(-\lambda_j(t))$. Так как эти выражения равны друг другу, то для любого j , $1 \leq j \leq 2n$, получаем

$$p_j(-\lambda_j(t)) \sum_{l=1, l \neq j}^{2n} \frac{\lambda'_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_l} = \sum_{r=2}^{2n} \frac{\Delta^{r-1} p_j(0)}{(r-1)!} (-\lambda_j(t))^{\{r-1\}} \sum_{l=0}^{r-2} \frac{\lambda'_j(t)}{\lambda_j(t) + l}. \quad (4.35)$$

При каждом $t \in [t_0, +\infty)$ она справедлива для любых чисел $\lambda_l \in \mathbb{C}$, $1 \leq l \leq 2n$, $l \neq j$, отличных от $\lambda_j(t)$ и $0, 1, \dots, 2n-2$. В частности, в силу (4.17) она верна

для чисел $\lambda_l = \lambda_l(t)$, $1 \leq l \leq 2n$, $l \neq j$. Если подставить их в равенство (4.35), то множитель $p_j(-\lambda_j(t))$ превращается в выражение $p_j(-\lambda_j(t), t)$, а конечная разность $\Delta^{r-1}p_j(0)$ — в частную конечную разность $\Delta_x^{r-1}p_j(0, t)$ от функции (4.30) по переменной x , вычисленную при $x = 0$. Таким образом, при любом $t \in [t_0, +\infty)$ справедливо равенство

$$p_j(-\lambda_j(t), t) \sum_{l=1, l \neq j}^{2n} \frac{\lambda'_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_l(t)} = \sum_{r=2}^{2n} \frac{\Delta_x^{r-1}p_j(0, t)}{(r-1)!} (-\lambda_j(t))^{\{r-1\}} \sum_{l=0}^{r-2} \frac{\lambda'_j(t)}{\lambda_j(t) + l}.$$

Разделим это равенство на $p_j(-\lambda_k(t), t)$, после чего заменим присутствующий в нем индекс j на k . Так как по замечанию 2 в правой части полученного в результате указанных действий нового равенства нижний индекс суммирования $r = 2$ можно заменить на $r = 1$, то она совпадает с функцией $q_{kk}(t)$. Следовательно,

$$q_{kk}(t) = \sum_{l=1, l \neq k}^{2n} \frac{\lambda'_k(t)}{\lambda_k(t) - \lambda_l(t)}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (4.6), рассматриваемую при $T = t_0$, получаем $2n$ элементов

$$\delta_k(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{l=1, l \neq k}^{2n} \frac{\lambda'_k(\tau)}{\lambda_l(\tau) - \lambda_k(\tau)} d\tau \right), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad 1 \leq k \leq 2n, \quad (4.36)$$

диагональной матрицы $\delta(t)$ (см. (4.4)), обеспечивающих свойство (4.7) матрицы $B(t)$ вида (4.26). Мы завершили вычисления, составляющие шаг 3 используемой схемы применительно к СДУ (3.11).

Заключительный шаг 4 проверки применимости теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11) состоит в нахождении матриц $X_{-1}(t)$, $X_0(t)$ и $X(t)$, удовлетворяющих системе условий (4.8)–(4.10), в которых $A_{-1}(t)$ — первая матрица из (3.12), $A_0(t)$ — не зависящая от t вторая матрица A_0 из (3.12), $J(t)$ — жорданова форма (4.2) матрицы $A_{-1}(t) + A_0$. Вследствие независимости матрицы $A_0(t) = A_0$ от t при $i = 0$ правая часть условия (4.8) является нулевой матрицей. Поэтому $X_0(t) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Вид элементов матрицы $X_{-1}(t) = \{x_{jk, -1}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$, удовлетворяющей условию (4.8) при $i = -1$, очевидно, зависит от вида элементов $c_{jk}(t)$ матрицы $B^{-1}(t) \times A'_{-1}(t)B(t)$. Элементы матрицы $A'_{-1}(t)$ вычисляются путем дифференцирования элементов первой из матриц (3.12); элементы матриц $B(t)$ и $B^{-1}(t)$ указаны в формулах (4.26) и (4.33). На основании перечисленных формул вычисление рассматриваемого произведения матриц дает выражение

$$c_{jk}(t) = b'_1(t) \frac{\delta_k(t)}{\delta_j(t)p_j(-\lambda_j(t), t)} \frac{\Delta_x^{2n-1}p_j(0, t)}{(2n-1)!}.$$

Принимая во внимание формулу (4.32), получаем

$$B^{-1}(t)A'_{-1}(t)B(t) = b'_1(t) \left\{ \frac{\delta_k(t)}{\delta_j(t)p_j(-\lambda_j(t), t)} \right\}_{j,k=1}^{2n}. \quad (4.37)$$

Правая часть уравнения (4.8) с индексом $i = -1$ получается путем замены нулями диагональных элементов матрицы (4.37).

Так как элементы коммутатора $[X_{-1}(t), J(t)]$ матрицы $X_{-1}(t)$ и диагональной матрицы (4.2) имеют вид $x_{jk,-1}(t)(\lambda_k(t) - \lambda_j(t))$, то из (4.37) следует, что элементы матрицы $X_{-1}(t)$, удовлетворяющей уравнению (4.8) и обладающей свойством (4.10) со значением индекса $i = -1$, определяются по формулам

$$x_{jk,-1}(t) = \begin{cases} b'_1(t) \frac{\delta_k(t)}{(\lambda_k(t) - \lambda_j(t))\delta_j(t)p_j(-\lambda_j(t), t)}, & j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (4.38)$$

После того как найдены элементы матрицы $X_{-1}(t)$, расположенной в правой части уравнения (4.9), можно вычислить элементы решения уравнения (4.9) – матрицы $X(t) = \{x_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$, удовлетворяющей последнему из условий (4.10). Простые вычисления показывают, что

$$x_{jk}(t) = \begin{cases} -\frac{x_{jk,-1}(t)}{\lambda_k(t) - \lambda_j(t)}, & j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (4.39)$$

Дифференцируя функции $x_{jk}(t)$ с учетом формулы (4.38), получаем следующие выражения для элементов $x'_{jk}(t)$ матрицы $X'(t)$:

$$x'_{jk}(t) = \begin{cases} \alpha(t)(b''_1(t)(\lambda_k(t) - \lambda_j(t)) + b'_1(t)\phi(t)), & j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad (4.40)$$

$$\alpha(t) = \frac{\delta_k(t)}{\delta_j(t)(\lambda_j(t) - \lambda_k(t))^3 p_j(-\lambda_j(t), t)}, \quad (4.41)$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\delta'_k(t)}{\delta_k(t)} - \frac{\delta'_j(t)}{\delta_j(t)} - \frac{(p_j(-\lambda_j(t), t))'}{p_j(-\lambda_j(t), t)} \right) (\lambda_k(t) - \lambda_j(t)) - 2(\lambda'_k(t) - \lambda'_j(t)). \quad (4.42)$$

Заметим, что из определения (4.30) функций $p_j(x, t)$ следует, что

$$\frac{(p_j(-\lambda_j(t), t))'}{p_j(-\lambda_j(t), t)} = \sum_{l=1, l \neq j}^{2n} \frac{\lambda'_l(t) - \lambda'_j(t)}{\lambda_l(t) - \lambda_j(t)}. \quad (4.43)$$

Мы выполнили все подготовительные вычисления, которые следовало провести для проверки применимости теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11). В следующем параграфе мы проводим такую проверку, после чего применяем указанную теорему и как ее следствие получаем теорему 3.

§ 5. Завершение доказательства теоремы 3

Мы сможем применить теорему 3 из [5; гл. 7, §22] к СДУ (3.11), если установим абсолютную интегрируемость элементов матриц (4.11) на некоторой полуоси $[T, +\infty)$, $T \geq t_0$.

Так как $X_0(t) = 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$, то элементы этой матрицы заведомо обладают указанным свойством.

Выясним, как ведут себя при $t \rightarrow +\infty$ элементы трех остальных матриц $X'(t)$, $X_{-1}(t)X(t)$ и $e^{-t}B^{-1}(t)A_1(t)B(t)$, присутствующих в (4.11).

Последняя из них содержит как матричный сомножитель матрицу $B(t)$ вида (4.26) с функциями $\delta_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, указанными в (4.36). Из формул (4.20), (4.22) и (3.21) следует, что

$$\sum_{l=1, l \neq k}^{2n} \frac{\lambda'_k(t)}{\lambda_k(t) - \lambda_l(t)} = \left(\frac{p}{2n} - 1 \right) \alpha (1 + O(e^{-\mu t})), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (5.1)$$

$$\alpha = \sum_{l=1, l \neq k}^{2n} (e^{i\pi(l-k)/n} - 1)^{-1} = \sum_{r=1}^{2n-1} (e^{i\pi r/n} - 1)^{-1} \neq 0.$$

Поэтому интеграл, присутствующий в (4.36), имеет асимптотику

$$\left(\frac{p}{2n} - 1 \right) \alpha t + c_k + o(1), \quad t \rightarrow +\infty,$$

с константой c_k , точное значение которой для нас несущественно, и, следовательно,

$$\delta_k(t) = C_k e^{(p/(2n)-1)\alpha t} (1 + o(1)), \quad C_k = \text{const} \neq 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq k \leq 2n, \quad (5.2)$$

$$\frac{\delta_k(t)}{\delta_j(t)} = O(1), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (5.3)$$

С учетом формул (4.19), (4.26) первая из полученных асимптотик влечет за собой асимптотическое выражение

$$B(t) = \{(-1)^{j-1} d_0^{(j-1)/(2n)} C_k e^{i(j-1)\theta_k} e^{(j-1+\alpha)(p/(2n)-1)t} (1 + o(1))\}_{j,k=1}^{2n}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.4)$$

Если при вычислении произведения матриц $B^{-1}(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$ использовать их описания, приведенные в (4.33), (3.14) и (3.15), а также (4.26), то мы придем к следующему результату: $B^{-1}(t)A_1(t)B(t) = \{c_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}$,

$$c_{jk}(t) = \frac{\delta_k(t) \Delta_x^{2n-1} p_j(0, t)}{\delta_j(t) (2n-1)! p_j(-\lambda_j(t), t)} \sum_{l=n+1}^{2n} u_{2nl}(t) (-\lambda_k(t))^{\{l-1\}},$$

$u_{2nl}(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$ согласно формуле (3.15). Принимая во внимание (4.32), а также асимптотики (4.19), (4.34), (5.3) приходим к выводу, что $c_{jk}(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$, и, следовательно, элементы последней из матриц (4.11) абсолютно интегрируемы на полуоси $[t_0, +\infty)$.

Проверим, что свойством абсолютной интегрируемости на бесконечности обладают также элементы двух первых матриц формулы (4.11). Выясним, как ведут себя при $t \rightarrow +\infty$ элементы (4.40) матрицы $X'(t)$, в состав которых входят

функции $\alpha(t)$ и $\phi(t)$, определенные в (4.41) и (4.42). Из асимптотических формул (4.22), (4.34) и (5.3) легко выводится оценка $\alpha(t) = O(e^{-(1+1/n)(p-2n)t})$, $t \rightarrow +\infty$. Чтобы получить подобную оценку функции $\phi(t)$, заметим, что в силу (4.36) дробь $\delta'_k(t)/\delta_k(t)$ равна выражению, асимптотика которого получена в (5.1). При замене k на j вид этой асимптотики не изменяется и поэтому

$$\frac{\delta'_k(t)}{\delta_k(t)} - \frac{\delta'_j(t)}{\delta_j(t)} = o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оценка на бесконечности выражения (4.43), присутствующего в (4.42), тривиально выводится из (4.22) и (4.23); она имеет вид $(p_j(-\lambda_j(t), t))'/p_j(-\lambda_j(t), t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Если воспользоваться двумя последними оценками вместе с асимптотиками (4.22) и (4.23), то простые вычисления приводят к формуле

$$\phi(t) = O(e^{(p/(2n)-1)t}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Применяя к элементам (4.40) матрицы $X'(t)$ указанные оценки функций $\alpha(t)$ и $\phi(t)$ вместе с (3.10) и (4.22), приходим к выводу, что

$$x'_{jk}(t) = \begin{cases} O(e^{-(p/(2n)-1)t}), & t \rightarrow +\infty, j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (5.5)$$

Чтобы оценить поведение при $t \rightarrow +\infty$ элементов (4.38) матрицы $X_{-1}(t)$, воспользуемся оценкой (3.10) для $b'_1(t)$ и асимптотическими формулами (4.22), (4.34), (5.3). Тогда получим

$$x_{jk;-1}(t) = \begin{cases} O(1), & t \rightarrow +\infty, j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (5.6)$$

Из последней оценки и асимптотической формулы (4.22) следует, что для матрицы $X(t)$ с элементами вида (4.39) справедлива асимптотическая оценка

$$X(t) = \{x_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n}, \quad x_{jk}(t) = \begin{cases} O(e^{-(p/(2n)-1)t}), & t \rightarrow +\infty, j \neq k; \\ 0, & j = k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq 2n. \quad (5.7)$$

Формулы (5.5)–(5.7) влекут за собой абсолютную интегрируемость элементов двух первых матриц $X'(t)$, $X_{-1}(t)X(t)$ из (4.11) на полуоси $[t_0, +\infty)$ и справедливость равенства $X(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$. Так как из последнего равенства вытекает выполнение условия (4.12), то для СДУ (3.11) все условия теоремы 3 из [5; гл. 7, §22] выполнены.

По этой теореме СДУ (3.11) приводится на некоторой полуоси $[T, +\infty)$ к почти диагональному виду (3.19) с матрицей $J(t)$ – жордановой формой (4.2) суммы первых двух слагаемых своего матричного коэффициента – с помощью подстановки (4.13).

Введем векторы $\delta_k = \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{2n}$, $1 \leq k \leq 2n$, с координатами – значениями δ_{jk} символа Кронекера, символом $\mathbf{o}(1)$ будем обозначать $2n$ -мерные вектор-функции от переменной t , бесконечно малые на бесконечности. По теореме 1 из [5; гл. 7, §22] у любой почти диагональной СДУ (3.19) с матрицей $J(t) = \text{Diag}\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^{2n}$,

для которой при $j \neq k$ выражения $\operatorname{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t))$ не меняют знака на некоторой полуоси $[T, +\infty)$, $T \geq t_0$, существует фундаментальное семейство решений $\mathbf{w}_k(t) = \{w_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$, $1 \leq k \leq 2n$, с асимптотикой

$$\mathbf{w}_k(t) = (\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{o}(1)) \exp\left(\int_T^t \lambda_k(\tau) d\tau\right), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Из второго утверждения леммы 4 следует, что для почти диагональной СДУ (3.19), получаемой из СДУ (3.11) с помощью подстановки (4.13), такое условие выполнено. Поэтому из теоремы 1 из [5; гл. 7, §22] вытекает существование фундаментального семейства решений $\mathbf{w}_k(t) = \{w_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$, $1 \leq k \leq 2n$, СДУ (3.19), обладающих указанной асимптотикой. На основании асимптотической формулы (4.18) тривиально вычисляется асимптотика интегралов $\int_T^t \lambda_k(\tau) d\tau$ при $t \rightarrow +\infty$. С учетом этого факта полученное фундаментальное семейство решений СДУ (3.19) обладает свойством

$$\mathbf{w}_k(t) = \{w_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n} = (\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{o}(1)) \exp(\gamma_k e^{(p/(2n)-1)t} (1 + o(1))), \quad (5.8)$$

$$t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq k \leq 2n,$$

с константами γ_k , введенными в (3.21).

Подстановка (4.13) с матрицами $B(t)$ и $X(t)$, вид элементов которых указан в (4.26) и (4.39), преобразует полученный набор вектор-функций $\mathbf{w}_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, в фундаментальное семейство решений $\mathbf{v}_k(t) = B(t)(E + X(t))\mathbf{w}_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, СДУ (3.11). Если в последней формуле заменить матрицы $B(t)$ и $X(t)$, а также вектор-функции $\mathbf{w}_k(t)$ их асимптотиками (5.4), (5.7), (5.8) и затем перемножить перечисленные асимптотические выражения, то мы получим асимптотики вектор-функций $\mathbf{v}_k(t)$ на бесконечности. Нам удобно привести их не для $\mathbf{v}_k(t)$, а для этих вектор-функций, деленных на отличные от нуля (в силу формулы (5.2)) числа C_k , причем мы сохраним за новыми вектор-функциями прежнее обозначение $\mathbf{v}_k(t)$; очевидно, новая последовательность $\mathbf{v}_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, по-прежнему образует фундаментальное семейство решений СДУ (3.11). Асимптотика координат новых вектор-функций $\mathbf{v}_k(t) = \{v_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$, вычисленная описанным способом, имеет вид

$$v_{jk}(t) = c_{jk} e^{\gamma_k e^{(p/(2n)-1)t} (1+o(1))} e^{(j-1+\alpha)(p/(2n)-1)t} (1 + o(1)),$$

$$c_{jk} = (-1)^{j-1} d_0^{(j-1)/(2n)} e^{i(j-1)\theta_k}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Так как $p > 2n$, то асимптотика при $t \rightarrow +\infty$ произведения двух экспонент, присутствующих в этой формуле, ничем не отличается от его первого сомножителя. Поэтому асимптотику вектор-функций $\mathbf{v}_k(t)$, образующих фундаментальное семейство решений СДУ (3.11) с параметром $p > 2n$ на некоторой полуоси $[T, +\infty)$, можно записать более просто:

$$\mathbf{v}_k(t) = \{v_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n} = \{(-1)^{j-1} d_0^{(j-1)/(2n)} e^{i(j-1)\theta_k} (1 + o_{jk}(1)) \times \exp(\gamma_k e^{(p/(2n)-1)t} (1 + o_{jk}(1)))\}_{j=1}^{2n}, \quad (5.9)$$

$$t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

В этой формуле индексы в обозначениях бесконечно малых $o_{jk}(1)$ указывают на их зависимость от j и k .

Согласно построениям § 3 при $p > 2n$ решения $\mathbf{v}(t)$ СДУ (3.11) связаны с решениями $y(x)$ дифференциального уравнения (2.1) с помощью взаимно однозначного соответствия (3.2). Поэтому набор функций $y_k(x) = v_{1k}(-\ln x)$, $1 \leq k \leq 2n$, образует фундаментальное семейство решений дифференциального уравнения (2.1) с параметром $p > 2n$ в некоторой правой полукрестности точки $x = 0$, причем из (5.9) следует, что для них справедливы асимптотические формулы (3.22). Теорема 3 доказана.

§ 6. Доказательства теорем 4 и 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из описания главного члена $\tilde{A}_0$ матричного коэффициента СДУ (3.16), приведенного после формулы (3.16), следует, что он отличается от суммы $A_{-1}(t) + A_0$ слагаемых матричного коэффициента СДУ (3.11) только одним элементом, расположенным на пересечении первого столбца и последней строки этих матриц; он равен числу $(-1)^{n+1}z/a(0)$ в матрице $\tilde{A}_0$ и функции $b_1(t)$, определенной в формуле (3.5), — в матрице $A_{-1}(t) + A_0$. Так как определитель $\Delta_t(\lambda) = \det(A_{-1}(t) + A_0 - \lambda E)$ был вычислен в формуле (4.14), то для получения определителя $D(\lambda) = \det(\tilde{A}_0 - \lambda E)$ достаточно подставить значение $p = 2n$ в первое слагаемое указанного выражения для $\Delta_t(\lambda)$ и заменить его второе слагаемое константой $(-1)^{n+1}z/a(0)$. Таким образом,

$$D(\lambda) = (-\lambda)^{\{n\}}(n - \lambda)^{\{n\}} + (-1)^{n+1} \frac{z}{a(0)}. \quad (6.1)$$

Определитель $D(\lambda)$ можно рассматривать как многочлен от двух комплексных переменных λ и z , который мы обозначим (только в данном абзаце) через $\mathcal{D}(\lambda, z)$. Уравнение $\mathcal{D}(\lambda, 0) = 0$ имеет $2n$ решений $\lambda_k = k - n$, $1 \leq k \leq 2n$, причем из формулы (6.1) следует, что $(\partial \mathcal{D} / \partial \lambda)(\lambda_k, 0) \neq 0$. При каждом k сочетание последнего свойства с равенством $\mathcal{D}(\lambda_k, 0) = 0$ обеспечивает применимость к уравнению $\mathcal{D}(\lambda, z) = 0$ соответствующей теоремы о неявных функциях. Поэтому для любого числа z , принадлежащего комплексной окрестности точки $z = 0$ достаточно малого радиуса $r > 0$, матрица $\tilde{A}_0$ имеет $2n$ собственных значений $\lambda_k(z)$, $1 \leq k \leq 2n$, которые являются непрерывными комплекснозначными функциями от комплексной переменной z , обладающими свойствами $\mathcal{D}(\lambda_k(z), z) = 0$ при $|z| < r$ и $\lambda_k(0) = \lambda_k = k - n$. Для любого числа z , удовлетворяющего условиям $z \neq 0$, $|z| < r$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, числа $\lambda_k(z)$ являются решениями уравнения $D(\lambda) = 0$; следовательно, $\operatorname{Im} \lambda_k(z) \neq 0$, $1 \leq k \leq 2n$. Из приведенных фактов вытекает существование такого числа ε , $0 < \varepsilon \leq r$, что при выполнении условий (3.23) функции $\lambda_k(z)$ обладают свойствами (3.25).

Так как при выполнении условий (3.23) матрица $\tilde{A}_0$ имеет $2n$ попарно различных собственных значений $\lambda_k(z)$, $1 \leq k \leq 2n$, то для удовлетворяющих этим условиям чисел z ее жорданова форма J диагональна: $J = \operatorname{Diag}\{\lambda_k(z)\}_{k=1}^{2n}$. Несложные вычисления показывают, что собственному значению $\lambda_k(z)$ отвечает собственный вектор $\{(-\lambda_k(z))^{\{j-1\}}\}_{j=1}^{2n}$ матрицы $\tilde{A}_0$.

Пусть комплексное число z , присутствующее в СДУ (3.16) и дифференциальном уравнении (2.1) с $p = 2n$, удовлетворяет условию (3.23). Если ввести матрицу

$B = \{(-\lambda_k(z))^{\{j-1\}}\}_{j,k=1}^{2n}$, то справедливо равенство $\tilde{A}_0 B = B J$. Поэтому преобразование

$$\mathbf{v}(t) = B \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t) = \{w_j(t)\}_{j=1}^{2n}, \quad (6.2)$$

приводит СДУ (3.16) к почти диагональному виду (3.19) с матрицей

$$C(t) = \{c_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2n} = e^{-t} B^{-1} \tilde{A}_1(t) B,$$

элементы которой $c_{jk}(t) \in L(t_0, +\infty)$, $1 \leq j, k \leq 2n$, вследствие свойства (3.17) матрицы $\tilde{A}_1(t)$. В сочетании со свойством $\operatorname{Re}(\lambda_k(z) - \lambda_j(z)) \neq 0$, вытекающим из (3.25), оно означает, что для полученной СДУ (3.19) выполнены условия теоремы 1 из [5; гл. 7, § 22], в силу которой на полуоси $[t_0, +\infty)$ существует фундаментальное семейство решений этой СДУ $\mathbf{w}_k(t) = \{w_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n}$, $1 \leq k \leq 2n$, с асимптотикой $\mathbf{w}_k(t) = \exp(\lambda_k(z)t)(\delta_k + \mathbf{o}(1))$, $t \rightarrow +\infty$. Возвращаясь при каждом k , $1 \leq k \leq 2n$, от решения $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k(t)$ СДУ (3.19) к решению $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_k(t)$ СДУ (3.16) по формуле (6.2), а затем от $\mathbf{v}_k(t)$ к решению $y(x) = y_k(x)$ дифференциального уравнения (2.1) со значением параметра $p = 2n$ по формуле (3.2), получаем для рассматриваемого числа z фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, указанного дифференциального уравнения, для которого справедливы все утверждения теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим СДУ (3.18) с параметром p , $2n - 1 < p < 2n$, матрицей A_0 , описание которой приведено в (3.12), (3.13) и (3.4), и матрицей $\tilde{A}_1(t)$, обладающей свойством (3.17).

Матрица A_0 имеет $2n$ попарно различных собственных значений λ_k , $1 \leq k \leq 2n$, указанных в (4.15); легко проверить, что при любом k вектор $\{(-\lambda_k)^{\{j-1\}}\}_{j=1}^{2n}$ является собственным вектором матрицы A_0 , отвечающим собственному значению λ_k . Следовательно, жорданова форма J матрицы A_0 имеет диагональный вид $J = \operatorname{Diag}\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$, а матрица $B = \{\lambda_k^{\{j-1\}}\}_{j,k=1}^{2n}$ связывает матрицы A_0 и J равенством $A_0 B = B J$. Из (4.15) следует, что $-\lambda_k = k - 1$ при $1 \leq k \leq n$. В силу свойства (3.8) обобщенных степеней при $1 \leq k \leq n$, $j \geq k + 1$ справедливы равенства $(-\lambda_k)^{\{j-1\}} = (k - 1)^{\{j-1\}} = 0$, означающие, что блочная форма матрицы B имеет треугольный вид: $B = \begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}$. Ее блок B^{11} также является треугольной $(n \times n)$ -матрицей с числами $(-\lambda_k)^{\{k-1\}}$, $1 \leq k \leq n$, на главной диагонали и нулями под ней.

Преобразование (6.2) с указанной матрицей B приводит СДУ (3.18) к почти диагональному виду

$$\mathbf{w}' = (J + e^{-(2n-p)t} \Lambda_1(t)) \mathbf{w}, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (6.3)$$

с жордановой формой J матрицы A_0 и матрицей $\Lambda_1(t) = B^{-1} \tilde{A}_1(t) B$. Из (3.17) следует, что существует матричный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda_1(t) = \Lambda_1(+\infty)$. При каждом k , $1 \leq k \leq 2n$, стандартный способ построения решения $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k(t)$ СДУ (6.3), отвечающего собственному значению λ_k матрицы A_0 , состоит в замене $\mathbf{w}(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \{y_j(t)\}_{j=1}^{2n}$, преобразующей ее в СДУ $y_j' = a_j y_j + e^{-bt} (\Lambda_1(t) \mathbf{y})_j$, $1 \leq j \leq 2n$, $t \in [t_0, +\infty)$, $a_j = \lambda_j - \lambda_k$, $b = 2n - p > 0$; символом $(\Lambda_1(t) \mathbf{y})_j$ мы обозначили j -ю координату вектора $\Lambda_1(t) \mathbf{y}(t)$.

Хорошо известный прием – сведение последней СДУ к соответствующей системе интегральных уравнений (см. доказательство леммы 1 из [5; гл. 7, §22]) – позволяет для любого k , $1 \leq k \leq 2n$, получить ее решение, обладающее асимптотикой $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\delta}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k(t)$, $t \rightarrow +\infty$, с вектор-функцией $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t)$, бесконечно малой на бесконечности. Используя экспоненциальное убывание на бесконечности матрицы $e^{-(2n-p)t} \Lambda_1(t)$ и применяя рутинные приемы асимптотического метода, из упомянутой системы интегральных уравнений для $\mathbf{y}(t)$ легко получить оценку $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = O(e^{-(2n-p)t})$, $t \rightarrow +\infty$, при $1 \leq k \leq n$.

Как следствие этих результатов мы получаем фундаментальное семейство решений $\mathbf{w}_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, СДУ (6.3), обладающих при $t \rightarrow +\infty$ свойствами $\mathbf{w}_k(t) = e^{\lambda_k t}(\boldsymbol{\delta}_k + O(e^{-(2n-p)t}))$ при $1 \leq k \leq n$ и $\mathbf{w}_k(t) = e^{\lambda_k t}(\boldsymbol{\delta}_k + o(1))$ при $n+1 \leq k \leq 2n$. Применяя формулу (6.2) с указанной треугольной матрицей B к вектор-функциям $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_k(t)$, мы получаем фундаментальное семейство решений $\mathbf{v}_k(t) = \{v_{jk}(t)\}_{j=1}^{2n} = B\mathbf{w}_k(t)$, $1 \leq k \leq 2n$, СДУ (3.18), которое, в свою очередь, порождает по формуле (3.2) фундаментальное семейство решений $y_k(x) = v_{1k}(-\ln x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (2.1) с параметром p , удовлетворяющим условию $2n-1 < p < 2n$. Для проверки справедливости теоремы 5 остается вычислить асимптотику вектор-функций $\mathbf{v}_k(t)$ на бесконечности, вытекающую из указанных асимптотических выражений для $\mathbf{w}_k(t)$, используя вид (4.15) собственных значений λ_k матрицы A_0 и принимая во внимание треугольный вид матрицы B , а затем вывести из нее с помощью формулы (3.2) асимптотику при $x \rightarrow +0$ выражений $x^{j-1}y_k^{(j-1)}(x)$.

§ 7. Заключительные замечания

В доказательстве теоремы 1 предполагается, что коэффициент $c(x)$ ДВ $s_{pq}[f](x)$, порождающего рассматриваемый в ней оператор H , бесконечно дифференцируем в точках x , в которых $c(x) \neq 0$. Анализ этого доказательства показывает, что теорема остается справедливой при менее жестких ограничениях на гладкость коэффициента $c(x)$, например, достаточно потребовать, чтобы функция $c(x)$ была $2n+1$ раз непрерывно дифференцируема в указанных точках.

Главным в доказательстве теоремы 1 является то, что при $p \geq 2n - \frac{1}{2}$ и $\text{Im } z \neq 0$ дефектное подпространство $\mathcal{N}_p^+$ оператора H_p^+ имеет размерность n , причем для любой функции $y(x) \in \mathcal{N}_p^+$ существует и равен нулю первый из пределов (2.4). При переходе от значений параметра $p \geq 2n - \frac{1}{2}$ к $p < 2n - \frac{1}{2}$ у подпространства $\mathcal{N}_p^+$ изменяются свойства.

С помощью технических средств асимптотического метода в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см., например, [8; гл. 1] и [5; гл. 7]; часть этих средств мы использовали в доказательстве теоремы 1) можно проверить, что $\dim \mathcal{N}_p^+ = r_p \geq n+1$ при $p < 2n - \frac{1}{2}$, и для таких значений p построить базис в $\mathcal{N}_p^+$, состоящий из r_p решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq r_p$, дифференциального уравнения (2.1), для n из которых (например, $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$) первый предел из (2.4) с функцией $y(x) = y_k(x)$ равен нулю. Вычисление предела $Q[f, y_k](+0)$ с $f(x) \in C_0^\infty(-h, h)$ для значений индекса, удовлетворяющих условию $n+1 \leq k \leq r_p$, наталкивается на трудности вычислительного характера, возрастающие при возрастании k . Эти трудности нам удалось преодолеть не в полной мере, однако в простейшем случае, когда $k = n+1$, указанный предел

вычислен и доказана формула $Q[f, y_{n+1}](+0) = \gamma_p a(0)f(0)$ с константой $\gamma_p \neq 0$, зависящей от p и n .

Учитывая связь дифференциального уравнения (2.2) с дифференциальным уравнением (2.1), установленную в § 2, при $q < 2n - \frac{1}{2}$, $\text{Im } z \neq 0$ как следствие приведенных фактов получаем неравенство $\dim \mathcal{N}_q^- = r_q \geq n + 1$ для размерности дефектного подпространства $\mathcal{N}_q^-$ оператора H_q^- и существование базиса $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq r_q$, в $\mathcal{N}_q^-$, для которого предел $Q[f, \eta_k](-0)$ равен нулю при $1 \leq k \leq n$ и $\gamma_q b(0)f(0)$ с константой $\gamma_q \neq 0$ при $k = n + 1$.

Опираясь на перечисленные результаты и применяя лемму 2, можно показать, что для значений параметров, удовлетворяющих условиям $n - \frac{1}{2} < p, q < 2n - \frac{1}{2}$, теорема 1 неверна и вместо нее справедлива теорема 2.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Ч. II. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
2. Орочко Ю. Б. Примеры симметрических дифференциальных операторов на прямой с бесконечными индексами дефекта // Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. №2. С. 69–72.
3. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
6. Полла Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. М.: Наука, 1978.
7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952.
8. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

Московский государственный институт
электроники и математики
E-mail: matan@miem.edu.ru

Поступила в редакцию
30.10.2002