Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Андреянов, О пределах решений задачи Римана для системы изэнтропической газовой динамики с вязкостью в эйлеровых координатах, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 6, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 08:59:18

УДК 517.956.35

Б. П. Андреянов

**О пределах решений задачи Римана для
системы изэнтропической газовой динамики
с вязкостью в эйлеровых координатах**

Для задачи $\rho_t + (\rho u)_x = 0$, $(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0$, $(\rho, u)|_{t=0, x < 0} = (\rho_-, u_-)$, $(\rho, u)|_{t=0, x > 0} = (\rho_+, u_+)$ доказывается существование и единственность решения, которое может быть получено как предел при стремлении $\varepsilon > 0$ к нулю ограниченного автомодельного решения регуляризованной задачи с дополнительным членом $\varepsilon t u_{xx}$ во втором уравнении. Подробно описывается структура решений, в частности, в случае решений с вакуумом.

Библиография: 19 названий.

Введение

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = \varepsilon t u_{xx} \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_+, & x > 0, \\ \rho_-, & x < 0, \end{cases} \quad u(0, x) = \begin{cases} u_+, & x > 0, \\ u_-, & x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\rho_+, \rho_- \in \mathbb{R}^+$ и $u_+, u_- \in \mathbb{R}$. В настоящей статье изучаются ограниченные автомодельные (зависящие только от переменной x/t) решения задачи (1), (2) и их сходимость при $\varepsilon \downarrow 0$.

В модели изэнтропической газовой динамики в эйлеровых координатах решения $(\rho, u): (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto (\rho(t, x), u(t, x)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ представляют собой плотность и скорость газа, p – давление, а $\varepsilon > 0$ – коэффициент вязкости. В дальнейшем предполагается, что $\rho_{\pm} > 0$, а $p(\cdot)$ является непрерывной и строго возрастающей на $\mathbb{R}^+$ функцией с $p(0) = 0$. Решения задачи (1), (2) могут содержать точки с нулевой плотностью ρ ; в дальнейшем мы будем называть такие решения “решениями с вакуумом”.

Задача (1), (2) изучалась в работе [1] при помощи метода, использованного в [2] (см. также [3]). При дополнительных ограничениях, запрещающих появление вакуума в решениях, было доказано существование решений задачи (1), (2). Была получена равномерная по $\varepsilon > 0$ оценка вариации решений и описана структура “веера волн” в пределе при $\varepsilon \downarrow 0$.

В настоящей статье для широкого класса функций $p(\cdot)$ дается описание решений (1), (2), в которых допускается наличие вакуума.

В §3 рассматривается система

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

и при помощи определенных ниже (см. определение 1) оболочек функции $p(\cdot)$ дается формула для единственного решения задачи Римана (3), (2), которое может быть получено как предел ограниченных автомодельных решений задачи (1), (2) с $\varepsilon = \varepsilon_n$ для последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Метод автомодельной исчезающей вязкости был использован в [4]–[10] для определения допустимости слабых решений задачи Римана для гиперболических систем законов сохранения. Следуя [11], назовем этот критерий допустимости *критерием веера волн*. Он был применен к исследованию различных специальных систем и различных вязкостных регуляризаций; см. обзор результатов в [12], [3]. В частности, задача (3), (2) с добавленной автомодельной вязкостью в форме $\varepsilon t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$ изучалась в [13], в том числе и в случае решений с вакуумом. В работе [14] особое внимание было уделено образованию вакуума для этой задачи. В [3] существование решения, допустимого согласно критерию веера волн, было доказано для широкого класса строго гиперболических систем при условии малости разрыва в случае единичной матрицы вязкости.

Основным результатом настоящей статьи (теорема 2) является существование и единственность допустимого по критерию веера волн (определение 3) слабого решения задачи Римана для нестрого гиперболической системы (3) в случае матрицы вязкости $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при дополнительном допущении, что

$$p(\rho) \rightarrow +\infty \text{ при } \rho \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Структура этого решения описывается в §3.

Введем некоторые обозначения и определения, используемые в статье. Для заданных $a, b \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ будем обозначать интервал $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$ через $I(a, b)$, и через $\bar{I}(a, b)$ – его замыкание.

Выпуклой вниз (соответственно вверх) оболочкой функции $f(\cdot)$ на отрезке $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ назовем наибольшую (соответственно наименьшую) выпуклую вниз (соответственно вверх) функцию $F(\cdot)$ такую, что $F \leq f$ на $\bar{I}$ (соответственно $F \geq f$ на $\bar{I}$).

Введем преобразование

$$T: [F: V \in (0, +\infty) \mapsto F(V)] \mapsto [P: \rho \in (0, +\infty) \mapsto -F(1/\rho)] \quad (5)$$

и обозначим через T^{-1} преобразование, обратное к T . В модели газовой динамики преобразование T соответствует переходу от эйлеровых к лагранжевым координатам. Задача в лагранжевых координатах, эквивалентная задаче (1), (2) для решений без вакуума, была подробно изучена в [2] и [15] (результаты о допустимости решений для задачи без вязкости в лагранжевых координатах были получены в [16], [17]). Настоящая статья опирается, главным образом, на анализ, проведенный в [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция, $a \geq 0$ и $b \geq a$. Нижней оболочкой функции $p(\cdot)$ на $[a, b]$ назовем функцию $P(\cdot)$, удовлетворяющую условиям:

- (i) $P(\cdot) \in C[a, b]$ и $P \leq p$ на $[a, b]$;
- (ii) функция $F = T^{-1}P$ выпукла вверх на $(1/b, 1/a)$;
- (iii) для любой функции $Q(\cdot)$, удовлетворяющей (i) и (ii), $P \geq Q$ на $[a, b]$.

Для $b > 0$ и $a \geq b$, назовем верхней оболочкой $p(\cdot)$ на $[b, a]$ функцию $P(\cdot)$ такую, что:

- (i') $P(\cdot) \in C[b, a]$ и $P \geq p$ на $[b, a]$;
- (ii') функция $F = T^{-1}P$ выпукла вниз на $(1/a, 1/b)$;
- (iii') для любой функции $Q(\cdot)$, удовлетворяющей (i') и (ii'), $P \leq Q$ на $[b, a]$.

Назовем оболочкой $p(\cdot)$ на $\overline{I(a, b)}$ нижнюю оболочку на $[a, b]$ в случае $a \leq b$ и верхнюю оболочку на $[b, a]$ в случае $a > b$.

Для $a = 0$ формально положим в (6) $1/a = +\infty$. Отметим, что для любых $a, b \in \mathbb{R}^+$ оболочка $P(\cdot)$ функции $p(\cdot)$ на $\overline{I(a, b)}$ однозначно определена. Для $a, b \neq 0$ имеем $P = TF$, где $F(\cdot)$ является выпуклой вверх (соответственно вниз) оболочкой функции $f = T^{-1}p$ на $[1/b, 1/a]$ (соответственно на $[1/a, 1/b]$). Для $a = 0$ $P(\cdot)$ строится как предел убывающей последовательности функций $P_\delta(\cdot)$ такой, что $P_\delta(\cdot)|_{[0, \delta]} \equiv p(\delta)$ и $P_\delta(\cdot)|_{[\delta, b]}$ удовлетворяет (6) на отрезке $[\delta, b]$; свойства (6) легко следуют из монотонности и непрерывности $P(\cdot)$.

§ 1. Некоторые свойства решений задачи с вязкостью

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пара функций $(\rho, u): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ называется решением задачи Римана (1), (2), если для любого $k > 0$ $(\rho, u)(t, x) = (\rho, u)(kt, kx)$ для п.в. $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\rho, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, уравнения (1) выполнены в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ и

$$\operatorname{ess} \lim_{t \downarrow 0} (\|\rho(t, \cdot) - \rho(0, \cdot)\|_{L^1(-R, R)} + \|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\|_{L^1(-R, R)}) = 0 \quad (8)$$

для любого $R > 0$, где $\rho(0, \cdot)$, $u(0, \cdot)$ заданы формулой (2).

Будем обозначать x/t через ξ ; в дальнейшем не делается различия между автомодельной функцией переменных (t, x) и соответствующей функцией ξ .

ЛЕММА 1. Пара функций (ρ, u) является решением задачи (1), (2) в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) существуют непрерывные ограниченные функции $\rho, u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $u'(\cdot)$ и $(\cdot - u(\cdot))\rho'(\cdot)$ являются непрерывными и $(\rho, u)(t, x) = (\rho, u)(x/t)$ для п.в. $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$;
- (ii) существует постоянная $C \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\varepsilon u'(\xi) = - \int_0^\xi (\zeta - u(\zeta))^2 \rho'(\zeta) d\zeta + p(\rho(\xi)) + C, \quad (9)$$

$$\rho(\xi)u'(\xi) = (\xi - u(\xi))\rho'(\xi), \quad (10)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) = \rho_\pm, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u(\xi) = u_\pm. \quad (11)$$

Кроме того, существует единственное значение ξ_0 такое, что $u(\xi_0) = \xi_0$.

В случае $\rho(\xi_0) > 0$ существуют $\xi_{\pm} \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $\xi_- \leq \xi_0 \leq \xi_+$ и обе функции $\rho(\cdot)$, $u(\cdot)$ постоянны на (ξ_-, ξ_+) и строго монотонны на промежутках $(-\infty, \xi_-)$ и $(\xi_+, +\infty)$.

В случае $\rho(\xi_0) = 0$ ξ_0 является единственной точкой вакуума в решении, $\xi_{\pm} = \xi_0$ и имеют место аналогичные свойства монотонности.

Более того, $u'(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in (-\infty, \xi_-) \cup (\xi_+, +\infty)$, $u'(\xi_0) = 0$ в случае $\rho(\xi_0) > 0$ и $0 \leq u'(\xi_0) < 1$ в случае $\rho(\xi_0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 1 следует, что при $\varepsilon > 0$ решения (1), (2) содержат не более одной точки вакуума. Отметим, что результат об отсутствии в решениях промежутков с нулевой плотностью для системы (1) с более традиционной вязкостью εu_{xx} во втором уравнении доказан в [18] для решений задачи Коши с любыми начальными данными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится в четыре этапа.

I) Пусть (ρ, u) является решением (1), (2). Тогда $(\rho, u)(t, x) = (\rho, u)(x/t)$ и в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеют место равенства

$$\begin{cases} -\xi \rho' + (\rho u)' = 0, \\ -\xi(\rho u)' + (\rho u^2 + p(\rho))' = \varepsilon u''. \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что $\varepsilon u'' = -\xi^2 \rho' + (\rho u^2 + p(\rho))' = -(\xi^2 \rho)' + 2\xi \rho + (\rho u^2 + p(\rho))'$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, откуда $u' \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R})$ и $u \in C(\mathbb{R})$. Таким образом, $\rho u'$, $(\rho u)u'$ имеют смысл в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, следовательно, $\rho' u$, $\rho' u^2$ тоже. Отсюда вытекает, что

$$-(\xi - u)\rho' + \rho u' = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (13)$$

и что

$$-(\xi - u)^2 \rho' + p(\rho)' = \varepsilon u'' \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (14)$$

Следовательно, $(\xi - u)\rho = \int_0^{\xi} \rho(\zeta) d\zeta + \text{const} \in C(\mathbb{R})$. Отсюда получаем, что

$$(\xi - u)^2 \rho + p(\rho) - \varepsilon u' = \int_0^{\xi} 2(\zeta - u(\zeta))\rho(\zeta) d\zeta + \text{const} \in C^1(\mathbb{R}). \quad \text{Тогда}$$

$$p(\rho(\cdot)) - \varepsilon u'(\cdot) \in C(\mathbb{R}). \quad (15)$$

II) Теперь рассмотрим функцию $\xi \mapsto \xi - u(\xi)$. Она непрерывна и стремится к $\pm\infty$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Поэтому существуют конечные значения $\eta_- := \min\{\xi : u(\xi) = \xi\}$ и $\eta_+ := \max\{\xi : u(\xi) = \xi\}$. При этом $\xi - u(\xi) < 0$ на $(-\infty, \eta_-)$ и $\xi - u(\xi) > 0$ на $(\eta_+, +\infty)$. Согласно (13) на каждом из этих промежутков имеем $\rho' \in L_{\text{loc}}^{\infty}$. Поэтому ρ непрерывна на этих промежутках; u' тоже – согласно (15); ρ' тоже – согласно (13).

Докажем, что ρ, u монотонны на $(-\infty, \eta_-)$ и на $(\eta_+, +\infty)$. Возьмем $\xi_+ := \sup\{\xi \geq \eta_+ : \rho|_{(\eta_+, \xi]} \equiv \text{const}\}$. Сперва покажем, что u строго монотонна на $(\xi_+, +\infty)$. Действительно, предположим противное. Тогда существуют $c \in (\xi_+, +\infty)$ и $0 < \delta < c - \xi_+$ такие, что $u'(c) = 0$ и $u' \neq 0$ на $(c - \delta, c)$.

Предположим для определенности, что $u' > 0$ на $(c - \delta, c)$. Из (13) получаем, что $\rho' = \frac{\rho u'}{\xi - u} \geq 0$ на $(c - \delta, c)$; следовательно, $p(\rho(\cdot))$ не убывает на $[c - \delta, c]$. Из (13), (14) получаем, что

$$\varepsilon u'(\xi) = \int_{\xi}^c (\zeta - u) \rho u' d\zeta + p(\rho(\xi)) - p(\rho(c)) \leq \int_{\xi}^c (\zeta - u) \rho u' d\zeta$$

поточечно на отрезке $[c - \delta, c]$. Выбирая последовательность $\xi_n \uparrow c$ такую, что $u'(\xi_n) = \max_{\xi \in [\xi_n, c]} u'(\xi)$, находим, что $\varepsilon u'(\xi_n) \leq u'(\xi_n) \theta(c - \xi_n)$, где $\theta(\cdot)$ обозначает некоторую ограниченную функцию. При $n \rightarrow \infty$ находим $\varepsilon \leq 0$, что противоречит условию.

Таким образом, приходим к заключению, что u строго монотонна на $(\xi_+, +\infty)$; согласно (13) и определению ξ_+ ρ строго монотонна на $(\xi_+, +\infty)$. Аналогично, существует $\xi_- \leq \eta_-$ такое, что u, ρ строго монотонны на $(-\infty, \xi_-)$ и $\rho \equiv \text{const}$ на $[\xi_-, \eta_-]$. Далее, на $(\eta_+, \xi_+]$ и $[\xi_-, \eta_-)$ имеем $\rho \equiv \text{const}$; согласно (14) u' постоянна на каждом из этих промежутков. Учитывая непрерывность u' в точках $\xi_{\pm}$, заключаем, что u монотонна на $(-\infty, \eta_-)$ и $(\eta_+, +\infty)$.

III) Изучим поведение ρ, u на промежутке $[\eta_-, \eta_+]$. Сперва отметим, что существуют конечные пределы $\rho(\eta_{\pm} \pm 0)$; согласно (15) существуют конечные пределы $u'(\eta_{\pm} \pm 0)$.

Отметим, что $u'(\eta_+ + 0) = 0$ в случае $\rho(\eta_+ + 0) > 0$ и $0 \leq u'(\eta_+ + 0) < 1$ в случае $\rho(\eta_+ + 0) = 0$. Такая же связь имеет место между $u'(\eta_- - 0)$ и $\rho(\eta_- - 0)$.

Действительно, положим $\rho(\eta_+ + 0) > 0$. Из (13) получаем, что

$$\int_{\eta_+}^{\eta_++1} (\ln \rho(\zeta))' d\zeta = \int_{\eta_+}^{\eta_++1} \frac{u'(\zeta)}{\zeta - u(\zeta)} d\zeta.$$

Интеграл в левой части сходится, поэтому предел $u'(\eta_+ + 0)$ должен быть равен нулю. Далее, пусть $\rho(\eta_+ + 0) = 0$. Тогда ρ не убывает на $(\eta_+, +\infty)$, откуда $u'(\eta_+ + 0) \geq 0$ согласно (13). С другой стороны, из определения η_+ немедленно вытекает, что $u'(\eta_+ + 0) \leq 1$. Предположим, что $u'(\eta_+ + 0) = 1$. Из (14), (13) получаем

$$\varepsilon(1 - u'(\xi)) = \int_{\eta_+}^{\xi} (\zeta - u(\zeta)) \rho(\zeta) u'(\zeta) d\zeta - p(\rho(\xi))$$

для всех $\xi \in (\eta_+, +\infty)$. Так как $\rho u'$ непрерывна на этом промежутке и стремится к нулю при $\xi \downarrow \eta_+$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varepsilon(\xi - u(\xi))' \leq \int_{\eta_+}^{\xi} (\zeta - u(\zeta)) d\zeta \quad (16)$$

для всех $\xi \in (\eta_+, \eta_+ + \delta)$. Полагая $g(\xi) := \xi - u(\xi)$ и $h(\xi) := \sqrt{\varepsilon} g(\xi) + \int_{\eta_+}^{\xi} g(\zeta) d\zeta$, из (16) получаем, что $h \in C^1[\eta_+, +\infty)$ и $h'(\xi) \leq 1/\sqrt{\varepsilon} h(\xi)$. Так как $h(\eta_+) = 0$, по неравенству Гронуолла получаем, что $h \equiv 0$ на $[\eta_+, \eta_+ + \delta]$. Это противоречит

определению η_+ . Окончательно находим $0 \leq u'(\eta_+ + 0) < 1$. Доказательство для $\eta_- = 0$ вместо $\eta_+ + 0$ проводится аналогично.

Теперь рассмотрим отдельно три случая.

а) $\eta_- = \eta_+ =: \xi_0$ и один из пределов $\rho(\xi_0 \pm 0)$ отличен от нуля. Тогда эти два предела совпадают. Действительно, пусть $\rho(\xi_0 + 0) > 0$. Сперва предположим, что $\rho(\xi_0 - 0) > 0$; в этом случае $u'(\xi_0 \pm 0) = 0$, так что $\rho(\xi_0 \pm 0)$ совпадают согласно (15). Далее, пусть $\rho(\xi_0 - 0) = 0$. В этом случае $p(\rho(\xi_0 + 0)) - \varepsilon u'(\xi_0 + 0) = p(\rho(\xi_0 + 0)) > 0$ и $p(\rho(\xi_0 - 0)) - \varepsilon u'(\xi_0 - 0) = -\varepsilon u'(\xi_0 - 0) \leq 0$, что противоречит (15). Таким образом, находим, что функции ρ , u' непрерывны на $\mathbb{R}$. Поэтому (13), (14) могут быть переписаны в виде (9), (10).

Как видим, в этом случае существует единственное ξ_0 такое, что $u(\xi_0) = \xi_0$, при этом $\rho(\xi_0) > 0$ и $u'(\xi_0) = 0$. Более того, учитывая определение $\xi_{\pm}$, находим, что ρ , u постоянны на $[\xi_-, \xi_+]$ и что u' , а значит, и ρ' отличны от нуля на $(-\infty, \xi_-) \cup (\xi_+, +\infty)$.

б) $\eta_- = \eta_+ =: \xi_0$ и $\rho(\xi_0 \pm 0) = 0$. Тогда ρ , u' непрерывны на $\mathbb{R}$, откуда вытекают (9), (10). Кроме того, $\xi = \xi_0$ является единственной точкой вакуума. Действительно, положим $\xi_+ = \sup\{\xi : \rho(\xi) = 0\}$. В соотношении

$$\int_{\xi_+}^{\xi_++1} (\ln \rho(\zeta))' d\zeta = \int_{\xi_+}^{\xi_++1} \frac{u'(\zeta)}{\zeta - u(\zeta)} d\zeta$$

интеграл слева расходится. Следовательно, $\zeta - u(\zeta) \rightarrow 0$ при $\xi \downarrow \xi_+$, откуда $\xi_+ = \xi_0$.

Таким образом, в этом случае существует единственное ξ_0 такое, что $u(\xi_0) = \xi_0$, при этом $\rho(\xi_0) = 0$ и $0 \leq u'(\xi_0) < 1$; кроме того, u' , ρ' отличны от нуля на $\mathbb{R} \setminus \{\xi_0\}$.

с) $\eta_- < \eta_+$. Покажем, что на самом деле такое невозможно. Действительно, из (13) получаем, что $\rho = ((\xi - u)\rho)'$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Поэтому

$$\int_{\eta_-}^{\eta_+} \rho(\zeta) d\zeta = [(\xi - u(\xi))\rho(\xi)]|_{\eta_-}^{\eta_+} = 0,$$

так что $\rho|_{(\eta_-, \eta_+)} \equiv 0$. Из (14) получаем, что $u'|_{(\eta_-, \eta_+)} \equiv \text{const}$; учитывая, что $u(\eta_{\pm}) = \eta_{\pm}$, находим, что $u'(\eta_{\pm} \mp 0) = 1$. Кроме того, $0 \leq u'(\eta_{\pm} \pm 0) < 1$ во всех случаях; рассуждая как в случае а), приходим к противоречию с (15).

Таким образом, заключаем, что $\rho(\cdot)$, $u(\cdot)$ удовлетворяют (9), (10) и имеют свойства непрерывности и монотонности, указанные в лемме 1. Из монотонности ρ , u немедленно следует, что (11) выполнено в том и только том случае, когда автомодельные функции $\rho(\cdot, \cdot)$, $u(\cdot, \cdot)$ удовлетворяют (8).

IV) Напротив, из (9)–(11), учитывая непрерывность $\rho(\cdot)$, $u(\cdot)$, $u'(\cdot)$ и $(\cdot - u(\cdot))\rho'(\cdot)$, находим, что $(\rho, u)(t, x) := (\rho, u)(x/t)$ является решением (1), (2). Действительно, (12) очевидно. Кроме того, (9), (10) влечет монотонность $\rho(\cdot)$, $u(\cdot)$ на бесконечности. Таким образом, (8) также выполнено.

Используя результаты леммы 1, положим $\rho_0 := \rho(\xi_0)$ и $k := u'(\xi_0)$; определим $\sigma := \rho_0 - k$. Отметим, что $\sigma \in (-1, +\infty)$ и

$$\rho_0 = (\sigma)^+ = \max\{\sigma, 0\}, \quad k = (\sigma)^- = \max\{-\sigma, 0\}. \quad (17)$$

Далее, разобьем $\mathbb{R}$ на три (быть может, пустых) промежутка $(-\infty, \xi_-)$, (ξ_-, ξ_+) , (ξ_+, ∞) . Обратим функцию $\rho(\cdot)$ на $(-\infty, \xi_-)$ и на $(\xi_+, +\infty)$. Определим функции

$$\rho_-^{-1}: I(\rho_0, \rho_-) \rightarrow (-\infty, \xi_-), \quad \rho_+^{-1}: I(\rho_0, \rho_+) \rightarrow (\xi_+, +\infty);$$

в дальнейшем будем обозначать одной и той же буквой функцию $\rho(\cdot)$ и $\rho \in \mathbb{R}^+$ как независимую переменную. Положим

$$\Pi_{\pm}^{\varepsilon}(\rho; \sigma) := \int_{(\sigma)^+}^{\rho} [\rho_{\pm}^{-1}(r) - u(\rho_{\pm}^{-1}(r))]^2 dr - C \quad (18)$$

для $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$, где $C = \varepsilon u'(\xi_0) - p(\rho_0)$. Будем использовать упрощенное обозначение $\Pi_{\pm}(\cdot)$ для $\Pi_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma)$, когда рассматриваются фиксированные ε, σ ; будем обозначать через “ $\cdot$ ” дифференцирование по переменной ρ . Уравнение (9) переписывается в виде

$$\varepsilon u'(\xi) = p(\rho(\xi)) - \Pi_{\pm}(\rho(\xi)). \quad (19)$$

Так как $0 \notin I(\rho_0, \rho_{\pm})$ и показано, что $u'(\xi)$ отлична от нуля на $(-\infty, \xi_-) \cup (\xi_+, +\infty)$, заключаем, что $\Pi_{\pm} \in C^2(I(\rho_0, \rho_{\pm}))$ и что выполнено

$$\rho \ddot{\Pi}_{\pm} + 2\dot{\Pi}_{\pm} = \frac{2\varepsilon \dot{\Pi}_{\pm}}{p - \Pi_{\pm}}, \quad \dot{\Pi}_{\pm} > 0 \quad \text{и} \quad \text{sign}(p - \Pi_{\pm}) = \text{sign}(\rho_{\pm} - \rho_0) \quad (20)$$

на $I(\rho_0, \rho_{\pm})$. Далее, $\Pi_{\pm}$ может быть продолжена по непрерывности на $\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}$. Согласно (19) и лемме 1 $\Pi_{\pm}(\cdot)$ допускают конечные пределы в точке ρ_0 , и можно положить

$$\Pi_{\pm}(\rho_0) = p(\rho_0) - \varepsilon k, \quad (21)$$

где ρ_0, k определены соотношением (17). Кроме того,

$$\Pi_{\pm}(\rho_{\pm}) = p(\rho_{\pm}). \quad (22)$$

Действительно, правая часть в (19) имеет конечные пределы при $\rho(\xi) \rightarrow \rho_{\pm}$, так как в случае $\rho_0 < \rho_{\pm}$ функции $\Pi_{\pm}(\cdot)$ возрастающие и ограничены сверху, а в случае $\rho_0 > \rho_{\pm}$ они выпуклы вверх и ограничены снизу. Находим, что $u'(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, так как u имеет конечные пределы на $\pm\infty$.

В дополнение, в случаях $\xi_- = -\infty$ (т.е. $\rho_0 = \rho_-$) и/или $\xi_+ = +\infty$ (т.е. $\rho_0 = \rho_+$), просто определим $\Pi_{-}(\cdot)$ и/или $\Pi_{+}(\cdot)$ соотношением (22).

Наконец, из (18) и (10) находим $u'(\xi) = \pm \sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)} \frac{\rho'(\xi)}{\rho}$ для всех $\xi \in (-\infty, \xi_-)$ и всех $\xi \in (\xi_+, +\infty)$ соответственно. Учитывая, что $u(\xi_-) = u(\xi_+)$, из (11) получаем, что

$$u_+ - u_- = \int_{\rho_0}^{\rho_+} \sqrt{\dot{\Pi}_{+}(r)} \frac{dr}{r} + \int_{\rho_0}^{\rho_-} \sqrt{\dot{\Pi}_{-}(r)} \frac{dr}{r} \quad (23)$$

и интегралы в правой части (23) конечны.

Таким образом, доказан следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть (ρ, u) является решением (1), (2) в смысле определения 2. Тогда существуют числа $\sigma \in (-1, +\infty)$, $\rho_0 \in [0, +\infty]$, $k \in [0, 1]$ и функции $\Pi_{\pm} \in C(\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}) \cap C^2(I(\rho_0, \rho_{\pm}))$ такие, что выполнены соотношения (17) и (20)–(23).

Верно и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\sigma \in (-1, +\infty)$, а ρ_0, k определены соотношениями (17). Пусть $\Pi_{\pm} \in C(\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}) \cap C^2(I(\rho_0, \rho_{\pm}))$ удовлетворяют (20)–(23). Тогда существует решение (ρ, u) задачи (1), (2) в смысле определения 2, это решение дается формулами

$$\rho(t, x) = \rho(x/t) = \begin{cases} [\Xi_-^\varepsilon]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ [\Xi_+^\varepsilon]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \equiv \begin{cases} [\Xi_-^\varepsilon]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ \rho_0, & \xi_- < x/t < \xi_+, \\ [\Xi_+^\varepsilon]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \quad (24)$$

$$u(t, x) = u(x/t) = \begin{cases} U_-^\varepsilon \circ [\Xi_-^\varepsilon]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ U_-^\varepsilon(\rho_0) = U_+^\varepsilon(\rho_0), & \xi_- < x/t < \xi_+, \\ U_+^\varepsilon \circ [\Xi_+^\varepsilon]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$U_{\pm}^\varepsilon(\rho) := u_{\pm} \mp \int_{\rho}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(r)} \frac{dr}{r} \quad \text{для } \rho \in \overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}, \quad (26)$$

$$\Xi_{\pm}^\varepsilon(\rho) := U_{\pm}^\varepsilon(\rho) \pm \sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)} \quad \text{для } \rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm}), \quad (27)$$

а $\xi_{\pm}$ определены формулами

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} &:= \lim_{\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm}), \rho \rightarrow \rho_0} \Xi_{\pm}^\varepsilon(\rho) \quad \text{при } \rho_0 \neq \rho_{\pm}, \\ \xi_- &:= -\infty \text{ и/или } \xi_+ := +\infty \quad \text{при } \rho_0 = \rho_- \text{ и/или } \rho_0 = \rho_+. \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи $\rho_0 = \rho_+$, $\rho_0 = \rho_-$ тривиальны; предположим, что $\rho_0 \neq \rho_{\pm}$. Определим $U_{\pm}^\varepsilon, \Xi_{\pm}^\varepsilon$ соотношениями (26), (27). Отметим, что оба интеграла в (26) должны сходиться при $\rho \rightarrow \rho_0$, $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$. Действительно, в случае $\rho_0 = 0$ оба интеграла положительны и, следовательно, конечны согласно (23). В случае $\rho_0 > 0$ функции $\dot{\Pi}_{\pm}$ ограничены при $\rho \rightarrow \rho_0$ в силу монотонности $\rho^2 \dot{\Pi}_{\pm}$, которая очевидна из (20). Поэтому определены значения $U_{\pm}^\varepsilon(\rho_0)$; согласно (23) они совпадают. Отметим также, что функции

$$\dot{\Xi}_{\pm}^\varepsilon(\rho) = \pm \frac{\rho \ddot{\Pi}_{\pm}(\rho) + 2\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)}{2\rho\sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)}} = \pm \frac{\varepsilon\sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)}}{\rho(p(\rho) - \Pi_{\pm}(\rho))} \quad (29)$$

непрерывны и отличны от нуля на $I(\rho_0, \rho_{\pm})$, так что можно определить $\xi_{\pm}$, а также (многозначные) функции $[\Xi_{\pm}^{\varepsilon}]^{-1}: I(\xi_{\pm}, \pm\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Из (23), (26), (27) находим, что

$$\xi_+ - \xi_- = \lim_{\rho \in I(\rho_0, \rho_-), \rho \rightarrow \rho_0} \sqrt{\dot{\Pi}_-(\rho)} + \lim_{\rho \in I(\rho_0, \rho_+), \rho \rightarrow \rho_0} \sqrt{\dot{\Pi}_+(\rho)} \geq 0. \quad (30)$$

Ясно, что $\rho, u \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{\xi_-, \xi_+\})$; кроме того, (24)–(27), (29) и (22) влекут (11), (19) для всех $\xi \neq \xi_{\pm}$. На самом деле, можно показать, что из (22), (20) следует, что $\sqrt{\dot{\Pi}_{\pm}(\rho)} \rightarrow +\infty$ при $\rho \rightarrow \rho_{\pm}$, $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$, так что $\Xi_{\pm}^{\varepsilon}$ отображают $I(\rho_0, \rho_{\pm})$ на $(\xi_+, +\infty)$ и $(-\infty, \xi_-)$ соответственно. Но даже если допустить, что $\Xi_{\pm}^{\varepsilon}$ ограничены, из (22) следует (19) для всех ξ вне области значений $\Xi_{\pm}^{\varepsilon}$. Более того, из (29), (19), (27) и (24), (25) получаем для всех $\xi \neq \xi_{\pm}$

$$(\xi - u(\xi))\rho'(\xi) = \pm \frac{\rho(p(\rho(\xi)) - \Pi_{\pm}(\rho(\xi)))}{\pm \varepsilon} = \rho(\xi)u'(\xi), \quad (31)$$

значит, (10) выполнено для $\xi \neq \xi_{\pm}$.

Теперь рассмотрим два возможных случая.

а) $\rho_0 > 0$. Тогда $u'(\xi_{\pm} \pm 0) = 0$ согласно (19) и (21), а в случае $\xi_- < \xi_+$ из (25) имеем $u'(\xi_{\pm} \mp 0) = 0$. Таким образом, $u \in C^1(\mathbb{R})$ и согласно (31) $(\cdot - u(\cdot))\rho'(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, (9), (10) выполнены всюду; свойство (11) очевидно.

б) $\rho_0 = 0$. Тогда $\dot{\Pi}_{\pm}(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \rho_0$, $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$. Действительно, из (20) имеем для $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$

$$\int_{\rho}^{(\rho_0 + \rho_+)/2} (\ln \dot{\Pi}_{\pm}(r))' dr = \int_{\rho}^{(\rho_0 + \rho_+)/2} \frac{2}{r} \left(\frac{\varepsilon}{p(r) - \Pi_{\pm}(r)} - 1 \right) dr.$$

Из (21), (17) вытекает, что $\varepsilon/(p(r) - \Pi_{\pm}(r)) - 1 \rightarrow 1/k - 1 > 0$ при $\rho \rightarrow \rho_0$. Поэтому интеграл справа расходится; значит, $\ln \dot{\Pi}_{\pm}(\rho) \rightarrow -\infty$ при $\rho \rightarrow \rho_0$, $\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm})$. Из (30) заключаем, что $\xi_- = \xi_+$; из (19) и (21) находим, что $u'(\xi_{\pm} \pm 0) = k$. Таким образом, в этом случае $u'(\cdot)$ и $(\cdot - u(\cdot))\rho'(\cdot)$ тоже непрерывны на $\mathbb{R}$ и выполнены (9)–(11).

Согласно лемме 1 (ρ, u) является решением (1), (2).

§2. Существование и единственность решения задачи с вязкостью

В §1 задача (1), (2) была сведена к нахождению чисел $\sigma \in (-1, +\infty)$, ρ_0, k и пары функций $\Pi_{\pm} \in C(\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}) \cap C^2(I(\rho_0, \rho_{\pm}))$, удовлетворяющих (17) и (20)–(23). В этом параграфе доказывается, что такие $\sigma, \rho_0, k, \Pi_{\pm}(\cdot)$ существуют (и единственны), если $p(\cdot)$ удовлетворяет условию (4) (см. предложение 3 и леммы 4–6). Также доказываются предварительные результаты о сходимости решений (см. лемму 3 и предложение 4).

Для начала зафиксируем $\sigma \in [-1, +\infty)$ и $b \in (0, +\infty)$. Положим $a := (\sigma)^+$, $k := (\sigma)^-$ и рассмотрим задачу нахождения функции $\Pi \in C(\overline{I(a, b)}) \cap C^2(I(a, b))$, удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\Pi}(\rho) + 2\dot{\Pi}(\rho) &= \frac{2\varepsilon \dot{\Pi}(\rho)}{p(\rho) - \Pi(\rho)}, \\ \dot{\Pi}(\rho) &> 0, \quad (b-a)(p(\rho) - \Pi(\rho)) > 0 \quad \text{для всех } \rho \in I(a, b), \\ \Pi(a) &= p(a) - \varepsilon k, \quad \Pi(b) = p(b). \end{aligned} \quad (32)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Решение задачи (32) существует и единственно.*

Пусть $\Pi^\varepsilon(\cdot)$ обозначает решение (32), соответствующее данному $\varepsilon, \varepsilon > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При $\varepsilon \downarrow 0$ Π^ε сходится равномерно на $\overline{I(a, b)}$ к оболочке функции $p(\cdot)$ (см. определение 1).*

Для доказательства этих утверждений сперва отметим, что уравнение в (32) удовлетворяет принципу максимума. Дадим формулировку для случая $a < b$.

ЛЕММА 2 (принцип максимума). *Пусть $\Pi, \Upsilon \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ и удовлетворяют для всех $\rho \in (a, b)$ уравнениям $\ddot{\Pi}(\rho) = G(\rho, \Pi(\rho), \dot{\Pi}(\rho))$ и $\ddot{\Upsilon}(\rho) = H(\rho, \Upsilon(\rho), \dot{\Upsilon}(\rho))$ соответственно с некоторыми $G, H : (a, b) \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$.*

(а) *Предположим, что $G(\rho, z, w) < H(\rho, \zeta, w)$ для всех $\rho \in (a, b)$ таких, что $\Pi(\rho) < \Upsilon(\rho)$, и для всех z, ζ, w таких, что $z < \zeta$. Тогда $\Pi \geq \Upsilon$ на $[a, b]$, если $\Pi(a) \geq \Upsilon(a)$ и $\Pi(b) \geq \Upsilon(b)$.*

(б) *Предположим, что функция $G(\rho, z, w)$ совпадает с $H(\rho, z, w)$ и строго возрастает по переменной z ; пусть $\Pi(a) = \Upsilon(a)$ или $\Pi(b) = \Upsilon(b)$. Тогда $\Pi - \Upsilon$ монотонна на $[a, b]$.*

Доказательство стандартно.

Далее, отметим следующую лемму, главным образом используемую в §3. Пусть преобразование T определяется формулой (5); как и в определении 1, полагаем $1/a = +\infty$ в случае $a = 0$.

ЛЕММА 3. *Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, и пусть $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0} \subset C[a, b]$ — множество функций таких, что $F^\varepsilon = T^{-1}P^\varepsilon$ выпуклы вверх на $(1/b, 1/a)$. Предположим, что для всех $\rho \in [a, b]$ $P^\varepsilon(\rho)$ сходится к $P^0(\rho)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

- (а) *Сходимость равномерна на каждом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$, и для каждого ε P^ε абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$. Более того, если P^ε возрастающие, то $\dot{P}^\varepsilon$ ограничены равномерно по ε на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b)$ таком, что $c > 0$.*
- (б) *Для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ $\dot{P}^{\varepsilon_n} \rightarrow \dot{P}^0$ п.в. на (a, b) ; причем если $P^{\varepsilon_n}, P^0 \in C^1(a, b)$, сходимость имеет место всюду на (a, b) .*
- (с) *Предположим, что P^ε возрастающие и*

$$\Xi_\pm^\varepsilon(\rho) := \text{const} \mp \int_\rho^b \sqrt{\dot{P}^\varepsilon(r)} \frac{dr}{r} \pm \sqrt{\dot{P}^\varepsilon(\rho)}. \quad (33)$$

Тогда $\Xi_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot)$ являются п.в. определенными монотонными функциями на (a, b) , так что $[\Xi_{\pm}^{\varepsilon}]^{-1}$ определены как монотонные многозначные функции.

- (d) Если P^{ε} возрастают, для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$ такого, что $c > 0$, имеем

$$\int_{\rho}^b \sqrt{\dot{P}^{\varepsilon_n}(r)} \frac{dr}{r} \rightarrow \int_{\rho}^b \sqrt{\dot{P}^0(r)} \frac{dr}{r}$$

равномерно по $\rho \in [c, d]$.

- (e) В обозначениях (c) для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ имеем $[\Xi_{+}^{\varepsilon_n}]^{-1}(\xi) \rightarrow [\Xi_{+}^0]^{-1}(\xi)$ для всех ξ таких, что $[\Xi_{+}^0]^{-1}$ непрерывна в точке ξ . То же самое выполнено с $[\Xi_{-}^{\varepsilon_n}]^{-1}$, $[\Xi_{-}^0]^{-1}$ вместо $[\Xi_{+}^{\varepsilon_n}]^{-1}$, $[\Xi_{+}^0]^{-1}$.

Аналогичные свойства имеют место в случае, когда P^{ε} определены на $[b, a] \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ и $F^{\varepsilon} = T^{-1}P^{\varepsilon}$ выпуклы вниз на $(1/a, 1/b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F^{\varepsilon} = T^{-1}P^{\varepsilon}$ выпуклы вверх, они дифференцируемы п.в. Более того, сходимость $P^{\varepsilon}(\rho)$ к $P^0(\rho)$ влечет сходимость $F^{\varepsilon}(1/\rho)$ к $F^0(1/\rho)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Имеем $F^{\varepsilon} \rightarrow F^0$ равномерно на любом отрезке $[1/d, 1/c] \subset (1/b, 1/a)$ и $\frac{d}{dV}F^{\varepsilon_n} \rightarrow \frac{d}{dV}F^0$ п.в. на $(1/b, 1/a)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Так как $\dot{P}^{\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dV}F^{\varepsilon}(V)$ в случае, когда существует $\frac{d}{dV}F^{\varepsilon}(V)$, (a) и (b) очевидны.

Более того, $\frac{d}{dV}F^{\varepsilon} \geq 0$ в случае (c). Заменяя $v = 1/r$ в интеграле в формуле (33), получаем

$$\Xi_{\pm}^{\varepsilon}(\rho) = \text{const} \pm \int_{1/b}^{1/\rho} \left(\sqrt{\frac{d}{dV}F^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\rho}\right)} - \sqrt{\frac{d}{dV}F^{\varepsilon}(v)} \right) dv \pm \frac{1}{b} \sqrt{\frac{d}{dV}F^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Эта функция монотонна, так как $\frac{d}{dV}F^{\varepsilon}$ монотонна; отсюда получаем (c). Свойство (d) следует из непрерывности и сходимости $F^{\varepsilon}(\cdot)$ в точке $V = 1/b$. Действительно, имеем для $\rho > c > 0$

$$\left| \int_{\rho}^b \sqrt{\dot{P}^{\varepsilon_n}(r)} \frac{dr}{r} - \int_{\rho}^b \sqrt{\dot{P}^0(r)} \frac{dr}{r} \right| \leq \int_{1/b}^{1/\rho} \left| \sqrt{\frac{d}{dV}F^{\varepsilon_n}(v)} - \sqrt{\frac{d}{dV}F^0(v)} \right| dv. \quad (34)$$

Возьмем $\delta > 0$ и проинтегрируем $\left| \sqrt{\frac{d}{dV}F^{\varepsilon_n}(V)} - \sqrt{\frac{d}{dV}F^0(V)} \right|$ отдельно по интервалам $(1/b, 1/b + \delta)$ и $(1/b + \delta, 1/c)$. Для любого $\delta > 0$ второй интеграл стремится к нулю при $\varepsilon_n \downarrow 0$ по свойству (a) и теореме Лебега об ограниченной сходимости. При этом первый интеграл может быть сделан сколь угодно малым при выборе

достаточно малого δ , потому что

$$\begin{aligned} \int_{1/b+\delta}^{1/b} \sqrt{\frac{d}{dV} F^{\varepsilon_n}(v)} dv &\leq \int_{1/b+\delta}^{1/b} \left(1 + \frac{d}{dV} F^{\varepsilon_n}(v)\right) dv \\ &= \delta + \left(F^{\varepsilon_n}\left(\frac{1}{b} + \delta\right) - F^{\varepsilon_n}\left(\frac{1}{b}\right)\right) \\ &\leq 2\delta + \left(F^0\left(\frac{1}{b} + \delta\right) - F^0\left(\frac{1}{b}\right)\right) \end{aligned}$$

для достаточно малых ε_n . Следовательно, левая часть (34) может быть сделана сколь угодно малой равномерно по $\rho \in [c, d]$. Более того, если $a > 0$, можно положить $c = a$ в приведенном выше рассуждении и доказать (d).

Наконец, из (b) и (d) следует, что $\Xi_{\pm}^{\varepsilon_n} \rightarrow \Xi_{\pm}^0$ п.в. на (a, b) . В элементарной теории вероятностей хорошо известно, что сходимость почти всюду последовательности монотонных функций (случайных величин) влечет поточечную сходимость их обратных функций (функций распределения) в точках непрерывности предельной функции. Отсюда заключаем (e).

Случай выпуклых вниз функций F^{ε} разбирается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Случай $a = b$ тривиален; для определенности положим $a < b$, что является самым сложным случаем. Единственность немедленно следует из леммы 2. Для любого $a > 0$ существование решения можно доказать при помощи пенализации правой части (32), применяя леммы 2, 3 по аналогии с [15]. Вместо этого выполним преобразование $T^{-1}: [\rho \in (a, b) \mapsto \Pi(\rho)] \mapsto [V \in (1/b, 1/a) \mapsto -\Pi(1/V)]$. Оно сводит уравнение в (32) к уравнению

$$\frac{d^2}{dV^2} \Phi(V) = \frac{1}{V} \frac{2\varepsilon \frac{d}{dV} \Phi(V)}{f(V) - \Phi(V)} \quad (35)$$

с $\frac{d}{dV} \Phi > 0$ и $\Phi > f$ на $(1/b, 1/a)$, где $\Phi = T^{-1}\Pi$ и $f = T^{-1}p$. Это уравнение отличается от уравнения, рассмотренного в [15], лишь множителем $1/V$ в правой части. Так как $a > 0$, этот множитель непрерывен и ограничен на $(1/b, 1/a)$, и доказательство из [15] проводится без изменений. Получаем существование строго возрастающего выпуклого решения $\Phi \in C[1/b, 1/a] \cap C^2(1/b, 1/a)$ задачи (35) такого, что $\Phi(1/a) = f(1/a)$, $\Phi(1/b) = f(1/b)$. Значит, $\Pi = T\Phi \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ и Π удовлетворяет (32).

Для $a = 0$ сперва найдем для каждого $\delta \in (0, b)$ функцию $\Pi_{\delta} \in C[0, b] \cap C^2(\delta, b)$ такую, что

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\Pi}_{\delta} + 2\dot{\Pi}_{\delta} &= \frac{2\varepsilon \dot{\Pi}_{\delta}}{p - \Pi_{\delta}}, \quad \dot{\Pi}_{\delta} > 0, \quad p - \Pi_{\delta} > 0 \quad \text{на } [\delta, b), \\ \Pi_{\delta}(b) &= p(b), \quad \Pi_{\delta}|_{[0, \delta]} = -k\varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство существования проводится аналогично. По лемме 2(b) существует функция Π на $[0, b]$ такая, что $\Pi_{\delta} \uparrow \Pi$ при $\delta \downarrow 0$. Кроме того, применяя еще раз

рассуждение из [15] к функциям $T^{-1}\Pi_\delta$, находим, что $T^{-1}\Pi \in C^2(1/d, 1/c)$ и что $T^{-1}\Pi$ удовлетворяет (35) на $(1/d, 1/c)$ для любого отрезка $[1/d, 1/c] \subset (1/b, +\infty)$. Поэтому $\Pi \in C^2(0, b)$ и выполняется уравнение (32). Кроме того, как и в [15], непрерывность Π в точках 0 и b следует из леммы 2(a) при помощи сравнения со специальными решениями уравнения (32). Поэтому $\Pi(0) = -k\varepsilon$ и $\Pi(b) = p(b)$ по построению Π_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Пусть $a < b$, а $P(\cdot)$ является оболочкой функции $p(\cdot)$ на $[a, b]$. Возьмем $\alpha > 0$ и построим барьерную функцию $\Upsilon_\alpha \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ такую, что $\rho\ddot{\Upsilon}_\alpha + 2\dot{\Upsilon}_\alpha \geq m(\alpha) > 0$ и $\alpha/2 \leq P - \Upsilon_\alpha < \alpha$ на (a, b) . Применим лемму 2(a) к Π^ε и Υ_α . По лемме 3(a) $\frac{1}{\rho}\dot{\Pi}^\varepsilon$ равномерно ограничена на любом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$. Следовательно, $P \geq \dot{\Pi}^\varepsilon \geq \Upsilon_\alpha$ на $[a, b]$ для достаточно малых ε .

В заключение отметим следующее свойство решений (32).

ЛЕММА 4. Пусть $\Pi(\cdot; \sigma)$ удовлетворяет (32) с $a = 0$, $k = -\sigma \in [0, 1)$. Тогда $\dot{\Pi}(\rho; \sigma) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ и интеграл $S(\sigma) = \int_0^b \sqrt{\dot{\Pi}(r; \sigma)} \frac{dr}{r}$ конечен. В дополнение, $S(\sigma) \uparrow +\infty$ при $\sigma \downarrow -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $S(\sigma)$ сходится (на нижнем пределе). Положим $\varkappa = 1 - (1 - k)/2 \in [1/2, 1)$. Так как Π , p непрерывны на $[0, b]$ и $p(0) - \Pi(0; \sigma) = k\varepsilon$, существует $\delta > 0$ такое, что $p - \Pi \leq \varkappa\varepsilon$ на $(0, \delta)$. Согласно (32) на $(0, \delta)$ имеем

$$\dot{\Pi}(\delta; \sigma) \geq \dot{\Pi}(\rho; \sigma) + \int_\rho^\delta \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa\varepsilon} - 1 \right) \frac{2}{r} \dot{\Pi}(r; \sigma) dr.$$

Отсюда $\dot{\Pi}(\rho; \sigma) \leq \text{const } \rho^{2(1/\varkappa-1)}$ по неравенству Гронвулла, так что первые два утверждения леммы очевидны.

Теперь рассмотрим функцию $\dot{\Pi}(\cdot; -1)$. Если $S(-1)$ расходится, то $\lim_{\sigma \downarrow -1} S(\sigma) = +\infty$ по лемме 2(b) и по теореме Леви. Предположим, что $S(-1) < +\infty$, и придем к противоречию.

Рассмотрим функцию $\Xi_+(\rho) = \sqrt{\dot{\Pi}_+(\rho; -1)} - \int_\rho^b \sqrt{\dot{\Pi}_+(r; -1)} \frac{dr}{r}$. Из (32) находим, что $\dot{\Xi}_+ > 0$ на $(0, b]$. Так как $\Xi_+(\rho) \geq -S(-1) > -\infty$, Ξ_+ стремится к конечному пределу при $\rho \rightarrow 0$. Следовательно, предел $\sqrt{\dot{\Pi}_+(\rho; -1)}$ при $\rho \rightarrow 0$ существует и равен нулю. Теперь положим $\xi_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Xi_+(\rho)$ и определим функции класса C^1 $\rho, u: \xi \in [\xi_+, +\infty) \mapsto \rho(\xi), u(\xi)$ как в формулах (24)–(26), полагая $u_+ = 0$. Перепишывая (32) в переменных ξ, ρ, u , получаем $\rho(\xi_+) = 0$, $\xi_+ - u(\xi_+) = 0$, $u'(\xi_+ + 0) = 1$ и

$$\varepsilon(u'(\xi) - u'(\xi_+ + 0)) = - \int_{\xi_+}^\xi (\zeta - u(\zeta)) \rho(\zeta) u'(\zeta) d\zeta + p(\rho(\xi))$$

для всех $\xi > \xi_+$. Как показано в части III) доказательства леммы 1, эти свойства несовместны.

Для $\sigma \in (-1, +\infty)$ обозначим через $S_{\pm}^{\varepsilon}(\sigma)$ интегралы $\int_{(\sigma)^+}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(r; \sigma)} \frac{dr}{r}$, где $\dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma)$ обозначает единственное решение (20)–(22) согласно предложению 3. По лемме 4 $S_{\pm}^{\varepsilon}(\sigma)$ конечны при $\sigma \in (-1, 0]$; очевидно, то же верно для $\sigma \in (0, +\infty)$.

Следующий шаг состоит в нахождении σ , удовлетворяющего условию (23), т.е.

$$u_+ - u_- = S_+^{\varepsilon}(\sigma) + S_-^{\varepsilon}(\sigma);$$

как показано выше, это условие имеет смысл. Докажем, что для фиксированных $\rho_{\pm}$ и ε (23) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\sigma \in (-1, +\infty)$ и $u_+ - u_- \in \mathbb{R}$ при условии, что $p(\cdot)$ удовлетворяет (4). Для $\rho_0 = (\sigma)^+ \in [0, +\infty)$ обозначим через $P_{\pm}(\cdot; \rho_0)$ оболочки функции $p(\cdot)$ на $\bar{I}(\rho_0, \rho_{\pm})$ соответственно. Удобно доопределить $\dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma)$, $P_{\pm}(\cdot; \rho_0)$ по непрерывности на $\mathbb{R}^+$, полагая их постоянными на каждой из компонент $\mathbb{R}^+ \setminus I(\rho_0, \rho_{\pm})$.

ЛЕММА 5. *Во введенных выше обозначениях при $\sigma \in (-1, +\infty)$, $\rho_0 = (\sigma)^+$ верно следующее:*

- (а) для всех $\rho \in \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$ функции $\sigma \mapsto \dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(\rho; \sigma)$ не убывают; то же верно для $\rho_0 \mapsto P_{\pm}(\rho; \rho_0)$;
- (б) для всех $\rho \in \mathbb{R}^+$ и $\varepsilon > 0$ функции $\sigma \mapsto \text{sign}(\rho_{\pm} - \rho_0) \dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(\rho; \sigma)$ не возрастают; то же верно для $\rho_0 \mapsto \text{sign}(\rho_{\pm} - \rho_0) \dot{P}_{\pm}(\rho; \rho_0)$;
- (с) для всех $\varepsilon > 0$ отображения $\sigma \mapsto \dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma)$ непрерывны в топологии $L^{\infty}(\mathbb{R}^+)$; то же верно для $\rho_0 \mapsto P_{\pm}(\cdot; \rho_0)$;
- (д) для всех $\varepsilon > 0$ функции $\sigma \mapsto S_{\pm}^{\varepsilon}(\sigma)$ непрерывны и строго убывают; то же верно для функций $\rho_0 \mapsto \int_{\rho_0}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}^{\varepsilon}(r; \rho_0)} \frac{dr}{r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (а)–(с) для $\varepsilon > 0$ следуют из леммы 2. Тогда (а)–(с) для $P_{\pm}$ следуют из предложения 4 и леммы 3(б). Из (б) и теоремы Леви находим (д).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеет место следующее свойство экстремальности: на верхней оболочке $P(\cdot)$ функции $p(\cdot)$ на $[a, b] \subset (0, +\infty)$ интеграл $\int_a^b \sqrt{\dot{Q}(r)} \frac{dr}{r}$ достигает наибольшего значения в классе всех $Q(\cdot)$, удовлетворяющих свойствам (7) (i'), (ii''), таких, что $Q(a) = p(a)$, $Q(b) = p(b)$.

Для доказательства достаточно перейти к $F(\cdot) = T^{-1}P(\cdot)$ и $G(\cdot) = T^{-1}Q(\cdot)$. Имеем $F(1/a) = G(1/a)$, $F(1/b) = G(1/b)$ и функции F, G выпуклы вниз на $[1/b, 1/a]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\sqrt{\dot{P}(r)} - \sqrt{\dot{Q}(r)} \right) \frac{dr}{r} &= \int_{1/b}^{1/a} \left(\sqrt{\frac{d}{dV}} F(v) - \sqrt{\frac{d}{dV}} G(v) \right) dv \\ &= \int_{1/b}^{1/a} \frac{\frac{d}{dV}(F(v) - G(v))}{\sqrt{\frac{d}{dV}} F(v) + \sqrt{\frac{d}{dV}} G(v)} dv \\ &= - \int_{1/b}^{1/a} (F(v) - G(v)) d \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{d}{dV}} F(v) + \sqrt{\frac{d}{dV}} G(v)} \right) \end{aligned}$$

в смысле интеграла Стильеса. Учитывая возрастание функций $\frac{d}{dV}F(V)$, $\frac{d}{dV}G(V)$ на $[1/b, 1/a]$ и определение $P(\cdot)$, находим, что $\int_a^b (\sqrt{\dot{P}(r)} - \sqrt{\dot{Q}(r)}) \frac{dr}{r} \geq 0$.

ЛЕММА 6. Пусть заданы $\rho_{\pm}$, $u_{\pm}$, и пусть выполнено (4). Тогда

- (а) для любого $\varepsilon > 0$ имеем $S_{\pm}^{\varepsilon}(\sigma) \rightarrow -\infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$,
- (б) имеем $\int_{\rho_0}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}(r; \rho_0)} \frac{dr}{r} \leq S_{\pm}^{\varepsilon}(\rho_0)$ для всех $\rho_0 > 0$, $\varepsilon > 0$; в частности, $\int_{\rho_0}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}(r; \rho_0)} \frac{dr}{r} \rightarrow -\infty$ при $\rho_0 \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $S^+(\sigma)$ ограничено снизу некоторой постоянной $-M \in \mathbb{R}^-$. Положим $V_0 := 1/(\sigma)^+$, $V_+ := 1/\rho_+ > V_0$ и выполним преобразование $T^{-1}p = f$, $T^{-1}\Pi_+^{\varepsilon}(\cdot; \sigma) = \Phi(\cdot; V_0)$. Функция $\Phi(\cdot; V_0)$ выпукла вниз на $[V_0, V_+]$, $\Phi(V_0; V_0) = f(V_0)$, $\Phi(V_+; V_0) = f(V_+)$ и $\Phi(\cdot; V_0)$ удовлетворяет уравнению (35) на (V_0, V_+) . Отметим, что $f(V_0) \rightarrow -\infty$ при $V_0 \rightarrow 0$ согласно (4). Поэтому из выпуклости $\Phi(\cdot; V_0)$ вытекает, что $\Phi(V_+/2; V_0) \rightarrow -\infty$ при $V_0 \rightarrow 0$; с другой стороны,

$$\frac{V_+}{2} \sqrt{\frac{d}{dV} \Phi\left(\frac{V_+}{2}; V_0\right)} \leq -S_+^{\varepsilon}(\sigma) \leq M$$

для всех $V_0 \in (0, V_+/2)$. Следовательно, семейство функций $\{\Phi(\cdot; V_0)\}_{V_0 \in (0, V_+/2)}$ таково, что $\Phi(V_+/2; V_0) \downarrow -\infty$ при $V_0 \downarrow 0$, $\Phi(V_+/2; V_0) \leq (2M/V_+)^2$ равномерно по V_0 , $\Phi(V_+; V_0) = f(V_+)$ и $\Phi(\cdot; V_0)$ удовлетворяет (35) на $(V_+/2, V_+)$. Сравним $\Phi(\cdot; V_0)$ с решением $\Psi(\cdot)$ задачи Коши $\Psi(V_+/2) = \Phi(V_+/2; V_0)$, $\dot{\Psi}(V_+/2) = (2M/V_+)^2 + 1$ для (35). Для достаточно малых V_0 $\Psi(\cdot)$ определена на $[V_+/2, V_+]$ и $\Psi(V_+) < f(V_+)$. Можно применить принцип максимума (лемма 2(b)) к уравнению (35). Находим, что $\Phi(V_+; V_0) < \Psi(V_+) < f(V_+)$ для достаточно малых V_0 . Это противоречие доказывает (а).

Свойство (б) следует из (а) и из замечания 2.

Из предложений 1–3 и лемм 4–6 легко получаем основной результат этого параграфа:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p(\cdot)$ непрерывна и строго возрастает на $\mathbb{R}^+$ и верно (4). Тогда для любых $\rho_{\pm} > 0$, $u_{\pm} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ существует единственное решение задачи (1), (2) в смысле определения 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть, что если $p(\cdot)$ не удовлетворяет условию (4), то, вообще говоря, не существует ограниченного автомодельного решения задачи (1), (2) для произвольных данных $\rho_{\pm}$, $u_{\pm}$. Согласно лемме 6(b) точным условием на разность $u_+ - u_-$, так что имеет место существование решения для положительных ε в некоторой непустой окрестности нуля, является неравенство

$$-(u_+ - u_-) < \lim_{\rho_0 \rightarrow +\infty} \int_{\rho_+}^{\rho_0} \sqrt{\dot{P}_+(r; \rho_0)} \frac{dr}{r} + \lim_{\rho_0 \rightarrow +\infty} \int_{\rho_-}^{\rho_0} \sqrt{\dot{P}_-(r; \rho_0)} \frac{dr}{r}, \quad (36)$$

где $P_{\pm}(\cdot; \rho_0)$ – оболочки $p(\cdot)$ на $[\rho_+, \rho_0]$ и $[\rho_-, \rho_0]$ соответственно.

§ 3. Допустимое решение задачи (3), (2)

В этом параграфе изучается глобальная (по отношению к данным $\rho_{\pm}, u_{\pm}$) разрешимость задачи (3), (2) в классе решений, допустимых по критерию веера волн (см. [9], [11], [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (ρ, u) – пара функций таких, что $\rho \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ и $u \in L^{\infty}(\{\rho > 0\}; \mathbb{R})$, где $\{\rho > 0\} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : \bar{\rho}(t, x) > 0\}$, а $\bar{\rho}$ является п.в. определенным представителем ρ . Тогда (ρ, u) является *решением* (3), (2), *допустимым по критерию веера волн*, если

- (i) уравнения $\rho_t + q_x = 0$, $q_t + (e + p(\rho))_x = 0$ выполнены в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, где $q = \rho u$, $e = \rho u^2$ на множестве $\{\rho > 0\}$ и $q = 0$, $e = 0$ на его дополнении;
- (ii) имеем $\text{ess lim}_{t \downarrow 0} (\|\rho(t, \cdot) - \rho(0, \cdot)\|_{L^1(-R, R)} + \|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\|_{L^1(-R, R)}) = 0$ для всех $R > 0$, где $\rho(0, \cdot)$, $u(0, \cdot)$ даны в (2);
- (iii) в дополнение, существует последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что $\rho^{\varepsilon_n} \rightarrow \rho$, $\rho^{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n} \rightarrow q$ и $\rho^{\varepsilon_n} (u^{\varepsilon_n})^2 \rightarrow e$ п.в. на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$, где $(\rho^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n})$ является решением задачи (1), (2) в смысле определения 2.

Отметим, что согласно п. (i) определения 3 u не определена в точках вакуума. Условия (i), (ii) определяют слабое решение, тогда как (iii) представляет собой дополнительный критерий отбора решений, более ограничительный, чем (i), во всех случаях, когда $p(\cdot)$ не вырождается в $p(\rho) = \text{const}/\rho$ на некотором интервале в $\mathbb{R}^+$. В этом случае можно построить бесконечно много решений, не являющихся допустимыми (ср. с [17]).

В силу свойства (iii) допустимое по критерию веера волн решение является автомодельным. Согласно формулам (38)–(43) и теореме 2 (см. ниже) оно единственно и имеет следующую структуру веера волн. Решение содержит не более трех “главных” промежутков постоянства: (ρ_-, u_-) на $-\infty$; вакуум $\rho \equiv 0$ или состояние (ρ_0, u_0) , $\rho_0 > 0$, в окрестности единственной точки ξ_0 такой, что существует $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} u(\xi) = \xi_0$ (в случае, когда нет вакуума); и (ρ_+, u_+) на $+\infty$. Эти состояния разделены двумя веерами волн первого и второго семейства соответственно (см. [19]). Каждый веер волн представляет собой последовательность разрывов, волн разрежения, контактных разрывов и (в случае, если $p(\cdot)$ не является гладкой) промежутков постоянства, представляющих собой вырожденные волны разрежения. В решении может быть не более одного промежутка вакуума, и таким промежутком может быть только среднее “главное” состояние. В этом случае $u(\xi) - \xi \rightarrow 0$, когда ξ стремится к граничным точкам состояния вакуума (см. (39), (41) и (46) ниже). Необходимым и достаточным условием появления вакуума является неравенство

$$u_+ - u_- \geq \int_0^{\rho_+} \sqrt{\dot{P}_+(r; 0)} \frac{dr}{r} + \int_0^{\rho_-} \sqrt{\dot{P}_-(r; 0)} \frac{dr}{r}, \quad (37)$$

где $P_{\pm}(\cdot; 0)$ определены ниже. Все эти свойства могут быть получены из следую-

ших формул для решения, допустимого по критерию “веера волн”:

$$\rho(t, x) = \rho(x/t) = \begin{cases} [\Xi_-]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ [\Xi_+]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \\ \equiv \begin{cases} [\Xi_-]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ \rho_0, & \xi_- < x/t < \xi_+, \\ [\Xi_+]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \quad (38)$$

$$u(t, x) = u(x/t) = \begin{cases} U_- \circ [\Xi_-]^{-1}(x/t), & x/t < \xi_-, \\ U_-(\rho_0) = U_+(\rho_0), & \xi_- < x/t < \xi_+ \text{ (в случае } \rho_0 > 0), \\ U_+ \circ [\Xi_+]^{-1}(x/t), & \xi_+ < x/t, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$U_{\pm}(\rho) := u_{\pm} \mp \int_{\rho}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}(r; \rho_0)} \frac{dr}{r} \quad \text{для } \rho \in \overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}, \quad (40)$$

$$\Xi_{\pm}(\rho) := U_{\pm}(\rho) \pm \sqrt{\dot{P}_{\pm}(\rho; \rho_0)} \quad \text{для } \rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm}), \quad (41)$$

$\xi_{\pm}$ определены соотношениями

$$\xi_{\pm} := \lim_{\rho \in I(\rho_0, \rho_{\pm}), \rho \rightarrow \rho_0} \Xi_{\pm}(\rho) \quad \text{при } \rho_0 \neq \rho_{\pm}, \quad (42) \\ \xi_- := -\infty \text{ и/или } \xi_+ := +\infty \quad \text{при } \rho_0 = \rho_- \text{ и/или } \rho_0 = \rho_+,$$

ρ_0 равно нулю, если выполняется (37), и ρ_0 является единственным значением в интервале $(0, +\infty)$, удовлетворяющим соотношению

$$u_+ - u_- = \int_{\rho_0}^{\rho_+} \sqrt{\dot{P}_+(r; \rho_0)} \frac{dr}{r} + \int_{\rho_0}^{\rho_-} \sqrt{\dot{P}_-(r; \rho_0)} \frac{dr}{r}, \quad (43)$$

в случае, если (37) не выполнено; наконец, $P_{\pm}(\cdot; \rho_0)$ являются оболочками графика $p(\cdot)$ на $\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}$ соответственно (см. определение 1).

Докажем основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что непрерывная строго возрастающая функция $p(\cdot)$ удовлетворяет (4). Пусть $\rho_{\pm} > 0$, $u_{\pm} \in \mathbb{R}$. Тогда решение $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ задачи (1), (2) стремится при $\varepsilon \downarrow 0$ (в смысле определения 3(iii)) к (ρ, u) , задаваемым формулами (38)–(43). Пара функций (ρ, u) является единственным решением задачи Римана (3), (2) в смысле определения 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 1 существует единственное решение задачи (1), (2). Обозначим это решение через $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$. Согласно предложениям 1 и 2 $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ соответствует некоторым $\sigma^{\varepsilon} \in (-1, +\infty)$ и $\Pi_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma^{\varepsilon})$ таким, что выполняются (20)–(23) и (24)–(28). Рассмотрим множество $\{(\sigma^{\varepsilon})^+\} \subset \mathbb{R}^+$; у него есть предельная точка ρ_0 в $\overline{\mathbb{R}^+}$. Выберем последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такую, что $\sigma^{\varepsilon_n} \rightarrow \sigma^0$ при $n \rightarrow \infty$; индекс n будем опускать, так

как ниже будет показано, что предел не зависит от выбора подпоследовательности. Рассмотрим отдельно случаи $\rho_0 \in (0, +\infty)$, $\rho_0 = +\infty$ и $\rho_0 = 0$.

а) $\rho_0 \in (0, +\infty)$. Как в [15], из предложения 4 и леммы 5(a), (c) следует, что

$$\Pi_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma^{\varepsilon}) \rightarrow P_{\pm}(\cdot; \rho_0) \quad \text{в } L^{\infty}(\mathbb{R}^+) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (44)$$

где функции $\Pi_{\pm}^{\varepsilon}, P_{\pm}$ продолжены на $\mathbb{R}^+$, как в лемме 5. Аналогично, доопределим $U_{\pm}^{\varepsilon}, U_{\varepsilon}$ в (26) и (40) до непрерывной на $\mathbb{R}^+$ функции без увеличения вариации. Согласно лемме 3(d) $U_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot)$ сходятся к $U_{\pm}(\cdot)$ равномерно на $\overline{I(\rho_0, \rho_{\pm})}$ соответственно. Так как (23) и (43) можно переписать в виде $U_{\pm}^{\varepsilon}((\sigma^{\varepsilon})^+) = U_{\pm}^{\varepsilon}((\sigma^{\varepsilon})^+)$ и $U_{-}(\rho_0) = U_{+}(\rho_0)$ соответственно, находим (43). Из леммы 5 следует, что в случае а) ρ_0 определяется единственным образом по $p(\cdot)$, $\rho_{\pm}$ и $u_{\pm}$.

Далее, согласно лемме 3(c) и (41), (42) имеем $\Xi_{\pm}(\rho_1) \leq \xi_{\pm} \leq U_{-}(\rho_0) = U_{+}(\rho_0) \leq \xi_{+} \leq \Xi_{+}(\rho_2)$ для всех $\rho_1 \in \overline{I(\rho_0, \rho_{-})}$, $\rho_2 \in \overline{I(\rho_0, \rho_{+})}$. Рассмотрим отдельно случаи $\rho_0 > \rho_{+}$, $\rho_0 = \rho_{+}$, $\rho_0 < \rho_{+}$; по лемме 3(e) находим из (44), (24) и (38), что $\rho^{\varepsilon}(\cdot) \rightarrow \rho(\cdot)$ п.в. на $(\xi_{-}, +\infty)$. Аналогично получаем $\rho^{\varepsilon}(\cdot) \rightarrow \rho(\cdot)$ п.в. на $(-\infty, \xi_{+})$, так что сходимость имеет место п.в. на $\xi \in \mathbb{R}$. Следовательно, $u^{\varepsilon}(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ п.в. на $\mathbb{R}$.

б) $\rho_0 = +\infty$. На самом деле, этот случай невозможен. Действительно, для всех $L > 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_{+} - u_{-} &= \int_{\sigma^{\varepsilon}}^{\rho_{+}} \sqrt{\dot{\Pi}_{+}^{\varepsilon}(r; \sigma^{\varepsilon})} \frac{dr}{r} + \int_{\sigma^{\varepsilon}}^{\rho_{-}} \sqrt{\dot{\Pi}_{-}^{\varepsilon}(r; \sigma^{\varepsilon})} \frac{dr}{r} \\ &\leq \int_L^{\rho_{+}} \sqrt{\dot{\Pi}_{+}^{\varepsilon}(r; L)} \frac{dr}{r} + \int_L^{\rho_{-}} \sqrt{\dot{\Pi}_{-}^{\varepsilon}(r; L)} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

для достаточно малых ε согласно лемме 5(d). Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$u_{+} - u_{-} \leq \int_L^{\rho_{+}} \sqrt{\dot{P}_{+}(r; L)} \frac{dr}{r} + \int_L^{\rho_{-}} \sqrt{\dot{P}_{-}(r; L)} \frac{dr}{r}$$

согласно предложению 4 и лемме 3(d). По лемме 6(c) правая часть стремится к $-\infty$ при $L \rightarrow +\infty$, если выполняется (4). Таким образом, $u_{+} - u_{-} = -\infty$, что невозможно.

с) $\rho_0 = 0$. Как и в случае а), имеем (44). Поэтому $\dot{\Pi}_{\pm}^{\varepsilon}(\cdot; \sigma^{\varepsilon}) \rightarrow \dot{P}_{\pm}(\cdot; 0)$ п.в. на $(0, \rho_{\pm})$ соответственно по лемме 3(b). По теореме Фату имеем

$$\begin{aligned} u_{+} - u_{-} &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\rho_{+}} \sqrt{\dot{\Pi}_{+}^{\varepsilon}(r; \sigma^{\varepsilon})} \frac{dr}{r} + \int_0^{\rho_{-}} \sqrt{\dot{\Pi}_{-}^{\varepsilon}(r; \sigma^{\varepsilon})} \frac{dr}{r} \right) \\ &\geq \int_0^{\rho_{+}} \sqrt{\dot{P}_{+}(r; 0)} \frac{dr}{r} + \int_0^{\rho_{-}} \sqrt{\dot{P}_{-}(r; 0)} \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что поскольку случай б) исключен, а в случае а) установлено, что правая часть (45) необходимо превосходит $u_{+} - u_{-}$, предельная точка ρ_0 единственна и конечна. Докажем, что $\rho^{\varepsilon} \rightarrow \rho$, $\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \rightarrow \rho u$ и $\rho^{\varepsilon} (u^{\varepsilon})^2 \rightarrow \rho u^2$ на множестве $\{\xi : \rho(\xi) > 0\}$ и что $\rho^{\varepsilon} \rightarrow 0$, $\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \rightarrow 0$ и $\rho^{\varepsilon} (u^{\varepsilon})^2 \rightarrow 0$ на его дополнении.

Сперва предположим, что (45) выполняется с равенством. Тогда по-прежнему имеем $U_-(0) = U_+(0)$. Более того,

$$\dot{P}(\rho; 0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (46)$$

если имеется состояние вакуума. Действительно, как в доказательстве леммы 3(с), можно показать, что $\Xi_{\pm}(\rho) = u_{\pm} \mp \int_{\rho}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}(r; 0)} \frac{dr}{r} \pm \sqrt{\dot{P}_{\pm}(\rho; 0)}$ монотонны на $(0, \rho_{\pm})$; с другой стороны, $\int_{\rho}^{\rho_{\pm}} \sqrt{\dot{P}_{\pm}(r; 0)} \frac{dr}{r}$ также монотонны и сходятся при $\rho \downarrow 0$. Поэтому существуют пределы при $\rho \downarrow 0$ функций $\sqrt{\dot{P}_{\pm}(\rho; 0)}$ и они равны нулю. Таким образом, $\Xi_-(\rho_1) \leq \xi_- = U_-(0) = U_+(0) = \xi_+ \leq \Xi_+(\rho_2)$ для всех $\rho_1 \in [0, \rho_-]$, $\rho_2 \in [0, \rho_+]$; более того, $\rho(\xi) > 0$ для всех $\xi \neq \xi_- = \xi_+$. Сходимость $\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}$ к ρ, u соответственно п.в. на $\mathbb{R}$ доказывается как в случае а).

Теперь предположим, что в (45) имеет место строгое неравенство. Согласно (46) имеем $\Xi_-(\rho_1) \leq \xi_- = U_-(0) < U_+(0) = \xi_+ \leq \Xi_+(\rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 введены выше. Схожим образом получаем сходимость $\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}$ к ρ, u соответственно п.в. на $(-\infty, \xi_-) \cup (\xi_+, +\infty)$. Отметим, что $\Xi_{\pm}(\rho)$ строго монотонны в точке $\rho = 0$, так как $P_{\pm}(\cdot; 0)$ строго возрастают и $\dot{P}_{\pm}(+0; 0) = 0$. Следовательно, $\rho(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \uparrow \xi_-$ и при $\xi \downarrow \xi_+$. Для достаточно малого ε ρ^{ε} не имеет точек максимума на $\mathbb{R}$, так что для всех $\delta > 0$ находим $\max_{\xi \in [\xi_- - \delta, \xi_+ + \delta]} \rho^{\varepsilon}(\xi) = \max\{\rho^{\varepsilon}(\xi_- - \delta), \rho^{\varepsilon}(\xi_+ + \delta)\}$. Следовательно, $\rho^{\varepsilon} \rightarrow 0$ равномерно на $[\xi_-, \xi_+]$. Кроме того, u^{ε} являются неубывающими на $\mathbb{R}$ функциями для достаточно малых ε , следовательно, они равномерно ограничены; значит, $\rho^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \rightarrow 0$ и $\rho^{\varepsilon} (u^{\varepsilon})^2 \rightarrow 0$ на $[\xi_-, \xi_+]$.

Таким образом, показано, что $(\rho, u)(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет свойствам (i), (iii) определения 3. Кроме того, $(\rho, u)(\pm\infty) = (\rho_{\pm}, u_{\pm})$ согласно (38)–(40). Так как $\rho(\cdot), u(\cdot)$ монотонны на $\pm\infty$, свойство (ii) определения 3 также выполнено.

Список литературы

1. Kim Y.-J. A self-similar viscosity approach for the Riemann problem in isentropic gas dynamics and the structure of solutions // Preprint, Univ. Madison, 1999.
2. Tzavaras A. E. Elastic as limit of viscoelastic response, in a context of self-similar viscous limits // J. Differential Equations. 1995. V. 123. №1. P. 305–341.
3. Tzavaras A. E. Wave interactions and variation estimates for self-similar zero-viscosity limits in systems of conservation laws // Arch. Ration. Mech. Anal. 1996. V. 135. P. 1–60.
4. Калашников А. С. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условий выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 27–30.
5. Тупчиев В. А. Распад произвольного разрыва для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка // ЖВМиМФ. 1964. Т. 4. С. 817–825.
6. Тупчиев В. А. Задача о распаде произвольного разрыва для системы квазилинейных уравнений без условий выпуклости // ЖВМиМФ. 1966. Т. 6. С. 527–547.
7. Тупчиев В. А. О методе введения вязкости при изучении задач с распадом разрыва // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. С. 55–58.
8. Dafermos C. M. Solutions of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method // Arch. Ration. Mech. Anal. 1973. V. 52. №1. P. 1–9.
9. Dafermos C. M. Structure of solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws // Arch. Ration. Mech. Anal. 1974. V. 53. №3. P. 203–217.

10. *Dafermos C. M., DiPerna R.* The Riemann problem for certain classes of hyperbolic systems of conservation laws // J. Differential Equations. 1976. V. 20. P. 90–114.
11. *Dafermos C. M.* Admissible wave fans in nonlinear hyperbolic systems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1989. V. 106. P. 243–260.
12. *Tzavaras A. E.* Viscosity and relaxation approximations for hyperbolic systems of conservation laws // An introduction to recent developments in theory and numerics of conservation laws / ed. D. Kroener et al. Berlin: Springer-Verlag, 1999. P. 73–122.
13. *Slemrod M., Tzavaras A. E.* A limiting viscosity approach for the Riemann problem in isentropic gas dynamics // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38. P. 1047–1074.
14. *Fan H. T.* The structure of solutions of gas dynamic equations and the formation of the vacuum state // Quart. Appl. Math. 1991. V. 49. P. 29–48.
15. *Andreianov B.* The Riemann problem for p -systems with continuous flux function // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1999. V. 8. №3. P. 353–367.
16. *Leibovich L.* Solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of quasilinear equations without convexity conditions // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 45. №3. P. 81–90.
17. *Krejčí P., Straškraba I.* A uniqueness criterion for the Riemann problem // Hiroshima Math. J. 1997. V. 27. №2. P. 307–346.
18. *Hoff D., Smoller J.* Non-formation of vacuum states for compressible Navier–Stokes equations // Comm. Math. Phys. 2001. V. 216. №2. P. 255–276.
19. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. №4. P. 537–566.

Университет Франш-Комте,
Безансон, Франция

Поступила в редакцию
22.11.2001 и 09.10.2002