Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рождественский, Об абсолютно непрерывных слабо перемешивающих коциклах над иррациональными поворотами окружности, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 5, 139–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:39:37

УДК 517.987.5

А. В. Рождественский

Об абсолютно непрерывных слабо перемешивающих коциклах над иррациональными поворотами окружности

Слабо перемешивающим коциклом над поворотом α называется измеримая функция $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, такая что ни для каких $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, уравнение

$$\varphi^n(z) = c \frac{h(\exp(2\pi i \alpha)z)}{h(z)} \quad \text{для п.в. } z \quad (*)$$

не имеет измеримого решения $h(\cdot): S^1 \rightarrow S^1$.

В случае, когда иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные своего разложения в непрерывную дробь, доказано существование слабо перемешивающего коцикла вида $\varphi(\exp(2\pi i x)) = \exp(2\pi i \tilde{\varphi}(x))$, где $\tilde{\varphi}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $W^1(M(L)(\mathbb{T}))$, а $M(y)$ растет медленнее, чем $y \ln^{1/2} y$, и установлена разрешимость уравнения $(*)$ (а также его аддитивного аналога), если $\tilde{\varphi} \in W^1(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}))$.

Библиография: 20 названий.

Пусть Γ – счетная всюду плотная подгруппа группы $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. *Мультипликативным коциклом на $\Gamma \times S^1$* (со значениями в S^1) называется измеримая функция $A: \Gamma \times S^1 \rightarrow S^1$, удовлетворяющая условию

$$A(\omega \cdot \tau, z) = A(\omega, z)A(\tau, z \cdot \omega)$$

для почти всех $z \in S^1$ и всех $\omega, \tau \in \Gamma$ (см. [1]).

Если $\Gamma = \{e^{2\pi i n \alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$, где α – иррациональное число, то мультипликативный коцикл на $\Gamma \times S^1$ назовем *коциклом над поворотом α* .

Определим в этом случае измеримую функцию $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ по формуле $\varphi(z) = A(e^{2\pi i \alpha}, z)$. Тогда нетрудно проверить, что

$$A(e^{2\pi i \alpha n}, z) = \begin{cases} \prod_{s=0}^{n-1} \varphi(ze^{2\pi i \alpha s}), & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ \prod_{s=n}^{-1} \varphi(ze^{2\pi i \alpha s}), & n < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Наоборот, если $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ – измеримая функция, α – иррациональное число, то функция A , определенная формулой (1), является коциклом над поворотом α .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00248) и программы “Университеты России” (грант № УР.04.03.013).

Для простоты функцию φ также называют *коциклом*, и везде ниже под коциклом мы будем понимать измеримую функцию из S^1 в S^1 .

Положим $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, представляя $\mathbb{T}$ в виде отрезка $[0, 1]$ с отождествленными концами.

Нетрудно видеть, что любой коцикл φ можно представить в виде $\varphi(\exp(2\pi i x)) = \exp(2\pi i \tilde{\varphi}(x))$, где $\tilde{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция и $\tilde{\varphi}(x+1) - \tilde{\varphi}(x) \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Если $\tilde{\varphi}$ — непрерывная функция, то разность $\tilde{\varphi}(x+1) - \tilde{\varphi}(x)$ не зависит от выбора x и называется (*топологической*) *степенью коцикла* φ .

Пусть X — некоторое подпространство пространства измеримых действительных 1-периодических функций, m — целое число. Через $\Phi_m(X)$ обозначим множество коциклов φ , представимых в виде

$$\varphi(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(m x + \tilde{\varphi}(x))}, \quad (2)$$

где функция $\tilde{\varphi}$ принадлежит пространству X .

Везде ниже для непрерывного коцикла φ через $\tilde{\varphi}$ будем обозначать функцию на $\mathbb{T}$, определенную (с точностью до аддитивной целой постоянной) формулой (2). При этом коцикл φ можно считать 1-периодической функцией переменной x (со значениями в S^1).

Два коцикла φ и ψ будем называть *когомологичными над поворотом* α , если существует коцикл h такой, что

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{h(e^{2\pi i \alpha} z)}{h(z)}. \quad (3)$$

Коцикл называется *тривиальным* (над поворотом α), если он когомологичен над поворотом α некоторой константе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Коцикл φ называется *слабо перемешивающим над поворотом* α , если не существуют $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $c \in S^1$ такие, что φ^n и c когомологичны над поворотом α ; иными словами, φ^n — нетривиальный коцикл (над поворотом α) при всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (см. [2]).

Это свойство коцикла непосредственно связано с условием непрерывности спектра (на некотором подпространстве) так называемого косога произведения (или косога сдвига) на двумерном торе над поворотом α .

Косым произведением на двумерном торе $S^1 \times S^1$ над поворотом α называется преобразование $S^1 \times S^1$ вида

$$S_{\alpha, \varphi}(z, w) = (e^{2\pi i \alpha} z, \varphi(z)w),$$

где $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ — коцикл.

Две измеримые функции $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *аддитивно когомологичными над поворотом* α , если существует измеримая функция $\theta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ (которую мы будем называть *функцией переноса*) такая, что

$$f(\cdot) - g(\cdot) = \theta(\cdot + \alpha) - \theta(\cdot).$$

Сохраняющее плоскую меру Лебега преобразование T двумерного тора $S^1 \times S^1$ называется *эргодичным*, если любая инвариантная относительно T функция $F \in L^2(S^1 \times S^1)$ есть п.в. константа, т.е.

$$F(T(z, w)) = F(z, w) \Rightarrow F = \text{const} \quad \text{для п.в. } (z, w).$$

Определим унитарный оператор $U_T: L^2(S^1 \times S^1) \rightarrow L^2(S^1 \times S^1)$ по формуле

$$U_T(F(z, w)) = F(T(z, w)), \quad F \in L^2(S^1 \times S^1).$$

Пусть H – инвариантное относительно U_T подпространство $L^2(S^1 \times S^1)$. Эндоморфизм T называется *слабо перемешивающим на H* , если оператор U_T не имеет на H собственных функций кроме констант. Представим гильбертово пространство $L^2(S^1 \times S^1)$ в виде прямой суммы инвариантных относительно $U_{S_{\alpha, \varphi}}$ подпространств

$$L^2(S^1 \times S^1) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_m,$$

где

$$H_m = \{g : g(z, w) = f(z)w^m, f \in L^2(S^1)\}.$$

Ясно, что на пространстве H_0 оператор $U_{S_{\alpha, \varphi}}$ имеет полную систему собственных векторов $\{e^{2\pi i m x}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ и, значит, косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ не может быть слабо перемешивающим на H_0 . Определим пространство $H_0^\perp$ как ортогональное дополнение к пространству H_0 , $H_0^\perp = \bigoplus_{m \neq 0} H_m$.

В работе [3] доказано, что коцикл φ будет слабо перемешивающим над иррациональным поворотом α в том и только том случае, когда косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ слабо перемешивает на $H_0^\perp$.

Эндоморфизм T называется (*сильно*) *перемешивающим на H* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_T^n F, G \rangle = \langle F, 1 \rangle \langle 1, G \rangle \quad \forall F, G \in H.$$

Известно [4; гл. 2, §9], что сильное перемешивание на H влечет за собой слабое перемешивание на H .

Из результатов работы [5] следует, что для всякого иррационального α и $\varphi \in \Phi_0(AC(\mathbb{T}))$ косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ не является сильно перемешивающим на $H_0^\perp$.¹

В статье [2] доказано, что если число α имеет неограниченные неполные частные, то в $\Phi_0(C^1(\mathbb{T}))$ существует слабо перемешивающий коцикл над поворотом α .

В [6] доказано, что для любого иррационального α и $\varphi \in \Phi_m(W^1(BV(\mathbb{T})))$, $m \neq 0$, косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ сильно перемешивает на $H_0^\perp$ и, с другой стороны, что для любого иррационального α существует коцикл $\varphi \in \Phi_m(CBV(\mathbb{T}))$, $m \neq 0$, такой, что косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ не эргодично.²

В [7] доказано, что для любого иррационального α и $\varphi \in \Phi_m(AC(\mathbb{T}))$, $m \neq 0$, косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ слабо перемешивает на $H_0^\perp$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс функций $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) функция $M(\cdot)$ выпуклая, $M(0) = 0$ и $M(y)/y \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow +\infty$;
- 2) функция $z = M(\sqrt{t})$ вогнутая на $\mathbb{R}_+$.

¹Здесь $AC(\mathbb{T}) = W^1(L(\mathbb{T}))$ – пространство абсолютно непрерывных 1-периодических функций.

²Здесь $BV(\mathbb{T})$ – пространство 1-периодических функций ограниченной вариации, а $CBV(\mathbb{T})$ – подпространство непрерывных функций из $BV(\mathbb{T})$

Известно [8], что при $M \in \mathfrak{M}$ класс Орлича

$$M(L)(\mathbb{T}) = \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \text{ — измеримая функция : } \int_0^1 M(|f(x)|) dx < \infty \right\}$$

образует банахово пространство (пространство Орлича) относительно нормы, определяемой по формуле

$$\|f\|_{M(L)(\mathbb{T})} := \inf_{y>0} \frac{1}{y} \left(1 + \int_0^1 M(y|f(x)|) dx \right).$$

Нетрудно проверить, что функция $M(y) = y \ln^\beta(e+y)$ при любом $\beta > 0$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Пространство Орлича, соответствующее функции такого вида, обозначим через $L \log_+^\beta L(\mathbb{T})$.

Через $W^1(M(L)(\mathbb{T}))$ будем обозначать пространство почти всюду дифференцируемых 1-периодических функций, у которых производная принадлежит классу Орлича $M(L)(\mathbb{T})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные, $M(\cdot) \in \mathfrak{M}$, $M(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$.

Тогда в пространстве $\Phi_0(W^1(M(L)(\mathbb{T})))$ существует слабо перемешивающий коцикл над поворотом α .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условиям теоремы 1 удовлетворяет, например, функция $M(y) = y \ln^{1/2-\varepsilon}(e+y)$ при $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные. Тогда каждая функция f из пространства $W^1(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}))$ аддитивно когомологична $\int_0^1 f(t) dt$ над поворотом α с функцией переноса $\theta(\cdot)$, для которой интеграл $\int_0^1 \exp(|\theta(x)|^{2/3-\varepsilon}) dx$ конечен при всех $\varepsilon \in (0, \frac{2}{3})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякого иррационального числа α с ограниченными неполными частными и любого коцикла $\varphi \in \Phi_m(W^1(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})))$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ сильно перемешивает на $H_0^\perp$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всякого иррационального числа α с ограниченными неполными частными и коцикла $\varphi \in \Phi_0(W^1(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})))$ косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ эргодично тогда и только тогда, когда числа $1, \alpha, \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях следствия 2 оператор $U_{S_{\alpha, \varphi}}$ имеет чисто дискретный спектр и, значит, коцикл φ не является слабо перемешивающим над поворотом α .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть α и M удовлетворяют условиям теоремы 1 и коцикл $\varphi_0 \in \Phi_0(W^1(M(L)(\mathbb{T})))$ слабо перемешивающий.

Тогда любой коцикл вида $\varphi \cdot \varphi_0$, где $\varphi \in \Phi_0(W^1(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})))$, $\int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx = m + n\alpha$, $m, n \in \mathbb{Z}$, является слабо перемешивающим.

§ 1. Вспомогательные определения и утверждения

1.1. Через $L_0(\mathbb{T}) = L_0(\mathbb{T}; \mathbb{R})$ обозначим линейное пространство 1-периодических измеримых действительных функций, снабженное топологией сходимости по мере Лебега. Для функции $f \in L_0(\mathbb{T})$ определим невозрастающую перестановку $P(f, y)$ по формуле

$$P(f, y) = \inf \{z > 0 : \text{mes}\{t \in [0, 1] : |f(t)| > z\} \leq y\}.$$

Известно, что если функция f интегрируемая, то $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 P(f, y) dy$.

ТЕОРЕМА А [9]. Пусть $M(\cdot) \in \mathfrak{M}$ и $T_n: M(L)(\mathbb{T}) \rightarrow L_0(\mathbb{T})$, $n = 1, 2, \dots$, — линейные, непрерывные операторы, перестановочные с операторами сдвига $\tau_a g(x) = g(x + a)$.

Тогда если последовательность $\{T_n g\}_{n=1}^\infty$ сходится по мере Лебега для каждой $g \in M(L)(\mathbb{T})$, то найдется постоянная $B > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $g \in M(L)(\mathbb{T})$, $y \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$y \leq B \int_0^1 M\left(\frac{|g(t)|}{P(T_n g, y)}\right) dt.$$

1.2. Для иррационального числа α определим числовую последовательность $\lambda = \lambda(\alpha) = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, полагая $\lambda_k = ((2\pi i k)(e^{2\pi i \alpha k} - 1))^{-1}$, $k \neq 0$, и $\lambda_0 = 0$. Нетрудно видеть, что $|\lambda_{-k}| = |\lambda_k| \forall k \in \mathbb{Z}$.

Для $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ положим $\Delta_j = \{2^{j-1}, \dots, 2^j - 1\}$, если $j > 0$, и $\Delta_j = \{-2^{-j} + 1, \dots, -2^{-j+1}\}$, если $j < 0$.

Пусть $\lambda_1^{*,j} \geq \lambda_2^{*,j} \geq \dots \geq \lambda_{2^{|j|-1}}^{*,j}$ обозначает невозрастающую перестановку последовательности $\{|\lambda_s|\}_{s \in \Delta_j}$. При каждом $j \in \mathbb{N}$ определим индексы l_s^j , $s \in \Delta_j$, из равенства $\lambda_s^{*,j} = |\lambda_{l_s^j}|$, а при каждом $s \in \mathbb{N}$ определим два лакунарных по Адамару подмножества $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} D_s^0 &= \{\pm l_s^j : j \geq 1 + \lceil \log_2 s \rceil, j \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ D_s^1 &= \{\pm l_s^j : j \geq 1 + \lceil \log_2 s \rceil, j \equiv 1 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

(Здесь $\lceil x \rceil = x$, если x целое, и $\lceil x \rceil = x + 1$ в противном случае.)

Ясно, что константы лакуарности этих множеств равномерно ограничены снизу числом 2 и что $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \bigcup_{s=1}^\infty (D_s^0 \cup D_s^1)$.

ЛЕММА Б [10]. Пусть иррациональное α имеет ограниченные неполные частные. Тогда существует константа $C_\alpha > 0$ такая, что

$$\lambda_s^{*,j} \leq \frac{C_\alpha}{s} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s = 1, \dots, 2^{j-1}.$$

1.3. Для интегрируемой функции $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ определим ее коэффициенты Фурье по формуле $\widehat{f}_s = \widehat{f}(s) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i s t} dt$, $s \in \mathbb{Z}$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

ЛЕММА 1. Пусть $M \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{K}_j \in L^2(\mathbb{T})$, $\mathbf{v}_j \in M(L)(\mathbb{T})$, $\int_0^1 |\mathbf{v}_j(x)| dx = 1$,
 $\|\mathbf{K}_j\|_2 > 2 \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \geq 2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Тогда если последовательность $\{\mathbf{K}_j * g\}_{j=1}^\infty$ сходится по мере Лебега для каждой $g \in M(L)(\mathbb{T})$, то найдется постоянная $C > 0$ такая, что для всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1 \leq C \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \ln \frac{e\|\mathbf{K}_j\|_2}{2 \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Из определения невозрастающей перестановки

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1 = \int_0^1 |(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j)(x)| dx = \int_0^1 P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy.$$

Пусть $0 < \delta < 1$. Из неравенства Коши–Буняковского получаем, что

$$\int_0^\delta P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy = \int_0^1 P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \chi_{[0, \delta]}(y) dy \leq \|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_2 \sqrt{\delta}.$$

Из неравенства Юнга для свертки [11; § 13.6] и условия леммы имеем соотношение $\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_2 \leq \|\mathbf{K}_j\|_2 \|\mathbf{v}_j\|_1 = \|\mathbf{K}_j\|_2$. Следовательно,

$$\int_0^\delta P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy \leq \|\mathbf{K}_j\|_2 \sqrt{\delta}. \quad (5)$$

Обозначим $\widetilde{M}(y) = M(y)/y$. Из условия выпуклости $M(y)$ и равенства $M(0) = 0$ следует, что $\widetilde{M}(y)$ – монотонная функция.

Применяя теорему А к операторам $T_j g = \mathbf{K}_j * g$ и полагая $g = \mathbf{v}_j$, получаем неравенство

$$y \ll \int_0^1 \frac{|\mathbf{v}_j(x)|}{P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y)} \widetilde{M}\left(\frac{|\mathbf{v}_j(x)|}{P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y)}\right) dx \quad (6)$$

для любых $j \in \mathbb{N}$, $y \in (0, 1)$.³

Теперь оценим сверху интеграл $\int_\delta^1 P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy$.

Если $P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \geq 1$, то $\widetilde{M}(|\mathbf{v}_j(x)|/P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y)) \leq \widetilde{M}(|\mathbf{v}_j(x)|) \quad \forall x \in [0, 1]$,
 и, значит, в силу (6) справедливо неравенство $yP(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \ll \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx$.

Если же $P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) < 1$, то тем более $yP(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) < 1 \leq \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx$.

³ В этой лемме запись $A \ll B$ означает, что $A \leq CB$, где C – положительная константа, которая не зависит от j , y и δ .

В обоих случаях $yP(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \ll \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_\delta^1 P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy &= \int_\delta^1 yP(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \frac{1}{y} dy \leq \left(\sup_{\delta \leq y \leq 1} yP(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) \right) \ln \frac{1}{\delta} \\ &\ll \int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \ln \frac{1}{\delta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Складывая неравенства (5) и (7), получаем $\forall \delta \in (0, 1)$

$$\int_0^1 P(\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j, y) dy \ll \|\mathbf{K}_j\|_2 \sqrt{\delta} + J_j \ln \frac{1}{\delta},$$

где через J_j мы обозначили интеграл $\int_0^1 M(|\mathbf{v}_j(x)|) dx$.

Найдем минимум функции $h(\delta) = \|\mathbf{K}_j\|_2 \sqrt{\delta} + J_j \ln(1/\delta)$ на интервале $(0, 1)$.

Необходимое условие экстремума $h'(\delta) = 0$ дает нам критическую точку $\widehat{\delta} = (2J_j / \|\mathbf{K}_j\|_2)^2$, которая в силу условия леммы действительно принадлежит интервалу $(0, 1)$. Ясно, что $\lim_{\delta \rightarrow 0+} h(\delta) = +\infty$ и

$$h(1) = \|\mathbf{K}_j\|_2 > 2J_j + 2J_j \ln\left(\frac{\|\mathbf{K}_j\|_2}{2J_j}\right) = h(\widehat{\delta}).$$

(Второе соотношение справедливо из-за неравенства $x > 1 + \ln x$ для $x > 1$.)

Итак, имеем

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1 \ll \min_{0 < \delta < 1} h(\delta) = 2J_j \ln\left(e \frac{\|\mathbf{K}_j\|_2}{2J_j}\right),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Для всякого иррационального числа α с ограниченными неполными частными и любого $M \in \mathfrak{M}$, для которого $M(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$, найдутся функция $f \in W^1(M(L)(\mathbb{T}))$, $\int_0^1 f(t) dt = 0$, и последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что биркгофовы суммы*

$$\mathbf{B}_{m_j}(f)[\cdot] = \sum_{s=0}^{m_j-1} f(\cdot + \alpha s)$$

расходятся по мере Лебега при любом выборе подпоследовательности $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \{n_k\}_{k=1}^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $\mathcal{B}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ — полином Бернулли степени 1, т. е.

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi s x}{s} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \{x\}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье функции $\mathcal{B}(\cdot)$ имеют вид $\widehat{\mathcal{B}}_s = (2\pi i s)^{-1}$, если $s \neq 0$, и $\widehat{\mathcal{B}}_0 = 0$, а для всякой абсолютно непрерывной функции $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\int_0^1 f(x) dx = 0$, справедливо равенство $f(x) = (\mathcal{B} * f')(x)$ п.в. x (см. [12; гл. 2, §§ 2, 9]).

Положим $K_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \mathcal{B}(x + \alpha s)$, $n \in \mathbb{N}$. Вследствие свойства перестановочности операций свертки и сдвига

$$(K_n * g)(x) = \sum_{s=0}^{n-1} (\mathcal{B}(\cdot + \alpha s) * g)(x) = \sum_{s=0}^{n-1} (\mathcal{B} * g)(x + \alpha s)$$

для любой $g \in L(\mathbb{T})$. Следовательно, при п.в. x . $(K_n * f')(x) = \sum_{s=0}^{n-1} f(x + \alpha s)$ для всякой абсолютно непрерывной 1-периодической f , для которой $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Нетрудно вычислить коэффициенты Фурье функции $K_n(x)$:

$$\widehat{K}_n(s) = \frac{e^{2\pi i n \alpha s} - 1}{2\pi i s (e^{2\pi i \alpha s} - 1)}$$

при $s \neq 0$ и $\widehat{K}_n(0) = 0$.

Пусть $\mathcal{F}_n(x)$ — ядро Фейера ($\mathcal{F}_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n (1 - k/n) \cos 2\pi k x$). Известно [12; гл. 3, § 3], что $\mathcal{F}_n(x) \geq 0 \forall x$, $\int_0^1 \mathcal{F}_n(x) dx = 1$, $\max_x \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(0) = n$.

Обозначим $\widetilde{M}(y) = M(y)/y$. Так как в силу монотонного роста $\widetilde{M}$ справедливо $\widetilde{M}(\mathcal{F}_n(x)) \leq \widetilde{M}(n)$, то для любого $n \geq 1$

$$\int_0^1 M(|\mathcal{F}_n(x)|) dx = \int_0^1 \mathcal{F}_n(x) \widetilde{M}(\mathcal{F}_n(x)) dx \leq \widetilde{M}(n). \quad (8)$$

С другой стороны, в силу леммы Стечкина [13] имеем неравенство $\mathcal{F}_n(y) \geq n \cos 2\pi n y$ при $|y| \leq 1/(2n)$. Следовательно, $\mathcal{F}_n(y) \geq n(1 - 4ny)$ при $|y| \leq 1/(4n)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 M(\mathcal{F}_n(x)) dx &\geq \int_0^{1/(4n)} M(n(1 - 4nx)) dx = \frac{1}{4n} \int_0^1 M(n(1 - y)) dy \\ &= \frac{1}{4n} \int_0^1 M(nz) dz = \frac{1}{4n} \frac{1}{n} \int_0^n M(u) du. \end{aligned}$$

Применим к выпуклой функции M интегральное неравенство Йенсена [12; гл. 1, § 10]:

$$\frac{1}{n} \int_0^n M(u) du \geq M\left(\frac{1}{n} \int_0^n u du\right) = M\left(\frac{n}{2}\right).$$

Из вогнутости функции $M(\sqrt{t})$ и условия $M(0) = 0$ следует монотонное убывание отношения $M(\sqrt{t})/t$, вследствие которого $M(y)/y^2 \geq M(2y)/(4y^2)$. Следовательно, $M(2y) \leq 4M(y)$ при всех $y \geq 0$ и

$$\int_0^1 M(|\mathcal{F}_n(x)|) dx \geq \frac{1}{4n^2} \int_0^n M(u) du \geq \frac{1}{16} \widetilde{M}(n). \quad (9)$$

Оценим $\|K_n\|_2$ сверху при каждом $n \in \mathbb{N}$. Определим l из условия $2^{l-1} \leq n^2 < 2^l$. Имеем

$$\|K_n\|_2^2 = \sum_s |\widehat{K}_n(s)|^2 = \sum_{|s|=1}^{2^l-1} |\widehat{K}_n(s)|^2 + \sum_{|s|=2^l}^{\infty} |\widehat{K}_n(s)|^2 = \sum' + \sum''.$$

Для оценки сверху $\sum'$ используем неравенство $|\widehat{K}_n(s)| \leq 1/|\sin \pi \alpha s| 2\pi|s| = 2|\lambda_s|$ и лемму Б⁴:

$$\sum' \leq 8 \sum_{s=1}^l \sum_{k \in \Delta_s} |\lambda_k|^2 \ll \sum_{s=1}^l \sum_{k=1}^{2^{s-1}} \frac{1}{k^2} \ll j \ll \ln n,$$

а для оценки сверху $\sum''$ – неравенства $|\widehat{K}_n(s)|^2 \leq \|n\alpha s\|^2 / (4s^2 \|\alpha s\|^2) \leq n^2 / (4s^2)$ (второе из них следует из соотношения $\|ny\| \leq n\|y\|$)⁵:

$$\sum'' \leq 2 \sum_{s=2^l}^{\infty} \frac{n^2}{4s^2} \ll \frac{n^2}{2^l} < 1.$$

Итак, мы доказали, что

$$\|K_n\|_2 \ll \sqrt{\ln n} \quad (10)$$

при любом $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ – разложение числа α в непрерывную дробь, а q_j – знаменатели подходящих дробей для α . Так как по условию леммы неполные частные числа α ограничены сверху, то найдется $A > 1$ такое, что $q_j \ll A^j \forall j$ (см., например, [14])

Положим $t = t(j) = [\log_2(q_j/C(\alpha))] + 1$ и покажем, что для всякого $j \in \mathbb{N}$ найдется число $n_j \in \{2^{t(j)}, \dots, 2^{t(j)+1} - 1\}$, для которого

$$\sum_{s=1}^j \sin^2 \pi \alpha q_s n_j \geq \frac{1}{4} j. \quad (11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^t} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \left(\sum_{s=1}^j \sin^2 \pi \alpha q_s n \right) &= \sum_{s=1}^j \frac{1}{2^t} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \sin^2 \pi \alpha q_s n \\ &= \sum_{s=1}^j \frac{1}{2^t} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \alpha q_s n). \end{aligned}$$

⁴В лемме 2 запись $A \ll B$ (соответственно $A \gg B$) означает, что $A \leq CB$ (соответственно $A \geq CB$), где C – положительная постоянная, не зависящая от n и j .

⁵Здесь и везде ниже $\|x\| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа.

Из ограниченности неполных частных числа α следует [14], что существует константа $C(\alpha) > 0$ такая, что

$$q\|\alpha q\| \geq C(\alpha) \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

(Не ограничивая общности, будем считать, что $C(\alpha) \leq \frac{1}{2}$.)

Из этого неравенства и тривиальной оценки суммы Вейля [15] имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \cos 2\pi\alpha q_s n \right| &= \left| \operatorname{Re} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} e^{2\pi i \alpha q_s n} \right| \leq \left| \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} e^{2\pi i \alpha q_s n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\|\alpha q_s\|} \leq \frac{q_s}{2C(\alpha)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^j \frac{1}{2^t} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi\alpha q_s n) &\geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^j \left(1 - \frac{1}{2^t} \left| \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \cos 2\pi\alpha q_s n \right| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^j \left(1 - \frac{q_s}{2^t 2C(\alpha)} \right) \geq \frac{j}{2} \left(1 - \frac{q_j}{2^t 2C(\alpha)} \right) \geq \frac{j}{4}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из определения $t(j)$, вследствие которого $2^{t(j)} > q_j/C(\alpha)$.

Итак,

$$\frac{1}{2^t} \sum_{n=2^t}^{2^{t+1}-1} \left(\sum_{s=1}^j \sin^2 \pi\alpha q_s n \right) \geq \frac{j}{4}$$

и, значит, существует $n_j \in \{2^t, \dots, 2^{t+1}-1\}$, для которого $\sum_{s=1}^j \sin^2 \pi\alpha q_s n \geq j/4$, что и требовалось.

Обозначим $G_j(x) = K_{n_j} * \mathcal{F}_{2^{t(j)}}(x)$. Оценим $\|G_j\|_2$ снизу.

Используя (11), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \|G_j\|_2^2 &\geq \sum_{s=1}^j |\widehat{K}_{n_j}(q_s)|^2 |\widehat{\mathcal{F}}_{2^t}(q_s)|^2 = \sum_{s=1}^j |\widehat{K}_{n_j}(q_s)|^2 \left(1 - \frac{q_s}{2^t} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{s=1}^j |\widehat{K}_{n_j}(q_s)|^2 \\ &= \sum_{s=1}^j \frac{\sin^2(\pi\alpha n_j q_s)}{\sin^2(\pi\alpha q_s) (2\pi)^2 q_s^2} \geq \sum_{s=1}^j \frac{\sin^2(\pi\alpha n_j q_s)}{4\pi^4} \geq \frac{1}{4^3 \pi^4} j, \end{aligned} \quad (13)$$

где предпоследнее неравенство справедливо в силу следующего свойства знаменателей q_s подходящих дробей для числа α : $q_s \|\alpha q_s\| \leq 1 \quad \forall s$ [14]. Из определения $t(j)$, n_j и неравенства $q_j \ll A^j \quad \forall j$ следуют соотношения $t(j) \ll \ln n_j$, $\ln n_j \ll t(j) \ll j$. Поэтому из (13) получаем

$$\|G_j\|_2 \gg \sqrt{\ln n_j}. \quad (14)$$

Соотношения (13) позволяют также доказать неравенство

$$\|K_{n_j}\|_2 \gg \sqrt{\ln n_j}. \quad (15)$$

Действительно,

$$\|K_{n_j}\|_2^2 \geq \sum_{s=1}^j |\widehat{K}_{n_j}(q_s)|^2,$$

а в силу (13) имеем

$$\sum_{s=1}^j |\widehat{K}_{n_j}(q_s)|^2 \gg \ln n_j.$$

Теперь оценим сверху норму полинома G_j в пространстве $L^4(\mathbb{T})$.

По теореме Литтлвуда–Пэли [16; гл. 15, § 4] и интегральному неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \|G_j\|_4 &\ll \left\| \sqrt{\sum_{s=-t(j)}^{t(j)} |\delta_s(G_j)(\cdot)|^2} \right\|_4 = \sqrt{\left\| \sum_{s=-t(j)}^{t(j)} |\delta_s(G_j)(\cdot)|^2 \right\|_2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{s=-t(j)}^{t(j)} \|\delta_s^2(G_j)\|_2} = \sqrt{\sum_{s=-t(j)}^{t(j)} \|\delta_s(G_j)\|_4^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

(Здесь и далее $\delta_s(g)(x) = \sum_{k \in \Delta_s} \widehat{g}_k e^{2\pi i k x}$.)

Из неравенства Хаусдорфа–Юнга [11; § 13.5] и свойств коэффициентов Фурье $\mathcal{F}_n$ получаем

$$\|\delta_s(G_j)\|_4 \leq \left(\sum_{k \in \Delta_s} |\widehat{G}_j(k)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \left(\sum_{k \in \Delta_s} |\widehat{K}_{n_j}(k)|^{4/3} \right)^{3/4}. \quad (17)$$

Так как $|K_{n_j}(s)| \leq 2|\lambda_s|$, то из (17) и леммы Б получаем

$$\begin{aligned} \|\delta_s(G_j)\|_4 &\leq 2 \left(\sum_{k \in \Delta_s} |\lambda_k|^{4/3} \right)^{3/4} = 2 \left(\sum_{k=1}^{2^{|s|-1}} (\lambda_k^{*,s})^{4/3} \right)^{3/4} \\ &\leq 2C_\alpha \left(\sum_{k=1}^{2^{|s|-1}} \frac{1}{k^{4/3}} \right)^{3/4} \leq 6C_\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) заключаем, что

$$\|G_j\|_4 \ll \sqrt{\sum_{s=-t(j)}^{t(j)} 1} \ll \sqrt{\ln n_j}. \quad (18)$$

В силу свойства логарифмической выпуклости нормы $\|\cdot\|_p$ имеем неравенство $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1^{1/3} \|\cdot\|_4^{2/3}$, вследствие которого

$$\|G_j\|_1 \geq \frac{\|G_j\|_2^3}{\|G_j\|_4^2}. \quad (19)$$

Подставляя в (19) оценки (14) и (18), получаем

$$\|G_j\|_1 \gg \sqrt{\ln n_j}. \quad (20)$$

Положим $v_{n_j}(x) = \mathcal{F}_{2^{t(j)}}$. Из (9), (8) и определения класса $\mathfrak{M}$ следует

$$\widetilde{M}(n_j) \ll \widetilde{M}(2^{t(j)}) \ll \int_0^1 M(|v_{n_j}(x)|) dx \leq \widetilde{M}(2^{t(j)}) \leq \widetilde{M}(n_j), \quad (21)$$

из (15) — $\|K_{n_j}\|_2 \gg (\sqrt{\ln n_j} / \widetilde{M}(n_j)) \widetilde{M}(n_j)$, а так как по условию леммы

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln n_j}}{\widetilde{M}(n_j)} = +\infty, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \widetilde{M}(n_j) = +\infty,$$

то существует $J \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|K_{n_j}\|_2 \geq 2 \int_0^1 M(|v_{n_j}(x)|) dx \geq 2 \quad (22)$$

при $j > J$. Из (9) и (10) следует неравенство

$$\frac{e\|K_{n_j}\|_2}{2 \int_0^1 M(|v_{n_j}(x)|) dx} \ll \frac{\sqrt{\ln n_j}}{\widetilde{M}(n_j)}. \quad (23)$$

Полагая $\xi_j = \sqrt{\ln n_j} / \widetilde{M}(n_j)$, из (21) и (23) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 M(|v_{n_j}(x)|) dx \ln \frac{e\|K_{n_j}\|_2}{2 \int_0^1 M(|v_{n_j}(x)|) dx} \\ & \ll \frac{\sqrt{\ln n_j}}{\xi_j} \ln \xi_j = o(\sqrt{\ln n_j}) = o(\|K_{n_j} * v_{n_j}\|_1), \quad j \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где последнее соотношение справедливо в силу (20).

Ясно, что неравенства (22) и (24) останутся справедливыми, если в качестве n_j брать элементы произвольной подпоследовательности последовательности $\{n_j\}_{j=J}^\infty$.

Поэтому полагая $\mathbf{v}_j = v_{n_{J+j}}$, $\mathbf{K}_j = K_{n_{J+j}}$, $j \in \mathbb{N}$, и применяя лемму 1, получаем функцию $g \in M(L)(\mathbb{T})$, для которой последовательность $K_j * g$ (а также любая ее подпоследовательность) расходится по мере. Полагая $f = \mathcal{B} * g$ и замечая, что $f'(x) = g(x)$ п.в. x , $\int_0^1 f(t) dt = 0$ и $\mathbf{K}_j * g(x) = \sum_{s=0}^{n_{J+j}-1} f(x + \alpha s)$, получаем требуемое утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть α — иррациональное число. Если измеримая функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ не аддитивно кохомологична константе над поворотом α , то существует такое число $s_0 \in \mathbb{R}$, что коцикл $\exp(2\pi i s_0 f(x))$ слабо перемешивающий над поворотом α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Положим

$$S(f) = \{s \in \mathbb{R} : \exp(2\pi i s f(x)) \text{ — тривиальный коцикл над поворотом } \alpha\}.$$

В [17] доказано, что аддитивная группа $S(f)$ — борелевское подмножество $\mathbb{R}$ и что если $f(x)$ не аддитивно когомологична константе над поворотом α , то $S(f) \neq \mathbb{R}$.

Так как всякая собственная борелевская подгруппа $\mathbb{R}$ имеет лебегову меру 0, то $\text{mes} \bigcup_{k \neq 0} \{s : ks \in S(f)\} = 0$, и, значит, существует такое $s_0 \in \mathbb{R}$, что $ks_0 \notin S(f)$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Последнее свойство, очевидно, означает, что коцикл $\exp(2\pi i s_0 f(x))$ слабо перемешивающий над поворотом α .

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1.

Для α и M из условия теоремы построим функцию f_0 и последовательность $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющие лемме 2.

Докажем, что не существует константы, которой функция f_0 аддитивно когомологична над поворотом α .

Предположим обратное, т.е., что существует $\gamma \in \mathbb{R}$ и измеримая функция $\theta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f_0(x) - \gamma = \theta(x + \alpha) - \theta(x)$. Тогда в силу теоремы Аносова [18] $\gamma = \int_0^1 f_0(x) dx = 0$.

Из последовательности $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ выберем подпоследовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ такую, что дробные доли $\{m_j \alpha\}$ сходятся. Нетрудно тогда проверить, что разность $\theta(x + \alpha m_j) - \theta(x)$ сходится по мере при $j \rightarrow \infty$,

Поэтому так как $\mathbf{B}_{m_j}(f_0)(x) = \theta(x + \alpha m_j) - \theta(x)$, то последовательность $\{\mathbf{B}_{m_j}(f_0)\}_{j=1}^\infty$ сходится по мере, что, однако, противоречит выбору функции f_0 .

Теперь применим лемму 3, в силу которой существует число $s_0 \in \mathbb{R}$ такое, что коцикл $\exp(2\pi i s_0 f_0(x))$ слабо перемешивающий над поворотом α . Функция $f(x) = s_0 f_0(x)$ искомая.

§ 3. Доказательство теоремы 2

В [16; гл. 12, § 7] доказано, что если для множества $L = \{\pm l_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено условие $|l_{k+1}|/|l_k| > \lambda > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, то существуют константы $C^1 > 0$ и $C^2 > 0$ (зависящие только от λ) такие, что для всякой $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{k \in L} |\widehat{g}_k|^2} \leq C^1 \int_0^1 |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + C^2.$$

Отсюда получаем, что существуют абсолютные константы $c^1 > 0$, $c^2 > 0$ такие, что

$$\sqrt{\sum_{k \in D_s^\xi} |\widehat{g}_k|^2} \leq c^1 \int_0^1 |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + c^2 \quad (25)$$

при всех $s \in \mathbb{N}$, $\xi = 0, 1$, $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$.

Для удобства изложения обозначим $J(g) = c^1 \int_0^1 |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + c^2$.

Определим операторы $\Lambda_s^\xi: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$, $\xi = 0, 1$, $s \in \mathbb{N}$, по формуле $\Lambda_s^\xi g(x) = \sum_{k \in D_s^\xi} \lambda_k \widehat{g}_k e^{2\pi i k x}$.

Так как в силу леммы Б и определения множеств $D_s^{0,1}$ справедливо неравенство

$$|\lambda_k| \leq \frac{C_\alpha}{s} \quad \forall k \in D_s^{0,1},$$

то из (25) получаем

$$\|\Lambda_s^\xi g(\cdot)\|_2^2 = \sum_{k \in D_s^\xi} |\lambda_k|^2 |\widehat{g}_k|^2 \leq \frac{C_\alpha^2}{s^2} \sum_{k \in D_s^\xi} |\widehat{g}_k|^2 \leq \frac{C_\alpha^2}{s^2} J^2(g). \quad (26)$$

При каждой фиксированной $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$ определим оператор $T_g: l^2(\mathbb{N}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ по формуле

$$(T_g[u])(\cdot) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s s (\Lambda_s^0 g(\cdot) + \Lambda_s^1 g(\cdot)).$$

В силу (26) имеем

$$\begin{aligned} \|T_g[u](\cdot)\|_2^2 &= \sum_{s=1}^{\infty} u_s^2 s^2 \|\Lambda_s^0 g(\cdot) + \Lambda_s^1 g(\cdot)\|_2^2 \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} u_s^2 s^2 (\|\Lambda_s^0 g(\cdot)\|_2^2 + \|\Lambda_s^1 g(\cdot)\|_2^2) \leq 2C_\alpha^2 J^2(g) \sum_{s=1}^{\infty} u_s^2. \end{aligned}$$

Следовательно, T_g непрерывно действует из l^2 в L^2 , причем

$$\|T_g\|_{l^2 \rightarrow L^2} \leq \sqrt{2} C_\alpha J(g).$$

Пусть $2 < q < \infty$. В силу неравенства Минковского

$$\|T_g[u](\cdot)\|_q \leq \sum_{s=1}^{\infty} |u_s| s (\|\Lambda_s^0 g(\cdot)\|_q + \|\Lambda_s^1 g(\cdot)\|_q). \quad (27)$$

Из лакуарности ряда Фурье функции $\Lambda_s^\xi g$, $\xi = 0, 1$, равномерной ограниченности констант лакуарности при всех s и теоремы Сидона [11; § 15.3] следует, что

$$\|\Lambda_s^\xi g\|_q \leq C \sqrt{q} \|\Lambda_s^\xi g\|_2,$$

где $C > 0$ — абсолютная константа.

Следовательно, из (26) и (27) заключаем

$$\|T_g[u](\cdot)\|_q \leq C \sqrt{q} \sum_{s=1}^{\infty} |u_s| s (\|\Lambda_s^0 g(\cdot)\|_2 + \|\Lambda_s^1 g(\cdot)\|_2) \leq 2C_\alpha C \sqrt{q} J(g) \|u\|_{l^1}.$$

Отсюда, $\|T_g\|_{l^1 \rightarrow L^q} \leq 2C_\alpha C \sqrt{q} J(g)$ при всех $2 < q < \infty$.

Пусть $0 < \delta < 1$. Положим

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1-\delta}{1} + \frac{\delta}{2}, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1-\delta}{q} + \frac{\delta}{2}.$$

Применяя теорему Рисса–Торина [11; § 13.4] к оператору T_g , заключаем, что он непрерывно действует из $l^{p_1}(\mathbb{N})$ в $L^{q_1}(\mathbb{T})$ и

$$\|T_g\|_{l^{p_1} \rightarrow L^{q_1}} \leq \|T_g\|_{l^1 \rightarrow L^q}^{1-\delta} \|T_g\|_{l^2 \rightarrow L^2}^\delta \leq C \sqrt{q}^{1-\delta} J(g)^{1-\delta} J(g)^\delta = C q^{(1-\delta)/2} J(g).$$

(Здесь и ниже буквой C будем обозначать произвольную положительную постоянную, зависящую только от α .)

Следовательно, $\|T_g[u]\|_{q_1} \leq C q^{(1-\delta)/2} J(g) \|u\|_{l^{p_1}}$. В частности, полагая $\hat{u} = \{1/s\}_{s=1}^\infty$, получаем

$$\|T_g[\hat{u}]\|_{q_1} \leq C q^{(1-\delta)/2} J(g) \|\hat{u}\|_{l^{p_1}} \leq C q^{(1-\delta)/2} J(g) \frac{1}{(p_1 - 1)^{1/p_1}}. \quad (28)$$

Имеем $p_1 - 1 = \delta/(2-\delta)$, $1/(p_1 - 1)^{1/p_1} = (2/\delta - 1)^{1-\delta/2}$, $q_1 = 2q/(2(1-\delta) + q\delta)$, $2(\delta - 1)q_1 = (q_1\delta - 2)q$, $q = 2(1-\delta)/(2/q_1 - \delta)$.

Положим $\delta = 1/q_1$. Тогда

$$q^{(1-\delta)/2} \frac{1}{(p_1 - 1)^{1/p_1}} = \left(2 \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) q_1\right)^{1/2-1/(2q_1)} (2q_1 - 1)^{1-1/(2q_1)} \leq (2q_1)^{3/2}.$$

Поэтому из (28) получаем

$$\|T_g[\hat{u}]\|_{q_1} \leq C q_1^{3/2} J(g) \quad \forall q_1 \in (2, \infty). \quad (29)$$

Полагая $h(x) = T_g[\hat{u}](x)$, заключаем, что $\hat{h}_k = \lambda_k \hat{g}_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому из (29) вытекает, что последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — мультипликатор типа $(L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}), L^q(\mathbb{T}))$ при $q \in (2, \infty)$ [11; § 16.1]. Следовательно, линейный оператор M_λ , который функции $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$ ставит в соответствие функцию $h(x)$, коэффициенты Фурье которой равны $\lambda_k \hat{g}_k$, непрерывно действует из $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$ в $L^q(\mathbb{T})$.

(Заметим также, что оператор M_λ вещественнозначные функции переводит в вещественнозначные, так как нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} M_\lambda \cos 2\pi kx &= -\frac{1}{4\pi k} (\operatorname{ctg} \pi \alpha k \cos 2\pi kx + \sin 2\pi kx), \\ M_\lambda \sin 2\pi kx &= -\frac{1}{4\pi k} (-\cos 2\pi kx + \operatorname{ctg} \pi \alpha k \sin 2\pi kx) \end{aligned}$$

при $k \in \mathbb{N}$.)

Пусть $0 < \beta < 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (29) и определения M_λ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |M_\lambda g(x)|^{2\beta k/3} dx &= \|M_\lambda g\|_{2\beta k/3}^{2\beta k/3} \leq C^{2\beta k/3} \left(\frac{2}{3}\beta k\right)^{\beta k} J(g)^{2\beta k/3} \\ &= \left[C^{2\beta/3} \left(\frac{2}{3}\beta\right)^\beta J(g)^{2\beta/3}\right]^k k^{\beta k}. \end{aligned}$$

В последней формуле выражение в квадратных скобках обозначим буквой R .

Отсюда,

$$\int_0^1 \exp(|M_\lambda g(x)|^{2\beta/3}) dx = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 |M_\lambda g(x)|^{2\beta k/3} dx \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \frac{k^{\beta k}}{k!}.$$

Так как $k^k/k! \leq e^k$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} R^k \frac{k^{\beta k}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^k e^k}{k^{k(1-\beta)}} < \infty,$$

и, следовательно, $\int_0^1 \exp(|M_\lambda g(x)|^{2\beta/3}) dx < \infty$.

Пусть тригонометрические полиномы t_n сходятся к функции g по норме пространства $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$. В силу определения последовательности λ для каждого t_n имеем равенство $\mathcal{B} * t_n(x) = M_\lambda t_n(x + \alpha) - M_\lambda t_n(x)$.⁶ Следовательно, для произвольного $q \in (2, \infty)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B} * g(\cdot) - M_\lambda g(\cdot + \alpha) + M_\lambda g(\cdot)\|_q \\ &= \|\mathcal{B} * (g - t_n)(\cdot) - M_\lambda (g - t_n)(\cdot + \alpha) + M_\lambda (g - t_n)(\cdot)\|_q \\ &\leq (\|\mathcal{B}\|_{L \log_+^{1/2} L \rightarrow L^q} + 2\|M_\lambda\|_{L \log_+^{1/2} L \rightarrow L^q}) \|g - t_n\|_{L \log_+^{1/2} L} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{B} * g(x) = M_\lambda g(x + \alpha) - M_\lambda g(x) \quad \text{п.в. } x.$$

Полагая $g(x) = f'(x)$ и учитывая, что $f(x) - \int_0^1 f(t) dt = B * g(x)$ п.в. x [12; гл. 2, §3], получаем равенство

$$f(x) - \int_0^1 f(t) dt = (M_\lambda f')(x + \alpha) - (M_\lambda f')(x)$$

для почти всех x .

Следовательно, $\theta(\cdot) = M_\lambda g(\cdot)$ — искомая функция переноса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях теоремы 2 функция переноса, вообще говоря, не может быть класса $L^\infty(\mathbb{T})$. Действительно, в работе [10] доказано, что если числовая последовательность $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^\infty$ обладает свойством $\limsup_{|k| \rightarrow \infty} |\mu_k| > 0$, то для того чтобы последовательность $\{\mu_k\}$ была мультипликатором слабого типа $(1, 1)$, необходимо, чтобы

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \text{card}\{k : 2^j \leq |k| < 2^{j+1}, |\mu_k| > \varepsilon\} = \infty.$$

(Определение мультипликаторов слабого типа см. [11; §16.10].) Полагая $\mu_k = \lambda_k$, из этого утверждения и леммы Б получаем, что последовательность $\{\lambda_k\}$ не является мультипликатором слабого типа $(1, 1)$, а следовательно, не является мультипликатором типа $(L(\mathbb{T}), L(\mathbb{T}))$. В силу двойственности [11; §16.3] отсюда заключаем, что M_λ не является ограниченным оператором из $L^\infty(\mathbb{T})$ в $L^\infty(\mathbb{T})$. Далее, рассуждая так же, как в работе [19], заключаем, что существует функция h с нулевым средним, производная которой существенно ограничена (и, значит, принадлежит $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$), но при этом h не может быть представлена в виде $h(x) = g(x + \alpha) - g(x)$, где $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

⁶ Полином Бернулли $\mathcal{B}$ мы определили в лемме 2.

§ 4. Доказательства следствий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. В силу теоремы 2 функция $\tilde{\varphi}$ аддитивно когомологична константе $\int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx$ над поворотом α и, следовательно, функция $m\{x\} + \tilde{\varphi}(x)$ аддитивно когомологична функции $m\{x\} + \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx$ над поворотом α . Нетрудно видеть, что из аддитивной когомологичности функций

$$m\{x\} + \tilde{\varphi}(x) \quad \text{и} \quad m\{x\} + \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx$$

над поворотом α вытекает когомологичность над поворотом α коциклов φ и ψ , где ψ определен формулой

$$\psi(\exp(2\pi i x)) = \exp\left(2\pi i \left(m\{x\} + \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx\right)\right).$$

Известно [3], что если коциклы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ когомологичны над поворотом α , то соответствующие косые произведения $S_{\alpha, \varphi}$ и $S_{\alpha, \psi}$ метрически изоморфны, причем

$$S_{\alpha, \varphi} = V \circ S_{\alpha, \psi} \circ V^{-1}, \quad (30)$$

где $V(z, w) = (z, wh(z))$, а коцикл h определен из (3).

Из результатов работы [6] следует, что $S_{\alpha, \psi}$ сильно перемешивает на $H_0^\perp$.

Поэтому из (30) заключаем, что косое произведение $S_{\alpha, \varphi}$ сильно перемешивает на $H_0^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. В силу теоремы 2 функция $\tilde{\varphi}$ аддитивно когомологична константе $\int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx$ над поворотом α . Следовательно, рассуждая, как при доказательстве следствия 1, заключаем, что $S_{\alpha, \varphi}$ эргодично тогда и только тогда, когда эргодично $S_{\alpha, \psi}$, где

$$\psi(\exp(2\pi i x)) = \exp\left(2\pi i \int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx\right).$$

Из критерия Анзаи эргодичности косого произведения [3] вытекает, что $S_{\alpha, \psi}$ эргодично, если и только если равенство $\int_0^1 \tilde{\varphi}(x) dx = m + \alpha n$ невозможно ни при каких целых m и n (см. также [20]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. В силу теоремы 2 коцикл φ когомологичен над поворотом α константе $\exp\left(2\pi i \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) dt\right)$, которая по условию следствия равна $\exp(2\pi i n \alpha)$. А так как $\exp(2\pi i n \alpha)$ когомологична 1, то коцикл $\varphi_0 \varphi$ когомологичен коциклу φ_0 и, значит, в силу (30) является слабо перемешивающим.

Автор выражает благодарность П. Л. Ульянову и Б. С. Кашину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Helson H.* Cocycles on the circle // J. Operator theory. 1986. V. 16. P. 189–199.
2. *Iwanik A.* Generic smooth cocycles of degree zero over irrational rotations // Studia Math. 1995. V. 115. № 3. P. 241–250.
3. *Anzai H.* Ergodic skew product transformations on the torus // Osaka J. Math. 1951. V. 3. P. 83–99.
4. *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
5. *Gabriel P., Lemanczyk M., Liardet P.* Ensemble d'invariants pour les produits croises de Anzai. Marseille: Soc. Math. France, 1991. (Mém. Soc. Math. Fr. (N. S.) V. 47.)
6. *Iwanik A., Lemanczyk M., Rudolph D.* Absolutely continuous cocycles over irration rotations // Israel J. Math. 1993. V. 83. P. 73–95.
7. *Lemanczyk M., Mauduit C.* Ergodicity of a class of cocycles over irration rotations // J. London Math. Soc. (2). 1991. V. 49. P. 124–132.
8. *Stein E. M.* On limits of sequences of operators // Ann. of Math. 1961. V. 74. P. 140–170.
9. *Пичугов С. А.* Последовательности ограниченных по мере операторов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 43–72.
10. *Рожественский А. В.* О неравенствах Джексона и мультипликаторах в L_p // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 4. С. 551–579.
11. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
13. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 9. С. 1511–1514.
14. *Шмидт В.* Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.
15. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.
16. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
17. *Moore C. C., Schmidt K.* Coboundaries and homomorphism for nonsingular actions and a problem of H. Helson // Proc. London Math. Soc. (3). 1980. V. 40. P. 443–475.
18. *Аносов Д. В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 6. С. 1259–1274.
19. *Рожественский А. В.* К неравенству Джексона в $L_p(\mathbb{T}^d)$ // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 753–766.
20. *Baggett L., Merrill K.* On the cohomological equivalence of a class of functions under an irrational rotation of bounded type // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. № 3. P. 787–793.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: arozhd@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
29.11.2002